# Lineare Algebra und Geometrie 1 WS 12-13

Dozent:
Dr. Cynthia Hog-Angeloni

Mitschrift von:
Sven Bamberger, Bernadette Mohr

LaTeXarbeit von:
Sven Bamberger, Bernadette Mohr

Zuletzt Aktualisiert:
26. Januar 2013

## Zusammenfassung:

http://www.mathematik.uni-mainz.de/Members/dhanke/linearealgebrai2012/lineare-algebra-und-geometrie-i-im-ws-2012-13
**Raum:** Mo S1 & Fr S1
**Uhrzeit:** 08:00-10:00 & 12:00-14:00
**Abgabe:** Freitag 12:00

Dieses Skript wurde erstellt, um sich besser auf die Klausur vorzubereiten und eine ordentliche und für alle Personen lesbare Mitschrift zu haben.

Dieses Dokument garantiert weder Richtigkeit noch Vollständigkeit, da es aus Mitschriften gefertigt wurde und dabei immer Fehler entstehen können. Falls ein Fehler enthalten ist, bitte melden oder selbst korrigieren und neu hochladen.

Hier kleine Notizen zu einzelne Besonderheiten dieses Dokumentes.

1. /*      */ alles zwischen diesen Zeichen sind Kommentare und sollen zum tieferen Verständnis dienen oder besondere Fragestellungen darstellen. Dabei ist zu beachten, das die Notation nciht immer komplett korrekt ist.Es können also kleinere mathematische Fehler auftauchen, welche aber für das Verständnis nicht relevant sind.

# Inhaltsverzeichnis

# 0 Grundbegriffe

## 0.1 Aussagen

| Aussage | w | f |
|---|---|---|
| Wasser ist nass | x | |
| A. Merkel ist Bundeskanzlerin | x | |
| Rößler wäre gern Bundeskanzler | ? | ? |
| Ein Kaninchen ist eine Pflanze | | x |
| Ein Dreieck hat vier Ecken | | x |
| Jede gerade Zahl größer 2 ist Summe zweier Primzahlen - Goldbach Vermutung | ? | ? |
| Wenn 2012 Frauenüberschuss bei Matheprofessorinnen herrscht, dann ist die Erde eine Scheibe | x | |

Für „$A \Rightarrow B$ ist wahr." sagt man auch
$A$ ist hinreichend für $B$.
$B$ ist notwendig für $A$.

| | |
|---|---|
| $\neg A$ = nicht $A$ | $A \vee B$ = $A$ oder $B$ |
| $A \wedge B$ = $A$ und $B$ | $A \Leftrightarrow B$ = $A$ ist äquivalent zu $B$ |

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| w | w | f | w | w | w | w |
| w | f | f | f | w | f | f |
| f | w | w | f | w | w | f |
| f | f | w | f | f | w | w |

### 0.1.1 Satz:

$A, B, C$ seien Aussagen. Folgende Aussagen sind wahr: „Tautologie" (Der Beweis wird durch die Wahrheitstafel erbracht)

| $A$ | $\neg A$ | $A \vee \neg A$ | $\neg(A \vee \neg A)$ | $\neg(\neg A)$ |
|---|---|---|---|---|
| w | f | w | w | w |
| f | w | w | w | f |

1. $A \vee (\neg A)$
2. $\neg(A \wedge \neg A)$
3. $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
4. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ z.B. $A$ = Die Sonne scheint $B$ = Es ist bewölkt
5. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ z.B. $A$ = Wasser ist trocken $B$ = Es ist Sommer
6. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ $A$ = Es blitzt $B$ = es donnert

7. $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$

8. $A \Rightarrow B \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$

9. $[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

10. $A \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

11. $A \vee (B \wedge C) \Rightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

4 und 5 sind die De Morgan'sche Gesetze. 7 Ist der Modus ponens, 8 Modus tollens und die 9 Modus barbara (=Transitivität)

## 0.2 Mengen

### 0.2.1 Definition: (Cantor)

Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohl unterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseren Denkens zu einem Ganzen

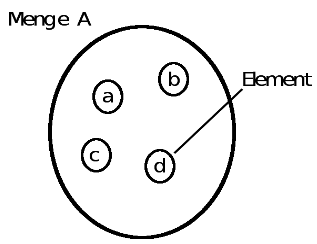


Abbildung 0.1: Eine einfache Menge

$$a \in A \qquad a \notin A \Leftrightarrow \neg(a \in A)$$

### 0.2.2 Definition:

$A, B$ Mengen

1. $A \subset B \qquad \forall x \in A \Rightarrow x \in B$

2. $A \subsetneq B \qquad (A \subset B) \wedge (A \neq B)$

3. $A = B \qquad A \subset B, \quad B \subset A$

4. $\varnothing \qquad \varnothing \subset A \quad \forall$ Mengen $A$

5. $|A| = \#A \qquad$ Anzahl der Elemente
   $|A| < \infty \qquad A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

