Воронежский государственный университет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
Научно–образовательный математический центр
Северо–Осетинского государственного
университета им. К. Л. Хетагурова
АО «Концерн «Созвездие»

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ

Материалы
Международной конференции
Воронежская весенняя математическая школа

(3 мая – 9 мая 2023 г.)

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2023

УДК 517.53(97; 98)
ББК 22.16
С56

Конференция поддержана МЦМУ МИАН, НОМЦ СОГУ и Воронежским госуниверситетом

С56 **Современные методы теории краевых задач** : материалы Международной конференции : Воронежская весенняя математическая школа (3 – 9 мая 2023 г.) / Воронежский государственный университет ; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова ; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН ; НОМЦ СОГУ им. К. Л. Хетагурова; АО «Концерн «Созвездие». — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2023. — 470 с.

ISBN 978–5–9273–3692–0

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской весенней математической школы, проводимой Воронежским госуниверситетом совместно с Московским государственным университетом им. М. В. Ломоносова, Математическим институтом им. В. А. Стеклова РАН, НОМЦ СОГУ им. К. Л. Хетагурова и АО «Концерн «Созвездие». Тематика охватывает широкий спектр проблем качественной и спектральной теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, теории операторов, оптимального управления, теории игр, метаматического моделирования, технологий искусственного интеллекта, а также проблем преподавания математики в средней школе и вузах.

УДК 517.53(97; 98)
ББК 22.16

ISBN 978–5–9273–3692–0

Организаторы

Воронежский государственный университет

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Математический центр мирового уровня «Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук» (МЦМУ МИАН)

Научно–образовательный математический центр Северо–Осетинского Государственного Университета им. К. Л. Хетагурова

АО «Концерн «Созвездие»

Конференция проводится при финансовой поддержке Минобрнауки России (грант на создание и развитие МЦМУ МИАН, соглашение № 075–15–2022–265), НОМЦ СОГУ и Воронежского государственного университета.

Содержание

Contents

О РЕСУРСНЫХ СЕТЯХ С МЕНЯЮЩЕЙСЯ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ ПРОХОЖДЕНИЯ ПО ДУГАМ С ЭРГОДИЧЕСКОЙ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ СЕТИ

Х.Н. Абдулрахман, Н.С. Задорожная
(Ростов–на–Дону, РГУПС)
Abdulrahm.haidar@gmail.com

Рассмотрим ресурсную сеть G, представляющая собой связную ориентированную сеть, с меняющейся длительностью прохождения по дугам, на которой разработаны методы распределения ресурсов.Состоянием в сети с меняющейся длительностью прохождения по дугам будем считать следующий вектор

$$Q(t) = \{q_1(t), q_2(t), \cdots, q_n(t)\};$$

$$Q'(t) = \begin{pmatrix} q_1^{D-1}(t) & q_2^{D-1}(t) & \dots & q_n^{D-1}(t) \\ q_1^{D-2}(t) & q_2^{D-2}(t) & \dots & q_n^{D-2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1^{0}(t) & q_2^{0}(t) & \dots & q_n^{0}(t) \end{pmatrix},$$

где $q_i^j(t)$ — величина ресурса вершины $x_i^j = (p_1 \circ f')(u')$, $i = 1, \cdots, n$,$t = 0, 1, \cdots, D-1$.

Рассмотрим дугу u (где $(p_1 \circ f)(u) = x_i^j, j = 0, \cdots, D-1$), которая имеет пропускную способность $r(u^\alpha)$. Тогда ресурс $q_i^j(t)$ в момент времени t находится в следующем виде:

$$q_i(t) = q_i(t-1) - \sum_{v \in [x_i^{t-1}]^+} F(u, t-1) + \sum_{v \in [x_i^t]^+} F(u, t-1),$$

где поток, проходящий через дугу u в момент времени $t-1$, имеет вид:

$$F(u, t-1) = \frac{q_i^j(t)}{\sum_{k=0}^{D-1} q_i^k(t-1)} \cdot \frac{r(u)}{\sum_{v \in [x_i^j]^+} r(v)} \times$$
$$\times \min\{\sum_{k=0}^{D-1} q_i^k(t-1), \sum_{v \in [x_i^j]^+} r(v)\}. \quad (1)$$

Рассмотрим случай, когда вспомогательная сеть $G'(X', U', F')$ исходной сети $G(X, U, f, D)$, состоит из D эргодических изолированных компонентов сильно связности, где изолированная компонента

— эта компонента, на которой из любой ее вершины достижимы только вершины этой же компоненты.

