

# Lineare Algebra und Geometrie 1 WS 12-13

Dozent:  
Dr. Cynthia Hog-Angeloni

Mitschrift von:  
Sven Bamberger, Bernadette Mohr

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>Xarbeit von:  
Sven Bamberger, Bernadette Mohr

Zuletzt Aktualisiert:  
5. März 2013



## Zusammenfassung:

<http://www.mathematik.uni-mainz.de/Members/dhanke/linearealgebrai2012/lineare-algebra-und-geometrie-i-im-ws-2012-13>

**Raum:** Mo S1 & Fr S1

**Uhrzeit:** 08:00-10:00 & 12:00-14:00

**Abgabe:** Freitag 12:00



Dieses Skript wurde erstellt, um sich besser auf die Klausur vorzubereiten und eine ordentliche und für alle Personen lesbare Mitschrift zu haben.

Dieses Dokument garantiert weder Richtigkeit noch Vollständigkeit, da es aus Mitschriften gefertigt wurde und dabei immer Fehler entstehen können. Falls ein Fehler enthalten ist, bitte melden oder selbst korrigieren und neu hochladen.

Hier kleine Notizen zu einzelne Besonderheiten dieses Dokumentes.

1. /\* \*/ alles zwischen diesen Zeichen sind Kommentare und sollen zum tieferen Verständnis dienen oder besondere Fragestellungen darstellen. Dabei ist zu beachten, das die Notation nicht immer komplett korrekt ist. Es können also kleinere mathematische Fehler auftauchen, welche aber für das Verständnis nicht relevant sind.



# Inhaltsverzeichnis



# 0 Grundbegriffe

## 0.1 Aussagen

Aussage	w	f
Wasser ist nass	x	
A. Merkel ist Bundeskanzlerin	x	
Röckler wäre gern Bundeskanzler	?	?
Ein Kaninchen ist eine Pflanze		x
Ein Dreieck hat vier Ecken		x
Jede gerade Zahl größer 2 ist Summe zweier Primzahlen - Goldbach Vermutung	?	?
Wenn 2012 Frauenüberschuss bei Matheprofessorinnen herrscht, dann ist die Erde eine Scheibe	x	

Für „ $A \Rightarrow B$  ist wahr.“ sagt man auch  
 $A$  ist hinreichend für  $B$ .  
 $B$  ist notwendig für  $A$ .

$\neg A$ = nicht $A$		$A \vee B$ = $A$ oder $B$				
$A \wedge B$ = $A$ und $B$		$A \Leftrightarrow B$ = $A$ ist äquivalent zu $B$				
$A$	$B$	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

### 0.1.1 Satz:

$A, B, C$  seien Aussagen. Folgende Aussagen sind wahr: „Tautologie“ (Der Beweis wird durch die Wahrheitstafel erbracht)

$A$	$\neg A$	$A \vee \neg A$	$\neg(A \vee \neg A)$	$\neg(\neg A)$
w	f	w	w	w
f	w	w	w	f

- $A \vee (\neg A)$
- $\neg(A \wedge \neg A)$
- $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$  z.B.  $A$  = Die Sonne scheint  $B$  = Es ist bewölkt
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$  z.B.  $A$  = Wasser ist trocken  $B$  = Es ist Sommer
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$   $A$  = Es blitzt  $B$  = es donnert
- $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$
- $A \Rightarrow B \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$
- $[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
- $A \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $A \vee (B \wedge C) \Rightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

4 und 5 sind die De Morgan'sche Gesetze. 7 Ist der Modus ponens, 8 Modus tollens und die 9 Modus barbara (=Transitivität)

## 0.2 Mengen

### 0.2.1 Definition: (Cantor)

Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohl unterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseren Denkens zu einem Ganzen

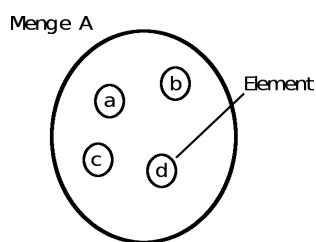


Abbildung 0.1: Eine einfache Menge

$$a \in A \quad a \notin A \Leftrightarrow \neg(a \in A)$$

### 0.2.2 Definition:

$A, B$  Mengen

1.  $A \subset B \quad \forall x \in A \Rightarrow x \in B$
2.  $A \subsetneq B \quad (A \subset B) \wedge (A \neq B)$
3.  $A = B \quad A \subset B, \quad B \subset A$
4.  $\emptyset \quad \emptyset \subset A \quad \forall \text{ Mengen } A$
5.  $|A| = \#A \quad \text{Anzahl der Elemente}$   
 $|A| < \infty \quad A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

#### Bemerkung:

$$\{1, 2, 1\} = \{1, 2\}$$

#### Beispiel:

$$\{1, 2, \{1, 2\}, \{1, 2\{1, 3\}\}\}$$

gegeben Menge  $M$ ,  $A = \{x \in M | x \text{ spricht italienisch}\} = \{x | (x \in M) \wedge x \text{ spricht italienisch}\}$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\} \quad \mathbb{Z}_{\geq 0} = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid b \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z} \right\} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = c \cdot b$$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}$  hat die Ordnung  $a > b$  wenn  $a$  rechts von  $b$  auf dem Zahlenstrahl liegt.

$$a \geq b : a > b \vee a = b$$



### 0.2.3 Definition: (von weiteren Operationen auf Mengen)

$A, B$  seien Mengen

**Durchschnitt:**  $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$  wenn  $A \cap B = \emptyset$  „disjunkt“  $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x | x \in A \text{ für alle } i\}$

**Vereinigung:**  $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\} \bigcup_{i \in I} A_i = \{x | x \in A \text{ für mindestens ein } i\}$

**Komplement von  $B$  in  $A$ :**  $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$

**symmetrische Differenz:**  $A \triangle B = \{A \setminus B \cup B \setminus A\} = \{x | x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$

**Potenzmenge**  $P(A) = \{B | B \subset A\}$ : Beispiel:  $A = \{1, 2, 3\}$   $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

**kartesisches Produkt:**  $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$

Beispiel:  $A = \{a_1, a_2\}, B = \{b_1, b_2\}$

$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2)\}$

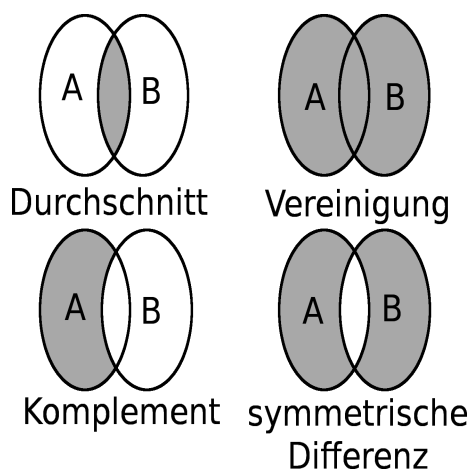


Abbildung 0.2: Darstellung von Operationen auf Mengen

### 0.2.4 Definition: (Relation)

Eine Relation zwischen zwei Mengen  $A$  und  $B$  ist eine Teilmenge  $R \subset A \times B$ . Wenn  $A = B$  „Relation auf Menge  $A$ “

**Beispiel:**

$A$  : Personen       $B$  : Städte       $R$  : bereits bereist

a)  $(\text{Martin}, \text{London}), (\text{Susi}, \text{Madrid}) \in A \times B$

b)  $A = \{1, 2, 3, 4\}$

1.  $R \subset A \times A$   $R = \{(1, 3), (2, 1)\}$

2.  $S \subset A \times A$   $S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$  (Gleichheitsrelation)

3.  $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$   $R = \{(a, b) | a < b\}$  (Ordnungsrelation)

4.  $B = \{3, 4, 5, 6\}$   $R = \{(3, 3), (4, 4)\} \subseteq A \times B$

5. Teilerrelation auf  $\mathbb{N}$   $R = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{N} \text{ und } a|b\}$  wobei  $(a|b \Leftrightarrow^{\text{definiert}} b = n \cdot a, n \in \mathbb{N})$

### 0.2.5 Definition: (Funktion, ~Abbildung)

$f : A \rightarrow B$  heißt Funktion, wenn  $R \subset A \times B$  Relation, bei der jedem Element aus  $A$  genau einem Element aus  $B$  entspricht, sodass  $(a, b) \in R$ .

Schreibweise  $f(a) = b$   $f : a \mapsto b$

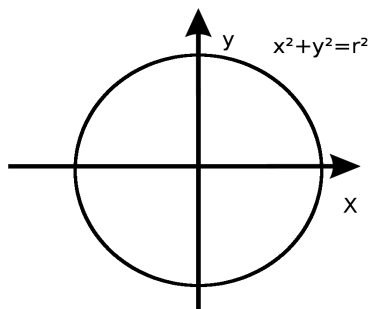


Abbildung 0.3: Graphenkreis

Jeder Graph ist eine Relation, aber nicht unbedingt eine Funktion.