**Bemerkung:**

$\{1,2,1\} = \{1,2\}$

**Beispiel:**

{1,2,{1,2},{1,2{1,3}}}
gegeben Menge $M$, $A = \{x \in M | x \text{ spricht italienisch}\} = \{x | (x \in M) \wedge x \text{ spricht italienisch}\}$
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \mathbb{N}_0 = \{01, 2, 3 \cdots\}$
$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | b \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}\} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = c \cdot b$
$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$
$\mathbb{R}$ hat die Ordnung $a > b$ wenn $a$ rechts von $b$ auf dem Zahlenstrahl liegt.
$a \geq b : a > b \vee a = b$

### 0.2.3 Definition: (von weiteren Operationen auf Mengen)

$A, B$ seien Mengen

**Durchschnitt:** $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$ wenn $A \cap B = \varnothing$ „ disjunkt “ $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x | x \in A \text{ für alle } i\}$

**Vereinigung:** $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\} \bigcup_{i \in I} A_i = \{x | x \in A \text{ für mindestens ein } i\}$

**Komplement von $B$ in $A$:** $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$

**symmetrische Differenz:** $A \triangle B = \{A \setminus B \cup B \setminus A\} = \{x | x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$

**Potenzmenge $P(A) = \{B | B \subset A\}$:** Beispiel: $A = \{1, 2, 3\}$ $P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

**kartesisches Produkt:** $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$
Beispiel: $A = \{a_1, a_2\}, B = \{b_1, b_2\}$
$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2)\}$

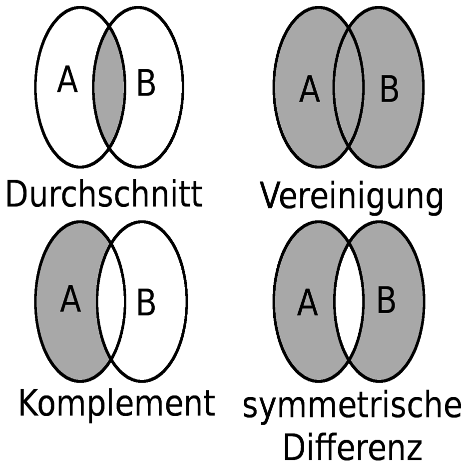


Abbildung 0.2: Darstellung von Operationen auf Mengen

### 0.2.4 Definition: (Relation)

Eine Relation zwischen zwei Mengen $A$ und $B$ ist eine Teilmenge $R \subset A \times B$. Wenn $A = B$ „Relation auf Menge A“

**Beispiel:**

$A$ : Personen $\quad B$ : Städte $\quad R$ : bereits bereist

a) (Martin, London), (Susi, Madrid) $\in A \times B$

b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

1. $R \subset A \times A \quad R = \{(1,3), (2,1)\}$
2. $S \subset A \times A \quad S = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$ (Gleichheitsrelation)
3. $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad R = \{(a,b) | a < b\}$ (Ordnungsrelation)
4. $B = \{3, 4, 5, 6\} \quad R = \{(3,3), (4,4)\} \subseteq A \times B$
5. Teilerrelation auf $\mathbb{N}$ $\quad R = \{(a,b) | a, b \in \mathbb{N}$ und $a|b\}$ wobei $(a|b \Leftrightarrow^{\text{definiert}} b = n \cdot a, n \in \mathbb{N})$

### 0.2.5 Definition: (Funktion, ~Abbildung)

$f : A \to B$ heißt Funktion, wenn $R \subset A \times B$ Relation, bei der jedem Element aus $A$ genau einem Element aus $B$ entspricht, sodass $(a, b) \in R$.
Schreibweise $f(a) = b \quad f : a \mapsto b$

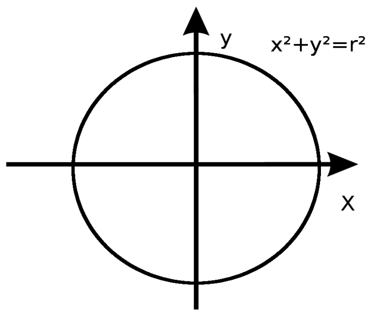


Abbildung 0.3: Graphenkreis

Jeder Graph ist eine Relation, aber nicht unbedingt eine Funktion.

$f : A \to B$ Funktion:

$A$ heißt Definitionsbereich von $f$

$B$ heißt Wertebereich von $f$

$a \in A$ heißt Argument von $f$

$X \subset A$ $f(X) = \{b \in B | \exists a \in X$ mit $f(a) = b\}$ heißt Bildmenge von $X$ unter $f$

$Y \subset B$ $f^{-1}(Y) = \{a \in A | f(a) \in Y\}$ heißt Urbild von $Y$

**Beispiel:**

$f : A \to A, f(a) = a$ identische Abbildung
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

### 0.2.6 Definition: (injektiv, surjektiv, bijektiv)

- injektiv $\forall x \neq y \in A$ gilt $f(x) \neq f(y)$
- surjektiv $\forall b \in B\ \exists a \in A\ f(a) = b$
- bijektiv: injektiv und surjektiv
  injektiv $\Leftrightarrow \forall b \in B$ gilt $|f^{-1}(b)| \leq 1$ (Jedes b hat höchstens ein Urbild)
  surjektiv $\Leftrightarrow \forall b \in B$ gilt $|f^{-1}(b)| \geq 1$ (Jedes b hat mindestens ein Urbild)
  bijektiv $\Leftrightarrow \forall b \in B$ gilt $|f^{-1}(b)| = 1$ (Jedes b hat genau ein Urbild)

