南京邮电大学 2018/2019 学年第 2 学期

《 概率统计和随机过程 》过程化管理（第二次 A）考试答案

1. 设随机变量 $X \sim B(400,0.8)$，用中心极限定理，计算 $P(X \le 320) \approx$ <u>0.5</u>

2. 设随机变量 $X \sim U(-1,1)$，用切比雪夫不等式，$P(|X| > \varepsilon) \le \underline{\dfrac{1}{3\varepsilon^2}}$

3. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则样本容量为 n 的（σ^2 已知）总体均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限 $\underline{\overline{\mu}=\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha}$

4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，μ,σ^2 已知，则 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \underline{\chi^2(n)}$

5. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 未知，设 $H_0: \mu \le \mu_0 \quad H_1: \mu > \mu_0$ 则检验统计量是 $\underline{t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}}$，拒绝域是 $\underline{t \ge t_\alpha(n-1)}$

6. 设总体 $X \sim \pi(\lambda)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，求 a 的值，使 $\hat{\lambda} = a\overline{X} + (2-3a)S^2$ 是参数 λ 的无偏估计量。

解：$\because X \sim \pi(\lambda) \therefore E(X)=\lambda, D(X)=\lambda$ 从而得 $E(\overline{X})=\lambda, E(S^2)=D(X)=\lambda$

$$E(\hat{\lambda}) = E(a\overline{X}) + (2-3a)E(S^2) = [a+(2-3a)]\lambda = \lambda \therefore a = \frac{1}{2}。$$

7. 设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
p	θ	θ	$1-2\theta$

，其中 θ 是未知参数，对 X 的样本值为 2,1,3,2,1,3，求 θ 的矩估计值与最大似然估计值。

解：(1) $E(X) = 1\times\theta + 2\times\theta + 3\times(1-2\theta) = 3-3\theta, \overline{X}=2$，令 $E(X)=\overline{X}$ 得 $\theta=\dfrac{1}{3}$

令 $E(X)=\overline{X}$，得 θ 的矩估计值：$\theta=\dfrac{1}{3}$

(2)似然函数 $L(\theta)=\theta\cdot\theta\cdot(1-2\theta)\cdot\theta\cdot\theta\cdot(1-2\theta)=\theta^4(1-2\theta)^2$

对数似然函数 $\ln L(\theta)=\theta\cdot\theta\cdot(1-2\theta)\cdot\theta\cdot\theta\cdot(1-2\theta)=4\ln\theta+2\ln(1-2\theta)$

似然方程 $\dfrac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta}=4\dfrac{1}{\theta}+2\dfrac{-2}{1-2\theta}=0$,得 θ 的最大似然估计值:$\theta=\dfrac{1}{3}$。

8.设$X_1,X_2,\cdots,X_5$是来自$X\sim N(0,1)$的简单随机样本，试求常数b，使得

$Y=b\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}\sim t(3)$。

解：$\because X_1,X_2\sim N(0,1)\therefore X_1+X_2\sim N(0,2)\Rightarrow\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$

$\because X_3,X_4,\ X_5\sim N(0,1)\therefore X_3^2+X_4^2+X_5^2\sim\chi^3(3)$

$$\therefore Y=\frac{\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{(X_3^2+X_4^2+X_5^2)/3}}=\sim t(3),\therefore b=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

9.设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2=0.05，抽取样本容量为6 的样本，计算得$\overline{x}=15.06$。求μ 的置信水平为0.95的置信区间。

（$z_{0.05}=1.645,z_{0.025}=1.96,t_{0.05}(5)=2.015,t_{0.025}(5)=2.5706$）

解：因为σ^2=0.05已知，且1-α=0.95,α=0.05,$\dfrac{\alpha}{2}$=0.025

所以μ 的置信水平为0.95的置信区间为（$\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025},\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025}$）。

又$\because\overline{x}=15.06$，$z_{0.025}=1.96\therefore\mu$ 的置信水平为0.95 的置信区间为（14.88,15.24）。

10.已知某切割机在正常工作时，切割每段金属棒的平均长度为10.5,标准差为0.15，抽取15 段金属棒，测得$\overline{x}=10.48,s^2=0.056$,在显著水平$\alpha=0.05$下，问该机切割金属棒长度的标准差有无显著变化？

（$\chi^2_{0.975}(14)=5.629,\chi^2_{0.025}(14)=26.119,\chi^2_{0.95}(14)=6.571,\chi^2_{0.05}(14)=31.319$）

解：设$H_0:\sigma$=0.15　$H_1:\sigma\neq0.15$　即$H_0:\sigma^2$=0.15 ^{2}　$H_1:\sigma^2\neq0.15^2$

检验统计量是 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$ ，

拒绝域是 $\chi^2\geq\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cup\chi^2\leq\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

计算$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\dfrac{14\times0.056}{0.15^2}=34.84$ ，

$\because\alpha=0.05\therefore\dfrac{\alpha}{2}=0.025,1-\dfrac{\alpha}{2}=0.975,n=14,\ \ \chi^2_{0.975}(14)=5.629,\chi^2_{0.025}(14)=26.119$

$\because 34.84>26.119\therefore$ 拒绝H_0

即该机切割金属棒长度的标准差有显著变化。

南京邮电大学 2018/2019 学年第 2 学期

《 概率统计和随机过程 》过程化管理（第二次 B）考试答案

1.设$X\sim B(100,0.02)$,用中心极限定理，计算$P\{X\le 2\}\approx$ <u>0.5</u>

2.设随机变量X服从参数为0.5的指数分布，则$P\{|X-2|\ge 4\}\le$ <u>$\frac{1}{4}$</u>

3.设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，设$H_0:\sigma^2\le\sigma_0^2\quad H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$ 则

