南京邮电大学 2018/2019 学年第 2 学期

《 概率统计和随机过程 》过程化管理（第一次）考试答案

院(系)________________ 班级____________ 学号____________ 姓名____________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得分									

提醒：以下都设 $\bar{X}$ 表示样本均值，S^2 表示样本方差。

得 分

一、填空题（共 42 分，每小题 3 分）

1．设 A,B 为随机事件, $P(A)=0.5, P(A\bar{B})=0.3$，则 $P(AB)=$ <u>0.2</u>

2.设 A,B,C 为随机事件，则事件 A 发生 B 与 C 不发生可表示为 <u>$A\bar{B}\bar{C}$</u>

3.把 10 本不同的书任意放在书架上，则其中指定的 3 本书放在一起的概率是 <u>$\frac{1}{15}$</u>

4．若随机变量 $X \sim N(1,\sigma^2)$，且 $P\{1<X<4\}=0.3$，则 $P\{X \geq 4\}=$ <u>0.2</u>

5．一射手对同一目标独立地进行三次射击，若至少命中一次的概率为 $\frac{26}{27}$，则该射手的命中率为 $p=$ <u>$\frac{2}{3}$</u>

6. 若 $P\{X<x_2\}=1-\beta, P\{X \geq x_1\}=1-\alpha$，其中 $x_1<x_2$ 则 $P\{x_1 \leq X < x_2\}=$ <u>$1-\alpha-\beta$</u> 。

7.某人射击，每次击中目标的概率是 $\frac{3}{4}$。如果射击直到击中目标为止，则射击次数为3的概率为 <u>$\frac{3}{64}$</u>

8. 设 A,B 为随机事件，则 A,B 互不相容是 A,B 对立的 <u>必要但非充分</u> 条件。

9．设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X \sim \pi(\lambda_1)$，$Y \sim \pi(\lambda_2)$，则随机变量 $Z=X+Y \sim$ <u>$\pi(\lambda_1+\lambda_2)$</u>

10．随机变量 X 服从指数分布，且 $E(X)=3$，则 $P\{3 \leq X < 6\}=$ <u>$e^{-1}-e^{-2}$</u>

11．已知随机变量 X 表示10 次独立重复射击命中目标的次数，每次击中目标的概率

$p=0.4$，则 X^2 的数学期望 $E[X^2]=\underline{18.4}$ 。

12. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$ 则 $Y=|X|$ 的概率密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} & y>0 \\ 0 & 其它\end{cases}$

13．设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，其分布函数分别为 $F_X(x)$，$F_Y(y)$，则

$Z=\max(X,Y)$ 的分布函数 $F_Z(z)=\underline{F_X(z)F_Y(z)}$

14. 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别为随机变量 X_1 和 X_2 的分布函数，为使 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$

是某一随机变量的分布函数，则常数 a 与 b 的关系必须满足 $\underline{a-b=1}$

得 分

二.（**8 分**）甲、乙、丙三人各自去破译一个密码，他们能破译的概率分别为 $\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$。试求密码能译出的概率。

解：用 A,B,C 分别表示甲、乙、丙破译一个密码，A,B,C 独立

用 D 表示"密码能译出"，则 $D=A\cup B\cup C$

$P(D)=P(A\cup B\cup C)$ （2 分）

$=1-P(\overline{A\cup B\cup C})$ （2 分）

$=1-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})$ （2 分）

$=1-(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{3})=\frac{3}{5}$ （ 2 分）

得 分

三.（**8 分**）设二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(6-x-y) & 0\le x\le 2, 2\le y\le 4 \\ 0 & 其它\end{cases},$$

求概率 $P\{X+Y\le 4\}$。

解：$P\{X+Y\le 4\}=\iint\limits_{x+y\le 4} f(x,y)dxdy$ （2 分）

$=\int_0^2 dx\int_2^{4-x}\frac{1}{8}(6-x-y)dy$ （2 分）

$$=\frac{1}{8}\int_0^2[(6-x)(2-x)-\frac{(4-x)^2}{2}+\frac{1}{4}]dx$$ （2 分）

$$=\frac{2}{3}$$ （2 分）

得 分

四.（12 分）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & 0<x<y \\ 0 & 其它 \end{cases}$