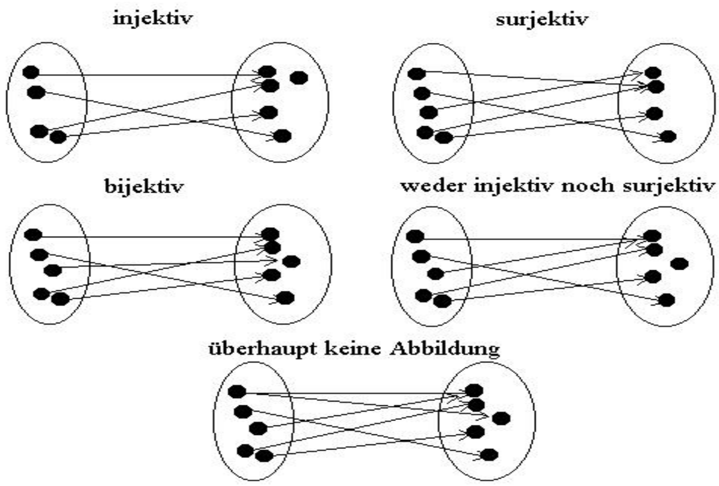


Abbildung 0.4: Mögliche Abbildungen auf einen Blick

# 1 Der Raum $\mathbb{R}^2$

### 1.0.7 Definition:

Ein Vektor $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ist ein Element von $\mathbb{R}^2$.

Entspringt der Vektor in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ = „Ortsvektor “.

Addition: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$

Multiplikation mit Skalar: $\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$

Eigenschaften: $a, b, c$ Vektoren $\lambda, \mu$ reelle Zahlen

1. $\lambda \cdot (a + b) = \lambda a + \lambda b$
2. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$
4. $a + b = b + a$

exemplarischer Beweis:

$(\lambda + \mu)a = (\lambda + \mu) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu)a_1 \\ (\lambda + \mu)a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu a_1 \\ \lambda a_2 + \mu a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu a_1 \\ \mu a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda a + \mu a$

### 1.0.8 Definition: (Basis)

ein Paar von Vektoren $\mathcal{B} = (a, b)$ heißt Basis von $\mathbb{R}^2$, wenn es für <u>jeden Vektor</u> $c$ in $\mathbb{R}^2$ genau <u>ein Paar $(x, y)$</u> von Zahlen gibt, sodass $c = x \cdot a + y \cdot b$.
$x$ und $y$ heißen Koordinaten von $c$ bzgl. $\mathcal{B}$.
Die Basis $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ $\quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>Beispiel:</u>

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \checkmark \text{kanonische Basis}$$

### 1.0.9 Definition: (Determinante)

$det(a, b) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$

## 1.1 Cramersche Regel

Das Gleichungssystem $xa+yb=c$ hat die eindeutige Lösung $x=\frac{det(c,b)}{det(a,b)}$ udn $y=\frac{det(a,c)}{det(a,b)} \Leftrightarrow det(a,b) \neq 0$.

**Beweis:**

„ $\Rightarrow$ “ $\checkmark$

„ $\Leftarrow$ “ Sei $det(a,b) \neq 0$.

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} = \begin{cases} a_1b_2x+b_1b_2y=c_1b_2 \\ \underline{a_2b_1x+b_1b_2y=c_2b_1} \\ x\ det(a,b)=det(c,b) \end{cases}$$

.

$\Rightarrow x=\frac{det(c,b)}{(a,b)}$

analog $y=\frac{det(a,c)}{det(a,b)} \Rightarrow$ Eindeutigkeit

Existenz: $a_1\frac{det(c,b)}{det(a,b)}+b_1\frac{det(a,c)}{det(a,b)}=c_1$

$\Leftrightarrow a_1(c_1b_2-c_2b_1)+b_1(a_1c_2-a_2c_1)=c_1det(a,b)$
$\Leftrightarrow a_1c_1b_2-b_1a_2c_1=c_1(a_1b_2-a_2b_1)$
$\Leftrightarrow 0=0$ (w)

**Korollar:**

$B=(a,b)$ ist Basis genau dann, wenn $det(a,b)\neq 0$ ist $det(a,b)=0$ und $(x,y)$ Lösung, so auch $(x+\lambda b_2, y-\lambda a_2$ denn $a_1(x+\lambda b_2)+b_1(y-\lambda a_2)=\underbrace{a_1x+b_1y}_{c}+\lambda\underbrace{(a_1b_2-b_1a_2)}_{0}$

**Korollar:**

$det(a,b)=0 \Rightarrow$ Es gibt entweder keine oder unendliche viele Lösungen.

