Lineare Algebra und Geometrie 1 WS 12-13

Dozent:
Dr. Cynthia Hog-Angeloni

Mitschrift von:
Sven Bamberger, Bernadette Mohr, Sahra Schreyer

LaTeXarbeit von:
Sven Bamberger, Bernadette Mohr

Zuletzt Aktualisiert:
8. Januar 2013

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Zusammenfassung:

Bei der Lineare Algebra und Geometrie
http://www.mathematik.uni-mainz.de/Members/dhanke/linearealgebrai2012/lineare-algebra-und-geometrie-i-im-ws-2012-13
Raum: Mo S1 & Fr S1
Uhrzeit: 08:00-10:00 & 12:00-14:00
Abgabe: Freitag 12:00

Dieses Skript wurde erstellt, um sich besser auf die Klausur vorzubereiten und eine ordentliche und für alle Personen lesbare Mitschrift zu haben.

Dieses Dokument garantiert weder Richtigkeit noch Vollständigkeit, da es aus Mitschriften gefertigt wurde und dabei immer Fehler entstehen können. Falls ein Fehler enthalten ist, bitte melden oder selbst korrigieren und neu hochladen.

Hier kleine Notizen zu einzelne Besonderheiten dieses Dokumentes.

1. /* */ alles zwischen diesen Zeichen sind Kommentare und sollen zum tiferen Verständnis oder Besondere Fragestellungen darstellen. Dabei ist zu beachten, das die Notation nciht immer komplett korrekt ist.Es können also kleinere mathematische Fehler auftauchen, welche aber für das Verständnis relevant sind.

Inhaltsverzeichnis

0 Grundbegriffe

0.1 Aussagen

Aussage	w	f
Wasser ist nass	x	
A. Merkel ist Bundeskanzlerin	x	
Rößler wäre gern Bundeskanzler	?	?
Ein Kaninchen ist eine Pflanze		x
Ein Dreieck hat vier Ecken		x
Jede gerade Zahl größer 2 ist Summer zweier Primzahlen - Goldbach Vermutung	?	?
Wenn 2012 Frauenüberschuss bei Matheprofessorinen herrscht, dann ist die Erde eine Scheibe	x	

$A \Rightarrow B$ ist wahr.
A ist hinreichend für B.
B ist notwendig für A.

$\neg A$ = nicht A $\quad$ $A \vee B$ = A oder B
$A \wedge B$ = A und B $\quad$ $A \Leftrightarrow B$ = A ist äquivalent zu B

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

0.1.1 Satz:

A, B, C Folgende Aussagen sind wahr $\Rightarrow$ „Tautologie“

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$	$\neg(A \vee \neg A)$	$\neg(\neg A)$
w	f	w	w	w
f	w	w	w	f

1. $A \vee (\neg A)$
2. $\neg(A \wedge \neg A)$
3. $\neg(\neg A)$
4. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \neg B$ z.B. A = Die Sonne scheint B = Es ist bewölkt
5. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ z.B. A = Wasser ist trocken B = Es ist Sommer
6. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$ A = Es blitzt B = es donnert

7. $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$
8. $A \Rightarrow B \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$
9. $[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
10. $A \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
11. $A \vee (B \wedge C) \Rightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

4 und 5 sind die De Morgan'sche Gesetze. 7 Ist der Modus ponens, 8 Modus tollens und die 9 Modus barbara (=Transitivität)

0.2 Mengen

0.2.1 Definition: (Cantor)

Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung von stemmten auch wohl unterscheidenen Objekten unserer Anschauungen oder unseren Denkens zu einem Ganzen

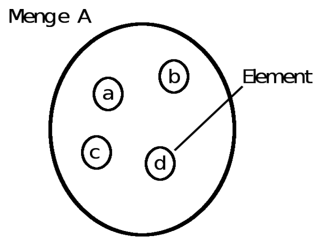

Abbildung 0.1: Eine einfache Menge

$$a \in A \qquad a \notin A \Leftrightarrow \neg(a \in A)$$

0.2.2 Definition:

A, B Mengen

1. $A \subset B \qquad \forall x \in A \Rightarrow x \in B$
2. $A \subsetneqq B \qquad (A \subset B) \wedge (A \neq B)$
3. $A = B \qquad A \subset B, \quad B \subset A$
4. $\varnothing \qquad \varnothing \subset A \quad \forall$ Mengen A
5. $|A| = \#A \qquad$ Anzahl der Elemente
   $|A| < \infty \qquad A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

Bemerkung: {1,2,1} = {1.2}
Beispiel: {1,2,{1,2},{1,2{1,3}}}
gegeben Menge M, $\quad A = \{x \in M | x \text{ spricht italienisch}\} = \{x | (x \in M) \wedge x \text{ spricht italienisch}\}$
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\} \qquad \mathbb{Z}_{\geq 0} = \mathbb{N}_0 = \{01, 2, 3 \cdots\}$

$\mathbb{Q} = \{\frac{1}{b} | b \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}\} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = c \cdot b$
$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$
$\mathbb{R}$ hat die Ordnung $a > b$ wenn a rechts von b auf dem Zahlenstrahl liegt.
$a \geq b : a > b \lor a = b$

0.2.3 Definition: (von weiteren Operationen auf Mengen)

A, B seien Mengen

Durchschnitt: $A \cap B = \{x | x \in A \land x \in B\}$ wenn $A \cap B = \varnothing$ „ disjunkt “ $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x | x \in A$ für alle $i\}$

Vereinigung: $A \cup B = \{x | x \in A \lor x \in B\} \bigcap_{i \in I} A_i = \{x | x \in A$ für mindestens ein $i\}$

