Satz (von Euler)

$$\vec{h} = \vec{s} + 2(\vec{s} - \vec{m})$$

Beweis

z.z. $\vec{h} = 3\vec{s} - 2\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 2\vec{m}$

genauer: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 2m$ liegt auf jeder Höhe

Höhe durch c: $\langle a-b, x\rangle = \langle a-b, c\rangle$

$$\langle a-b, a+b+c-2\vec{m}\rangle = \underbrace{\langle a-b, a+b\rangle - \langle a-b, 2\vec{m}\rangle}_{=0} + \langle a-b, c\rangle$$

Satz (von Feuerbach):

Das Dreieck abc mit s, h, m

1)

Def.:

Feuerbach-Kreis geht durch Seitenmitte

habe Mittelpunkt f

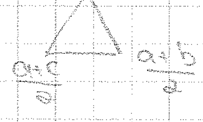
1) $\vec{f} = \frac{\vec{h} + \vec{m}}{2}$

2) Radius d. Feuerbachkreises ist die Hälfte des Umkreisradius

3) $\frac{h+a}{2}$, $\frac{b+h}{2}$, $\frac{h+c}{2}$

4) Fußpunkt der Höhen auch

Beweis

1) K ist Umkreis von  *

$$\Rightarrow 2\left\langle \frac{a+c}{2} - \frac{b+c}{2}, f\right\rangle = \left\langle \frac{a+c}{2} - \frac{b+c}{2}, \frac{a+b+2c}{2}\right\rangle$$

$\overset{\shortparallel}{\langle a-b, f\rangle}$

* Lege so, dass $\vec{s} = \vec{0} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

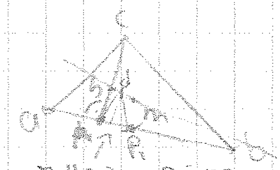
$$= -\frac{1}{4}\underbrace{\langle a-b, a+b\rangle}_{2\langle a-b, m\rangle} = \langle a-b, -\frac{m}{2}\rangle$$

$\overset{\text{Symmetrie}}{\Rightarrow} f = -\frac{m}{2}$

$\frac{1}{2}(h+m) \overset{\text{Euler}}{=} \frac{1}{2}(-m) = f$

2,3) $\rightsquigarrow \bar{U}$

4)



Mitte zw grünen Punkt und roten Punkt

Projiziere E auf die Gerade ab.
Dann liegt das Bild von f in der Mitte zu Seitenmittelpunkt und Fußpunkt der Höhe

$\Rightarrow \| f - \frac{a+b}{2} \| = r_{F\text{-Kreis}} = \| f - h_c \|$

$\Rightarrow h_c$ liegt auf dem F-Kreis.

Kapitel II - Der Raum $\mathbb{R}^3$

Elemente $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ wie in $\mathbb{R}^2$: Addition, skalare M.

Def

$a \in \mathbb{R}^3$: 1) $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

2) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

3) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig $\vec{b} = t\vec{a}$ oder $\vec{a} = t\vec{b}$

linear unabhängig $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ nicht linear abhängig

Rechenregeln

1) $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$

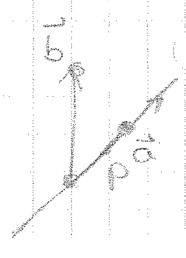
2) $\langle a + b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle$ (Bilinearität)

3) $\langle \lambda a, b \rangle = \lambda \langle a, b \rangle$

4) $\langle a, a \rangle = \|\vec{a}\|^2$

Satz

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ $(\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0})$, $\vec{p} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\|^2} \cdot \vec{a}$ ist der



eindeutig bestimmte Punkt auf $\mathbb{R}\vec{a}$ mit minimalem

Abstand zu $\vec{b}$:

$$\|\vec{b}\|^2 = \|\vec{p}\|^2 + \|b-p\|^2$$

Bew:

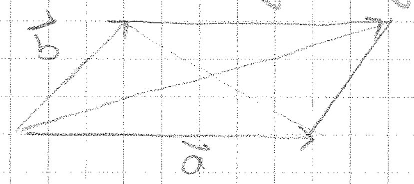
$$\|t\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \langle ta-b, ta-b\rangle$$
$$= t^2\langle a,a\rangle - 2t\langle a,b\rangle + \langle b,b\rangle$$
$$= \left(t\langle a,a\rangle - \frac{\langle a,b\rangle}{\langle a,a\rangle}\right)^2 + \langle b,b\rangle - \frac{\langle a,b\rangle^2}{\langle a,a\rangle^2}$$

Minimum: $t = \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{\|\vec{a}\|^2}$ ergibt den Wert $\|b\|^2 - \frac{\langle a,b\rangle^2}{\|\vec{a}\|^2}$

$$\cos\varphi = \frac{\text{Ankath.}}{\text{Hypoth.}} = \frac{\|p\|}{\|b\|} = \frac{\frac{1}{\|a\|}\cdot\langle a,b\rangle}{\|\vec{b}\|} = \frac{\langle a,b\rangle}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}$$

Definiere $0° \leq \angle(a,b) \leq 180°$: $\langle a,b\rangle = \|a\|\cdot\|b\|\cdot\cos\varphi$

Satz (Parallelogrammgesetz)



$$\|\vec{a}+\vec{b}\| + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$$

Beweis

$$\langle a+b, a+b\rangle + \langle a-b, a-b\rangle = 2\langle a,a\rangle + 2\langle b,b\rangle$$

2.2 Geraden und Ebenen

Def

Gerade: $\vec{b} + \mathbb{R}\vec{a}_{\neq\vec{0}}$

Ebene: $\vec{c} + \mathbb{R}\vec{a} + \mathbb{R}\vec{b}$

$x_1 = c_1 + \lambda a_1 + \mu b_1$

$x_2 = c_2 + \lambda a_2 + \mu b_2$

$x_3 = c_3 + \lambda a_3 + \mu b_3$

$d = \langle \vec{n}, \vec{x}\rangle = \langle \vec{n}, \vec{c}\rangle + \lambda\langle \vec{n},\vec{a}\rangle + \mu\langle \vec{n}, b\rangle$

