Analysis 1 WS 15-16

Dozent:
Prof. Dr. Steffen Fröhlich

Mitschrift von:
Sven Bamberger

LaTeXarbeit von:
Sven Bamberger

Zuletzt Aktualisiert:
22. Oktober 2015

Zusammenfassung:

Raum: Do N1 & Fr N1
Uhrzeit: 10:00-12:00 & 08:00-10:00
Abgabe: tba

Dieses Skript wurde erstellt, um sich besser auf die Klausur vorzubereiten und eine ordentliche und für alle Personen lesbare Mitschrift zu haben.

Dieses Dokument garantiert weder Richtigkeit noch Vollständigkeit, da es aus Mitschriften gefertigt wurde und dabei immer Fehler entstehen können. Falls ein Fehler enthalten ist, bitte melden oder selbst korrigieren und neu hochladen.

Inhaltsverzeichnis

1 Logik, Mengenlehre **1**
1.1 Mathematische Logik . . . 1
1.1.1 Verknüpfung von Aussagen . . . 1
1.1.2 Prädikatenlogische Quantoren . . . 2
1.1.3 Einführung Mengenlehre . . . 2

1 Logik, Mengenlehre

1.1 Mathematische Logik

Eine mathematische Aussage ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist. (Diese Definition ist nicht ganz korrekt, soll aber für Ana 1 genügen.)
Beispiel:

i 3 ist eine Primzahl ✓

ii 4 ist eine Primzahl ↯

iii Es gibt endlich viele Primzahlzwillinge (5 und 7, 11 und 13) ?

1.1.1 Verknüpfung von Aussagen

wahr = 1 falsch = 0
Aussagen werden mittels folgender Junktoren verknüpft:

nicht	oder	und	impliziert	genau dann wenn
$\neg$	$\vee$	$\wedge$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$

Diese werden über euine Wahrheitstabelle definiert:
Seien a,b zwei Aussagen:

a	b	$\neg a$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \rightarrow b$	$a \leftrightarrow b$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Beachte:
$a \rightarrow b$ „entspricht“ $\neg a \vee b$
$a \leftrightarrow b$ „entspricht“$(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$
Wir schreiben:
$a \rightarrow b \equiv \neg a \vee b$
$a \leftrightarrow b \equiv (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$
Solche Ausdrücke heißen äquivalent.

Satz 1: Es gelten die Distributivgesetze und die de Morganschen Regeln. (die letzten beiden „Gleichungen“).

$$a \wedge (b \vee c) \equiv (\neg a \vee b)$$
$$a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$
$$\neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b$$
$$\neg(a \vee b) \equiv \neg a \wedge \neg b$$

Beweis: Siehe aktuelle Übung. Der Beweis wird später eingefügt.

Regelname	Regel
Der Satz vom ausgeschlossenem dritten	$a \vee \neg a$
Satz vom Widerspruch	$\neg(a \wedge \neg a)$
Satz von der doppelten Verneinung	$\neg(\neg a) \rightarrow a$
Kontraposition	$(a \rightarrow b) \rightarrow (\neg b \rightarrow \neg a)$
Modus ponens	$(a \rightarrow b) \wedge a \rightarrow b$
Distributivgesetz (Modus Barbara)	$(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c)$

Tabelle 1.1: Aussagenlogische Beweisprinzipien

Aussagenlogische Beweisprinzipien

Tautologie = Aussagen, welche stets wahr sind.

Beispiele:

1.1.2 Prädikatenlogische Quantoren

Es sei X = eine „Zusammenfassung“von Objekten x, in Zeichen $x \in X$

Quantoren

Allquantor	$\forall x \in X \;\; p(x)$ = Für alle $x \in X$ soll gelten	z.B. $p(x) = x + 27 = 13, \;\; x \in \{-14\}$
Existenzquantor	$\exists x \in X \;\; p(x)$ = Es gibt ein $x \in X$, so dass $p(x)$ gilt	z.B $p(x) = x - 7 = 6, \;\; x = \{1, 2, 8, 13\}$

Beispiel:
Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \;\; \Omega \subset \mathbb{R}$, heißt in einem Punkt $x_0 \in \Omega$ stetig, wenn gilt
$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in \Omega \{|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon\}$

Negation der Quantoren

$$\forall \exists x p(x)) \equiv \neg \exists x p(x)$$
$$\exists x p(x)) \equiv \neg \forall x p(x)$$

Beispiel: Negation von Stetigkeit

$\neg\{\underbrace{\forall \epsilon > 0} \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in \Omega[|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon]\}$
$= \exists \epsilon > 0 \neg\{\underbrace{\exists \delta > 0} \;\; \forall x \in \Omega[|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon]\}$
$= \exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \neg\{\underbrace{\forall x \in \Omega}[|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon]\}$
$= \exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \;\; \exists x \in \Omega \neg[\underbrace{|x - x_0|} < \delta \vee |f(x) - f(x_0)| < \epsilon]\}$
$= \exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \;\; \exists x \in \Omega \neg[\neg(|x - x_0|) < \delta \wedge \neg|f(x) - f(x_0)| < \epsilon]\}$
$= \exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \;\; \exists x \in \Omega[\neg\neg|x - x_0| < \delta \wedge \neg|f(x) - f(x_0)| < \epsilon]\}$
$= \exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \;\; \exists x \in \Omega[|x - x_0| < \delta \wedge \neg|f(x) - f(x_0)| < \epsilon]\}$

1.1.3 Einführung Mengenlehre

„Menge“wird nicht definiert, sondern über „seine“Eigenschaften axiomatisch eingeführt. (in einem späteren Semester folgt die genauere Definition.)

Mengen lassen sich z.B. charakterisieren durch:

- Angabe ihrer Elemente, $M = \{m_1, m_2, m_3 \dots\}$
- Angabe einer charaktersierenden Eigenschaft, $M = \{x \in X : p(x)\}$

<u>Beispiele:</u>

i $M = \{1\}$ M besteht aus der Zahl 1

ii $M = \{1, \{1\}\}$ M besteht aus der Zahl 1 und der Menge welche die 1 enthält.

iii $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ natürliche Zahlen ohne 0

iv $M = \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\} = \{x \in X : x^3 = 2x\}$

v $M = \varnothing$ leere Menge ($\nexists x \in M$)
$M = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = -2\}$ besitzt kein Element ($\varnothing$) da $x^2 = -2$ in $\mathbb{R}$ keine Lösung besitzt.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1.1 Aussagenlogische Beweisprinzipien 2