Komplement von B in A: $A \setminus B = \{x | x \in A \land x \notin B\}$

symmetrische Differenz: $A \triangle B = \{A \setminus B \cup B \setminus A\} = \{x | x \in A \cup B \land x \notin A \cap B\}$

$p(A) = \{B | B \subset A\}$**:** $A = \{1, 2, 3\}$ $p(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

kartesisches Produkt: $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$
Beispiel: $A = \{a_1, a_2\}, B = \{b_1, b_2\}$
$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2)\}$

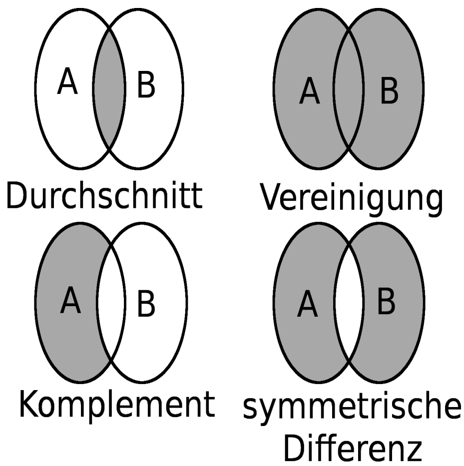

Abbildung 0.2: Darstellung von Operationen auf Mengen

0.2.4 Definition: (Relation)

Eine Relation zwischen zwei MEngen A und B ist eine Teilmenge $R \subset A \times B$ wenn $A = B$ „Relation auf Menge A“
<u>Beispiel:</u>

a) (Martin, London), (Susi, Madrid) $\in A \times B$

b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

1. $R \subset A \times A$ $R = \{(1, 3), (2, 1)\}$

2. $S \subset A \times A \quad S = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ (Gleichheitsrelation)
3. $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad R = \{(a,b)|a < b\}$ (Ordnungsrelation)
4. $B = \{3,4,5,6\} \quad R = \{(3,3),(4,4)\} \subseteq A \times B$
5. Relation auf $\mathbb{N} \quad R = \{(a,b)|a,b \in \mathbb{N}$ und $a|b\}$ $(a|b \Leftrightarrow b = n \cdot a, n \in \mathbb{N})$

0.2.5 Definition: (Funktion, ~Abbildung)

$f : A \to B$ heißt Funktion, wenn $R \subset A \times B$ Relation, bei der jedes Element aus A genau einem Element aus B entspricht, sodass $(a,b) \in R$.
Schreibweise $f(a) = b \quad f : a \mapsto b$

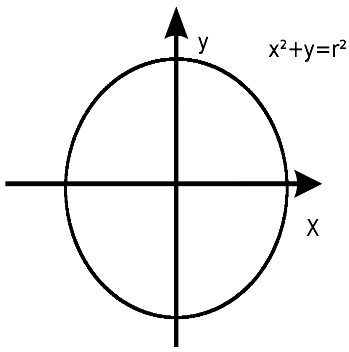

Abbildung 0.3: Graphenkreis

Jeder Graph ist eine Relation, aber nicht unbedingt eine Funktion.

$f : A \to B$ Funktion:

A heißt Definitionsbereich von f

B heißt Wertebereich von f

$a \in A$ heißt Argument von f

$x \subset A \; f(x) = \{b \in B | \exists a \in X mit f(a) = b\}$ heißt Bildmenge von f

$y \subset B \; f^{-1}(y) = \{a \in A | f(a) \in Y\}$ heißt Urbild von Y

Beispiel:
$f : A \to A f(a) = a$ indentische Abbildung
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

0.2.6 Definition: (injektiv, surjektiv, bijektiv)

- injektiv $\forall x \neq y \in A$ gilt $f(x) \neq f(y)$
- surjektiv $\forall b \in B \; \nexists a \in A_i \; f(a) = b$

- bijektiv: injektiv und surjektiv
  injektiv $\Leftrightarrow \forall b \in B$ gilt $|f^{-1}(b)| \leq 1$ (Jedes b hat höchstens ein Urbild)
  surjektiv $\Leftrightarrow \forall b \in B$ gilt $|f^{-1}(b)| \geq 1$ (Jedes b hat mindestens ein Urbild)
  bijektiv $\Leftrightarrow \forall b \in B$ gilt $|f^{-1}(b)| = 1$ (Jedes b hat genau ein Urbild)

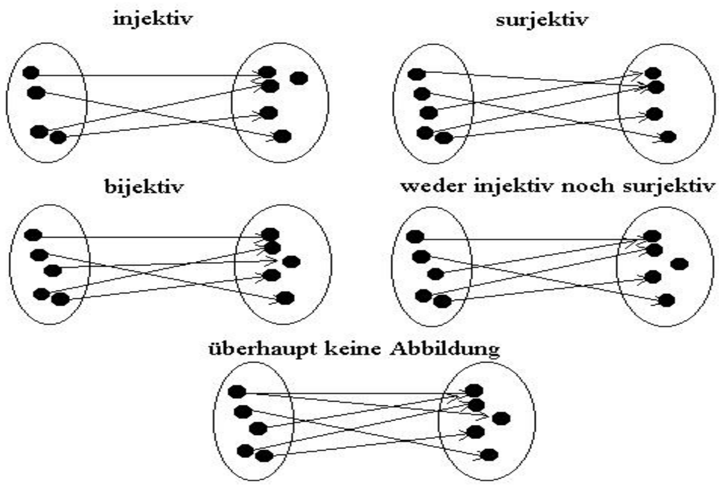

Abbildung 0.4: Mögliche Abbildungen auf einen Blick

1 Der Raum $\mathbb{R}^2$

Abbildungsverzeichnis