$\Rightarrow \langle n, \vec{a}\rangle = 0 = \langle \vec{n}, \vec{b}\rangle$

gesucht Normalenvektor

Def

$\vec{a},\vec{b} \in \mathbb{R}^3 \quad a\times\vec{b} = (a_2b_3-a_3b_2, a_3b_1-a_1b_3, a_1b_2-a_2b_1)$

Rechenregeln

$\langle\vec{a},\vec{a}\times b\rangle = a_1a_2b_3-a_1a_3b_2+a_3b_1a_2-a_2a_1b_3+a_3a_1b_2-a_3a_2b_1=0$

analog $\langle\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}\rangle=0$

$\langle\vec{a}\times\vec{a}\rangle=0$

Rechenregeln

$(\vec{a}\times\vec{b})=-(\vec{b}\times\vec{a})$

$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

$t(\vec{a}\times\vec{b})=(t\vec{a})\times b=\vec{a}+(t\vec{b})$

$\langle\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}\rangle=\langle\vec{b},\vec{c}\times\vec{a}\rangle=\langle\vec{c},\vec{a}\times\vec{b}\rangle$

Satz

1) $\vec{a},\vec{b}$ lin. abhängig $\Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=0$

b) $E: \vec{c}+\mathbb{R}\vec{a}+\mathbb{R}b$ ist genau die Lösungsmenge der Gleichung $\langle a\times b,x\rangle=\langle a\times b,c\rangle$

Beweis

1) „$\Leftarrow$" $\vec{a}\times\vec{b}=0$ z.B $a_1\neq0$

$\underline{z.z.}$: $\vec{b}=t\vec{a}$

$t:=\frac{b_1}{a_1}$

3. Komponent von $\vec{a}\times\vec{b}$ ist $0 \Rightarrow b_2=\frac{b_1}{a_1}a_2$

„$\Rightarrow$" $\vec{a}\times t\vec{a}=t(\vec{a}\times\vec{a})=0$

2) $\vec{x}=\vec{c}+\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$

$\langle\vec{a}\times\vec{b},c+\lambda\vec{a}+\vec{b}\mu\rangle=\langle a\times b,c\rangle+\lambda\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{a}\rangle+\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\rangle$

geg:

$\langle\vec{a}\times\vec{b},\underbrace{\vec{x}-\vec{c}}\rangle=0$

$(a_2b_3-a_3b_2)y_1+(a_3b_1-a_1b_3)y_2+\underbrace{(a_1b_2-a_2b_1)}_{z.B\neq0}y_3=0$

$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$

$$y_3 = \frac{1}{a_2 b_1 - a_1 b_2}\left[(a_2 b_3 - a_3 b_2)(\lambda a_1 + \mu b_1) + (a_3 b_1 - a_1 b_3)(\lambda a_2 + \mu b_2)\right]$$

$$y_3 = \lambda \cdot \frac{a_1 a_2 b_3 - a_1 a_3 b_2 + a_2 b_3 a_1 - b_1 a_3 b_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}$$

$$+ \mu \frac{b_1 a_2 b_3 - b_1 b_2 a_3 + b_2 a_3 b_1 - b_2 a_1 b_3}{a_2 b_1 - a_1 b_2}$$

$$= \lambda a_3 + \mu b_3$$

Insgesamt: $\vec{y} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = \vec{c} + \lambda a + \mu \vec{b}$

Satz:

$l: \vec{b} + \mathbb{R}\vec{a}$. l lässt sich beschreiben durch $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{a} \times \vec{b}$

<u>Bew.</u>:

$$a \times (\vec{b} + t\vec{a}) = \vec{a} \times \vec{b} + t \underbrace{\vec{a} \times \vec{a}}_{0} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Wenn $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{a} \times \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \times (\vec{x} - \vec{b}) = \vec{0}$

$\overset{\text{Satz}}{\Rightarrow} \vec{x} - \vec{b} = t\vec{a}$ für ein $t \in \mathbb{R}$

2.3 Gleichungssysteme I

<u>Bsp.</u>:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 8 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 11 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \end{array}\right)$$

- addiere zu einer Gleichung eine Linearkombination der anderen
- vertausche zwei Gleichungen
- multipliziere mit $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$

<u>Bsp</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ -1 \\ -2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & -4 & -8 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \\ \\ \frac{1}{5} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \\ \\ -1 \;\; 2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

2.4 Determinanten

Def

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$: $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c} \times \vec{a} \rangle = \langle \vec{c}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle$

$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ Falls $\vec{a} \times \vec{b} \neq 0$ ($\Leftrightarrow$ linear unabh.)

$\vec{o} \in E$ genau dann wenn $\vec{o}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ liegen in Ebene

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{cases} a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \; * \\ -b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + b_2(a_1c_3 - a_3c_1) - b_3(a_1c_2 - a_2c_1) \; ** \\ c_1(a_2b_3 - a_3b_2) - c_2(a_1b_3 - a_3b_1) + c_3(a_1b_2 - b_1a_2) \end{cases}$$

$\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

* Entwicklung der Determinante nach d. 1. Zeile

** Entwicklung der Determinante nach d. 2. Zeile

$$\begin{cases} a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) \; * \\ \end{cases}$$

* Entwicklung d. Determinante nach d. 1. Spalte

2.

3.

