Ergänzungen zur Analysis 1 Sommersemester 2013

Dozent:
Prof. Dr. Felix Leinen

Mitschrift von:
Sven Bamberger, Maicon Hieronymus, Bernadette Mohr

LaTeXarbeit von:
Sven Bamberger, Maicon Hieronymus, Bernadette Mohr

Zuletzt Aktualisiert:
22. April 2013

Zusammenfassung:

Es handelt sich hier um den Baustein “Statistik und Ergänzungen zur Analysis„ des Pflichtmoduls “Analysis und Statistik„, der zu Beginn des Studienganges BSc Informatik im Kontext zum Baustein “Analysis I„ absolviert werden soll. Die “Statistik und Ergänzungen zur Analysis„ wird nur in Sommersemestern angeboten. Die Abschlußklausur zu “Statistik und Ergänzungen zur Analysis„ ist zugleich Modulabschlußklausur des Pflichtmoduls “Analysis und Statistik„.

http://www.mathematik.uni-mainz.de/arbeitsgruppen/gruppentheorie/leinen/s13-ana-plus

Raum: Mi 03-428
Uhrzeit: 08:00-10:00
Abgabe: Mittwoch 08:13

Dieses Skript wurde erstellt, um sich besser auf die Klausur vorzubereiten und eine ordentliche und für alle Personen lesbare Mitschrift zu haben.

Dieses Dokument garantiert weder Richtigkeit noch Vollständigkeit, da es aus Mitschriften gefertigt wurde und dabei immer Fehler entstehen können. Falls ein Fehler enthalten ist, bitte melden oder selbst korrigieren und neu hochladen.

Hier kleine Notizen zu einzelne Besonderheiten dieses Dokumentes.

1. /* */ alles zwischen diesen Zeichen sind Kommentare und sollen zum tieferen Verständnis oder Besondere Fragestellungen darstellen. Dabei ist zu beachten, das die Notation nicht immer komplett korrekt ist.Es können also kleinere mathematische Fehler auftauchen, welche aber für das Verständnis relevant sind.

Inhaltsverzeichnis

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung **1**
I.1. Binomialkoeffizienten 1
I.2. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung 3

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung

I.1. Binomialkoeffizienten

I.1.1. Definition:

Fakultät

$n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$
für $1 \leq n \in \mathbb{N}$
$0! = 1$

I.1.2. Satz:

$n!$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, n Objekte anzuordnen (in einer Reihe)

Beweis:

n	Möglichkeiten für 1. Objekt
$(n-1)\dots$	Möglichkeiten für 2. Objekt $\square$
$(n-2)\dots$	Möglichkeiten für 3. Objekt

I.1.3. Definition:

Es sei $\underset{\text{Standardmenge}}{\overset{\downarrow}{\underline{n}}} = \{0, 1, \dots, n-1\}$

Für $0 \leq k \leq n$ sie $\binom{n}{k}$ die Anzahl aller k-elementigen Teilmengen von $\underline{n}$.

I.1.4. Satz:

Für $0 \leq k \leq n$ ist $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Beweis:
Wir basteln eine k-elemtige Teilmenge von $\underline{n}$

n	Möglichkeiten für 1. Element der Teilmenge
$n-1$	Möglichkeiten für 2. Element der Teilmenge
$\vdots$	$\vdots$
$n-k+1$	Möglichkeiten für k. Element der Teilmenge

Insgesamt $= n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten. Jede k-elementige Teilmenge wurde $k!$-mal konstruiert, da die Reihenfolge des gewählten Elemente keine Relevanz hat.
Fazit: es gibt $\frac{1}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!}$ k-elementige Teilmengen in $\underline{n}$

I.1.5. Beispiel:

a) Anzahl der Partien bei einem Turnier „jeder gegen jeden".
$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} = \frac{n(n-1)}{2}$

b) Anzahl der Tips beim Lotto „6 aus 49"

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \tag{I.1}$$
$$= 49 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 3 \cdot 44 \tag{I.2}$$
$$= 13.983.816 \tag{I.3}$$

I.1.6. Satz:

Stets gilt:

a) $\binom{n}{0} = 1$ und $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ für $0 \le k \le n$

b) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ für $1 \le k \le n-1$

c) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

<u>Beweis:</u>

a) trivial

b) Sei M eine k-elementige Teilmenge von $\underline{n} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$
<u>1. Fall</u> $n-1 \in M$: $M = \{n-1\} \quad \dot\cup \quad M_0$ k-elementige Teilmenge von $\underline{n-1}$
$\Rightarrow \binom{n-1}{k-1}$ Möglichkeiten für M_0 bzw. M
<u>2. Fall</u> $n-1 \notin M$: $\underset{k\text{-elementige Teilmenge}}{\underset{\uparrow}{M}} \subseteq \underline{n-1}$
$\Rightarrow \binom{n-1}{k}$ Möglichkeiten.

c) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ = Anzahl aller Teilmengen von $\underline{n}$ $= 2^n$