## 1.2 Geraden

### 1.2.1 Definition: (Gerade)

Eine Gerade $l$ in $\mathbb{R}^2$ ist eine Menge der Form $l=a+\mathbb{R}b=\{a+\lambda b|\lambda\in\mathbb{R}\}$ für $b\neq(0)$
$a$ : „Stützvektor“ $b$ : „Richtungsvektor“, $b^\perp=\begin{pmatrix}-b_2\\b_1\end{pmatrix}$ : „Normalenvektor“

**Beispiel:**

$a=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

### 1.2.2 Satz 1.2

Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist eine Gerade genau dann, wenn sie Lösungsmenge einer Gleichung $\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 : \alpha x+\beta y=\gamma\}$ ist. $\alpha$ und $\beta$ nicht beide Null.

**Beweis:**

$l = a + \mathbb{R}b$
Dann erfüllt jeder Punkt $(a_1 + tb_1, a_2 + tb_2)$ die Gleichung $b_2 a_1 - b_1 a_2 = b_2 x - b_1 y$.
DENN: $b_2(a_1 + tb_1) - b_1(a_2 + tb_2) = b_2 a_1 - b_1 a_2 = det(a, b)$ Erfüllt umgekehrt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ die Gleichung $\alpha x + \beta y = \gamma$ und ist $\alpha \neq 0$, dann folgt $x = \frac{-\beta}{\alpha} y + \frac{\gamma}{\alpha}$.
Also ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ein Punkt der Geraden $a + \mathbb{R}b$ mit $a = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$

**Beispiel:**

$$x - y = 1 \qquad a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 1.3 Lineare Abbildungen

$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt linear, wenn für jedes $a, b \in \mathbb{R}^2$ gilt: $A(x\vec{a} + y\vec{b}) = xA(\vec{a}) + yA(\vec{b})$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ können beliebig vorgegeben werden. Anderseits ist $A$ durch diese bestimmt.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}}_{(2\times 2)-\text{Matrix}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 x + b_1 y \\ a_2 x + b_2 y \end{pmatrix} = xa + by$$

Eigenschaft: Die erste Spalte von $A$ ist ist der Bildvektor von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Beispiel:**

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ repräsentiert die identische Abbildung.

**Satz:**

sind $A, B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear, so auch die Verknüpfung $A \circ B$.

**Beweis:**

$A(B(xa + yb)) = A(xB(a) + yB(b)) = xAB(a) + yAB(b)$
Komposition linearer Abbildungen:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

$$A \circ B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 x_1 + d_1 x_2 \\ c_2 x_1 + d_2 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 c_1 x_1 + a_1 d_1 x_2 & b_1 c_1 x_1 + b_1 d_1 x_2 \\ a_2 c_1 x_1 + a_2 d_1 x_2 & b_2 c_2 x_1 + b_2 d_2 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 c_1 + c_2 b_1 & a_1 d_1 + b_1 d_2 \\ a_2 c_1 + b_2 c_2 & a_2 d_1 + b_2 d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_1 + b_1c_2 & a_1d_1 + b_1d_2 \\ a_2c_1 + b_2c_2 & a_2d_1 + b_2d_2 \end{pmatrix}$$

Matrixmultiplikation entspricht Komposition von Abbildungen
Sie ist im Allgemeinen nicht Kommutativ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

$$. \qquad \neq$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 2 & 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 23 & 46 \end{pmatrix}$$

**Satz:**

Matrixmultiplikation ist assoziativ.

**Beweis:**

$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
Interpretiere $A, B, C$ als Abbildungen
$A \circ (B \circ C)(a) = A \circ B(C(a)) = A(B(C(a)))$
$(A \circ B) \circ C(a) = (A \circ B)C(a) = A(B(C(a)))$

**Satz:**

$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineare Abbildungen
$A$ ist injektiv $\Leftrightarrow$ $A$ ist surjektiv

**Beweis:**

$Ax = b$
Existenz von $x \Leftrightarrow$ Surjektivität
Eindeutigkeit von $x \Leftrightarrow$ Injektivität
$det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ injektiv $\Leftrightarrow A$ surjektiv.
/* Durch Benutzung der Cramerschen Regel */

## 1.4 Inverse Matrix, Basiswechsel

Ist $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda a_2 & \lambda b_2 \end{pmatrix}$

**Satz:**

Für $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ mit $det(A) \neq 0$ gilt:
$A^{-1} = \frac{1}{det(a)} \cdot \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$

**Beweis:**

$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{det(a)} \cdot \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$
$= \frac{1}{det(a)} \cdot \begin{pmatrix} det(A) & 0 \\ 0 & det(A) \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$A^{-1} \cdot A$ analog $\Rightarrow A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathcal{B} = (\vec{b_1}, \vec{b_2})$ Basis $\rightsquigarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = B \qquad \vec{b_1} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix}, \qquad \vec{b_2} = \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \end{pmatrix}$
$\vec{a} = x_1\vec{b_1} + x_2\vec{b_2} = B\vec{x} \qquad : \vec{x} = B^{-1}\vec{a}$
Die Koordinaten von $a$ bzgl. $\mathcal{B}$ sind durch $B^{-1}(\vec{a})$ gegeben, denn man muss das Gleichungssystem $x_1b_1 + x_2b_2 = a$ nach $x_1$ und $x_2$ lösen.
$\mathcal{C} := (c_1, c_2)$. $A$ ist bestimmt durch $A(c_1)$ und $A(c_2)$.
$A(c_1) = d_{11}b_1 + d_{21}b_2 \qquad A(c_2) = d_{12}b_1 + d_{22}b_2$
${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} \\ d_{12} & d_{22} \end{pmatrix}$ Matrix von $A$ bzgl. $\mathcal{B}, \mathcal{C}$

