

# 几种参数化时频分析方法的比较

史丽丽,许萌

( 郑州升达经贸管理学院信息工程系,郑州 451191)

摘要:

时频分析在实际的非平稳信号处理中得到广泛的应用并仍然具有发展潜力。在时频分析中有两项重要的评价指标,即自项的集中程度和瞬时频率估计的准确性,介绍线性调频小波变换,多项式 Chirplet 变换和广义 Warblet 变换三种参数化时频分析方法,着重从此两项指标来阐述这三种方法的优缺点,进而分析和比较这三种方法的原理及应用范围。

关键词:

时频分析;线性调频小波变换;多项式 Chirplet 变换;广义 Warblet 变换

## 0 引言

众所周知,在实际工程中,很多信号都属于非平稳信号<sup>[1]</sup>,例如瞬时电流、振动信号、语音信号、雷达波等等,因此非平稳信号的处理就显得尤为重要,而时频分析正是为此类信号的处理和分析。时频分析方法的特性主要表现在时频平面上,时频分布是瞬时频率及其附近聚集信号能量的能力的具体体现。瞬时频率是时频模式中的一个重要的参数,在信号处理过程中占有重要的作用。根据时频特性,调频信号可以分为两大类:线性调频信号和非线性调频信号。

目前时频分析方法<sup>[2]</sup>有很多种,例如常见的短时傅里叶变换、连续小波变换、Wigner-Ville 分布、Cohen 类分布等,这些方法由于不需要先验知识而被称为非参数化的时频分析方法,但此类方法获得的时间和频率的分辨率并不依附于具体的信号,所以并不能对较为复杂的调频信号作出正确的时频特性;本文分析对比了线性调频小波变换,多项式 Chirplet 变换和广义 Warblet 变换<sup>[3]</sup>这三种参数化时频分析方法,通过先验知识来决定变换中核函数的参数,当核函数中参数的选择能够很好地表征信号的瞬时频率轨迹时,就说明这种参数化时频变换方法能够很好地刻画信号的时频模式。因此,参数化时频分析方法通过一系列参数的不

断优化和选择来描述信号的时频分布,并且从得到的时频分布的能量集中度和瞬时频率估计的正确性等方面来阐述各种方法的优缺点。

## 1 线性调频小波变换(CT)

线性调频小波变换的适用对象是线性调频信号,而且其变换的本质就是加调频窗的傅里叶变换。其原始定义<sup>[4]</sup>为:

$$CT_s(t_0, \omega, \alpha, \sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) \Psi(t, t_0, \alpha, \sigma) \exp(-j\omega t) dt \quad (1)$$

其中  $\Psi(t, t_0, \alpha, \sigma)$  为调频窗函数,可以表示为:

$$\Psi(t, t_0, \alpha, \sigma) = w_{(\sigma)}(t - t_0) \exp(-j\frac{\alpha}{2}(t - t_0)^2) \quad (2)$$

其中  $z(t)$  由希尔伯特变换<sup>[5]</sup>得到的解析信号,  $t_0, \alpha \cdot R$  分别表示时间和调频率;  $\omega \cdot L^2(R)$  定为非负对称的标准化实窗,通常以常用的高斯窗为例。从以上内容原始定义式中,可以将线性调频小波变换用一种新的定义形式来表示,即定义为解析信号和窗函数相乘以后,再对其结果进行短时傅里叶变换,则新的定义表达式为:

$$CT_s(t_0, \omega, \alpha; \sigma) = A(t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{z}(t) w(\sigma)(t - t_0) \exp(-j\omega t) dt \quad (3)$$

其中:

$$\begin{cases} z(t)=z(t)\Phi_{\alpha}^R(t)\Phi_{\alpha}^M(t,t_0) \\ \Phi_{\alpha}^R(t)=\exp(-j\alpha t^2/2) \\ \Phi_{\alpha}^M(t,t_0)=\exp(-j\alpha t t_0) \\ A(t_0)=\exp(-j\alpha t_0^2/2) \end{cases} \quad (4)$$

式中,  $\Phi_{\alpha}^R(t)$ 、 $\Phi_{\alpha}^M(t,t_0)$  为频率旋转算子和平移算子。在这种参数化的时频分析法思想中,核函数中调频参数的选择对整个时频分析的时频分布起着决定性作用,即若核函数的调频参数  $\alpha$  的选取能够很好的表征信号瞬时频率轨迹时,将得到能量集中度很高的时频分布。为了验证线性调频小波变换对于处理线性调频信号的有效性,在此给定一个含有两个线性频率分量的线性调频信号:

$$s(t)=\sin[2\pi(10+2.5t)t]+\sin[2\pi(12+2.5t)t] \quad (0 \leq t \leq 15)$$

下图 1 为调频参数取  $10\pi$  的时频分布结果。

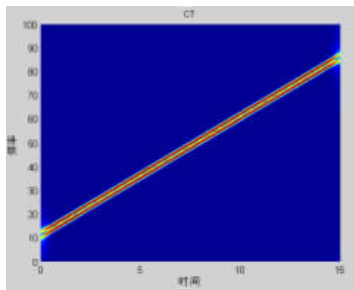


图 1 CT 当  $\alpha=10\pi$  时频表示图

从上图可以看出,两个线性调频分量的频率变化轨迹非常清晰,而且所得到的时频分布结果不但分辨率比较高,而且两个频率分量的能量聚集性也很高,即精确的表达了瞬时频率所时间变化的规律。然而若调频参数取其它值是,例如 0 和  $5\pi$  时,所得到的时频分布结果并不会理想,尤其是当调频参数取 0 时,根据线性调频小波变换的定义可知,其相当于短时傅里叶变换,所得到的时频分布不仅聚集性比较低,而且两个分量完全交错在一起;而当取  $5\pi$  时,本身的分辨率会有所提高,但两个线性频率分量交错在一起,并没有完全分离开,而且每个分量的时频分布能量集中程度也不高。因此,时频分布的精确性和能量集中度在参数化

时频分析方法中主要取决于调频参数的选择,也就是说,只要调频参数的选择越接近于瞬时频率随时间的变化率,就能得到能量集中度和精确的瞬时频率的时频分布。

## 2 多项式 Chirplet 变换 (PCT)

上述线性调频小波变换中的核函数属于线性,所以这种时频分析方法适合处理线性调频信号,而对于非线性调频信号并不适用。那么,下面我们介绍另外一种时频分析方法——多项式 Chirplet 变换,此方法是在线性调频小波变换的基础上通过改变核函数得到的。则多项式 Chirplet 变换 (PCT) 的定义式为:

$$PCT_s(t_0, \omega, \alpha_1, \dots, \alpha_n; \sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) \Phi_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^R \Phi_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^M(t, t_0) w_{(\sigma)}(t-t_0) \exp(-j\omega t) dt \quad (5)$$

其中,

$$\begin{cases} \Phi_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^R(t) = \exp(-j \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} a_{k-1} t^k) \\ \Phi_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^R(t, t_0) = \exp(j \sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1} t_0^{k-1} t) \end{cases} \quad (6)$$

在此给定一个非线性调频信号来验证多项式 Chirplet 变换的适用范围。其具体信号如下:  $s(t) = \sin(2\pi(10t+5t^2/4+t^3/9-t^4/160))$  ( $0 \leq t \leq 15s$ ), 此信号的瞬时频率为  $f=10+2.5t+t^2/3-t^3/40$  (Hz), 即非线性函数。则当调频参数  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (5\pi, 2\pi/3, -\pi/20)$  时的时频分布结果如下图 2 所示:

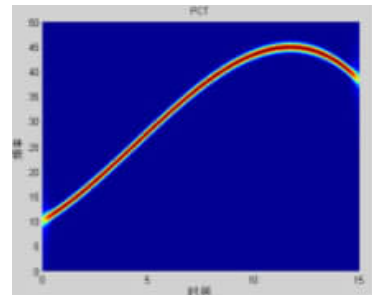


图 2 PCT 时频表示图  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (5\pi, 2\pi/3, -\pi/20)$

从上述结果可知,当多项式核函数的参数为  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (5\pi, 2\pi/3, -\pi/20)$  时,即核函数参数的选取若可以很好地配合目标信号的调频的参数时,将得到如图所示能量集中度很高的时频分布。而当调频参数取

其他值时,如采用线性调频小波变换的分析方法时得到的时频分布结果整体能量集中度并都不高,尤其是在信号的非线性时间段,其聚集程度特别差;可在信号的前半段的集中度比较高,这是由于线性调频小波变换适用于线性调频信号所决定的,因为可近似的将前半段信号认为是线性信号,这也是由不同的时频方法适合处理不同的调频信号决定的。与此同时,也说明多项式 Chirple 变换方法对于处理非线性信号的有效性。

### 3 广义 Warblet 变换(GWT)

广义 Warblet 变换的定义同样是将线性调频小波变换中的线性核函数替换,其具体定义为:

$$GWT(t_0, \alpha, \beta, f, \omega; \sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{z}(t) w_{(\sigma)}(t-t_0) \exp(-j\omega t) dt \quad (7)$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{z}(t) &= z(t) \Phi^R(t, \alpha, \beta, f) \Phi^S(t, t_0, \alpha, \beta, f) \\ \Phi^R(t, \alpha, \beta, f) &= \exp[-j(\sum_1^m \alpha_i \sin 2\pi f_i t - \sum_1^m \beta_i \sin 2\pi f_i t)] \\ \Phi^S(t, t_0, \alpha, \beta, f) &= \exp[j2\pi(\sum_1^m \alpha_i \cos 2\pi f_i t_0 - \sum_1^m \beta_i \sin 2\pi f_i t_0)t] \end{aligned} \quad (8)$$