$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - \ldots)$ $\quad \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$

$\|a \times b\|^2 = \langle a, b \rangle = \|a\|^2 \cdot \|b\|^2$

$\|a \times b\| = \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) \cdot \|a\| \cdot \|b\|$

$\det(a, b, c) = \langle a, b \times c \rangle = \langle b, c \times a \rangle = \langle c, a \times b \rangle = -\det(a, c, b)$

Satz (Rechenregeln)

$\det(a + a', b, c) = \det(a, b, c) + \det(a', b, c)$

$\det(\lambda a, b, c) = \lambda \det(a, b, c)$

$\det(a, b, c) = -\det(b, a, c)$

$\det(a, a, b) = 0$

2.5 Durchschnitte

Satz

$l: \vec{b} + \mathbb{R}\vec{a}$. $\quad E: \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = c$

Ist $\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle \neq 0 \Rightarrow l \cap E$ ein Punkt

Ist $\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle = 0 \Rightarrow \ell \parallel E$ oder $\ell \subset E$

zu 1)

$\langle \vec{n}, b + t a \rangle = c \Leftrightarrow t \langle n, a \rangle = c - \langle n, b \rangle$ □

wenn $\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle = 0 \Rightarrow$ entweder $\ell \cap E = \emptyset$ oder $\ell \subseteq E$

2) $\vec{a}$ sei Normalenvektor von E_1

$\vec{b}$ " " " E_2

$E_1 \cap E_2$ ist Geraden mit Richtung $\vec{a} \times \vec{b}$. Sonst $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

zu 2)

$\vec{a} \times \vec{b} \neq 0 \overset{(\text{oBdA})}{\Rightarrow} a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$

$E_1 : \langle a, x \rangle = \alpha \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 = \alpha - a_3 x_3$

$E_2 : \langle b, x \rangle = \beta \quad b_1 x_1 + b_2 x_2 = \beta - b_3 x_3$

Setze $x_3 = t \cdot \Delta$

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} \alpha - t a_3 \Delta & a_2 \\ \beta - t b_3 \Delta & b_2 \end{pmatrix}}{\Delta} \quad \text{(Cramerregel)}$$

$$= t(-a_3 \Delta b_2 + a_2 b_3 \Delta) + \beta' + \alpha'$$

$$\alpha' + t(a_3 b_2 - a_2 b_3) = \frac{a' \cdot \Delta^2}{\Delta}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} + t(\vec{a} \times \vec{b})$$

3) $\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = \alpha \quad \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle = \beta \quad \langle \vec{c}, \vec{x} \rangle = \gamma$

$E_1 \cap E_2 \cap E_3$ ist ein Punkt $\Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$

zu 3) $\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle \neq 0 \Rightarrow b \times c \neq 0$

$E_1 \cap E_3$ ist Gerade mit Richtungsvektor $b \times c$.

$\langle a, b \times c \rangle \neq 0 \Rightarrow \ell \cap E_1$ ist ein Punkt

Sonst Durchschnitt leer, eine Gerade, eine Ebene.

Außerdem: $\det(a, b, c) \cdot \vec{x} = \alpha(\vec{b} \times \vec{c}) + \beta(\vec{c} \times \vec{a}) + \gamma(a \times b)$

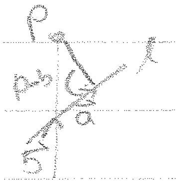
DENN $\det(a, b, c) \cdot \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = \alpha \langle a, b \times c \rangle + 0 + 0$

$\Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = \alpha$

Analog E_1, E_2

2.6 Abstand, Fläche, Volumen

Satz



1) Abstand von p zu $\ell: \vec{b} + \mathbb{R}\vec{a}$ ist gegeben durch:

$$\frac{1}{\|\vec{a}\|} \cdot \|\vec{a} \times (\vec{p} - \vec{b})\|$$

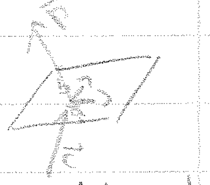
zu 1)

Schon bekannt $\|ta\| = \frac{|\langle \vec{a}, \vec{p} - \vec{b} \rangle|}{\|\vec{a}\|}$

$$(\text{Abstand})^2 = \|p-b\|^2 - \frac{\langle a, p-b \rangle^2}{\|a\|^2} = \|p-b\|^2 - \frac{1}{\|a\|^2}\left(\|a\|^2 \cdot \|p-b\|^2 - \|a \times (p-b)\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{\|a\|^2} \|a \times (p-b)\|^2$$

2) Abstand $\vec{p}$ zu E, $\vec{c} + \mathbb{R}\vec{a} + \mathbb{R}\vec{b}$: $\frac{1}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} |\det(p-c, a, b)|$



zu 2) $\det(p-c, a, b)$ unabhängig von $\vec{c}$

$$\langle p-c, a \times b \rangle = \underbrace{\|p-c\|}_{\text{minimal?}} \cdot \|a \times b\| \cdot \cos\sphericalangle(p-c, a \times b)$$

und für dies c: $\|p-c\| = \frac{\det(p-c, a, b)}{\|a \times b\|}$

$\vec{p} - \vec{c} \parallel a \times b$

$(\Leftrightarrow) \; \vec{p} - \vec{c} \perp \vec{a}$

3) Abstand $\vec{p}$ zu E: $\langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = d \in \mathbb{R}$: $\frac{1}{\|\vec{n}\|} |\langle \vec{n}, \vec{p} \rangle - d|$, $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$

Sei E in Parameterform $c + \mathbb{R}c + \mathbb{R}b$ gegeben.

$\langle a \times b, x \rangle = \langle a \times b, c \rangle = d$

$|\det(p-c, b)| = |\langle p-c, a \times b \rangle| = |\langle p, a \times b \rangle - d|$

4) $\ell_1: b + \mathbb{R}a \quad \ell_2: d + \mathbb{R}c$

Abst: $\frac{1}{\|a \times c\|} \cdot |\det(d-b, a, c)|$

zu 4) Minimum $\|\vec{b} + t\vec{a} - \vec{d} + s\vec{c}\| \quad t, s \in \mathbb{R}$

$= \text{Abstand von } b-d \text{ zu } E: \mathbb{R}a + \mathbb{R}c$

Satz

1) $\|a \times b\|$ ist die Fläche des von a und b aufgespannten Parallelogramms.

Beweis

$\|a\times b\| = \|a\|\cdot\|b\|\cdot \sin\sphericalangle(a,b)$

2)

$|\det(a,b,c)|$ = Volumen des Parallelotops, das von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannt wird.

$\{\lambda a + \mu b + \gamma c, 0 \leq \mu, \gamma, \lambda\}$ Parallelotop

zu 2:

$\|\vec{b}\times c\|$ ist Fläche des Grundparallelogramms (nach 1)

$\cos\varphi = \frac{b}{\|a\|} \Rightarrow$ Volumen $= \|a\|\cdot\|b\times c\|\cdot\cos\varphi$

$= \langle \vec{a}, \vec{b}\times\vec{c}\rangle$ □

2.7. Lineare Abbildungen und Matrizen

Def

$A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heißt linear, wenn für alle $a,b \in \mathbb{R}^3$ und $x,y \in \mathbb{R}$: $A(x\vec{a}+y\vec{b}) = xA(\vec{a}) + yA(\vec{b})$

Bildvektoren $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \vec{a}_1$, $A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \vec{a}_2$, $A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \vec{a}_3$ beliebig vorgebbar.