$f : A \rightarrow B$  Funktion:

$A$  heißt Definitionsbereich von  $f$

$B$  heißt Wertebereich von  $f$

$a \in A$  heißt Argument von  $f$

$X \subset A$   $f(X) = \{b \in B | \exists a \in X \text{ mit } f(a) = b\}$  heißt Bildmenge von  $X$  unter  $f$

$Y \subset B$   $f^{-1}(Y) = \{a \in A | f(a) \in Y\}$  heißt Urbild von  $Y$

#### Beispiel:

$f : A \rightarrow A, f(a) = a$  identische Abbildung

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

### 0.2.6 Definition: (injektiv, surjektiv, bijektiv)

- injektiv  $\forall x \neq y \in A$  gilt  $f(x) \neq f(y)$
- surjektiv  $\forall b \in B \exists a \in A f(a) = b$
- bijektiv: injektiv und surjektiv
  - injektiv  $\Leftrightarrow \forall b \in B$  gilt  $|f^{-1}(b)| \leq 1$  (Jedes  $b$  hat höchstens ein Urbild)
  - surjektiv  $\Leftrightarrow \forall b \in B$  gilt  $|f^{-1}(b)| \geq 1$  (Jedes  $b$  hat mindestens ein Urbild)
  - bijektiv  $\Leftrightarrow \forall b \in B$  gilt  $|f^{-1}(b)| = 1$  (Jedes  $b$  hat genau ein Urbild)

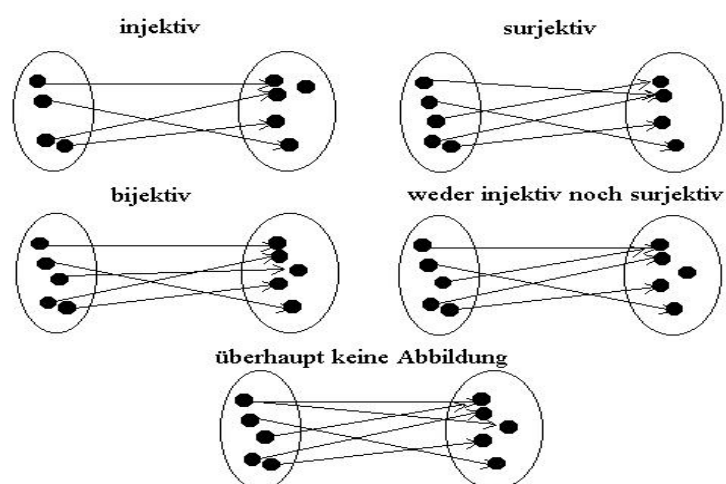


Abbildung 0.4: Mögliche Abbildungen auf einen Blick



# 1 Der Raum $\mathbb{R}^2$

## 1.0.7 Definition:

Ein Vektor  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  ist ein Element von  $\mathbb{R}^2$ .

Entspringt der Vektor in  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  = „Ortsvektor“.

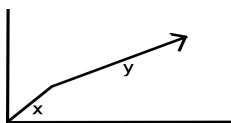


Abbildung 1.1: Beispielhafte Vektoraddition

$$x = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Addition:  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$

Multiplikation mit Skalar:  $\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$

Eigenschaften:  $a, b, c$  Vektoren  $\lambda, \mu$  reelle Zahlen

1.  $\lambda \cdot (a + b) = \lambda a + \lambda b$

2.  $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$

3.  $(a + b) + c = a + (b + c)$

4.  $a + b = b + a$

exemplarischer Beweis:

$$(\lambda + \mu)a = (\lambda + \mu) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu)a_1 \\ (\lambda + \mu)a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu a_1 \\ \lambda a_2 + \mu a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu a_1 \\ \mu a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda a + \mu a$$

## 1.0.8 Definition: (Basis)

ein Paar von Vektoren  $\mathcal{B} = (a, b)$  heißt Basis von  $\mathbb{R}^2$ , wenn es für jeden Vektor  $c$  in  $\mathbb{R}^2$  genau ein Paar  $(x, y)$  von Zahlen gibt, sodass  $c = x \cdot a + y \cdot b$ .

$x$  und  $y$  heißen Koordinaten von  $c$  bzgl.  $\mathcal{B}$ .

Die Basis  $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$   $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

## 1 Der Raum $\mathbb{R}^2$

### Beispiel:

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

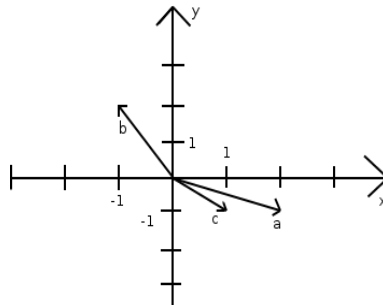


Abbildung 1.2: Mehrere Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \checkmark \text{kanonische Basis}$$

### 1.0.9 Definition: (Determinante)

$$\det(a, b) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

## 1.1 Cramersche Regel

Das Gleichungssystem  $xa + yb = c$  hat die eindeutige Lösung  $x = \frac{\det(c, b)}{\det(a, b)}$  und  $y = \frac{\det(a, c)}{\det(a, b)} \Leftrightarrow \det(a, b) \neq 0$ .

### Beweis:

„ $\Rightarrow$ “  $\checkmark$

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $\det(a, b) \neq 0$ .

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases} = \begin{cases} a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2 \\ a_2 b_1 x + b_1 b_2 y = c_2 b_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\det(c, b)}{\det(a, b)}$$

analog  $y = \frac{\det(a, c)}{\det(a, b)} \Rightarrow$  Eindeutigkeit

$$\text{Existenz: } a_1 \frac{\det(c, b)}{\det(a, b)} + b_1 \frac{\det(a, c)}{\det(a, b)} = c_1$$

$$\Leftrightarrow a_1(c_1 b_2 - c_2 b_1) + b_1(a_1 c_2 - a_2 c_1) = c_1 \det(a, b)$$

$$\Leftrightarrow a_1 c_1 b_2 - b_1 a_2 c_1 = c_1(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (w)}$$

**Korollar:**

$B = (a, b)$  ist Basis genau dann, wenn  $\det(a, b) \neq 0$  ist  $\det(a, b) = 0$  und  $(x, y)$  Lösung, so auch  $(x + \lambda b_2, y - \lambda a_2)$  denn  $a_1(x + \lambda b_2) + b_1(y - \lambda a_2) = \underbrace{a_1x + b_1y}_c + \lambda \underbrace{(a_1b_2 - b_1a_2)}_0$

**Korollar:**

$\det(a, b) = 0 \Rightarrow$  Es gibt entweder keine oder unendliche viele Lösungen.

## 1.2 Geraden

### 1.2.1 Definition: (Gerade)

Eine Gerade  $l$  in  $\mathbb{R}^2$  ist eine Menge der Form  $l = a + \mathbb{R}b = \{a + \lambda b | \lambda \in \mathbb{R}\}$  für  $b \neq (0)$

$a$  : „Stützvektor“     $b$  : „Richtungsvektor“,     $b^\perp = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \end{pmatrix}$  : „Normalenvektor“

**Beispiel:**

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

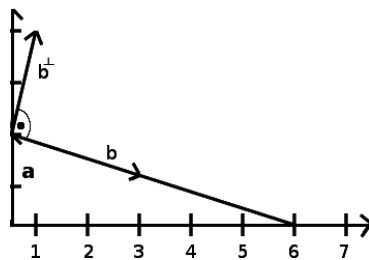


Abbildung 1.3: Gerade mit orthogonalen Vektor

### 1.2.2 Satz 1.2

Eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  ist eine Gerade genau dann, wenn sie Lösungsmenge einer Gleichung

$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \alpha x + \beta y = \gamma \right\}$  ist.  $\alpha$  und  $\beta$  nicht beide Null.

**Beweis:**

$$l = a + \mathbb{R}b$$

Dann erfüllt jeder Punkt  $(a_1 + tb_1, a_2 + tb_2)$  die Gleichung  $b_2a_1 - b_1a_2 = b_2x - b_1y$ .

DENN:  $b_2(a_1 + tb_1) - b_1(a_2 + tb_2) = b_2a_1 - b_1a_2 = \det(a, b)$  Erfüllt umgekehrt  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  die Gleichung  $\alpha x + \beta y = \gamma$

und ist  $\alpha \neq 0$ , dann folgt  $x = \frac{-\beta}{\alpha}y + \frac{\gamma}{\alpha}$ .

Also ist  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  ein Punkt der Geraden  $a + \mathbb{R}b$  mit  $a = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$

**Beispiel:**

$$x - y = 1 \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

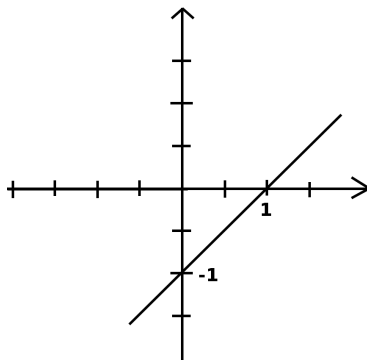


Abbildung 1.4: Beispiel zu Satz 1.2

### 1.3 Lineare Abbildungen

$A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  heißt linear, wenn für jedes  $a, b \in \mathbb{R}^2$  gilt:  $A(x\vec{a} + y\vec{b}) = xA(\vec{a}) + yA(\vec{b})$

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  können beliebig vorgegeben werden. Andererseits ist  $A$  durch diese bestimmt.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}}_{(2 \times 2)\text{-Matrix}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \end{pmatrix} = xa + by$$

Eigenschaft: Die erste Spalte von  $A$  ist der Bildvektor von  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Beispiel:**

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  repräsentiert die identische Abbildung.

**Satz:**

sind  $A, B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  linear, so auch die Verknüpfung  $A \circ B$ .