<u>PASCALsches Dreieck</u>

$$\begin{array}{ccccccccccc|l}
 & & & & & 1 & & & & & & n=0 \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & n=1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & n=2 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & n=3 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & n=4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & n=5
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{ccccccccccc|l}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & n=0 \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & n=1 \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & n=2 \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & n=3 \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & n=4 \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & n=5
\end{array}$$

I.1.7. Binomische Formel

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

Beweis:
$\underbrace{(x+y)(x+y)\dots(x+y)}_{n-mal}$ aus multiplizieren liefert viele $x^k y^{n-k}$, nämlich so oft wie man k der ^{n}Klammern wählen kann, um daraus das x zu rekrutieren $\Rightarrow \binom{n}{k}$ Möglichkeiten

I.2. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Viele Vorgänge in unserer Welt können wir nicht präzise auf ihre Ursachen zurückführen - sie erscheinen uns „zufällig“. Wir versuchen dennoch dieses Verhalten mathematisch exakt zu beschreiben.

I.2.1. Definition:

Ein Zufallsversuch sei ein Experiment dessen mögliche Ausgänge als Ergebnisse bezeichnet werden. Die Menge aller Ergebnisse sei die Ergebnismenge Ω des Versuchs.

I.2.2. Beispiel:

- Werfen von zwei Würfeln $\Omega = S \times S$ wobei $S = \{1, \cdots, 6\}$
- Die täglich von 12 Uhr an einer Tafel gemessene Temperatur ist ein Ergebnis aus $\Omega = \mathbb{R}$

I.2.3. Definition:

Jede Teilmenge der Ergebnismenge Ω bezeichnen wir als ein Ergebnis.
Wir sagen: Das Ereignis $A \subseteq \Omega$ tritt ein, falls eine Durchführung des Zufallsversuchs ein Ergebnis liefert, das in A liegt.

I.2.4. Beispiel:

- Werfen zweier Würfel:
  Pasch $=\{(1,1), (2,2), (3,3), \dots, (6,6)\} \subseteq \Omega = S \times S$ wie oben.
- Hörsaaltemperatur: Angenehm $= [22, 24] \subseteq \mathbb{R}$

I.2.5. Definition:

Eine Ergebnisalgebra in Ω sei eine Familie von Ereignissen mit:

- $\Omega \in \mathfrak{A}$
- Ist $A \subset \mathfrak{A}$, so auch $\Omega \setminus A \in \mathfrak{A}$
- sind $A_n \in \mathfrak{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ so auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$

Eine Wahrscheinlichkeitsfunktion sei eine Abbildung p $\mathfrak{A} \to$ [0,1] mit:

- $p(\Omega) = 1$
- Sind $A_n \in \mathfrak{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $A_n \cap A_m = \emptyset$

Wir nennen (Ω, p) einen Wahrscheinlichkeitsraum

I.2.6. Beispiel:

- Ist Ω endlich, so wähle $\mathfrak{A} = \gamma(\Omega)$= Menge aller Teilmengen von Ω und $p(A) = \sum_{w \in A} p(w)$ für $A \subseteq \Omega$
  sofern $p = \Omega \to [1{,}0]$ mit $\sum_{w \in \Omega} p(w) = 1$
- Ω = Alphabet der deutschen Sprache
  $p(w)$ = Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Buchstaben w in einem Text der deutschen Sprache.
- Fairer Münzwurf:
  $\Omega = \{z, k\} \qquad p(z) = \frac{1}{2} = p(k)$
  Gezinkter Münzwurf:
  $\Omega = \{z, k\} \qquad p(z) \neq \frac{1}{2} \neq p(k)$
  wobei: $p(z) = p$ und $p(k) = 1 - p$
- Werfen zweier fairer Würfel:
  $\Omega = S \times S \qquad p(w) = \frac{1}{36}$ für alle $w \in \Omega$ wie oben.

I.2.7. Definition:

Ist $|\Omega| < \infty$ und $p(w) = \frac{1}{|\Omega|}$ für alle $w \in \Omega$, so nennen wir p Gleichverteilung auf Ω

I.2.8. Satz:

Für Ereignisse $A, B \in \mathfrak{A}$ gilt stets:

a) $A \cap B \in \mathfrak{A}$

b) $p(\Omega \setminus A) = 1 - p(A)$, insbesondere $p(\emptyset) = 0$

c) ist $A \subseteq B$, so ist $p(A) \leq p(B)$

d) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Beweis:

a) $\Omega \setminus (A \cap B) \overset{\text{DE MORGAN}}{=} (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)$

b) $\Omega = A \cup (\Omega \setminus A)$
$1 = p(\Omega) = p(A) + p(\Omega \setminus A)$

c) $B = A \dot{\cup} (B \setminus A)$ mit $B \setminus A = B \cap (\Omega \setminus A) \in \mathfrak{A}$

d) $(A \cup B) \setminus A = B \setminus (A \cap B)$
Ansonsten gab es nur Fehler bei dem erläuterungsversuch in dieser Vorlesung.

Abbildungsverzeichnis