$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3$ ist linear. $A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$

$$A(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{31}a\,x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

Bem:

Mit A, B ist $A\circ B$ linear

$(A\circ B)(x\vec{a}+y\vec{b}) = A(xB\vec{a} + yB\vec{b}) = xAB\vec{a} + yAB\vec{b}$

$$(A\circ B)\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{Matrix}}\underbrace{\begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 \\ b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 \end{pmatrix}}_{\text{Vektor}}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \dots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} + b_{31} & \dots \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{23} + b_{31} & \dots \\ \dots & \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Matrix der $A \cdot B$ beschreibt den Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte gg durch das Skalarprodukt der i-ten Zeile von A und der j-ten Spalte von B.

Bsp:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 11 \\ 4 & 9 & 5 \\ 9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Satz (Determinantenmultiplikationssatz)

$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

Beweis

$$(b_{12} \vec{a}_1 + b_{22} \vec{a}_2 + b_{32} \vec{a}_3) \times (b_{13} \vec{a}_1 + b_{23} \vec{a}_2 + b_{33} \vec{a}_3)$$

$$\left.\begin{aligned} = &(b_{12} b_{23} - b_{22} b_{13}) (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \\ + &(b_{22} b_{33} - b_{32} b_{23}) (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) \\ + &(b_{32} b_{13} - b_{12} \quad (\vec{a}_3 \times a_1) \end{aligned}\right\}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} b_{11} (b_{12} b_{23} - b_{32} b_{22}) \\ b_{21} (b_{32} b_{13} - b_{12} b_{33}) \\ \end{matrix}}_{\det B} \overbrace{\begin{matrix} (\vec{a}_1 (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)) \\ (\vec{a}_2 (\vec{a}_3 \times \vec{a}_1)) \\ (\vec{a}_3 (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)) \end{matrix}}^{\det A}$$

Satz

$A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear.

A surj. $\Leftrightarrow$ A injektiv.

Beweis

$A\vec{x} = \vec{b}$

A surj. $\Leftrightarrow$ System lösbar für alle $\vec{b}$.

A inj. $\Leftrightarrow$ Lösung eindeutig

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow$

Vor: $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bijektiv, linear. $A\vec{a}_i = \vec{e}_i$

$B: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3$

$A \cdot B = \mathrm{Id}$

Satz

A^{-1} ergibt sich, indem (A/E) mit Zeilenoperationen (E/B) transformiert wird. ?

Bsp.:

$$\begin{array}{c} \\ -1 \\ +3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{array}{c} +2 \\ \\ +2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 9 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \begin{array}{c} +7 \\ \\ +4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 16 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 16 & 7 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.9 Adjunkte Matrix und Cramersche Regel

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} & a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & \dots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

besteht aus 2×2-Unterdeterminanten

gesucht: $A \cdot A^{ad} = (\det A) \cdot E$

$$\Rightarrow A^{ad} = \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} & \cdots \\ a_{23}a_{31} - a_{33}a_{32} & \cdots \\ \vdots & \end{pmatrix} \quad (\hat{A})^T = A^{ad}$$

$$\Rightarrow A \cdot A^{ad} = \det(A)\, E$$

Def

Die Transponierte Matrix A^T zu A hat in der i-ten Zeile und j-ten Spalte den Eintrag von A aus der j-ten Zeile und i-ten Spalte.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Def

Eintrag von A^{ad} in der i-ten Zeile und j-ten Spalte ist gleich $(-1)^{i+j}$ mal die (2×2)-Determinante, die man aus A durch Streichen der j-ten Zeile und i-ten Spalte erhält.

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \quad A^{ad} = \begin{pmatrix} -3 & -9 & -2 \\ -11 & 2 & 16 \\ -10 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad A \cdot A^{ad} = \begin{pmatrix} -35 & 0 & 0 \\ 0 & -35 & 0 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix}$$

Satz

$$A \cdot A^{ad} = \det(A) \cdot E$$

Korollar

$$\det A \neq 0: A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{ad}$$

$$A\vec{x} = b \qquad \det A \neq 0 \qquad \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Cramersche Regel: $A_i(\vec{b})$ sei A, wobei i-te Spalte von $A(\vec{b})$ ist $\vec{b}$, ansonsten stimmen $A(b)$ und A überein.

$A\vec{x} = \vec{b}$ hat genau eine Lösung wenn $\det A \neq 0$.

$$x_i = \frac{\det A_i(b)}{\det A}$$

Beweis

$X_2 = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_3 & 1 \end{pmatrix}$; $\det X_2 = x_2$; geg: $A\vec{x} = \vec{b}$

$$AX_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix} = A_2(\vec{b})$$

Nach Determinantenmultiplikationssatz:

$$\det A \cdot \underbrace{\det X_2}_{x_2} = \det A_2(\vec{b}) \qquad 2 \curvearrowright i$$

2.10 Basis und Basiswechsel

Def

1) Tripel von Vektoren $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ heißt Basis, wenn es für jeden Vektor $\vec{a}$ genau ein Tripel (x_1, x_2, x_3) von Zahlen gibt mit $\vec{a} = x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3$. Die Zahlen x_1, x_2, x_3 heißen Koordinaten von $\vec{a}$ bzgl. $\mathcal{B}$.

2) Die Basis $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ mit $e_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ heißt Standardbasis von $\vec{a}$ bzgl. B.

Zur Koordinatenberechnung: $\underbrace{x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3}_{= B\vec{x}} = \vec{a}$ lösen.

d.h. die Koordinaten von A bzgl. $\mathcal{B}$ sind gegeben durch

$B(\vec{x}) = \vec{a} \Leftrightarrow \vec{x} = B^{-1}(\vec{a})$

$\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3) \qquad B^{-1}(\vec{a}) = \vec{x}$

Satz

$\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, $\mathcal{C} = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ Basen von $\mathbb{R}^3$

$B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$ analog C.