**Beweis:**

$$A(B(xa + yb)) = A(xB(a) + yB(b)) = xAB(a) + yAB(b)$$

Komposition linearer Abbildungen:



$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

$$A \circ B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 x_1 + d_1 x_2 \\ c_2 x_1 + d_2 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 c_1 x_1 + a_1 d_1 x_2 & b_1 c_1 x_1 + b_1 d_1 x_2 \\ a_2 c_1 x_1 + a_2 d_1 x_2 & b_2 c_1 x_1 + b_2 d_2 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 c_1 + c_2 b_1 & a_1 d_1 + b_1 d_2 \\ a_2 c_1 + c_2 b_2 & a_2 d_1 + b_2 d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 c_1 + b_1 c_2 & a_1 d_1 + b_1 d_2 \\ a_2 c_1 + b_2 c_2 & a_2 d_1 + b_2 d_2 \end{pmatrix}$$

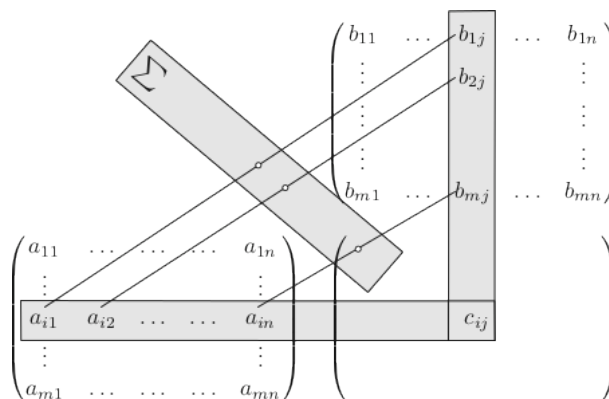


Abbildung 1.5: Schema der Matrixmultiplikation

Matrixmultiplikation entspricht Komposition von Abbildungen  
 Sie ist im Allgemeinen nicht kommutativ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 2 & 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 23 & 46 \end{pmatrix}$$

**Satz:**

Matrixmultiplikation ist assoziativ.

**Beweis:**

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Interpretiere  $A, B, C$  als Abbildungen

$$A \circ (B \circ C)(a) = A \circ B(C(a)) = A(B(C(a)))$$

$$(A \circ B) \circ C(a) = (A \circ B)C(a) = A(B(C(a)))$$

**Satz:**

$A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  lineare Abbildungen

$A$  ist injektiv  $\Leftrightarrow A$  ist surjektiv

**Beweis:**

$$Ax = b$$

Existenz von  $x \Leftrightarrow$  Surjektivität

Eindeutigkeit von  $x \Leftrightarrow$  Injektivität

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$  injektiv  $\Leftrightarrow A$  surjektiv.

/\* Durch Benutzung der Cramerschen Regel \*/

## 1.4 Inverse Matrix, Basiswechsel

$$\text{Ist } A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \text{ und } \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda a_2 & \lambda b_2 \end{pmatrix}$$

**Satz:**

Für  $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$  mit  $\det(A) \neq 0$  gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} \det(A) & 0 \\ 0 & \det(A) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A^{-1} \cdot A \text{ analog} \Rightarrow A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2) \text{ Basis} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = B \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = x_1 \vec{b}_1 + x_2 \vec{b}_2 = B \vec{x} \quad : \vec{x} = B^{-1} \vec{a}$$

Die Koordinaten von  $a$  bzgl.  $\mathcal{B}$  sind durch  $B^{-1}(\vec{a})$  gegeben, denn man muss das Gleichungssystem  $x_1 b_1 + x_2 b_2 = a$  nach  $x_1$  und  $x_2$  lösen.

$\mathcal{C} := (c_1, c_2)$ .  $A$  ist bestimmt durch  $A(c_1)$  und  $A(c_2)$ .

$$A(c_1) = d_{11}b_1 + d_{21}b_2 \quad A(c_2) = d_{12}b_1 + d_{22}b_2$$

$${}_B A_C = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} \\ d_{12} & d_{22} \end{pmatrix} \text{ Matrix von } A \text{ bzgl. } \mathcal{B}, \mathcal{C}$$

**Satz:**

$$\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2) \quad \mathcal{C} = (\vec{c}_1, \vec{c}_2)$$

$B$  bzw.  $C$  Matrix mit den Spalten  $\vec{b}_1, \vec{b}_2$  bzw.  $\vec{c}_1, \vec{c}_2$  und ist  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  linear. Dann gilt:

$${}_B A_C = B^{-1} A C$$

**Beweis:**

In der ersten Spalte von  $C$  steht das Bild  $c_1$  von  $e_1$

In der ersten Spalte von  $AC$  steht das Bild von  $c_1$  unter  $A$

In der ersten Spalte von  $B^{-1}AC$  stehen die Koordinaten von  $A(c_1)$  bzgl.  $\mathcal{B}$ . Analog gilt dies für  $c_2$ .

**Beispiel:**

$$\mathcal{B} = (b_1, b_2) \quad b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A \text{ gegeben durch } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -16 & -45 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}$$

**Satz:**

$A, B$  invertierbar  $\Rightarrow A \cdot B$  invertierbar, Inverse  $B^{-1}A^{-1}$

**Beweis:**

$$(AB)(AB)^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} | E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = E \checkmark$$

Im Allgemeinen:  $E \neq ABA^{-1}B^{-1}$ !

**Beispiel:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ Frage: Gibt es eine Basis } b_1 b_2 : {}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}?$$

$$\text{Insbesondere } A(b_1) = 7b_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x \\ 7y \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{lcl} x + 12y & = & 7x \\ 2x + 3y & = & 7y \end{array} \xrightarrow[\text{Regel}]{\text{Cramersche}} b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A(b_2) = -3b_2 \xrightarrow[\text{Regel}]{\text{Cramersche}} b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**Probe:**

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 35 & 0 \\ 0 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

**Satz:**

Sei  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  linear. Dann gibt es Basen  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  von  $\mathbb{R}^2$ , sodass  ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{C}}$  eine der Formen annimmt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 1 Der Raum $\mathbb{R}^2$

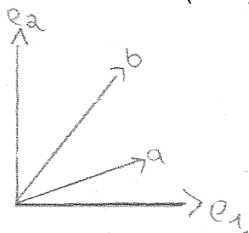
**Beweis:**

Setze  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{a}$      $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{b}$

1.  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{b}$      $\mathcal{B} = \mathcal{E} = \mathcal{C} \checkmark$

2. Wenn  $\mathcal{A} = (\vec{a}, \vec{b})$  Basis,  $\mathcal{C} = \mathcal{E}$      $\mathcal{B} = \mathcal{A}$

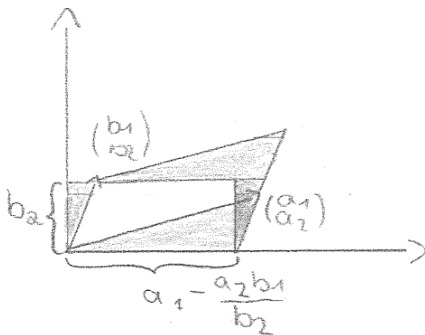
$${}_{\mathcal{A}}A_{\mathcal{B}} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



3.  $\vec{a}, \vec{b}$  keine Basis, aber  $\vec{a} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a}$  und  $A \begin{pmatrix} \lambda \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$      $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{a}_{\perp})$

$${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{C}} = B^{-1}A \cdot C = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 1.5 Satz von Pythagoras, Länge und Skalarprodukt

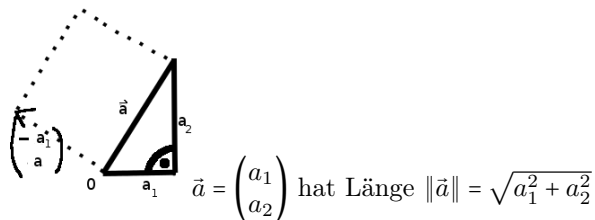


Fläche des Parallelogramms gleich  $|\det(\vec{a}, \vec{b})|$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{b_2 \neq 0} \lambda = \frac{-a_2}{b_2}, x = a_1 - \frac{a_2 b_1}{b_2}$$

Rechteck hat Fläche  $|a_1 b_2 - a_2 b_1| = |\det(a, b)| = \text{Fläche des Parallelogramms.}$

## 1.5.1 Satz des Pythagoras (1. Version)

**Beweis:**

$$\det(\vec{a}, \vec{a}_\perp) = a_1^2 + a_2^2 \text{ ist das Quadrat der Seitenlänge } \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

**Definition:**

Der Abstand zweier Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist  $\|\vec{a} - \vec{b}\|$

**Bemerkung:**

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

$$\text{„}\Rightarrow\text{“ } a_1 b_1 + a_2 b_2 = -\lambda a_1 a_2 + \lambda a_1 a_2$$

$$\text{„}\Leftarrow\text{“ Falls } a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leadsto \lambda = 0$$

o.E.  $a_1 \neq 0$

$$\text{setze } \lambda : b_2 = \lambda a_1 \stackrel{\text{Vor.}}{\Rightarrow} 0 = a_1 b_1 + a_1 \cdot \lambda a_1 a_2 \Rightarrow b_1 = -\lambda a_2$$

**Definition:**

Skalarprodukt

Das von  $\vec{a}$  und  $\vec{b} : \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$ .

**Eigenschaften des Skalarprodukts**

$$\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle = (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$$

$$\langle \lambda \vec{a}, \vec{b} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$$

## 1.5.2 Pythagoras (allgemein)

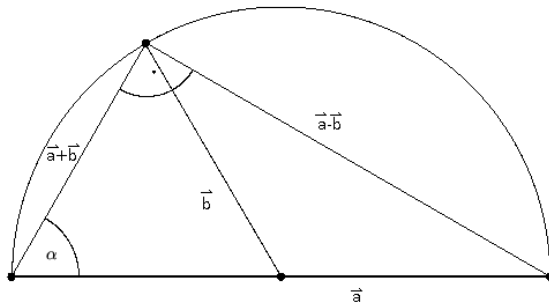
$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$$

**Beweis:**

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

$$\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$$

### 1.5.3 Satz des Thales



$$\vec{a}, \vec{b} : \|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| \Rightarrow \vec{a} - \vec{b} \perp \vec{a} + \vec{b}$$

**Beweis:**

$$\langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = 0$$

**Satz:**

Sei  $l$  Gerade,  $c \notin l$ .