Теорема. *Если для каждой дуги и графа $G(X, U, f, D)$, заданы длительности $d(u) = \{D, D, \cdots, D, D\}$, тогда вспомогательный граф G' состоит из D компонентах сильной связности вида $G_\alpha^\oplus(X_\alpha^\oplus, U_\alpha^\oplus, f_\alpha)$, где $\alpha = 0, 1, 2, \cdots, D-1$, $X_\alpha^\oplus = \{x_1^\alpha, x_2^\alpha, \cdots, x_n^\alpha\}$,а компонента $G_\alpha^\oplus$ является дубликатом исходной сети G без ограниченной на достижимости.*

Доказательство теоремы возникает от того что, длительности равен период исходной сети, таким образом, прохождения по дугам происходит каждый D тактов на исходной сети и это означает, что поток проходит по дугам как на исходной сети без ограничения на достижимости, только с опозданий D минуты (тактов). Т.е. на каждой слой вспомогательной сети будет эргодическую компоненту вида $G_\alpha^\oplus$, на которой суммарный ресурс $W_\alpha^\oplus = \sum_{i=1}^{n} q_i^\alpha$ распределяется по формуле (1), где $\sum_{i=0}^{D-1} W_i^\oplus = \sum_{i=0}^{n} q(0) = W$— суммарный ресурс исходной сети G.

Заметим что, если на компоненты $G_\alpha^\oplus$ имеет место $W_\alpha^\oplus = T$, где T — пороговое значение исходной сети без ограничения на достижимости, то предельное состояние существует и единственно [1]. В противном случае все зависит от начального распределения ресурса $W_\alpha^\oplus$ на компоненты $G_\alpha^\oplus$. Пороговое значение T и предельное состояние Q^* можно найти как в работах [1] и [2].

Литература

1. Скороходов В. А. Задача нахождения порогового значения в эргодической ресурсной сети / В.А. Скороходов // Управление большими системами. — М. : ИПУ РАН. — 2016. — Вып. 63. — С. 6–23.

2. Скороходов В.А. Потоки в сетях с меняющейся длительностью прохождения / В.А. Скороходов// Известия ВУЗов. Северо–Кавказский регион. Естественные науки. — 2011. — № 1. — С. 26–31.

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Г.Э. Абдурагимов (Махачкала, ДГУ)
gusen_e@mail.ru

Рассматривается краевая задача

$$D^{\alpha}_{0+}x(t) + f\left(t, (Tx)\,(t)\right) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) = x'(0) = 0, \tag{2}$$

$$x(1) = x'(1) = 0, \tag{3}$$

где $\alpha \in (3, 4]$ — действительное число, D^{α}_{0+} — дробная производная Римана–Лиувилля, $T\colon C \to \mathbb{L}_p$ $(1 < p < \infty)$ — линейный положительный непрерывный оператор, функция $f(t, u)$ неотрицательна на $[0, 1] \times [0, \infty)$ и удовлетворяет условию Каратеодори и $f(\cdot, 0) \equiv 0$.

При некоторых ограничениях на функцию f степенного характера с помощью теоремы Го–Красносельского получены достаточные условия существования по меньшей мере одного положительного решения задачи (1)–(3). При дополнительных обременениях на f единственность такого решения гарантирует принцип сжатых отображений. Приводится пример, иллюстрирующий выполнений условий соответствующих утверждений.

Полученные результаты дополняют исследования автора [1,2,3] по данной тематике.

Литература

1. Абдурагимов Г. Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально–дифференциального уравнения дробного порядка / Г.Э. Абдурагимов // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2021. — № 194. — С. 3–7.

2. Абдурагимов Г. Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально–дифференциального уравнения дробного порядка / Г.Э. Абдурагимов // Вестник российских университетов. Математика. — 2022. — Т. 27, вып. 138. — С. 129–135.

3. Абдурагимов Г.Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально–дифференциального уравнения дробного порядка / Г.Э. Абдурагимов // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Воронеж. зимн. мат. школы. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2023. — С. 5–6.

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ «УГЛОМ» И МОДУЛЯ ГЛАДКОСТИ ФУНКЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА

Г. Акишев (Астана, КФ МГУ)
akishev_g@mail.ru

Пусть $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$; $\mathbb{T}^m = [0, 2\pi)$ и $\mathbb{I}^m = [0, 1)^m$.

Через $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ обозначим пространство Лоренца всех вещественнозначных измеримых по Лебегу функций $f(\overline{x})$, которые имеют 2π–период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|_{p,\tau} = \left(\frac{\tau}{p}\int\limits_0^1 \left(f^*(t)\right)^\tau t^{\frac{\tau}{p}-1}dt\right)^{1/\tau} < \infty,\ 1 < p < \infty, 1 \leqslant \tau < \infty,$$

где $f^*(y)$ – невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\overline{x})|$, $\overline{x} \in \mathbb{I}^m$ (см. [1], с. 213–216).

В случае $\tau = p$ пространство Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ совпадает с пространством Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$ с нормой $\|f\|_p = \|f\|_{p,p}$ (см. [2], с. 11].

