

Lineare Algebra und Geometrie 1 WS 12-13

Dozent:
Dr. Cynthia Hog-Angeloni

Mitschrift von:
Sven Bamberger, Bernadette Mohr, Sahra Schreyer

L^AT_EXarbeit von:
Sven Bamberger, Bernadette Mohr

Zuletzt Aktualisiert:
9. Januar 2013



Zusammenfassung:

Bei der Lineare Algebra und Geometrie

<http://www.mathematik.uni-mainz.de/Members/dhanke/linearealgebrai2012/lineare-algebra-und-geometrie-i-im-ws-2012-13>

Raum: Mo S1 & Fr S1

Uhrzeit: 08:00-10:00 & 12:00-14:00

Abgabe: Freitag 12:00

Dieses Skript wurde erstellt, um sich besser auf die Klausur vorzubereiten und eine ordentliche und für alle Personen lesbare Mitschrift zu haben.

Dieses Dokument garantiert weder Richtigkeit noch Vollständigkeit, da es aus Mitschriften gefertigt wurde und dabei immer Fehler entstehen können. Falls ein Fehler enthalten ist, bitte melden oder selbst korrigieren und neu hochladen.

Hier kleine Notizen zu einzelne Besonderheiten dieses Dokumentes.

1. /* */ alles zwischen diesen Zeichen sind Kommentare und sollen zum tieferen Verständnis oder Besondere Fragestellungen darstellen. Dabei ist zu beachten, das die Notation nicht immer komplett korrekt ist. Es können also kleinere mathematische Fehler auftauchen, welche aber für das Verständnis relevant sind.

Inhaltsverzeichnis

0	Grundbegriffe	1
0.1	Aussagen	1
0.2	Mengen	2
1	Der Raum \mathbb{R}^2	7
1.1	Cramersche Regel	8
1.2	Geraden	8
1.3	Lineare Abbildungen	9

0 Grundbegriffe

0.1 Aussagen

Aussage	w	f
Wasser ist nass	x	
A. Merkel ist Bundeskanzlerin	x	
Rößler wäre gern Bundeskanzler	?	?
Ein Kaninchen ist eine Pflanze		x
Ein Dreieck hat vier Ecken		x
Jede gerade Zahl größer 2 ist Summe zweier Primzahlen - Goldbach Vermutung	?	?
Wenn 2012 Frauenüberschuss bei Matheprofessorinnen herrscht, dann ist die Erde eine Scheibe	x	

$A \Rightarrow B$ ist wahr.
 A ist hinreichend für B .
 B ist notwendig für A .

$\neg A$ = nicht A $A \vee B$ = A oder B
 $A \wedge B$ = A und B $A \Leftrightarrow B$ = A ist äquivalent zu B

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

0.1.1 Satz:

A, B, C Folgende Aussagen sind wahr \Rightarrow „Tautologie“

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$	$\neg(A \vee \neg A)$	$\neg(\neg A)$
w	f	w	w	w
f	w	w	w	f

1. $A \vee (\neg A)$
2. $\neg(A \wedge \neg A)$
3. $\neg(\neg A)$
4. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ z.B. A = Die Sonne scheint B = Es ist bewölkt
5. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ z.B. A = Wasser ist trocken B = Es ist Sommer
6. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$ A = Es blitzt B = es donnert

0 Grundbegriffe

7. $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$
8. $A \Rightarrow B \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$
9. $[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
10. $A \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
11. $A \vee (B \wedge C) \Rightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

4 und 5 sind die De Morgan'sche Gesetze. 7 Ist der Modus ponens, 8 Modus tollens und die 9 Modus barbara (=Transitivität)

0.2 Mengen

0.2.1 Definition: (Cantor)

Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung von stemnten auch wohl unterscheidenen Objekten unserer Anschauungen oder unseren Denkens zu einem Ganzen