$A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear.

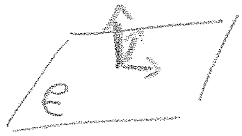
$A_{\mathcal{C}} = B^{-1}AC$

Beweis

In der 1./i. Spalte von $A C$ steht das Bild von c_1/c_i.

$\Rightarrow$ 1./i. Spalte von $B^{-1} A C$ aus den Koordinaten von $A\vec{c_1}/\vec{c_i}$ bzgl. B.

Bsp: $E: x_1 + x_2 + x_3 = 0$



$\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$_B A_B = B^{-1} A B$

$A = B \; _B A_B \; B^{-1}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{_B A_B} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}}_{B^{-1}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Def

$B = (\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}) : \|\vec{b}\| = 1$ und $i = 1,2,3$ $\langle b_i, b_j \rangle = 0 \quad (i \neq j)$

"Orthonormalbasis"

$\vec{x} = x_1 \vec{b_1} + x_2 \vec{b_2} + x_3 \vec{b_3} \qquad \langle x_i, b_i \rangle = x_i$

Satz

Ist $\vec{b_1}$ Vektor: $\|\vec{b_1}\| = 1$, so gibt es $\vec{b_2}, \vec{b_3}$, sodass $(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3})$

Orthonormalbasis

Beweis

Sei $\vec{b_2}$. $\|\vec{b_2}\| = 1$ in der Ebene $\langle \vec{b_1}, \vec{x} \rangle = 0$

$b_3 = b_1 \times b_2$

Satz

$A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear, $A \neq 0$ gibt es Basen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$, sodass

${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{C}}$ eine der Formen $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ annimmt.

Beweis

$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$

1. Fall $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ Basis $\quad \mathcal{B} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ $\quad \mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$A\vec{e}_1 = \vec{a}_1$, $\quad {}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Fall $\quad a_1, a_2$ linear unabhängig. $a_3 = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2$

$\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3 - x_1 \vec{e}_1 - x_2 \vec{e}_2)$

$\mathcal{B} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_1 \times \vec{a}_2)$

${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A\vec{c}_3 = Ae_3 - x_1 Ae_1 - x_2 Ae_2 = \vec{0}$

3. Fall:

$a_1 \neq \vec{0}$, $\vec{a}_2 = x\vec{a}_1$ $\quad \vec{a}_3 = x\vec{a}_1$

$\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2 - x_1 \vec{e}_1, \vec{e}_3 - x_2 \vec{e}_1)$

$\mathcal{B} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2', \vec{a}_3')$

${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{C}} = ($

2.11. Bewegungen

Def

$A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heißt Bewegung, wenn $\|A(\vec{a}) - A(\vec{b})\| = \|\vec{a} - \vec{b}\|$, $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

Ist $A(\vec{0}) = \vec{0}$, so nennen wir A orthogonal.

Satz

A ist orthogonal, wenn A linear ist und $A \cdot A^T = E$

Beweis Eine lineare Abbildung erfüllt:

1) Längenerhaltend $\Leftrightarrow$ Skalarprodukterhaltend

$-2\langle a, b\rangle = \|a-b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2 = \|A(a) - A(b)\|^2 - \|A(a)\| - \|A(b)\| = -2\langle A(a), A(b)\rangle$

„$\Rightarrow$"

$\vec{a}_i := A(e_i)$ ist Orthonormalbasis

$x \in \mathbb{R}^3$ $\quad A(x) = y_1 \vec{a}_1 + y_2 a_2 + y_3 a_3 \quad y_i = \langle A(x), a_i\rangle = \langle A(x), A(e_i)\rangle$

$\langle x, e_i\rangle = x_i$

Es folgt A ist linear.

$A \cdot A^T$ hat Eintrag (i, j) i-te Zeile von A j-te Zeile von A gleich

$\langle a_i, a_j\rangle \to A \cdot A^T = E$

„$\Leftarrow$"

$A \cdot A^T = E \quad A(e_i) = a_i \quad a - b = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \|A(a) - A(b)\| = \|x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3\|^2$

$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|a-b\|^2$

Satz

Es gibt eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$, sodass ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}$ die Gestalt $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

Falls links oben $+1$. A Drehung mit Drehwinkel φ, bestimmt durch durch die Spur $(1 + 2\cos\varphi)$.

Falls links oben -1. Drehspiegelung $-1 + 2\cos\varphi$

Def

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \mathrm{Spur}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

Bsp

$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad 1 + 2\cos\varphi = 2 \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60°$

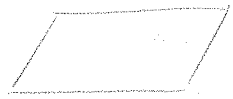
nachrechnen: $A \cdot A^T = E$

Drehachse $(a_{23} - a_{32}, a_{31} - a_{13}, a_{12} - a_{21})$

~~Bsp~~:

$e_i \to \pm e_i$ 1x Minus   Spiegelung an Ebene

2x Minus   180° Drehung um e_i



Beweis

1\. Fall: $A = A^T \Rightarrow A^2 = E \Rightarrow (A+E)(A-E) = 0$

Es gibt $\vec{v}$: $A\vec{v} = \vec{v}$ oder $A\vec{v} = -\vec{v}$

Ohne Einschränkung $\|v\| = \|-v\| = 1$

Sei $\mathcal{E}$ die senkrechte Ebene $\{\vec{x} \mid \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = 0\}$ $A(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$

$\Rightarrow$ A ist entweder Drehung in $\mathcal{E}$ oder Spiegelung, etwa an $\vec{e_2}$

dann $e_i \to \pm e_i$

2\. Fall:

$A - A^T$

$$= \begin{pmatrix} 0 & a_{12}-a_{21} & a_{13}-a_{31} \\ a_{21}-a_{12} & 0 & a_{23}-a_{32} \\ a_{31}-a_{13} & a_{21}-a_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{23}-a_{32} \\ a_{31}-a_{13} \\ a_{12}-a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Av = A^T v \Rightarrow A^2 v - v = 0 \Rightarrow (A+E)(A-E) = 0$

