Lineare Algebra 1

Dozent:
Pro. Dr. Manfred Lehn

LaTeX von:
Sven Bamberger

Zuletzt Aktualisiert:
28. Oktober 2014

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Dieses Skript wurde erstellt, um sich besser auf die Klausur vorzubereiten.

Dieses Dokument garantiert weder Richtigkeit noch Vollständigkeit, da es aus Mitschriften und Vorlesungsfolien gefertigt wurde und dabei immer Fehler entstehen können. Falls ein Fehler enthalten ist, bitte melden oder selbst korrigieren und neu hoch laden.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe der Logik und Mengenlehre

Mathematische Aussagen haben einen Wahrheitswert, sie können wahr (w) oder falsch (f) sein.

1.1 Die Verknüpfungsoperatoren

Die Verknüpfungsoperatoren sind:

$\underline{\wedge}$ $\underline{\text{u}}$nd	$\underline{\vee}$ $\underline{\text{o}}$der	$\neg$ nicht
unten offen	oben offen	
et	rel	non

$A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn sowohl A wie B wahr sind.
$A \vee B$ ist wahr, wenn A oder B oder beide wahr sind.
Dies kann man sich simpel veranschaulichen mit einer sogenannten Wahrheitstafel.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

$\neg A$ „nicht A“ ist wahr wenn A falsch ist. Sie folgende Wahrheitstabelle

A	$\neg A$
w	f
f	w

1.2 Rechenregeln der Logik

1. $\neg(\neg A) = A$
2. $A \vee \neg A = w \leftarrow$ (Satz vom ausgeschlossenen Dritten)
3. $A \wedge \neg A = f \leftarrow$ (Satz vom Widerspruch)
4. $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
   $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$
5. $\rightsquigarrow A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B)$
   $\rightsquigarrow A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B)$

1.2.1 Distributivitätsregeln

$(A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n) \wedge B = (A_1 \wedge B) \vee (A_2 \wedge B) \vee \cdots \vee (A_n \wedge B)$
$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \vee B = (A_1 \vee B) \wedge (A_2 \vee B) \wedge \cdots \wedge (A_n \vee B)$

1.2.2 Kombinationen

Entweder A oder B (xor): $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

Implikationen: $A \Rightarrow B$ „A impliziert B“ oder „aus A folgt B“
Wenn $A \Rightarrow B$ wahr ist, ist <u>nichts</u> über A oder B bekannt, sondern nur über deren Beziehung.

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

A ist eine hinreichende Bedingung für B
B ist eine notwendige Bedingung für A

1.3 Mengenlehre

Definition von Georg Cantor 1895: „Unter einer „Menge “verstehten wir jede Zusammenfassung M von wohl unterschiedenen Objekten m usnerer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente “von M genannt werden) zu einem Ganzen.“

Man schreibt $m \in M$ falls m Element von M ist, sonst $m \notin M$.

1.3.1 Quantoren:

Allquantor: $\forall$

Existenzquantor: $\exists$

Es sei $P(a)$ eine Aussage über ein Element a

$\forall a \in M : P(a)$ = Für alle a aus M gilt $P(a)$.

$\exists a \in M : P(a)$ = Es gibt wenigstens ein a aus M gilt $P(a)$.

Verneinung

$$\neg(\forall a \in M : P(a)) = \exists a \in M : \neg P(a)$$
$$\neg(\exists a \in M : P(a)) = \forall a \in M : \neg P(a)$$

Es gilt: $A = B \Leftrightarrow \forall a : (a \in A) \Leftrightarrow (a \in B)$
Definition : $A \subset B$(„A ist eine Teilmenge/Untermenge von B“) $\Leftrightarrow \forall a \in A : a \in B$. Man sagt auch B ist eine Obermenge von A, $B \supset A$ z.B:

- $\varnothing$ leere Menge, andere Notation $\varnothing = \{\}$. Es gilt stets $\varnothing \subset A$.
- Für alle Mengen A gilt: $A \subset A$

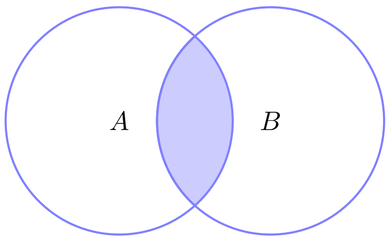
Definition: A ist eine Teilmenge von $B \Leftrightarrow A \subset B$ jedoch $A \neq B$
Schreibweise: $A \subsetneq B$

Definition: Es seien A, B Mengen. Die Menge $A \setminus B := \{a \in A | a \notin B\}$ heißt Komplement.

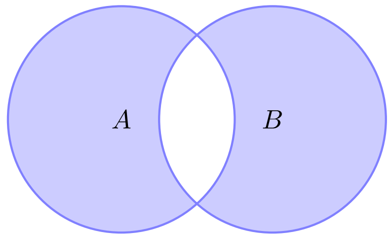
Definition: Es seien A, B Mengen

1. $A \cup B := \{a | a \in A \vee a \in B\}$ ist die Vereinigungsmenge
   Vereinigung von A und B
2. $A \cap B := \{a | a \in A \wedge a \in B\}$ ist der Durchschnitt von A und B.

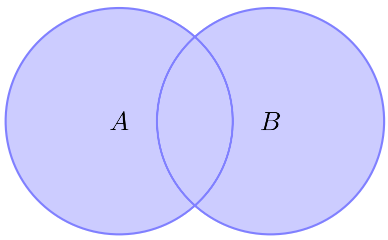
$A \cap B$



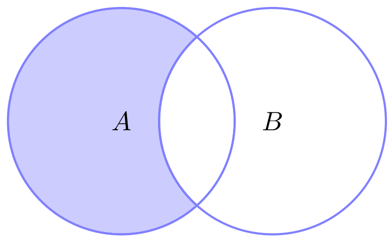
$\overline{A \cap B}$



$A \cup B$



$A \setminus B$



Definition: Es sei A eine Menge. Die Potenzmenge von A ist die Menge $P(a) = \{B | B \subset A\}$
<u>Bsp:</u>

- $A = \{0, 1\}, P(A) = \{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{\}\}$
- $A = \varnothing = P(\varnothing) = \{\varnothing\} = \{\{\}\}$
- $P(P(\varnothing)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{\{\}, \{\{\}\}\}$
- $\#$ der Elemente in $P(A)$ entspricht 2^M wobei hier M = Mächtigkeit von A. Mächtigkeit bedeutet $\#$ der Elemente in A.

Definition: $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ Im ersten Übungsblatt galt es zu beweisen, dass
$(a, b) - (a', b') \Leftrightarrow a = a', b = b'$

Definition: A, B seien Mengen
$A \times B := \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$
heißt das kartesische Produkt von A und B.

Abbildungsverzeichnis