检验统计量是 <u>$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$</u> ,拒绝域是 <u>$\chi^2\ge\chi_\alpha^2(n-1)$</u>

4.设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本（μ未知,σ^2已知），则

$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim$ <u>$\chi^2(n-1)$</u>

5.总体$X\sim B$（n,p），$X_1,X_2,\cdots,X_{16}$是来自总体X 的样本，求$D(\bar{X})=$ <u>$\dfrac{np(1-p)}{16}$</u> 。

6.设X_1,X_2,X_3,X_4是来自正态总体$X\sim N(0,1)$的样本，试求出常数b 的值,

使得$Y=\dfrac{1}{5}(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2\sim\chi^2(2)$。

解：$\because X_3,X_4\sim N(0,1)\therefore E(X_3)=E(X_4)=0,D(X_3)=D(X_4)=1$

因为$E[\sqrt{b}(3X_3-4X_4)]=0,D[\sqrt{b}(3X_3-4X_4)]=b[3^2D(X_3)+(-4^2)D(X_3)]=25b$

要$b(3X_3-4X_4)^2\sim\chi^2(1)$，则$\sqrt{b}(3X_3-4X_4)\sim N(0,1)$从而可得：$b=\dfrac{1}{25}$

7.设X_1,X_2,X_3是来自$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本，

$\mu_1=\dfrac{1}{5}X_1+\dfrac{3}{10}X_2+\dfrac{1}{2}X_3,\mu_2=\dfrac{1}{3}X_1+\dfrac{1}{4}X_2+\dfrac{5}{12}X_3,$

试证明μ_1,μ_2都是参数μ的无偏估计量，并比较哪一个更有效。

解：$\because E(\mu_1)=E[\frac{1}{5}X_1+\frac{3}{10}X_2+\frac{1}{2}X_3]$=（$\frac{1}{5}+\frac{3}{10}+\frac{1}{2}$）$\mu$=$\mu$,

$E(\mu_2)=E[\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{5}{12}X_3]$=$[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{12}]\mu$=$\mu$,

$\therefore$ μ_1,μ_2都是参数μ的无偏估计量

$D(\mu_1)=D(\mu_1)=D[\frac{1}{5}X_1+\frac{3}{10}X_2+\frac{1}{2}X_3]$=[（$\frac{1}{5})^2+(\frac{3}{10})^2+(\frac{1}{2})^2]\sigma^2=\frac{19}{50}\sigma^2$

$D(\mu_2)=D[\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{5}{12}X_3]$=[（$\frac{1}{3})^2+(\frac{3}{4})^2+(\frac{5}{12})^2]\sigma^2=\frac{25}{72}\sigma^2$

$\because D(\mu_2)=\frac{25}{72}\sigma^2<D(\mu_1)=\frac{19}{50}\sigma^2$ $\therefore$ μ_2比μ_1更有效。

8.设总体X的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^\theta, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$，其中未知参数$\theta>-1$，求$\theta$的矩估计量与最大似然估计量。

解：(1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x(\theta+1)x^\theta dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}$,

令$E(X)=\overline{X}$,得θ的矩估计量$\theta=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$

(2)似然函数 $L(\theta)=(\theta+1)^n\prod_{i=1}^n x_i^\theta$ （$0<x_i<1$）

对数似然函数$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^n\ln x_i$

似然方程$\frac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta}=n\frac{1}{\theta+1}+\sum_{i=1}^n\ln x_i=0$,得最大似然估计量$\theta=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^n\ln x_i}$。

9.设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，抽取样本容量为11 的样本，计算得$\overline{x}=15.06$，$s^2=0.523$。求σ^2的置信水平为0.90的置信区间。

（$\chi^2_{0.05}(10)=18.307,\chi^2_{0.95}(10)=3.940$，$\chi^2_{0.01}(10)=15.987,\chi^2_{0.90}(10)=4.865$）

解：因为$1-\alpha=0.90,\alpha=0.10,\frac{\alpha}{2}=0.05,1-\frac{\alpha}{2}=0.95$，$n=11,\overline{x}=15.06$，$s^2=0.523$

所以σ^2的置信水平为0.90的置信区间为（$\dfrac{10\times 0.523}{\chi^2_{0.05}(10)},\dfrac{10\times 0.523}{\chi^2_{0.95}(10)}$）。

即σ^2的置信水平为0.90 的置信区间为（0.286,1.327）。

10.已知某厂生产的灯泡寿命$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2未知，现抽取16只灯泡的样本，测得$\overline{x}=1800$，$s=400$，在显著水平$\alpha=0.01$下，能否认为这批灯光的平均寿命为2000小时？（$t_{0.01}(15)=2.60, t_{0.005}(15)=2.95$，$\chi^2_{0.05}(15)=24.996, \chi^2_{0.025}(15)=27.488$）

解：设$H_0:\mu=2000 \quad H_1:\mu\neq 2000$

检验统计量是 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$，拒绝域是 $|t|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

计算$|t|=\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|=\left|\dfrac{1800-2000}{400/\sqrt{16}}\right|=2$ ，

$\because \alpha=0.01 \therefore \dfrac{\alpha}{2}=0.005, t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \ =t_{0.005}(15)=2.95$

$\because 2<2.95 \therefore$ 接受H_0

即可以认为这批灯光的平均寿命为2000小时。