$\mathring{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ — множество всех функций $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ таких, что

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\overline{x})\, dx_j = 0,\ \ j = 1, ..., m.$$

Величина

$$Y_{l_1,\ldots,l_m}(f)_{p,\tau} = \inf_{T_{l_j}} \|f - \sum_{j=1}^m T_{l_j}\|_{p,\tau}\ \ ,\ \ l_j = 0, 1, 2, ...$$

называется наилучшим приближением «углом» функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ тригонометрическими полиномами, где $T_{l_j} \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ тригонометрический полином порядка l_j по переменной x_j, $j = 1, \ldots, m$ (в случае $\tau = p$ см. [3], [4]).

Смешанный модуль гладкости порядка $\overline{k}$ функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ определяется по формуле (в случае $\tau = p$ см. [3], [4])

$$\omega_{\overline{k}}(f, t_1, ..., t_m)_{p,\tau} = \sup_{|h_1|\leqslant t_1,...,|h_m|\leqslant t_m} \|\Delta_{\overline{h}}^{\overline{k}}(f)\|_{p,\tau},$$

где $\Delta_{\overline{t}}^{\overline{k}} f(2\pi\overline{x}) = \Delta_{t_m}^{k_m}(...\Delta_{t_1}^{k_1} f(2\pi\overline{x}))$ — смешанная разность порядка $\overline{k} = (k_1, ..., k_m)$, $k_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, ..., m$, с шагом $\overline{t} = (t_1, ..., t_m)$.

В теории приближения функций, хорошо известны прямые и обратные теоремы , в которых устанавливаются неравенства между наилучшими приближениями и модулями гладкости функций из некоторого пространства (см. например библиографии в [4], [5]).

В пространстве Лоренца доказана:

Теорема. *Пусть* $\sigma = \max\{2, \tau\}$, *если* $1 < p < +\infty$ *и* $2 \leqslant \tau < \infty$ *или* $1 < p \leqslant 2$ *и* $1 < \tau \leqslant 2$ *и* $\beta = \min\{2, \tau\}$, *если* $1 < p < +\infty$ *и* $1 < \tau \leqslant 2$ *или* $2 < p < \infty$, $2 < \tau < \infty$. *Если* $f \in \mathring{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, *то*

$$C_1 \prod_{j=1}^{m} n_j^{-k_j} \left(\sum_{\nu_1=1}^{n_1+1} \cdots \sum_{\nu_m=1}^{n_m+1} \prod_{j=1}^{m} \nu_j^{k_j\sigma-1} Y_{\overline{\nu}}^{\sigma}(f)_{p,\tau} \right)^{1/\sigma}$$

$$\leqslant \omega_{\overline{k}}\left(f, \frac{\pi}{n_1}, ..., \frac{\pi}{n_m}\right)_{p,\tau}$$

$$\leqslant C_2 \prod_{j=1}^{m} n_j^{-k_j} \left(\sum_{\nu_1=1}^{n_1+1} \cdots \sum_{\nu_m=1}^{n_m+1} \prod_{j=1}^{m} \nu_j^{k_j\beta-1} Y_{\overline{\nu}}^{\beta}(f)_{p,\tau} \right)^{1/\beta},$$

где C_1, C_2 *положительные числа независящие от* $n_j \in \mathbb{N}$.

В случае $\tau = p$ из этой теоремы следует теорема 9. 1 в [4].

Литература

1. Стейн И. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / И. Стейн, Г. Вейс. // М. : Мир. — 1974. — 333 с.

2. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. // М. : Наука. — 1977. — 456 с.

3. Потапов М.К. Приближение «углом» и теоремы вложения /М.К. Потапов // Math. Balkanica. — 1972. — Vol. 2. — P. 182–198.

4. Potapov M. K. Mixed Moduli of Smoothness in L_p, $1 < p < \infty$: A Survey / M. K. Potapov, B. V. Simonov, S. Yu. Tikhonov // Surveys in Approximation Theory. — 2013. — Vol. 8. — P. 1–57.

5. Иванов В. И., Прямые и обратные теоремы теории приближения периодических функций в работах С.Б. Стечкина и их развитие / В. И. Иванов // Тр. ИММ УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 4. — С. 5–17.

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ СТРЕМЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОГЛОЩЕНИЯ И РАССЕЯНИЯ К БЕСКОНЕЧНОСТИ[1]

А.А. Амосов (Москва, НИУ МЭИ)
AmosovAA@mpei.ru

Распространение монохроматического излучения в полупрозрачном для излучения теле G описывается уравнением переноса излучения

$$\omega\cdot\nabla I+(\varkappa+s)I=s\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega}I(\omega',x)\,d\omega'+\varkappa k^2F,\quad(\omega,x)\in D.\qquad(1)$$

Искомая функция $I(\omega,x)$ определена на множестве $D=\Omega\times G$, где $\Omega=\{\omega\in\mathbb{R}^3\mid|\omega|=1\}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^3$ (сфера направлений), и представляет собой интенсивность излучения в точке $x\in G$, распространяющегося в направлении $\omega\in\Omega$.