**Satz:**

$\mathcal{B} = (\vec{b_1}\vec{b_2}) \qquad \mathcal{C} = (\vec{c_1}, \vec{c_2})$
$B$ bzw. $C$ Matrix mit den Spalten $\vec{b_1}, \vec{b_2}$ bzw. $\vec{c_1}, \vec{c_2}$ und ist $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear. Dann gilt:
${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{C}} = B^{-1}AC$

**Beweis:**

In der ersten Spalte von $C$ steht das Bild $c_1$ von $e_1$
In der ersten Spalte von $AC$ steht das Bild von $c_1$ unter $A$
In der ersten Spalte von $B^{-1}AC$ stehen die Koordinaten von $A(c_1)$ bzgl. $\mathcal{B}$ Analog gilt dies für $c_2$.

**Beispiel:**

$\mathcal{B} = (b_1, b_2) \quad b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$
$A$ gegeben durch $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
$${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -16 & -45 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}$$

**Satz:**

$A, B$ invertierbar $\Rightarrow A \cdot B$ invertierbar, Inverse $B^{-1}A^{-1}$

**Beweis:**

$(AB)(A^{-1}B^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1}|E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$B^{-1}A^{-1}AB = E\checkmark$
Im Allgemeinen: $E \neq ABA^{-1}B^{-1}$!

**Beispiel:**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ Frage: Gibt es eine Basis $b_1 b_2$ : ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$?
Insbesondere $A(b_1) = 7b_1 \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x \\ 7y \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{array}{rcl} x + 12y & = & 7x \\ 2x + 3y & = & 7y \end{array} \underset{\text{Regel}}{\overset{\text{Cramersche}}{\Rightarrow}} b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A(b_2) = -3b_2 \underset{\text{Regel}}{\overset{\text{Cramersche}}{\Rightarrow}} b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

**Probe:**

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 35 & 0 \\ 0 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

**Satz:**

Sei $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ linear. Dann gibt es Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ von $\mathbb{R}^2$, sodass ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{C}}$ eine der Formen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Beweis:**

Setze $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{a} \qquad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{b}$

1. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{b} \qquad \mathcal{B} = \mathcal{E} = \mathcal{C}\checkmark$

2. Wenn $\mathcal{A} = (\vec{a}, \vec{b})$ Basis, $\mathcal{C} = \mathcal{E} \qquad \mathcal{B} = \mathcal{A}$
   ${}_{\mathcal{A}}A_{\mathcal{B}} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\vec{a}, \vec{b}$ keine Basis, aber $\vec{a} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{b} = \lambda a$ und $A\begin{pmatrix} \lambda \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{a}_\perp)$
   $${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{C}} = B^{-1}A \cdot C = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 1.5 Satz von Pythagoras, Länge und Skalarprodukt

Fläche des Parallelogramms gleich $|det(\vec{a}, \vec{b})|$
$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b_2 \neq 0 \lambda = \frac{-a_2}{b_2}, x = a_1 - \frac{a_2 b_1}{b_2}$
Rechteck hat Fläche $|a_1 b_2 - a_2 b_1| = |det(a, b)|$ = Fläche des Parallelogramms.

### 1.5.1 Satz des Pythagoras (1. Version)

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ hat Länge $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

**Beweis:**

$det(\vec{a}, \vec{a}_\perp) = a_1^2 a_2^2$ ist das Quadrat der Seitenlänge $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

**Definition:**

Der Abstand zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ $\quad \|\vec{a} - \vec{b}\|$

**Bemerkung:**

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_1 b_2 + a_2 b_2 = 0$

„$\Rightarrow$“ $a_1 b_1 + a_2 b_2 = -\lambda a_1 a_2 + \lambda a_1 a_2$

„$\Leftarrow$“ Falls $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \lambda = 0$
o.E. $a_1 \neq 0$
setze $\lambda : b_2 = \lambda a_1 \overset{\text{Vor.}}{\Rightarrow} 0 = a_1 b_1 + \lambda a_1 \cdot \lambda a_1 a_2 \Rightarrow b_1 = -\lambda a_2$

**Definition:**

Skalarprodukt
Das von $\vec{a}$ und $\vec{b} < \vec{a}, \vec{b} >= a_1 b_1 + a_2 b_2$.