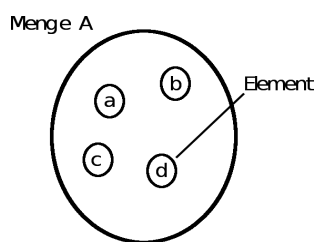


Abbildung 0.1: Eine einfache Menge

$$a \in A \quad a \notin A \Leftrightarrow \neg(a \in A)$$

0.2.2 Definition:

A, B Mengen

1. $A \subset B \quad \forall x \in A \Rightarrow x \in B$
2. $A \subsetneq B \quad (A \subset B) \wedge (A \neq B)$
3. $A = B \quad A \subset B, \quad B \subset A$
4. $\emptyset \quad \emptyset \subset A \quad \forall \text{ Mengen } A$
5. $|A| = \#A \quad \text{Anzahl der Elemente}$
 $|A| < \infty \quad A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

Bemerkung: $\{1, 2, 1\} = \{1, 2\}$

Beispiel: $\{1, 2, \{1, 2\}, \{1, 2\{1, 3\}\}\}$

gegeben Menge M , $A = \{x \in M | x \text{ spricht italienisch}\} = \{x | (x \in M) \wedge x \text{ spricht italienisch}\}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\} \quad \mathbb{Z}_{\geq 0} = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{1}{b} \mid b \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z} \right\} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = c \cdot b$$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

\mathbb{R} hat die Ordnung $a > b$ wenn a rechts von b auf dem Zahlenstrahl liegt.

$$a \geq b : a > b \vee a = b$$

0.2.3 Definition: (von weiteren Operationen auf Mengen)

A, B seien Mengen

Durchschnitt: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ wenn $A \cap B = \emptyset$ „disjunkt“ $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A \text{ für alle } i\}$

Vereinigung: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A \text{ für mindestens ein } i\}$

Komplement von B in A : $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

symmetrische Differenz: $A \triangle B = \{A \setminus B \cup B \setminus A\} = \{x \mid x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$

$$p(A) = \{B \mid B \subset A\}: \quad A = \{1, 2, 3\} \quad p(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

kartesisches Produkt: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

Beispiel: $A = \{a_1, a_2\}, B = \{b_1, b_2\}$

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2)\}$$

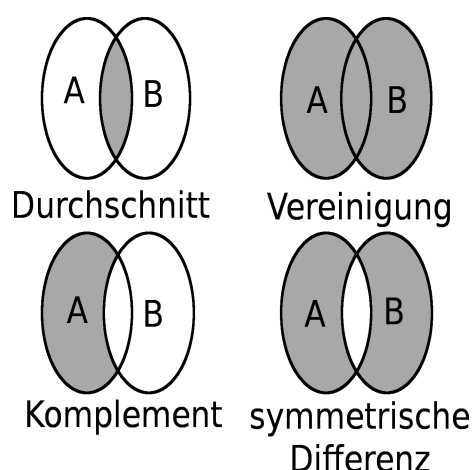


Abbildung 0.2: Darstellung von Operationen auf Mengen

0.2.4 Definition: (Relation)

Eine Relation zwischen zwei Mengen A und B ist eine Teilmenge $R \subset A \times B$ wenn $A = B$ „Relation auf Menge A “

Beispiel:

a) $(\text{Martin}, \text{London}), (\text{Susi}, \text{Madrid}) \in A \times B$

b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

1. $R \subset A \times A \quad R = \{(1, 3), (2, 1)\}$

0 Grundbegriffe

2. $S \subset A \times A \quad S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ (Gleichheitsrelation)
3. $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad R = \{(a, b) | a < b\}$ (Ordnungsrelation)
4. $B = \{3, 4, 5, 6\} \quad R = \{(3, 3), (4, 4)\} \subseteq A \times B$
5. Relation auf $\mathbb{N} \quad R = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{N} \text{ und } a|b\} \quad (a|b \Leftrightarrow b = n \cdot a, n \in \mathbb{N})$

0.2.5 Definition: (Funktion, ~Abbildung)

$f : A \rightarrow B$ heißt Funktion, wenn $R \subset A \times B$ Relation, bei der jedes Element aus A genau einem Element aus B entspricht, sodass $(a, b) \in R$.