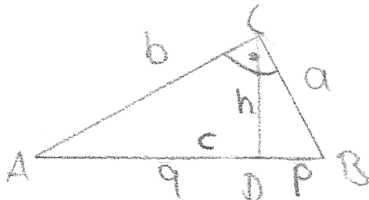
Dann existiert genau ein „Fußpunkt“  $D \in l : c - D \perp l$

**Beweis:**

$\vec{n} \perp l$ . Schneide  $c + \mathbb{R}\vec{n}$  mit  $l$ .

$$\det(\vec{n}, \vec{n}^\perp) = \|\vec{n}\|^2 \neq 0 \Rightarrow \text{es existiert } D$$

**Höhensatz**



$$ABC \text{ sei ein rechtwinkliges Dreieck } p = \|D - B\| \quad q = \|D - A\| \quad h = \|D - C\| \Rightarrow h^2 = pq$$

**Beweis:**

$$a^2 + b^2 = c^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

$$a^2 = h^2 + p^2$$

$$b^2 = h^2 + q^2$$

$$\Rightarrow p^2 + 2pq + q^2 = 2h^2 + p^2 + q^2$$

$$\Leftrightarrow 2pq = 2h^2$$

$$\Leftrightarrow pq = h^2 \quad \square$$

**Kathetensatz**

$$ABC \text{ sei ein rechtwinkliges Dreieck } a^2 = p \cdot c, b^2 = q \cdot c$$

**Beweis:**

$$a^2 = c^2 - b^2 = p^2 + 2pq + q^2 - (h^2 + q^2) = p^2 + 2pq - h^2 = p^2 + 2pq - a^2 + p^2$$

$$2a^2 = 2pq + 2p^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = pq + p^2 \Rightarrow \text{Behauptung; analog f\"ur } b^2 = qc \quad \square$$

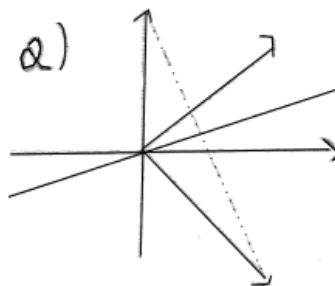
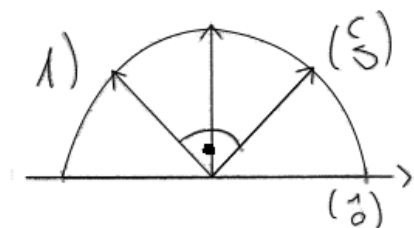
## 1.6 Bewegungen

**Definition:**

Eine Abbildung heißt Bewegung oder Isometrie wenn  $\forall a, b \in \mathbb{R}^2 \quad \|A(a) - A(b)\| = \|\vec{a} - \vec{b}\|$ .

**Satz:**

$A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  Bewegung mit  $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist  $A$  linear. Es gibt  $c, s \in \mathbb{R}$  mit  $c^2 + s^2 = 1$ , sodass die Matrix von  $A$  durch  $R_{c,s} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \det(R_{c,s}) = 1$  oder  $S_{c,s} = \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix} \det(S_{c,s}) = -1$  gegeben ist.

**Beweis:**

$A$  ist Isometrie.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$

$$c^2 + s^2 = 1 = t^2 + u^2$$

$$(c-t)^2 + (s-u)^2 = 2 = 2 - 2 \underbrace{(tc + su)}_{\Rightarrow 0} \text{ weil der Abstand von } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ zu } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ gleich } \sqrt{2} \text{ ist.}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix}, \lambda = \pm 1 \text{ somit } t = -s, u = c \text{ oder } t = s, u = -c$$

$$A \text{ linear: z.z. } \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \mp sy \\ sx \pm cy \end{pmatrix}$$

$$\text{Fall } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix}$$

$$x^2 + y^2 = z^2 + w^2$$

$$(x-1)^2 + y^2 \stackrel{!}{=} (z-c)^2 + (w-s)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = z^2 - 2zc + c^2 + w^2 - 2sw + s^2$$

$$\Rightarrow x = cz + sw$$

$$(z+s)^2 + (w-c)^2 = x^2 + (y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2sz - 2cw = -2y$$

## 1 Der Raum $\mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow y = -sz$$

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(R_{c,s} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}, S_{c,s} = \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix})$$

**Idee:**

Spiegelung ges:  $\vec{a} : A(\vec{a}) = \vec{a}$

**Fall I:**

$$\begin{cases} cx - sy = x & s \neq 0 \text{ sonst } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, x \neq 0 \text{ (trivial)} \\ sx + cy = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (c-1)x - sy = 0 & \xrightarrow{s \neq 0} y = \frac{c-1}{s}x \\ sx + (c-1)y = 0 & \xrightarrow{:x} s + \frac{(c-1)^2}{s} = 0 \end{cases}$$

$$1 - x^2 + (c-1)^2 = 0 \Rightarrow 2 = 2c, c = 1 \Rightarrow s = 0 \quad \nexists$$

**Fall II:**

$$\begin{cases} cx + sy = x \\ sx - cy = y \end{cases} \Rightarrow 2. \text{ Gleichung ist Folge der ersten wenn } s = 0 \Rightarrow c = 1 \text{ wir erhalten } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}: x\text{-Achsen-}$$

Spiegelung

$$s \neq 0 : y = \frac{1-c}{s}x \rightarrow s^2 = (1+c)(1-c) \Rightarrow y = \frac{s}{1+c}x \text{ Diese wird gelöst von}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+1 \\ s \end{pmatrix} \text{ und skalare Vielfache. Noch zz., dass } R \text{ und } S \text{ Isometrien sind:}$$

$$\|A(\vec{a})\|^2 = (cx - sy)^2 + (sx + cy)^2 = c^2x^2 - 2cxsy + s^2y^2 + s^2x^2 + 2cxsy + c^2y^2 = x^2 + y^2 = \|\vec{a}\|^2 \text{ also längenerhaltend} \quad / * \vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^* /$$

$$\text{somit } \|A(\vec{a}) - A(\vec{b})\| = \|A(\vec{a} - \vec{b})\| = \|\vec{a} - \vec{b}\| \text{ abstandserhaltend !}$$

**Satz:**

1. Das Produkt zweier Spiegelungen ist eine Drehung.
2. Jede Drehung lässt sich als Produkt zweier Spiegelungen beschreiben.

$$1. \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + bd & ad - bc \\ bc - ad & bd + ac \end{pmatrix} \Rightarrow \text{von Typ } \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} = R_{c,s}$$

$$2. \begin{pmatrix} -s & c \\ c & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$$

**Satz:**

Die Verknüpfung zweier Drehungen ist einer Drehung und die Inverse einer Drehung ist eine Drehung.





**Beweis:**

$$R_{c,s} \cdot R_{t,u} = R_{ct-su, cu+st} = R_{t,u} \cdot R_{c,s} \Leftrightarrow R_{t,u} \text{ ist vertauschbar mit } R_{c,s}$$

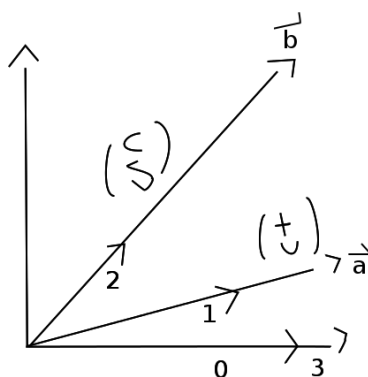
$$R_{c,s} \cdot R_{c,-s} = R_{1,0} = Id$$

**Satz:**

$\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$ , gibt es eindeutig bestimmtes  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\text{Drehung } R(\vec{a}) = \lambda \cdot \vec{b}$$

$$R(\vec{0}) = \vec{0}$$



Existenz  $\stackrel{!}{\Rightarrow}$  Eindeutigkeit

$$R \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$$

$T := R_{c,-s} R R_{t,u}$  ist Drehung mit

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow R = R_{cs} \circ R_{t-u} \Rightarrow$  Eindeutigkeit

$$R := R_{cs} \circ R_{t-u}$$

$$R(\vec{a}) = R_{cs} \circ R_{t-u}(\vec{a}) = R_{c,s} \|\vec{a}\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\|\vec{a}\| \vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

## 1.7 Isometrie

$$A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\|Av\| = \|v\|$$

Drehung	Spiegelung
$\det(A) = 1$	$\det(A) = 1$
$R_{c,s} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$	$S_{c,s} = \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}$
$c^2 + s^2 = 1$	$c^2 + s^2 = 1$



**Definition (Winkel):**

Sind  $a, b \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  Vektoren dann heißt die eindeutige Drehung  $\alpha = R_{c,s}$  mit  $\alpha(a) = \lambda \cdot b$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  der Winkel zwischen  $a$  und  $b$ , und wir schreiben  $\alpha := \angle(a, b)$

Die Summe  $\alpha + \beta$  zweier Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  definieren wir als  $\alpha + \beta := \alpha \circ \beta$  (beachte  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ )

Das Negative eines Winkels  $\alpha$  definieren wir als  $-\alpha := \alpha^{-1}$  d.h. ist  $\alpha = R_{c,s} \Rightarrow \alpha^{-1} = R_{c,-s}$ . Sind  $A, B, C \in \mathbb{R}^2$  Punkte, dann definieren wir den Winkel an Punkt  $A$  des Tripels  $(ABC)$  als  $\angle(B, A, C) := \angle(B-A, C-A)$ .