解：(1) 随机变量(X, Y)关于 X 和 Y 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$；

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^{+\infty} e^{-y}dy & x>0 \\ 0 & x\le 0\end{cases}=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & x\le 0\end{cases}$$ （3 分）

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{y} e^{-y}dy & y>0 \\ 0 & y\le 0\end{cases}=\begin{cases} ye^{-y} & y>0 \\ 0 & 其它\end{cases}$$ （3 分）

(2) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{y} & 0<x<y \\ 0 & 其它\end{cases}$$ （3 分）

(3) 判断随机变量 X 与 Y 是否相互独立？ （请说明理由）

因为 $f(x,y)\neq f_X(x), f_Y(y)$，所以随机变量 X 与 Y 不独立。 （3 分）

得 分

五.（10 分）设二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为

Y \ X	-1	0	1
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

解：(1)求随机变量(X, Y)关于 X 和 Y 的边缘概率分布律；

X	-1	0	1
$p_{i\bullet}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

，（2 分）

Y	-1	0	1
$p_{\bullet j}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

（2 分）

(2) 计算 $E(X),E(XY),COV(X,Y)$

$E(X)=(-1)\times 0.375+0\times 0.25+1\times 0.375=0$,同理 $E(Y)=0$。

$COV(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$　　（3 分）

(3)验证 X 与 Y 是不相关的。（请说明理由）

$E(X^2)=(-1)^2\times 0.375+0^2\times 0.25+1^2\times 0.375=0.75$， $D(X)=0.75$。同理 $D(Y)=0.75$

因为 $COV(X,Y)=0$,所以 $\rho_{XY}=COV(X,Y)/\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=0$,所以 X 与 Y 是不相关。

（3 分）

得　分

六.（10 分）设随机变量，且 $X\sim N(1,3^2)$　$Y\sim N(0,4^2)$ 且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-\dfrac{1}{2}$，设 $Z=\dfrac{X}{3}+\dfrac{Y}{2}$，求 Z 的数学期望 $E(Z)$ 与方差 $D(Z)$ 。

解：由题设可知：$E(X)=1,D(X)=3^2,E(Y)=0,D(Y)=4^2$　　（2 分）

$E(Z)=E(\dfrac{X}{3})+E(\dfrac{Y}{2})=\dfrac{1}{3}$　　（3 分）

$D(Z)=D(\dfrac{X}{3})+D(\dfrac{Y}{2})+2\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}COV(X,Y)$

$=\dfrac{1}{9}D(X)+\dfrac{1}{4}D(Y)+\dfrac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=3$　　（5 分）

得　分

七.（10 分）设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，且都在 $(0,1)$ 服从均匀分布，求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$。

解：**方法 1：**联合概率密度 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1,0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$　　（1 分）

随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度: $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$

(1) 当$z<0$时, $f_z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}0dx=0$　　（2 分）

(2) 当$0<z<1$时, $f_z(z)=\int_0^z 1dx=z$　　（2 分）

(3) 当$1\le z\le 2$时, $f_z(z)=\int_{z-1}^1 1dx=2-z$　　（2 分）

(4) 当$z>2$时, $f_z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}0dx=0$　　（2 分）

所以 $$f_Z(z)=\begin{cases} z & 0<z\le 1 \\ 2-z & 1<z<2 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$ （1 分）

方法 2： 显然当$z<0$时,$F_z(z)=P(X+Y\le z)=0$ （1 分）

当$0\le z<1$时,$F_Z(z)=P(X+Y\le z)=\dfrac{z^2}{2}$ （2 分）

当$1\le z<2$时,$F_Z(z)=P(X+Y\le z)=1-\dfrac{(2-z)^2}{2}$ （2 分）

当$z>2$时,$F_z(z)=P(X+Y\le z)=1$ （2 分）

所以，X+Y 的分布函数为

$$F(z)=\begin{cases} 0 & z\le 0 \\ \dfrac{z^2}{2} & 0<z<1 \\ 1-\dfrac{(2-z)^2}{2} & 1\le z<2 \\ 1 & z\ge 2 \end{cases}$$ （1 分）

所以，X+Y 的概率密度函数为

$$f(z)=\frac{dF(z)}{dz}=\begin{cases} z & 0<z\le 1 \\ 2-z & 1<z<2 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$ （2 分）