Schreibweise $f(a) = b \quad f : a \mapsto b$

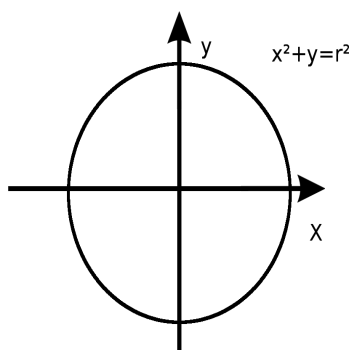


Abbildung 0.3: Graphenkreis

Jeder Graph ist eine Relation, aber nicht unbedingt eine Funktion.

$f : A \rightarrow B$ Funktion:

A heißt Definitionsbereich von f

B heißt Wertebereich von f

$a \in A$ heißt Argument von f

$x \in A \quad f(x) = \{b \in B | \exists a \in X \text{ mit } f(a) = b\}$ heißt Bildmenge von f

$y \in B \quad f^{-1}(y) = \{a \in A | f(a) \in Y\}$ heißt Urbild von Y

Beispiel:

$f : A \rightarrow A \quad f(a) = a$ identische Abbildung

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

0.2.6 Definition: (injektiv, surjektiv, bijektiv)

- injektiv $\forall x \neq y \in A$ gilt $f(x) \neq f(y)$
- surjektiv $\forall b \in B \quad \exists a \in A_i \quad f(a) = b$

- bijektiv: injektiv und surjektiv
 injektiv $\Leftrightarrow \forall b \in B$ gilt $|f^{-1}(b)| \leq 1$ (Jedes b hat höchstens ein Urbild)
 surjektiv $\Leftrightarrow \forall b \in B$ gilt $|f^{-1}(b)| \geq 1$ (Jedes b hat mindestens ein Urbild)
 bijektiv $\Leftrightarrow \forall b \in B$ gilt $|f^{-1}(b)| = 1$ (Jedes b hat genau ein Urbild)

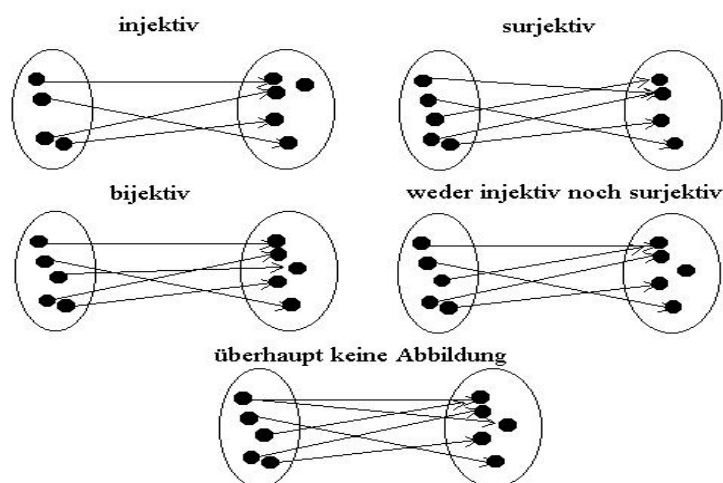


Abbildung 0.4: Mögliche Abbildungen auf einen Blick

1 Der Raum \mathbb{R}^2

1.0.7 Definition:

Ein Vektor $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ist ein Element von \mathbb{R}^2 .

Entspricht der Vektor in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ = „Ortsvektor“.

Addition: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$

Multiplikation mit Skalar: $\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$

Eigenschaften: a, b, c Vektoren λ, μ reelle Zahlen

1. $\lambda \cdot (a + b) = \lambda a + \lambda b$

2. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$

3. $(a + b) + c = a + (b + c)$

4. $a + b = b + a$

exemplarischer Beweis:

$$(\lambda + \mu)a = (\lambda + \mu) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu)a_1 \\ (\lambda + \mu)a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu a_1 \\ \lambda a_2 + \mu a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu a_1 \\ \mu a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda a + \mu a$$

1.0.8 Definition: (Basis)

ein Paar von Vektoren $B = (a, b)$ heißt Basis von \mathbb{R}^2 , wenn es für jeden Vektor c in \mathbb{R}^2 genau ein Paar (x, y) von Zahlen gibt, sodass $c = x \cdot a + y \cdot b$.
 x und y heißen Koordinaten von c bzgl. b .