**Definition (Winkelhalbierende):**

Ist  $\alpha$  ein Winkel, dann existiert ein Winkel  $\beta$  mit  $\beta + \beta = \alpha$ . Dieser heißt der halbe Winkel zu  $\alpha$  oder auch die Winkelhalbierende zu  $\alpha$ .

**Satz:**

Ist  $\alpha = R_{c,s}$  so kann man  $\beta = R_{t,u}$  wählen mit

$$t = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1+c)}, u = \sqrt{\frac{1}{2}(1-c)} \text{ wobei „+“} \Leftrightarrow s \geq 0.$$

**Beweis:**

Nehmen wir an, dass  $\alpha = 2\beta$  mit  $\alpha = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} t & -u \\ u & t \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & -u \\ u & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & -u \\ u & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 - u^2 & -2tu \\ 2tu & t^2 - u^2 \end{pmatrix}$$

Es gilt also  $c = t^2 - u^2$ ,  $s = 2tu$

$$\begin{aligned} c \cdot 4t^2 &= 4t^4 - 4u^2t^2 \\ &= 4t^4 - s^2 \\ &= 4t^4 - (1 - c^2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t^4 - c \cdot t^2 - \frac{1}{4}(1 - c^2) = 0$$

$$\stackrel{\text{pq}}{\Rightarrow} t^2 = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{1}{4}(1 - c^2)} = \frac{c}{2} \pm \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(c \pm 1) \geq 0$$

Wir wissen  $1 = c^2 + s^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq c \leq 1$

wegen  $1 = t^2 + u^2 \Rightarrow 0 \leq t^2 \leq 1$

Würden oben ein „-“ stehen, wäre  $t^2 < 0$  für  $c < 0$ !

$$\Rightarrow t^2 = \frac{1}{2}(c+1) \Rightarrow t = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(c+1)}$$

Analog folgt  $u = \sqrt{\frac{1}{2}(1-c)}$

$$t^2 - u^2 = \frac{1}{2}(c+1) - \frac{1}{2}(1-c) = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c = c$$

$$2tu = 2 \cdot \left( \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1+c)} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(1-c)} \right) = \pm 2 \sqrt{\frac{1}{4}(1-c^2)} = \pm \sqrt{s^2} = \pm |s| \stackrel{!}{=} s$$

Die letzte Gleichheit gilt genau dann, wenn  $\pm$  das Vorzeichen von  $s$  ist (d.h. „+“  $\Leftrightarrow s \geq 0$ ).

Wir messen Winkel, indem wir der Drehung  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  den Wert  $180^\circ$  oder  $\pi$  zuweisen.

Durch das Halbieren und Addieren von Winkeln können wir jeden Winkel eine Zahl  $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$  zuordnen, die wir das Winkelmaß nennen.

$$\text{z.B. } \frac{1}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$$

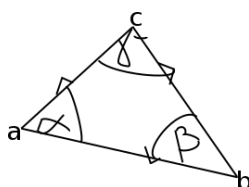
Tatsächlich lässt sich jede Zahl  $0 \leq x \leq 360$  schreiben als  $360^\circ \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{2^n}$ ,  $a_n \in \mathbb{N}_0$

Was ist der halbe Winkel zu  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ?

$R_{t,u}$  mit  $t = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1+c)} = 0$

$u = \sqrt{\frac{1}{2}(1-c)} = 1$  d.h.  $R_{t,u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cong 90^\circ = \frac{\pi}{2}$

**Satz (Winkelsumme im Dreiecke):**



Es sei  $a, b, c$  ein Dreieck (d.h.  $a, b, c$  sind Punkte) und  $\alpha := \angle(b, a, c)$ ,  $\beta := \angle(c, b, a)$ ,  $\gamma := \angle(a, c, b)$   
Dann gilt  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ (= \pi)$

**Beweis:**

$$\alpha(b-a) = \lambda(c-a), \lambda \in \mathbb{R}_{>0}$$

$$\beta(c-b) = \mu(a-b), \mu \in \mathbb{R}_{>0}$$

$$\gamma(a-c) = r(b-c), r \in \mathbb{R}_{>0}$$

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta + \gamma)(a-c) &\stackrel{\text{Definition}}{=} \alpha \circ \beta \circ \gamma(a-c) \\ &= \alpha(\beta(\gamma(a-c))) \\ &= \alpha(\beta(r(b-c))) \\ &= \alpha(\beta(-r(c-b))) \\ &= -r \cdot \alpha(\beta(c-b)) \\ &= -r \cdot \alpha(\mu(a-b)) \\ &= \mu \cdot r \cdot \alpha(b-a) \\ &= -\alpha\mu r(a-c) \end{aligned}$$

Da  $\alpha + \beta + \gamma$  wieder eine Drehung ist, gilt  $\|a-c\| = \|(\alpha + \beta + \gamma)(a-c)\| = |\lambda\mu r| \cdot \|a-c\| \Rightarrow |\lambda\mu r| = 1$

Da  $\alpha, \mu, r > 0 \Rightarrow \lambda\mu r = 1$

Somit gilt

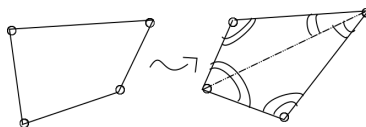
$$(\alpha + \beta + \gamma)(a-c) = -\lambda\mu r(a-c) = -1(a-c) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (a-c) \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \rightarrow \text{Winkelsumme } \square$$

**Korollar:**

In einem Viereck ist die Summe der Innenwinkel  $360^\circ$

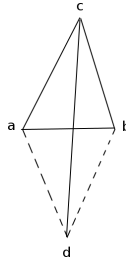
**Beweis:**

Zerlege das Viereck durch Verbinden zweier nicht verbundenen Ecken in 2 Dreiecke:



**Satz(Gleichschenklige Dreiecke):**

Sei  $a, b, c$  ein gleichschenkliges Dreieck, d.h.  $\|a - c\| = \|b - c\|$ , dann gilt  $\angle(b, a, c) = \angle(c, b, a)$



**Beweis:**

o.E. gilt  $c = 0$

Dann gilt also  $a - c = a$ ,  $b - c = b$ .

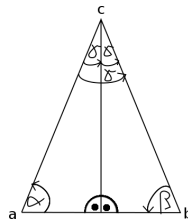
Es sei  $d := a + b$ .

Behauptung:

$$a + b \perp a - b$$

Beweis:

$$\langle a + b, a - b \rangle = \langle a, a \rangle - \langle a, b \rangle + \langle b, a \rangle - \langle b, b \rangle = \|a\|^2 - \|b\|^2 = 0 \text{ nach Voraussetzung } \|a\| = \|b\|$$



$$m := \frac{1}{2}(a + b)$$

$$\alpha + \gamma_1 - \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow \alpha + \gamma_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\beta + \gamma_2 + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow \beta + \gamma_2 = \frac{\pi}{2}$$

Wir zeigen  $\gamma_1 = \gamma_2$  indem wir zeigen, dass  $m$  auf der Winkelhalbierenden von  $\gamma$  liegt.

$$R(\vec{a}) = \lambda \vec{b}$$

$$R_\gamma = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$$

$$R_{\frac{\gamma}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}(1+c)} & -\sqrt{\frac{1}{2}(1-c)} \\ \sqrt{\frac{1}{2}(1-c)} & \sqrt{\frac{1}{2}(1+c)} \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda := \sqrt{\frac{1}{2}(1+c)}$$

$$\lambda \cdot R_{\frac{\gamma}{2}} \cdot \vec{u} = \left( \frac{1}{2}(1+c)a_1 - \frac{1}{2}\sqrt{1-c^2}a_2 \right)$$

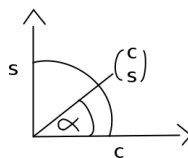
$$= \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + R_\gamma \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{m}$$

$\vec{m}$  liegt also auf der Winkelhalbierenden von  $\gamma \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{\gamma}{2}$

## 1.8 Trigonometrische Funktionen

### Definition:

$\alpha = R_{c,s}$  definiere  $c = \cos \alpha$ ,  $s = \sin \alpha$ ,  $\frac{s}{c} = \tan \alpha$  sofern  $c \neq 0$



Winkel	0°	30°	45°	60°	90°	180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0

z.B.  $45^\circ R_{c,s}$  mit  $c = s$

$$R_{c,s}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = R_{0,1} = 90^\circ \Rightarrow R_{c,s} = 45^\circ$$

in allgemeiner Form:

$$R_{c,s}^2 = R_{c^2-s^2, 2cs} = R_{0,1}$$

analog  $c = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$s = \frac{1}{2}$$

$$(R_{c,s})^3 = R_{0,1} \text{ (nachrechnen !): } R_{c,s}^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### Satz:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\cos -\alpha = \cos \alpha, \sin -\alpha = -\sin \alpha$$

### Beweis:

$$\alpha = R_{c,s} \quad \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = c^2 + s^2 = 1$$

$$-\alpha = R_{\begin{matrix} c \\ \uparrow \\ \cos -\alpha = \cos \alpha \end{matrix}, \begin{matrix} -s \\ \uparrow \\ \sin -\alpha = -\sin \alpha \end{matrix}}$$

### Additionstheoreme:

$$1. \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$2. \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

### Beweis:

$$\alpha = R_{c,s}$$

$$\beta = R_{t,u}$$

$$\alpha + \beta = R_{\underbrace{ct-su}_{1.}, \underbrace{cu+st}_{2.}}$$

## 1 Der Raum $\mathbb{R}^2$

### Satz:

1.  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \cos(\angle(a, b)) \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$
2.  $\det(\vec{a}, \vec{b}) = \sin(\angle(a, b)) \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$

Für Vektoren der Länge 1 ist das Skalarprodukt der Cosinus und die Determinante der Sinus des eingeschlossenen Winkels.