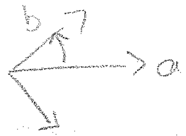
Es gibt v mit $Av = v$ oder $Av = -v$

Satz (Fortsetzung)

Wenn Drehung, dann Achse $\begin{pmatrix} a_{23}-a_{32} \\ a_{31}-a_{13} \\ a_{12}-a_{21} \end{pmatrix}$

~~Bsp~~: $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ Winkel 60°   Achse $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 60 & -\sin 60 \\ 0 & \sin 60 & \cos 60 \end{pmatrix}$

$\left| \begin{pmatrix} \cos 60 & -\sin 60 \\ \sin 60 & \cos 60 \end{pmatrix} \right| = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$ $\begin{cases} +1 \text{ Drehung} \\ -1 \text{ Spiegelung} \end{cases}$



$\det(\vec{a}, \vec{b})$ $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$

$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \sin(\sphericalangle a, b) \cdot \|a\| \cdot \|b\|$

Def

$a, b \in \mathbb{R}^2$ positiv orientiert, wenn $\det(a, b) > 0$

negativ " $\det(a, b) < 0$

Def $a, b, c \in \mathbb{R}^3$

$\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ positiv orientiert, wenn $\det(a,b,c) > 0$

negativ orientiert, wenn $\det(a,b,c) < 0$

positiv orientierte Basis kann nicht stetig in negativ orientierte Basis verändert werden. ("Basen zerfallen in 2 Klassen")

Angenommen $\underbrace{(a_t, b_t, c_t)}_{\text{Basis zu jeder Zeit } t}$ $t \mapsto 0$ a, b, c

$\Rightarrow \det(a_t, b_t, c_t)$ ändert Vorzeichen nicht

wenn $\det(a,b,c) > 0$ dann stetig deformierbar um $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

$\mathbb{R}^2$

Bem.:

Wenn $\mathcal{B}$ positiv orientiert $\Rightarrow$ lässt sich stetig in $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ überführen

Beweis

Nimm eine Familie invertierbarer 2×2-Matrizen A_t $(0 \le t \le 1)$

$A_0 = E$ $\quad A_1 a = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ $\lambda > 0$

Multipliziere mit $\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & \\ & \lambda \end{pmatrix}$.

Insgesamt $a \mapsto \vec{e}_1$.

Drehe nun b über Zwischenlagen b_t in Richtung $\vec{e}_2$.

Multipliziere Endlage $\vec{b}_1$ mit $\frac{1}{\|b_1\|}$.

Angenommen $\mathcal{B}_t$ wäre stetige Deformation von positiv zu negativ orientiert, dann gäbe es eine Zwischenlage $\mathcal{B}_t$:

$\det(a_t, b_t, c_t) = 0$ $\lightning$ zur Basiseigenschaft

Bem:

Wenn $\det(a,b,c) > 0 \Rightarrow \mathcal{B}$ lässt sich in die Standardbasis deformie

Beweis

$\det(a \times b, a, b) = \|a \times b\|^2 > 0$

$c = x_1 (a \times b) + x_2\, a + x_3\, b$

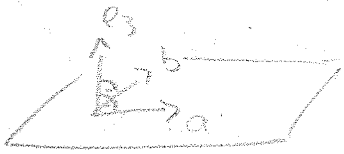
$c_t = x_1 (\vec{a} \times \vec{b}) + (1-t) x_2 \vec{a} + (1-t) x_3 \vec{b}$

$c_0 = c \qquad c_1 = x_1 (a \times b) \quad x_1 > 0$

Beachte $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_t$ ist Basis (zu jeder Zeit)

Re-Skalieren $\leadsto \vec{c} \mapsto \vec{a} \times \vec{b}$

Drehmatrizen A_t drehen $\vec{a} \times \vec{b}$ in e_3



Danach $\vec{a} = (a_1, a_2, 0)$ $\vec{b} = (b_1, b_2, 0)$ $\vec{c} = \vec{e}_3$.

Dann wie im $\mathbb{R}^2$ $a \mapsto e_1$ und $b \mapsto \vec{e}_2$.

aus Ana I bzw. Elementarmathematik

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind Körper

Def

K ist Körper (field), wenn $0, 1 \in \mathbb{K}$ verschieden und „+", „·", sodass

für alle $a, b, c, \in \mathbb{K}$

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$
2. $a+b = b+a$
3. $a+0 = a$
4. $\forall a \in \mathbb{K} \; \exists \; -a : a+(-a) = 0$
5. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
6. $a \cdot b = b \cdot a$
7. $a \cdot 1 = a$
8. $a \cdot a^{-1} = 1$ sofern $a \neq 0$
9. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

Bsp:

- $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
- $\mathbb{K} = \{-1, 0, 1\}$

+	1	0	-1
1	-1	1	0
0	1	0	-1
-1	0	-1	1

·	0	1	-1
0	0	0	0
1	0	1	-1
-1	0	-1	1

$\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$ endlicher Körper

Schreibweise

$a + (-b) = a - b \qquad a \cdot b^{-1} = \frac{a}{b}$

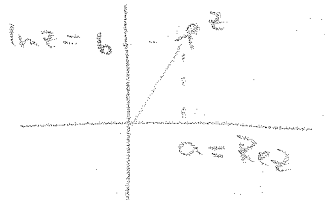
$0 \cdot a \overset{3}{=} (0+0) \cdot a \overset{9}{=} 0 \cdot a + 0 \cdot a$

Beh: $b + c = c \overset{!}{\Rightarrow} b = 0$

DENN: $b = b + (c + (-c)) = (b+c) + (-c) = c + (-c) = 0$

Insgesamt folgt: $0 \cdot a = 0$

$\mathbb{K} = \mathbb{C} \ni z = a + bi \quad a, b \in \mathbb{R}$



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\operatorname{Arg} z = \angle(1, z)$

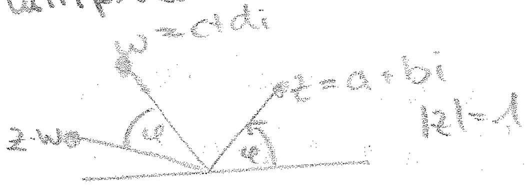
„+" komponentenweise　　„·" $(a+bi)(c+di) = (ac - db) + i(bc + ad)$

neutrale Element d. Multiplikation:

$$z = a + bi$$
$$\bar{z} = a - bi$$
$$z\bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$$

Addition:

Multiplikation:



$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{mit } \binom{a}{b}]{\text{Multiplikation}} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Satz
Bei der Multiplikation komplexer Zahlen werden die Beträge multipliziert und die Winkel addiert.