Die Basis $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Beispiel:

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \checkmark \text{ kanonische Basis}$$

1.0.9 Definition: (Determinante)

$$\det(a, b) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

1.1 Cramersche Regel

Das Gleichungssystem $xa + yb = c$ hat die eindeutige Lösung $x = \frac{\det(c,b)}{\det(a,b)} \Leftrightarrow \det(a,b) \neq 0$.

Beweis:

$$\begin{aligned} & \text{„} \Rightarrow \text{“} \quad \checkmark \\ & \text{„} \Leftarrow \text{“} \text{ Sei } \det(a,b) \neq 0. \\ & \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} = \begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \\ a_2b_1x + b_1b_2y = c_2b_1 \end{cases} \\ & \cdot \\ & \Rightarrow x = \frac{\det(c,b)}{\det(a,b)} \end{aligned}$$

analog $y = \frac{\det(a,c)}{\det(a,b)} \Rightarrow$ Eindeutigkeit

$$\text{Existenz: } a_1 \frac{\det(c,b)}{\det(a,b)} + b_1 \frac{\det(a,c)}{\det(a,b)} = c_1$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow a_1(c_1b_2 - c_2b_1) + b_1(a_1c_2 - a_2c_1) = c_1\det(a,b) \\ & \Leftrightarrow a_1c_1b_2 - b_1a_2c_1 = c_1(a_1b_2 - a_2b_1) \\ & \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (w)} \end{aligned}$$

Kollar:

$B = (a,b)$ ist Basis genau dann, wenn $\det(a,b) \neq 0$ ist $\det(a,b) = 0$ und (x,y) Lösung, so auch $(x + \lambda b_2, y - \lambda a_2)$ denn $a_1(x + \lambda b_2) + b_1(y - \lambda a_2) = \underbrace{a_1x + b_1y}_c + \lambda \underbrace{(a_1b_2 - b_1a_2)}_0$

Kollar:

$\det(a,b) = 0 \Rightarrow$ Es gibt entweder keine oder unendliche viele Lösungen.

1.2 Geraden

1.2.1 Definition: (Gerade)

Eine Gerade l in \mathbb{R}^2 ist eine Menge der Form $l = a + \mathbb{R}b = \{a + \lambda b | \lambda \in \mathbb{R}\}$ für $b \neq (0,0)$

a : „Stützvektor“ b : „Richtungsvektor“, $b^\perp = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \end{pmatrix}$: „Normalenvektor“

Beispiel:

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1.2.2 Satz 1.2

Eine Teilmenge von \mathbb{R}^2 ist eine Gerade genau dann, wenn sie Lösungsmenge einer Gleichung $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \alpha x + \beta y = \gamma \right\}$ ist. α und β nicht beide Null.

Beweis:

$$l = a + \mathbb{R}b$$

Dann erfüllt jeder Punkt $(a_1 + tb_1, a_2 + tb_2)$ die Gleichung $b_2a_1 - b_1a_2$.

DENN: $b_2(a_1 + tb_1) - b_1(a_2 + tb_2) = b_2a_1 - b_1a_2 = \det(a, b)$ Erfüllt umgekehrt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ die Gleichung $\alpha x + \beta y = \gamma$

und ist $\alpha \neq 0$, dann folgt $x = \frac{-\beta}{\alpha}y + \frac{\gamma}{\alpha}$.

Also ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ein Punkt der Geraden $a + \mathbb{R}b$ mit $a = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$

Beispiel:

$$x - y = 1 \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.3 Lineare Abbildungen

$A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt linear, wenn für jedes $a, b \in \mathbb{R}^2$ gilt: $A(x\vec{a} + y\vec{b}) = xA(\vec{a}) + yA(\vec{b})$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ können beliebig vorgegeben werden. Andererseits ist A durch diese bestimmt.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}}_{(2 \times 2)\text{-Matrix}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1x & b_1y \\ a_2x & b_2y \end{pmatrix} = xa + by$$

Eigenschaft: Die erste Spalte von A ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Abbildungsverzeichnis

0.1	Eine einfache Menge	2
0.2	Darstellung von Operationen auf Mengen	3
0.3	Graphenkreis	4
0.4	Mögliche Abbildungen auf einen Blick	5