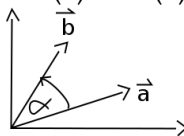
### Beweis:

$$\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} \quad \angle(\vec{a}, \vec{b}) = R_{t,u} \cdot R_{c,-s} = R_{ct+su, uc-st}$$

$$\cos \angle(a, b) = ct + su = \frac{\langle a, b \rangle}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

$$\sin \angle(a, b) = uc - ts = \frac{\det(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

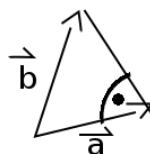
### Beispiel:

1.  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$   
 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -5 \Rightarrow \cos \angle(a, b) = \frac{-5}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{17}} \xrightarrow{\text{TR}} \angle(\vec{a}, \vec{b}) \approx 110^\circ$
2.  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$   

 $\left. \begin{array}{l} \langle a, b \rangle = 10 \\ \det(\vec{a}, \vec{b}) = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \sin \alpha = \cos \alpha \Rightarrow \alpha = 45^\circ$

### Satz:

$\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b} \quad \angle(\vec{a}, \vec{b} - \vec{a}) = \frac{\pi}{2}$ . Dann gilt:

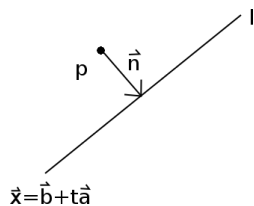
1.  $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\|\vec{a}\|}{\|\vec{b}\|} \quad \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$
2.  $\sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pm \frac{\|\vec{b} - \vec{a}\|}{\|\vec{b}\|} \quad \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$



### Beweis:

1.  $0 = \langle \vec{a}, \vec{b} - \vec{a} \rangle = \langle a, b \rangle - \langle a, a \rangle$   
 $\|\vec{a}\|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot (\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}))$
2.  $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = 1 \cdot \sqrt{\frac{\|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2}{\|\vec{b}\|^2}} = \pm \frac{\|\vec{b} - \vec{a}\|}{\|\vec{b}\|} \quad \square$

## 1.9 Abstände



- Abstand von  $p$  zur Gerade  $\vec{b} + \mathbb{R}\vec{a}$  ist  $\frac{|\det(p-b, a)|}{\|\vec{a}\|}$
- Abstand von  $p$  zur Gerade  $\langle n, x \rangle = c$  ist  $\frac{|\langle n, p \rangle - c|}{\|\vec{n}\|}$ , unabhängig von Wahl von  $\vec{n}$

**Beweis:**

- will ausrechnen  $\|\vec{x} - \vec{p}\|$  minimal,  $x \in l$   
 $\det(x - p, a) = \det(b - p, a)$   
 $\det(x - p, a) = \|x - p\| \underbrace{\sin \angle(b - p, a)}_{=1 \text{ wenn } \vec{x} - \vec{p} \perp \vec{a}} \|a\|$  also  $x - p \perp a$

$$\vec{n} \perp \vec{a} \quad p + \mathbb{R}n \cap b + \mathbb{R}a$$

$$\Rightarrow \|x - p, a\| = \frac{\det(x-p, a)}{\|\vec{a}\|} \text{ also } x - p \perp a$$

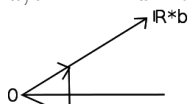
- $\langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = c = \langle \vec{n}, b \rangle = \frac{\langle n, p \rangle - \langle n, b \rangle}{\|\vec{n}\|}$

$$\text{Nimm } \vec{n} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{|\det(\vec{p}-b, a)|}{\|\vec{a}\|} = \frac{\det(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|} = \langle \vec{a}^\perp, \vec{b} \rangle = \frac{|\langle p-b, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\langle p, n \rangle - c|}{\|\vec{n}\|}$$

**Satz:**

1.  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ : Punkte der Winkelhalbierenden  $\mathbb{R}(\|\vec{b}\|\vec{a} + \|\vec{a}\|\vec{b})$  haben den gleichen Abstand zu  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .



$$\mathbb{R}^* \vec{a} \quad (\text{beachte: } \mathbb{R} \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} + \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} \right) = \mathbb{R}(\|\vec{b}\|\vec{a} + \|\vec{a}\|\vec{b}))$$

2. Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks gehen durch einen Punkt = Inkreismittelpunkt.

**Beweis:**

1.  $\vec{v} = \|\vec{b}\|\vec{a} + \|\vec{a}\|\vec{b}$ ,  $\lambda > 0$

$$\text{Abstand von } \lambda \vec{v} \text{ zu } \mathbb{R}a \text{ und } \mathbb{R}b:$$

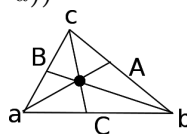
$$\frac{\det(\lambda \vec{v}, \vec{a})}{\|\vec{a}\|} = \lambda |\det(\vec{a}, \vec{b})| = \frac{|\det(\lambda \vec{v}, \vec{b})|}{\|\vec{b}\|}$$

2.  $C = \|b - a\|, B = \|c - a\|, A = \|b - c\|$

$$\text{Winkelhalbierende durch } \vec{a} : \vec{a} + \mathbb{R}(C(c - a) + B(b - a))$$

$$\text{Parameter } \frac{1}{A+B+C} : \frac{1}{A+B+C} (Aa + Bb + Cc)$$

$$\text{Symmetrie} \Rightarrow \text{Schnittpunkt}$$



## 1 Der Raum $\mathbb{R}^2$

### Satz:

$l$  und  $m$  zwei verschiedene Geraden

1.  $l \parallel m : \{P | d(P, l) = d(P, m)\}$  ist Gerade parallel zu  $l$  und  $m$
2.  $l \cap m = \{*\} \quad m : \{P | d(P, l) = d(P, m)\}$  ist Vereinigung zweier zueinander senkrechter Geraden

### Beweis:

1.  $l : ax + by = c$  und  $m : ax + by = d$   
 Abstand  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  zu  $l : \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} |ax + by - c|$   
 bzw.:  $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} |ax + by - d|$   
 $\Rightarrow ax + by - c = \pm(ax + by - d)$   
 $\Rightarrow 2ax + 2by = c + d \Rightarrow ax + by = \frac{1}{2}c + d$
2.  $ax + by = c$  o.E.  $a^2 + b^2 = 1 = e^2 + f^2$   
 $ex + fy = g$   
 $|ax + by - c| = |ex + fy - g|$   
 $\Leftrightarrow ax + by - c = \pm(ex + fy - g)$   
 $\Rightarrow (a+e)x + (b+f)y = c+g \vee (a-e)x + (b-f)y = c-g \leadsto$  die beiden Geraden. Noch z.z.: orthogonal  
 $\begin{pmatrix} a+e \\ b+f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-e \\ b-f \end{pmatrix} = a^2 + b^2 - e^2 - f^2 = 1 - 1 = 0$

## 1.10 Euler-Gerade und Feuerbach-Kreis

### Definition:

$a, b, c$  sei ein Dreieck

1. Seitenhalbierende: Verbindung von  $\vec{a}$  mit  $\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$
2. Mittelsenkrechte: Senkrechte auf  $b - a$  durch  $\frac{b+a}{2}$
3. Höhe: durch  $a$  ist das Lot von  $a$  auf  $c - b$

### Satz:

1. Die Seitenhalbierenden schneiden sich in einem Punkt  $s$ : „Schwerpunkt“.
2. Die Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt  $m$ : „Umkreismittelpunkt“.
3. Die Höhen schneiden sich in einem Punkt  $h$ : „Höhenschnittpunkt“.

### Beweis:

1.  $\vec{c} + \mathbb{R}(\frac{a+b}{2} - c) \stackrel{\text{Parameter}}{=} \frac{2}{3} \frac{a+b+c}{3}$   
 Symmetrie  $\Rightarrow$  auf allen Seitenhalbierenden.
2.  $2 \langle a - b, x \rangle = \langle a - b, a + b \rangle = \|a\|^2 - \|b\|^2$   
 $2 \langle b - c, x \rangle = \langle b - c, b + c \rangle = \|b\|^2 - \|c\|^2$   
 $2 \langle c - a, x \rangle = \langle c - a, c + a \rangle = \|c\|^2 - \|a\|^2$   
 Addition liefert  $0 = 0$

$\Rightarrow$  Jede der Gleichungen ist Konsequenz der anderen beiden



**Satz (von Euler):**

$\vec{h} = \vec{s} + 2(\vec{s} - \vec{m})$  insbesondere liegen  $s, h, m$  auf einer Geraden

**Beweis:**

z.z.  $\vec{h} = 3\vec{s} - 2\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 2\vec{m}$  genauer:  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 2\vec{m}$  liegt auf jeder Höhe

Höhe durch  $c$ :  $\langle a-b, x \rangle = \langle a-b, c \rangle$

$$\langle a-b, a+b+c-2\vec{m} \rangle = \underbrace{\langle a-b, a+b \rangle - \langle a-b, 2\vec{m} \rangle}_{=0} + \langle a-b, c \rangle$$

**Definition (von Feuerbach):**

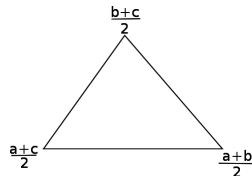
Der Feuerbachkreis des Dreiecks  $abc$  mit  $s, h, m$  ist der Kreis durch die Seitenmitten. Sei  $f$  sein Mittelpunkt.