**Eigenschaften des Skalarprodukts**

$< \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} >= (a_1 + b_1) c_1 + (a_2 + b_2) c_2 =< a, c > + < b, c >$
$< \lambda \vec{a}, \vec{b} >= \lambda < \vec{a}, \vec{b} >$
$< \vec{a}, \vec{b} >=< \vec{b}, \vec{a} >$

### 1.5.2 Pythagoras (allgemein)

$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$

**Beweis:**

$< \vec{a}, \vec{b} >= 0$
$\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = (a_1 b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$

### 1.5.3 Satz des Thales

$\vec{a}, \vec{b} : \|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| \Rightarrow \vec{a} - \vec{b} \perp \vec{a} + \vec{b}$

**Beweis:**

$< \vec{a} - \vec{b}, \vec{a}\vec{b} >=< \vec{a}, \vec{b} > - < \vec{b}, \vec{a} > + < \vec{a}, \vec{b} > - < \vec{b}, \vec{b} >= 0$

**Satz:**

Sei $l$ Gerade, $c \notin l$.
Dann existiert genau ein „Fußpunkt" $D \in l : c - D \perp l$

**Beweis:**

$\vec{n} \perp l$. Schneide $c + \mathbb{R}\vec{n}$ mit $l$.
$det(\vec{n}, \vec{n}^{\perp}) = \|\vec{n}\|^2 \neq 0 \Rightarrow$ es existiert $D$

**Höhensatz**

$p = \|D - B\| \qquad a = \|D - A\| \qquad h = \|D - C\| \Rightarrow h^2 = pq$

**Beweis:**

$a^2 + b^2 = c^2 = p^2 + 2pq + q^2$
$a^2 = h^2 + p^2$
$b^2 = h^2 + q^2$

$\Rightarrow p^2 + 2pq + q^2 = 2h^2 + p^2 + q^2$
$\Leftrightarrow 2pq = 2h^2$
$\Leftrightarrow pq = h^2 \qquad \square$

**Kathetensatz**

$a^2 = p \cdot c, b^2 = q \cdot c$

**Beweis:**

$a^2 = c^2 - b^2 = p^2 + 2pq + q^2 - (h^2 + q^2) = p^2 + 2pq - h^2 = p^2 + 2pq - a^2 + p^2$

$2a^2 = 2pq + 2p^2$
$\Leftrightarrow a^2 = pq + 2p^2 \Rightarrow$ Behauptung ist analog für $b^2 = qc \qquad \square$

## 1.6 Bewegungen

**Definition:**

Eine Abbildung heißt Bewegung oder Isometrie wenn $\forall a, b \in \mathbb{R}^2 \qquad \|A(c) - A(b)\| = \|\vec{a} - \vec{b}\|$.

**Satz:**

$A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ Bewegung mit $A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Dann ist $A$ linear. Es gibt $c,s\in\mathbb{R}$ mit $c^2+s^2=1$, sodass die Matrix von $A$ $R_{c,s}=\begin{pmatrix}c & -s\\ s & c\end{pmatrix}$ $det(R_{c,s})=1$ oder $S_{c,s}=\begin{pmatrix}c & s\\ s & -c\end{pmatrix}$ $det(S_{c,s})=-1$

**Beweis:**

$A$ ist Isometrie.
$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\s\end{pmatrix}$ $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\u\end{pmatrix}$ $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z & w\end{pmatrix}$
$c^2+s^2=1=t^2+u^2$
$(c-t)^2+(s-u)^2=2=c^2=2+c+t^2+s^2-2su+u^2$ ?
$=2-2\underbrace{(tc+su)}_{\Rightarrow 0}$
$\Rightarrow\begin{pmatrix}t\\u\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}-s\\c\end{pmatrix},\lambda=\pm1$
$A$ linear: z.z. $\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xx\pm sy\\ sx\pm cy\end{pmatrix}x^2+y^2=z^2+w^2$
$(x-1)^2+y^2\overset{\mathrm{I}}{=}(z-c)^2+(w-s)^2$
$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2=z^2-2zc+c^2+w^2-2sw+s^2$
$\Rightarrow x=cz+sw$
$(z+s)^2+(w-c)^2=x^2+(y-1)^2$
$\Leftrightarrow 2sz-2cw=-2y$
$\Rightarrow y=-sz$
$\begin{pmatrix}c & -s\\ s & c\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}c & s\\ -s & c\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$
$(R_{c,s}=\begin{pmatrix}c & -s\\ s & c\end{pmatrix}, S_{c,s}=\begin{pmatrix}c & s\\ s & -c\end{pmatrix})$

**Idee:**

Spiegelung ges: $\vec{a}:A(\vec{a})=\vec{a}$

**Fall I:**

$\begin{cases} cx-sy=x & s\neq 0 \text{ sonst } \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\s\end{pmatrix}, x\neq q \text{ (trivial)}\\ sx-cy=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (c-1)x-sy=0 & \overset{s\neq0}{\Rightarrow} y=\frac{c-1}{s}x\\ sx+(c-a)y=0 & \overset{:x}{\Rightarrow} s+\frac{(c-1)^2}{s}=0\end{cases}$
$1-x^2+(c-1)^2=0\Rightarrow 2=2c,\ c=1\Rightarrow s=0$ $\lightning$

**Fall II:**

$\begin{cases} cx+sy=x\\ sx-cy=y\end{cases}$ $\Rightarrow$2. Gleichung ist Folge der Ersten
$y=\frac{1-c}{s}x\to s^2=(1+c)(1-c)\Rightarrow y=\frac{s}{1+c}x$
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c+1\\s\end{pmatrix}$ bis auf skalare Vielfache noch zz., dass $R$ und $S$ Isometrien sind:

$\|F(\vec{a})\|^2 = (cx - sy)^2 + (sx + cy)^2 = c^2x^2 - 2cxsy + s^2y^2 + s^2x^2 + 2cxsy + c^2y^2 = x^2 + y^2 = \|\vec{a}\|^2$ /* $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$\|R(\vec{a}) - R(\vec{b})\| = \|R(\vec{a} - \vec{b})\| = \|\vec{a} - \vec{b}\|$ Abstandserhaltend !