根据式(8)中广义 Warblet 变换核函数的定义,可知此方法适用于表征瞬时频率为周期性时频模式的信号。一般情况下,实际中的周期性信号都能满足狄利克雷条件,所以它们能够用傅里叶系列来表征,而且在广义 Warblet 变换中能够确定选用合适的核函数参数来精确的估计瞬时频率。

为了得到能量集中度比较高的时频分布,广义 Warblet 变换需要一组核函数的决定性参数来很好的匹配目标信号的瞬时频率。此外,迭代运算的目的是为了得到所需的最优化参数。那下面为了验证广义 Warblet 变换的有效性,下列给定一个非线性调频信号  $s(t)$ ,且瞬时频率轨迹是周期性变化的: $s(t) = \sin[20\pi t - 2\pi \times \frac{24}{\pi} [\cos(t) + \frac{1}{9} \cos(3t) + \frac{1}{25} \cos(5t) + \frac{1}{49} \cos(7t)]]$  其中核函数的参数选定为如下一组数据:

$$\begin{cases} (\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0, 0, 0) \\ (\beta_1, \beta_2) = \frac{24}{\pi} (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}) \\ (f_1, f_2) = (\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}) \end{cases} \quad (9)$$

在选择以上核函数参数的基础上,利用广义 Warblet 变换的时频分析方法对瞬时频率为周期性变化的非线性信号进行分析,其得到的时频分布结果如下图所示:

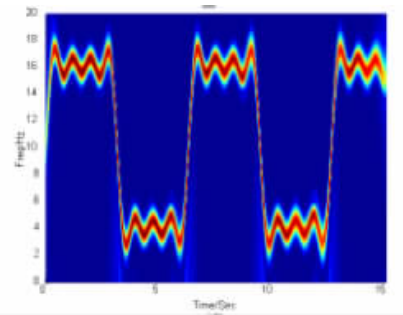


图3

从上图中可以看出,时频分布能正确清晰地表达出瞬时频率的周期性变化轨迹和表征准确的信号时频模式,并且时频分布的能量集中度很高,所以,不论是从时频分布的能量集中度,还是从瞬时频率估计的准确性来说,选择优化参数能够使广义 Warblet 变换时频分析方法更好地处理振荡幅度较大或者周期性的调频信号。

### 4 结语

非平稳信号的研究和处理是信号处理中不可或缺的重点研究对象,它不断推进信息技术的发展。本文介绍的三种参数化时频分析方法是通过对参数的选取去匹配目标信号瞬时频率的调频参数,只要选择合适的参数,就能得到集中度比较高的时频分布。但是,由于参数化分析方法需要有效的快速算法,所以优化参数的提取还需要一定深入的研究。同时,根据本文三种参数化时频分析方法的适应对象来看,每一种方法的适用对象都有所区别,即参数化分析对于适应性还需进一步的提高。而对于参数化分析方法的适应性来说,关键因素取决于核函数的时频谱分析。因此,对于处理更为复杂的非线性调频信号来说,可以通过构造信号核函数的手段来大大提高参数化时频分析方法的适应能力。

参考文献:

- [1]徐春光. 非平稳信号的时频分布与处理方法研究:[博士学位论文]. 西安:西安电子科技大学图书馆, 1999.
- [2]Boashash B. Time Frequency Signal Analysis and Processing: a Comprehensive Reference, Elsevier Science Ltd., 2003.
- [3]Yang Y, Peng Z K, Meng G, et al. Characterize Highly Oscillating Frequency Modulation Using Generalized Warblet transform[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2012, 26: 128-140.
- [4]Mann S, Haykin S. The Chirplet Transform: Physical Considerations[J]. Signal Processing, IEEE Transactions on, 1995, 43(11): 2745-2761.
- [5]黄长蓉. Hilbert 变换及其应用[J]. 成都气象学院学报, 1999, 14(3): 273-276.

作者简介:

史丽丽(1987-), 女, 河南安阳人, 硕士, 研究方向为信号处理及应用

许萌(1991-), 男, 河南开封人, 硕士, 助教, 研究方向为嵌入式物联网

收稿日期: 2016-12-29

修稿日期: 2017-02-25

## Comparison of Several Kinds of Parametric Time-Frequency Analysis Method

SHI Li-li, XU Meng

(Department of Information Engineering, Zhengzhou Shengda University of Economics Business & Management, Zhengzhou 451191)

Abstract:

In actual non-stationary signal processing, time-frequency analysis has been widely used in signal processing and still has development potential. There are two important evaluation indexes in the time-frequency analysis: its concentration and instantaneous frequency estimation accuracy, introduces Chirplet Transforms (CT), Polynomial Chirplet Transform (PCT) and Generalized Warblet Transform (GWT), these three parametric time-frequency analysis methods emphasis on the advantages and disadvantages from the above two indexes, and then analyzes and compares these three methods' principle and application scope.

Keywords:

Time-Frequency Analysis; Chirplet Transforms; Polynomial Chirplet Transform; Generalized Warblet Transform