**Satz:**

1.  $\vec{f} = \frac{\vec{h} + \vec{m}}{2}$  d.h.  $f$  liegt auf der Euler-Geraden in der Mitte zwischen  $h$  und  $m$ .
2. Radius d. Feuerbachkreises ist die Hälfte des Umkreisradius.
3.  $\frac{h+a}{2}, \frac{b+h}{2}, \frac{h+c}{2}$  liegen auf dem Feuerbachkreis
4. Fußpunkt der Höhen auch

**Beweis:**

Verschiebe so, dass  $s = \vec{0}$  also  $a + b + c = 0$



1.  $K$  ist Umkreis des  $\triangle$  durch die Seitenmitten  $\Rightarrow f$  liegt auf dessen Mittelsenkrechten, erfüllt daher

$$\begin{aligned} 2. & \langle \frac{a+c}{2} - \frac{b+c}{2}, f \rangle \\ &= \langle \frac{a+c}{2} - \frac{b+c}{2}, \frac{a+b+2c}{2} \rangle \\ &= \langle a-b, f \rangle - \frac{1}{4} \underbrace{\langle a-b, a+b \rangle}_{2\langle a-b, m \rangle} \end{aligned}$$

$$= \langle a-b, -\frac{m}{2} \rangle$$

Genauso  $\langle b-c, f \rangle = \langle b-c, -\frac{m}{2} \rangle, \dots$ , d.h.  $2f + m = \vec{0}$  tut's.  $f$  liegt auf allen 3 Höhen durch  $-\frac{m}{2} \Rightarrow f = -\frac{m}{2}$

$$\frac{1}{2}(h+m) \stackrel{\text{Euler}}{=} \frac{1}{2}(-2m+m) = -\frac{1}{2}(-2f) = f$$

$$3. r_K = \|f - \frac{a+b}{2}\| \stackrel{s=0}{=} \|f + \frac{c}{2}\| = \frac{1}{2}\|c-m\| = \frac{1}{2} r_{\text{Umkreis}}$$

$$4. \left\| \frac{h+a}{2} - f \right\| \stackrel{\text{Euler}}{=} \left\| -m + \frac{a}{2} + \frac{m}{2} \right\| = \frac{1}{2}\|m-a\| \stackrel{2.)}{=} r_K$$

5. Projiziere senkrecht auf die Seite  $ab$ . Dann geht

- $h$  auf den Höhenfußpunkt  $hc$

# 1 Der Raum $\mathbb{R}^2$

- $m$  auf  $\frac{a+b}{2}$
- und  $f$  auf die Mitte dazwischen (nach 2.)

$\Rightarrow$  Das Dreieck  $\triangle h_c \frac{a+b}{2} f$  ist gleichschenkelig  $\|h_c - f\| = \|\frac{a+b}{2} - f\|$  (Pythagoras)

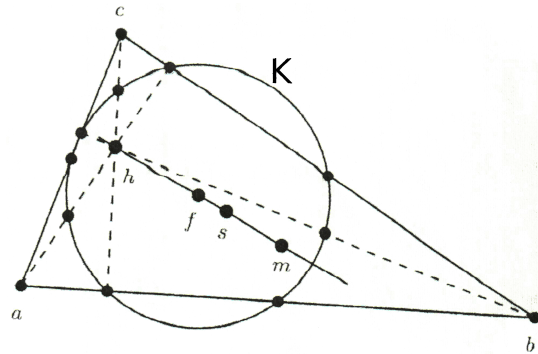


Abbildung 1.6: Der Feuerbachkreis

Projiziere die Euler-Gerade  $\mathcal{E}$  auf die Gerade  $ab$ .

Dann liegt das Bild von  $f$  in der Mitte zum Seitenmittelpunkt und Fußpunkt der Höhe  $h_c$

$$\Rightarrow \|f - \frac{a+b}{2}\| = r_{\text{F-Kreis}} = \|f - h_c\|$$

$\Rightarrow h_c$  liegt auf dem F-Kreis

## Korollar:

$$3s = m + 2f \text{ DENN: } 2f \stackrel{\text{F.}}{=} h + m \stackrel{\text{E.}}{=} 3s - m \quad \checkmark$$

## 2 Der Raum $\mathbb{R}^3$

Elemente  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  wie in  $\mathbb{R}^2$ : Addition, skalare Multiplikation.

### Definition:

$a \in \mathbb{R}^3$ :

1. Länge von  $\vec{a}$   $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
2.  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
3.  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  linear abhängig  $\vec{b} = t\vec{a}$  oder  $\vec{a} = t\vec{b}$ .  
linear unabhängig  $\overset{\text{Definition}}{\Leftrightarrow}$  nicht linear abhängig.

### Rechenregeln:

1.  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$
2.  $\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$  (Bilinearität)
3.  $\langle \lambda \vec{a}, \vec{b} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$
4.  $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \|\vec{a}\|^2$

### Satz:

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$  ( $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ ), Dann ist  $\vec{p} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\|^2} \cdot \vec{a}$  ist der eindeutig bestimmte Punkt auf  $\mathbb{R}\vec{a}$  mit minimalem Abstand zu  $\vec{b}$ . Es gilt:  $\|\vec{b}\|^2 = \|\vec{p}\|^2 + \|\vec{b} - \vec{p}\|^2$

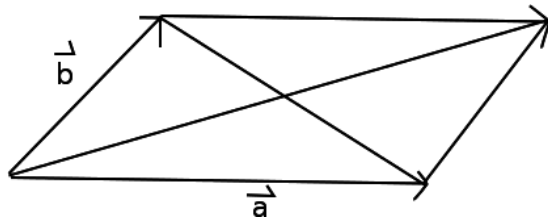
### Beweis

$$\begin{aligned} \|\vec{t}\vec{a} - \vec{b}\|^2 &= \langle \vec{t}\vec{a} - \vec{b}, \vec{t}\vec{a} - \vec{b} \rangle \\ &= t^2 \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - 2t \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \\ &= \left( \|\vec{a}\| t - \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\|} \right)^2 + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle - \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2}{\|\vec{a}\|^2} \end{aligned}$$

Minimum:  $t = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\|^2}$  ergibt den Wert  $\|\vec{b}\|^2 - \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2}{\|\vec{a}\|^2}$

$$\cos \varphi = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothense}} = \frac{\|\vec{p}\|}{\|\vec{b}\|} = \frac{\frac{1}{\|\vec{a}\|} \cdot |\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|}{\|\vec{b}\|} = \frac{|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} \quad \text{Definiere } 0^\circ \leq \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \leq 180^\circ : \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \varphi$$

## 2.1 Satz (Parallelogrammgesetz)



$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 + \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 2\|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{b}\|^2$$

### Beweis

$$\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle + \langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = 2\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + 2\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle$$

## 2.2 Geraden und Ebenen

### Definition

Gerade :  $\vec{b} + \mathbb{R}\vec{a}$ , wobei  $\vec{a} \neq \vec{0}$

$\vec{a}$  heißt Richtungsvektor,  $\vec{b}$  heißt Stützvektor

Ebene:  $\vec{c} + \mathbb{R}\vec{a} + \mathbb{R}\vec{b}$

$\vec{a}, \vec{b}$  sind Richtungsvektoren,  $\vec{c}$  ist der Stützvektor

$$x_1 = c_1 + \lambda a_1 + \mu b_1$$

$$x_2 = c_2 + \lambda a_2 + \mu b_2$$

$$x_3 = c_3 + \lambda a_3 + \mu b_3$$

$$d = \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{c} \rangle + \lambda \langle \vec{n}, \vec{a} \rangle + \mu \langle \vec{n}, \vec{b} \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \vec{n}, \vec{a} \rangle = 0 = \langle \vec{n}, \vec{b} \rangle$$

gesucht ist der Normalenvektor

### Definition:

$$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \quad \vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

### Rechenregeln:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

$$t(\vec{a} \times \vec{b}) = (t\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (t\vec{b})$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c} \times \vec{a} \rangle = \langle \vec{c}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle$$

### Satz:

# 3 Körper

## 3.1 Aus der normalen Vorlesung

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  sind Körper

### Definition:

$K$  ist Körper (engl. field), wenn  $0, 1 \in K$  verschieden und „+“, „ $\cdot$ “, sodass für alle  $a, b, c \in K$  folgendes gilt.

1.  $(a + b) + c = a + (b + c)$
2.  $a + b = b + a$
3.  $a + 0 = a$
4.  $\forall a \in K \exists -a : a + (-a) = 0$
5.  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
6.  $a \cdot b = b \cdot a$
7.  $a \cdot 1 = a$
8.  $a \cdot a^{-1} = 1$  sofern  $a \neq 0$
9.  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

### Beispiel:

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$   
 $K = \{-1, 0, 1\}$   $K = \mathbb{F}_3$  ist ein endlicher Körper

+	1	0	-1
1	-1	1	0
0	1	0	-1
-1	0	-1	1

$\cdot$	0	1	-1
0	0	0	0
1	0	1	-1
-1	0	-1	1

### Schreibweise:

$$a + (-b) = a - b \quad a \cdot b^{-1} = \frac{a}{b}$$

### Behauptung:

$b + c = c \stackrel{!}{\Rightarrow} b = 0$   
DENN:  $b = b + (c + (-c)) = (b + c) + (-c) = c + (-c) = 0$   
Insgesamt folgt  $0 \cdot a = 0$

$$\mathbb{R} = \mathbb{C} \ni z = a + bi \quad a, b \in \mathbb{R}$$

### 3 Körper

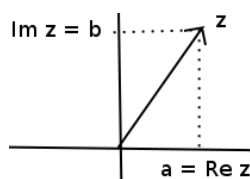


Abbildung 3.1: Die Gaußsche Zahlenebene

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{Arg} z = \angle(1, z)$$

„+“ komponentenweise „·“  $(a + bi)(c + di) = (ac + db) + i(bc + ad)$

#### neutrales Elements der Multiplikation

$$z = a + bi$$

$$\bar{z} = a - bi \quad z\bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$$

#### Addition:



Abbildung 3.2: Addition zweier Vektoren

#### Multiplikation:

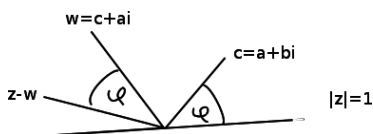


Abbildung 3.3: Multiplikation zweier Vektoren

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

#### Satz:

Bei der Multiplikation komplexer Zahlen werden die Beträge multipliziert und die Winkel addiert.