Korollar (de Moivre).
$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$

Def
Ein Polynom in z mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ ist ein Ausdruck der Form $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad a \in \mathbb{K}$.

Bsp
$z^n = a$

Satz
$a \in \mathbb{C}$: Die Gleichung $z^n = a$ hat genau n Lösungen in $\mathbb{C}$.

Bsp $x^2 = -1$ keine Lösung in $\mathbb{R}$
$i, (-i)$ als Lösung in $\mathbb{C}$.

Satz

Gegeben $a \in \mathbb{C}$. Dann hat die Gleichung $z^n = a$ genau n Lösungen in $\mathbb{C}$.

$n=2$. $a = \alpha + i\beta$ $\quad r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ $\quad z^2 = a$

Winkelhalbierende:

$$z_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{r+\alpha}{2}} + \sqrt{\frac{r-\alpha}{2}}\, i\right) \qquad z_1^2 = \frac{r+\alpha}{2} - \frac{r-\alpha}{2} + 2i\sqrt{\frac{r^2-\alpha^2}{4}}$$

$$= \alpha + i\beta = a$$

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = \left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)$$

$\frac{p^2}{4} - q > 0$ (nur so in den reellen Zahlen lösbar)

Satz

$p, q \in \mathbb{C}$. Dann gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. $x^2 + px + q = (x-\alpha)(x-\beta)$

kubische Gleichung hierauf zurückführbar.

$$x^3 = px + q \Rightarrow x = u + \frac{p}{3u} \qquad u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ („erstmal" zurück" – polynome lösbar)

Vektorraum über K

Def

Ein K-Vektorraum V ist eine Menge:

- $\vec{0} \in V$
- für je 2 $\vec{v}, \vec{w} \in V$ ist $\vec{v} + \vec{w}$ erklärt und $v \in V, \lambda \in K$: $\lambda v \in V$

1. $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
2. $(\vec{v} + \vec{w}) + u = \vec{v} + (w + u)$
3. $v + 0 = v$
4. für jedes $v \in V$ gibt es $x \in V$: $v + x = 0$
5. $1 \cdot v = v$
6. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda u + \lambda v$
7. $(\lambda + \mu) v = \lambda v + \mu v$
8. $(\lambda \cdot \mu) v = \lambda \cdot (\mu v)$

Bem.:

1) K-Vektorraum abgekürzt mit VR

2) negativer Vektor $(-v)$

Der negative Vektor ist eindeutig: $v+w=0 \Rightarrow w = w + (v + (-v)) = 0 + (-v)$
$= -v$

Bsp.:

1) $K^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a \in K \right\}$ mit $+$: $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$

$\lambda \in K$: $\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$

2) $(m \times n)$-Matrizen $K^{m \times n}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & \cdots & b_{1n}+a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Bem

Für eine Matrix gibt es abkürzende Schreibweise: (a_{ij})

i-te Zeile, j-te Spalte steht a_{ij}.

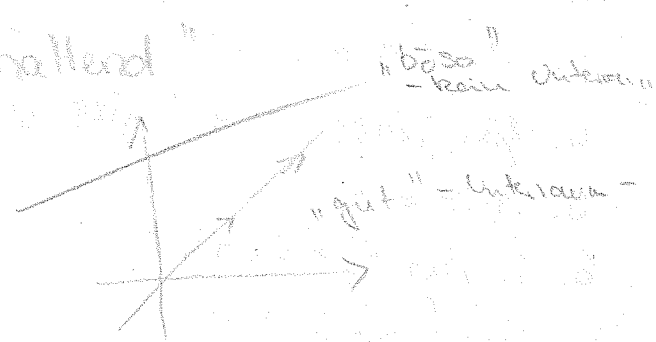
Def

V: K-VR. $U \subset V$ heißt K-Unterraum, wenn $0 \in U$ und aus

$a, b \in U$: $a + b \in U$, $\lambda \cdot a \in U$ für alle $\lambda \in K$

Schreibweise $U \leq V$

„U inventhalten + strukturerhaltend"



Bsp

- $U = \{0\}$ $U = V$
- in $\mathbb{R}^2$: Geraden durch den Ursprung
- in $\mathbb{R}^3$: Ebenen durch den Nullpunkt

alle Unterräume vom Typ $\{0\}$, Gerade, Ebene, $\mathbb{R}^3$

$- \mathbb{C}^2: \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

Def

V ist K-VR.

$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n) \quad \underbrace{x_1 \vec{b}_1 + \dots + x_n \vec{b}_n}_{\text{Linearkombination}} \quad x \in \mathbb{K}$

1) $\mathcal{B}$ heißt Erzeugendensystem von V, wenn es für jedes $v \in V$ Zahlen $x_1, \dots x_n$ gibt, sodass $v = x_1 \vec{b}_1 + \dots + x_n \vec{b}_n$.

2) $(b_1, \dots, b_n)$ heißt linear unabhängig, wenn aus $x_1 b_1 + \dots + x_n b_n = \vec{0}$ folgt $x_1 = \dots = x_n = 0$

lineare Abhängigkeit $\Leftrightarrow$ $\exists$ nichttriviale Lösung d. Linearkombination

Bsp:

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; w = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow w - 2v = \vec{0}$ linear abhängig

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Angenommen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 0 = x_2$

3) $\mathcal{B}$ heißt Basis, wenn $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem und linear unabhängig ist.

Def

$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ Basis. Dann heißt n Dimension von V.

Vz.z. n bei allen Basen gleich $\rightarrow$ später

$v \in V$, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ Basis. Dann ist die Linearkombination

$v = x_1 \vec{b}_1 + \dots + x_n \vec{b}_n$ eindeutig.