**Satz:**

1. Das Produkt zweier Spiegelungen ist eine Drehung.

2. Jede Drehung lässt sich als Produkt zweier Spiegelungen beschreiben.

1. $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + bd & ad - bc \\ bc - ad & bd + ac \end{pmatrix} \Rightarrow$ von Typ $\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} = R_{c,s}$

2. $\begin{pmatrix} -s & c \\ c & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$

**Satz:**

Die Verknüpfung zweier Drehungen ist einer Drehung.
Die Inverse einer Drehung ist eine Drehung.

**Beweis:**

$R_{c,s} \cdot R_{t,u} = R_{ct-su,cu+st} = R_{t,u} \cdot R_{c,s} \Leftrightarrow R_{t,u} \cdot R_{c,s}$
$R_{c,s} \cdot R_{c,s} = R_{1,0} = Id$

**Satz:**

$\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$, gibt es eindeutig bestimmtes $\lambda \in \mathbb{R}$ :
Drehung $R(\vec{a}) = \lambda \cdot b$
$R(\vec{0}) = \vec{0}$
Existenz $\overset{!}{\Rightarrow}$ Eindeutigkeit
$R\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$
$T := R_{c,-s}\, R\, R_{tu}$
$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow R = R_{cs} \circ R_{t-u} \Rightarrow$ Eindeutigkeit
$R := R_{cs} \circ R_{t-u}$
$R(\vec{a}) = R_{cs} \circ R_{t-u}(\vec{a}) = R_{c,s}\|a\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\|\vec{a}\|\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$

## 1.7 Isometrie

$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$\|Av\| = \|v\|$

| Drehung | Spiegelung |
|---|---|
| $det(a) = 1$ | $det(A) = 1$ |
| $R_{c,s} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$ | $S_{c,s} = \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}$ |
| $c^2 + s^2 = 1$ | $c^2 + s^2 = 1$ |

**Definition (Winkel):**

Sind $a, b \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ Vektoren dann heißt die eindeutige Drehung $\alpha = R_{c,s}$ mit $\alpha(a) = \lambda \cdot b$, $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ der Winkel zwischen $a$ und $b$, und wir schreiben $\alpha :=< (a, b)$
Die Summe $\alpha + \beta$ zweier Winkel $\alpha$ und $\beta$ definieren wir als $\alpha + \beta := \alpha \circ \beta$ (beachte $\alpha + \beta = \beta + \alpha$)
Das negative eines Winkels $\alpha$ definieren wir als $-\alpha := \alpha^{-1}$ d.h. ist $\alpha = R_{cs} \Rightarrow \alpha^{-1} = R_{c,-s}$ Sind $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ Punkte, dann definieren wir den Winkel an Punkt $A$ des Tripels $(ABC)$ als $< (B, A, C) :=< (B-A, C-A)$.

**Definition (Winkelhalbierende):**

Ist $\alpha$ ein Winkel, dann existiert ein Winkel $\beta$ mit $\beta + \beta = \alpha$. Dieser heißt der halbe Winkel zu $\alpha$ oder auch die Winkelhalbierende zu $\alpha$.

**Satz:**

Ist $\alpha = R_{c,s}$ so kann man $\beta = R_{t,u}$ wählen mit
$t = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+c)}$, $u = \sqrt{\frac{1}{2}(1-c)}$ wobei „ + “ $\Leftrightarrow s \geq 0$.

**Beweis:**

Nehmen wir an, dass $\alpha = 2\beta$ mit $\alpha = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} t & -u \\ u & t \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & -u \\ u & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & -s \\ u & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 - u^2 & -2tu \\ 2tu & t^2 - u^2 \end{pmatrix}$
Es gilt also $c = t^2 - u^2$, $s = 2tu$

$$\begin{aligned} c \cdot 4t^2 &= 4t^4 - 4u^2t^2 \\ &= 4t^4 - s^2 \\ &= 4t^4 - (1 - c^2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow t^4 - c \cdot t^2 - \frac{1}{4}(1 - c^2) = 0$
$\overset{\text{pq}}{\Rightarrow} t^2 = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{1}{4}(1 - c^2)} = \frac{c}{2} \pm \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(c \pm 1) \geq 0$