#### Korollar (de Moivre)

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$$

#### Definition:

Ein Polynom in  $z$  mit Koeffizienten in  $K$  ist ein Ausdruck der Form  $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad a \in \mathbb{K}$

#### Beispiel:

$$z^n = a$$

**Satz:**

$a \in \mathbb{C}$ : Die Gleichung  $z^n = a$  hat genau  $n$  Lösungen in  $\mathbb{C}$ .  
 $n = 2$       $a = \alpha + i\beta$       $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$       $z^2 = a$

**Winkelhalbierende:**

$$z_{1,2} = \pm \left( \sqrt{\frac{\gamma+\alpha}{2}} + \sqrt{\frac{\gamma-\alpha}{2}} i \right)$$

$$z_1^2 = \frac{\gamma+\alpha}{2} - \frac{\gamma-\alpha}{2} + i \sqrt{\frac{\gamma^2-\alpha^2}{4}} = \alpha + i\beta = a$$

$$x^2 + px + q = \left( a + \frac{p}{2} - \left( \frac{p^2}{4} - q \right) \right) \left( x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \right) \left( x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \right)$$

$$\frac{p^2}{4} - q > 0 \text{ (Dies ist nur so in den reellen Zahlen)}$$

**Satz:**

$p, q \in \mathbb{C}$ . Dann gibt es  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .  $x^2 + pxq = (x - \alpha)(x - \beta)$  kubische Gleichung hierauf zurück führbar.  
 $x^3 = px + q \Rightarrow x = a + \frac{p}{3u}$       $u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$   
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  („erstmal zuende“-polynome lösbar)

## 3.2 Sondervorlesung Komplexe Zahlen

### 3.2.1 Einführung

$$\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ :

$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  (Betrachte Paare von natürlichen Zahlen)

Äquivalenzklassen:

$$(n, m) \sim (n', m') : \Leftrightarrow n + m' = n' + m \Leftrightarrow n - m = n' - m'$$

$$(n - m) \cdot (n' - m') = nn' + mm' - nm' - n'm$$

$$(7, 4) \sim (3, 0)$$

$$[n, m] := \{(n', m') | (n', m') \sim (n, m)\}$$

Definiere, was auf diese Menge „+“ und „-“ sein soll:

$$[n, m] + [n', m'] := [n' + m, n + m']$$

$$[n, m] \cdot [n', m'] := [nn' + mm', nm' + n'm]$$

$$n := [n, 0] \quad -n := [0, n]$$

$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ :

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus N$$

$$(a, b) \sim (a', b') : \Leftrightarrow ab' = ba' \quad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow ab' = a'b$$

$$\frac{a}{b} := [a, b]$$

$$\text{Addition: } [a, b] + [c, d] := [ad + bc, bd]$$

$$\text{Multiplikation: } [a, b] \cdot [c, d] := [ac, bd]$$

$$\Rightarrow \text{Multiplikation in } \mathbb{Q} \text{ ist genauso definiert wie Addition in } \mathbb{Z}!$$

### 3 Körper

$\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$\mathbb{R} := \dots$

Konstruktion sehr kompliziert, über Zahlenfolgen in  $\mathbb{Q}$ .  $x^2 + 1 = 0$  hat in  $\mathbb{R}$  keine Lösung

$$x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1 > 0$$

Cauchy-Folge: Abstand zwischen Folgenglieder wird immer kleiner trotzdem u.U. kein Grenzwert in  $\mathbb{Q}$

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$x^2 \neq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + 1 > 0$$

Wir suchen einen Körper  $\mathbb{C}$  mit

1.  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

2. Die Gleichung hat (mindestens) eine Lösung.

Als Menge ist  $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$

Wir definieren eine Addition durch folgende Vorschrift:

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

und eine Multiplikation durch:

$$(a, b)(c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

#### Behauptung:

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$  ist ein Körper mit  $0 = (0, 0)$  (Nullelement)

$$1 = (1, 0)$$

$$*(a, b)(x, y) = (a, b)$$

$$= (ax - by, ay + bx)$$

$$ax - by = a$$

$$bx + ay = b \leadsto (x, y) = (1, 0)$$

Betrachtet man Elemente der Form  $(x, 0) \in \mathbb{C}$ , dann gilt:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$$

$$(a, 0) \cdot (c, 0) = (ac, 0)$$

Wir können also  $\mathbb{R}$  als Unterkörper von  $\mathbb{C}$  (bzw.  $\mathbb{C}$  als Körpererweiterung von  $\mathbb{R}$ ) auffassen durch die Identifizierung:

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$a \mapsto (a, 0)$$

Was ist Nullstelle von  $x^2 + 1 = 0$ ?

$$\begin{aligned} x &= (a, b) \\ (0, 0) = 0 = x^2 + 1 &= (a, b)^2 + (1, 0) \\ &= (a, b)(a, b) + (1, 0) \leadsto \quad \text{i.) } 0 \stackrel{!}{=} a^2 - b^2 + 1 \\ &= (a^2 - b^2, 2ab) + (1, 0) \leadsto \quad \text{ii.) } 0 \stackrel{!}{=} 2ab \\ &= (a^2 - b^2 + 1, 2ab) \leadsto \quad \text{iii.) } a = 0 \text{ oder } b = 0 \end{aligned}$$

•  $b = 0 \Rightarrow 0 = a^2 + 1 \quad \nexists$

•  $a = 0 \Rightarrow 0 = -b^2 + 1 \Rightarrow b = \pm\sqrt{1} = 1$



$$x = \begin{cases} (0, 1) \\ (0, -1) \end{cases}$$

Wir schreiben ab jetzt:

$$i := (0, 1)$$

$$-i := (0, -1)$$

und wir schreiben:  $a := (a, 0)$  für  $a \in \mathbb{R}$

dann lässt sich jede komplexe Zahl wie folgt schreiben:

$$z = (a, b) \in \mathbb{C} = \underline{a + bi}$$

.]

$$\begin{aligned} a + bi &= (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) \\ &= (a, 0) + (0, b \cdot 1) \\ &= (a, b) \end{aligned}$$

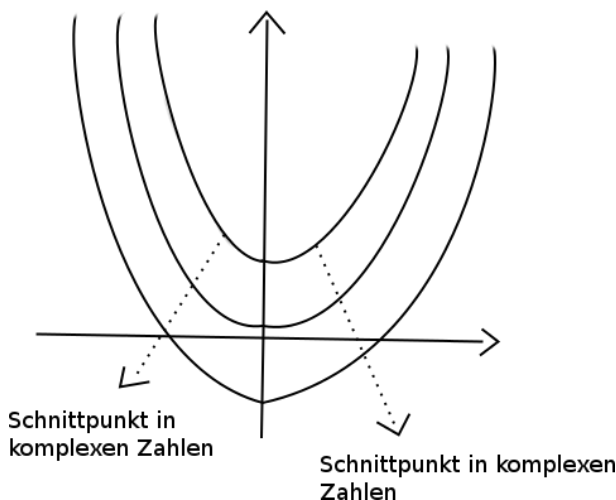
Eine komplexe Zahl ist die Information, zweier reellen Zahlen  $a$  und  $b$  zu haben und ein Element  $i$ , das mit sich selbst multipliziert  $-1$  ergibt. ]

$\mathbb{C}$  ist ein 2-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit der Basis  $(1, i)$ .

$p(x) = 0, p \in \mathbb{C}[x] \rightarrow$  Fundamentalsatz der Algebra: „Jedes Polynom besitzt mindestens eine Nullstellen.

Jedes Polynom hat so viele Nullstellen, wie sein Grad ist. “

**$x^2 + t$  element  $\mathbb{R}[x]$  für alle  $t$  element  $\mathbb{R}$**



### 3.2.2 Definitionen:

Für die komplexe Zahl  $z = x + iy \forall x, y \in \mathbb{R}$  definieren wir:

1.  $Re(z) := x$  Realteil von  $z$

$Im(z) := y$  Imaginärteil von  $z \rightarrow$  (Nur  $y$ , nicht  $i$ , wichtig!)

$$\leadsto z = Re(z) + i Im(z)$$

2.  $\bar{z} := x - iy = Re(z) - i Im(z)$  zu  $z$  komplex konjugierte Zahl.

$$[ z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + iyx - ixy - i^2 y^2 = x^2 + y^2 \geq 0 ]$$

3.  $|z| := \sqrt{z\bar{z}}$  Betrag von  $z$ ,  $\sqrt{\phantom{x}}$  = positive reelle Wurzel.

a)  $\bar{\bar{z}} = z$

### 3 Körper

b)  $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$  (Konjugation ist lineare Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ )  
 $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

c)  $z = \overline{z} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$   
 $z = -\overline{z} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in i \cdot \mathbb{R}$

d)  $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

e)  $|z| \geq 0, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

f)  $|z+w| \leq |z| + |w|$  (Dreiecksungleichung)

# Abbildungsverzeichnis