$v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n$

$\Rightarrow (x_1 - y_1) b_1 + \dots + (x_n - y_n) b_n = 0 \Rightarrow x_1 = y_1 \dots, x_n = y_n$

Bsp

$K^n: \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad K^{m \times n} = ($ E_{ij}: Matrix, die in der i-ten Zeile und j-ten Spalte einen Eintrag 1 hat, sonst 0 $)$

Satz

V, W zwei K-VR. Die direkte Summe $V \oplus W := \{(v,w) \mid v \in V, w \in W\}$ und komponentenweise Addition und Skalarmultiplikation.

Beweis (exemplarisch)

$(0_V, 0_W) + (v,w) = (0_V + v, 0_W + w) = (v,w)$

$(v,w) + (-v,-w) = (0_V, 0_W)$ usw.

Bsp:

$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

Basisauswahlsatz

$(b_1, \dots, b_n)$ ein Erzeugendensystem von V

$\Rightarrow$ es gibt $c_1, \dots, c_s \in \{b_1, \dots, b_n\}$: $(c_1, \dots, c_s)$ ist Basis

Beweis (mit Minimalitätsargument)

Sei s minimal so dass s der b_i V erzeugen $\rightsquigarrow c_1, \dots, c_s$

Annahme $c_1, \dots, c_s$ lin. abhängig: $x_1 c_1 + \dots + x_s c_s = 0$

aber nicht alle Koeffizienten sind 0, z.B. $x_s \neq 0$

$$\Rightarrow c_s = -\frac{1}{x_s}(x_1 c_1 + \dots + x_{s-1} c_{s-1})$$

$$v \in V: v = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_s c_s = \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_s x_1}{x_s}\right) c_1 + \left(\lambda_2 - \frac{\lambda_s}{x_s} x_2\right) c_2$$

$$+ \dots + \left(\lambda_{s-1} + \frac{\lambda_s x_{s-1}}{x_s}\right) c_{s-1} \quad ↯ \quad \square$$

Austauschsatz von Steinitz

Sei $(a_1, \dots, a_k)$ linear unabhängig. $(b_1, \dots, b_n)$ Erzeugendensystem.

Dann ist $k \leq n$ und es gibt $c_{k+1}, \dots, c_n \in \{b_1, \dots, b_n\}$:

$(a_1, \dots, a_k, c_{k+1}, \dots, c_n)$ den VR V erzeugen.

Beweis (durch vollständige Induktion)

$k=0$ („Die Aussage ist trivial")

Schritt von k auf $(k+1)$:

Induktionsannahme $\Rightarrow \exists\, c_{k+1}, \dots, c_n \in \{b_1, \dots, b_n\}$, sodass

$(a_1, \dots a_{k-1}, c_k, \dots c_n)$ erzeugen V.

$a_k = \lambda a_1 + \dots + \lambda_{k-1} a_{k-1} + \mu_k c_k + \dots + \mu_n c_n$. Beachte: μ_i sind nicht alle Nu[ll]
z.B $\mu_k \neq 0$

$$c_k = \frac{1}{\mu_k}\left(a_k - \lambda_1 a_1 - \dots - \lambda_{k-1} a_{k-1} - \mu_{k+1} c_{k+1} - \dots - \mu_n c_n\right)$$

$\Rightarrow k \leq n$

$$v \in V: \; v = x_1 a_1 + \dots + x_{k-1} a_{k-1} + x_k c_k + \dots + x_n c_n$$
$$= \left(x_1 - x_k \frac{\lambda}{\mu_k}\right) a_1 + \dots + \left(x_{k-1} - x_k \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\right) a_{k-1} + \frac{x_k}{\mu_k} a_k +$$
$$\left(x_{k+1} - \frac{x_k \mu_{k-1}}{\mu_k}\right) c_{k+1} + \dots +$$

$\Rightarrow (a_1, \dots a_k, c_{k+1}, \dots, c_n)$ erzeugen V

Korollar (Wohldefiniertheit einer Basis eines Vektorraums)

Je zwei endliche Basen haben gleiche Mächtigkeit.

Beweis

$(a_1, \dots, a_k)$ und $(b_1, \dots, b_n)$ zwei Basen $\xRightarrow{\text{Steinitz}} n \leq k,\; k \leq n \Rightarrow k = n$

Korollar

$\dim(V) = n \quad (a_1, \dots, a_n)$ linear unabhängig $\Rightarrow$ Basis

$(b_1, \dots, b_n)$ als Erzeugendensystem $\Rightarrow$ Basis

Beweis

$(a_1, \dots, a_n)$ linear unabhängig. $(b_1, \dots, b_n)$ Erzeugendensystem

$\xRightarrow{\text{Steinitz}}$ $(a_1, \dots, a_n)$ erzeugen, also Basis.

Ist $(b_1, \dots, b_n)$ Erzeugendensystem. Wende Basiswechselsatz an.
Auswahl von n Elementen aus $(b_1, \dots, b_n) \Rightarrow$ Basis

Basisergänzungssatz
$(a_1, \dots a_n)$ linear unabhängig.
$(b_1, \dots b_n)$ Ergänzungssystem, so gibt es $a_{k+1} \dots a_n \in \{b_1, \dots b_s\}$,
sodass $(a_1, \dots, a_s)$ Basis ist.

Beweis
Ohne Einschränkung ist $(b_1, \dots, b_n)$ Basis, $\dim V = n$
Austauschsatz $\Rightarrow$ Es gibt $n-k$ Elemente $a_{k+1}, \dots, a_n \in \{b_1, \dots b_n\}$,
sodass $(a_1, \dots, a_n)$ erzeugen V
$\Rightarrow (a_1, \dots, a_n)$ Basis

Bsp
$\mathbb{R}^4$ $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ergänze zu Basis!

$\dim \mathbb{R}^4 = 4$.
linear abhängig? $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 b_1 + x_2 b_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0$

Beh:
(b_1, b_2, e_3, e_4) ist Basis.
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 \end{pmatrix}$$

(b_1, b_2, e_3, e_4) ist Basis, weil linear unabhängig.