Wir wissen $1 = c^2 + s^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq c \leq 1$
wegen $1 = t^2 + u^2 \Rightarrow 0 \leq t^2 \leq 1$
Würden oben ein „-“ stehen, wäre $t^2 < 0$ für $c < 0$↯
$\Rightarrow t^2 = \frac{1}{2}(c+1) \Rightarrow t = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(c+1)}$
Analog folgt $u = \sqrt{\frac{1}{2}(1-c)}$
$t^2 - u^2 = \frac{1}{2}(c+1) - \frac{1}{2}(1-c) = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c = c$
$2tu = 2 \cdot (\pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+c) \cdot \frac{1}{2}(1-c)} = \pm 2\sqrt{\frac{1}{4}\underbrace{(1-c^2)}_{s^2}} = \pm\sqrt{s^2} = \pm|s| \overset{!}{=} s$
Die letzte Gleichheit gilt genau dann, wenn $\pm$ das Vorzeichen von $s$ ist (d.h. „+“ $\Leftrightarrow s \geq 0$).

Wir messen Winkel, indem wir der Drehung $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ den Wert 180° oder $\pi$ zu.
Durch das Halbieren und Addieren von Winkeln können wir jeden Winkel eine Zahl $0° \leq x \leq 360°$ zuordnen, die wir das Winkelmaß nennen.
z.B. $\frac{1}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$

Tatsächlich lässt dich jede Zahl $0 \leq x \leq 360$ schreiben als $360° \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{2^n}, \qquad a_n \in \mathbb{N}_0$

Was ist der halbe Winkel zu $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ?

$R_{t,u}$ mit $t = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+c)} = 0\, u = \sqrt{\frac{1}{2}(1-c)} = 1$ d.h. $R_{t,u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} 90° = \overset{\mathrm{II}}{\alpha}$

# 2 Der Raum $\mathbb{R}^3$

Elemente $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ wie in $\mathbb{R}^3$: Addition, skalare Multiplikation.

**Definition:**

$a \in \mathbb{R}^3$:

1. $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
2. $<\vec{a}, \vec{b}> = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
3. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig $\vec{b} = t\vec{a}$ oder $\vec{a} = t\vec{b}$ linear unabhängig $\overset{\text{Definition}}{\Leftrightarrow}$ nicht linear abhängig.

**Rechenregeln:**

1. $<\vec{a}, \vec{b}> = <\vec{b}, \vec{a}>$
2. $<\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}> =< \vec{a}, \vec{c} > + < \vec{b}, \vec{c} >$ (Bilinearität)
3. $< \lambda\vec{a}, \vec{b} >= \lambda < \vec{a}, \vec{b} >$
4. $< \vec{a}, \vec{b} >= \|\vec{a}\|^2$

**Satz:**

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ $(\vec{a} + \vec{0}, \vec{b} + \vec{0})$, $\vec{p} = \frac{<\vec{a},\vec{b}>}{\|\vec{a}\|^2} \cdot \vec{a}$ ist der eindeutig bestimmte Punkt mit mit $\mathbb{R}\vec{a}$ mit minimalem Abstand zu $\vec{b}$: $\left\|\vec{b}\right\|^2 - \|\vec{p}\|^2 + \left\|\vec{b} - \vec{p}\right\|^2$

**Beweis**

$$\left\|t\vec{a} - \vec{b}\right\|^2 =< t\vec{a} - \vec{b}, t\vec{a} - \vec{b} >$$

$$= t^2 < \vec{a}, \vec{a} > -2t < \vec{a}, \vec{b} > + < \vec{b}, \vec{b} >$$

$$= \left( + < \vec{a}, \vec{a} > - \frac{<\vec{a},\vec{b}>}{<\vec{a},\vec{a}>} \right)^2 + < \vec{b}, \vec{b} > - \frac{<\vec{a},\vec{b}>^2}{\|\vec{a}\|^2}$$

Minimum: $t = \frac{<\vec{a},\vec{b}>}{\|\vec{a}\|^2}$ ergibt den Wert $\left\|\vec{b}\right\|^2 - \frac{<\vec{a},\vec{b}>^2}{\|\vec{a}\|^2}$

$\cos\varphi = \frac{Ankathete}{Hypothenuse} = \frac{\|\vec{p}\|}{\|\vec{b}\|} = \frac{\frac{1}{\|\vec{a}\|} \cdot <\vec{a},\vec{b}>}{\|\vec{b}\|} = \frac{<\vec{a},\vec{b}>}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$ Definiere $0° \leq < \vec{a}, \vec{b} > \leq 180° : < \vec{a}, \vec{b} > = \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \cos\varphi$

**Satz (Parallelogrammgesetz)**

$\left\|\vec{a} + \vec{b}\right\| + \left\|\vec{a} - \vec{b}\right\|^2 = 2\,\|\vec{a}\|^2 + 2\left\|\vec{b}\right\|^2$

**Beweis**

$< \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} > + < \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} > = 2 < \vec{a}, \vec{a} > +2 < \vec{b}, \vec{b} >$

### 2.0.1 Geraden und Ebenen

**Definition**

Gerade : $\vec{b} + \mathbb{R}\vec{a}, \vec{a} \neq \vec{0}$

# Abbildungsverzeichnis