В уравнении (1) $\omega\cdot\nabla I$ — это производная функции I по направлению ω. Кроме того, $0\leqslant s$ — коэффициент рассеяния, $0<\varkappa$ — коэффициент поглощения, F — плотность изотропных объемных источников излучения, $1\leqslant k$ — коэффициент преломления.

Предположим что коэффициенты поглощения и рассеяния имеют вид $\varkappa=(1-\varpi)/\varepsilon$, $s=\varpi/\varepsilon$ (где $\varpi=s/(\varkappa+s)$) и стремятся к бесконечности при $\varepsilon\to0$. Тогда уравнение (1) принимает вид

$$\omega\cdot\nabla I_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}I_\varepsilon=\frac{\varpi}{\varepsilon}\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega}I_\varepsilon(\omega',x)\,d\omega'+\frac{1-\varpi}{\varepsilon}k^2F,\quad(\omega,x)\in D.\qquad(2)$$

Предположим, что тело G представляет собой ограниченную область в $\mathbb{R}^3$ с границей ∂G класса $C^{1+\lambda}$, $0<\lambda<1$. Обозначим через $n(x)$ внешнюю нормаль к границе в точке x и введем множества

$$\Gamma^-=\{(\omega,x)\in\Omega\times\partial G\mid\omega\cdot n(x)<0\},$$
$$\Gamma^+=\{(\omega,x)\in\Omega\times\partial G\mid\omega\cdot n(x)>0\}.$$

---

[1] Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF–2023–0012).

Пусть $d\omega$ и $d\sigma(x)$ — меры, индуцированные на Ω и ∂G мерой Лебега в $\mathbb{R}^3$. Введем на Γ^+ меру $\widehat{d\Gamma}^+(\omega, x) = \omega \cdot n(x)\, d\omega d\sigma(x)$. Через $\widehat{L}^1(\Gamma^+)$ обозначим пространство заданных на Γ^+ измеримых относительно меры $\widehat{d\Gamma}^+(\omega, x)$ функций $f(\omega, x)$, обладающих конечной нормой $\|f\|_{\widehat{L}^1(\Gamma^+)} = \int\limits_{\Gamma^+} |f| \widehat{d\Gamma}^+$.

Дополним уравнение (2) краевым условием внутреннего диффузного отражения и диффузного преломления приходящего извне излучения на границе ∂G:

$$I_\varepsilon|_{\Gamma^-} = \mathcal{R}^-(I_\varepsilon|_{\Gamma^+}) + (1-\theta) g_*, \quad (\omega, x) \in \Gamma^-, \tag{3}$$

где $I_\varepsilon|_{\Gamma^-}$ и $I_\varepsilon|_{\Gamma^+}$ — следы решения уравнения (2) на Γ^- и Γ^+, а

$$\mathcal{R}^-(I_\varepsilon|_{\Gamma^+})(\omega, x) = \frac{\theta}{\pi} \int\limits_{\omega'\cdot n(x)>0} I_\varepsilon|_{\Gamma^+}(\omega', x)\, \omega' \cdot n(x)\, d\omega',$$

$$g_*(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\omega'\cdot n(x)<0} k^2 J_*(\omega', x) |\, \omega' \cdot n(x)|\, d\omega'.$$

Здесь $0 \leqslant \theta < 1$ — коэффициент, характеризующий отражательные свойства поверхности, $J_*(\omega, x)$ — интенсивность излучения, приходящего извне и падающего на точку $x \in \partial G$ в направлении ω таком, что $\omega \cdot n(x) < 0$.

Пусть $F \in W_1^1(G)$ и $g_* \in L^1(\partial G)$. Тогда справедливы следующие предельные свойства решения I_ε задачи (2), (3) при $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{aligned}
&I_\varepsilon \to k^2 F \quad \text{в} \quad L^1(D),\\
&I_\varepsilon|_{\Gamma^+} \to \widehat{\psi}_+ g_* + (1-\widehat{\psi}_+) k^2 F|_{\partial G} \quad \text{в} \ \ \widehat{L}^1(\Gamma^+),\\
&I_\varepsilon|_{\Gamma^-} \to \psi_0 g_* + (1-\psi_0) k^2 F|_{\partial G} \quad \text{в} \ \ L^1(\partial G).
\end{aligned}$$

Здесь $F|_{\partial G}$ — след F на ∂G, $\widehat{\psi}_+(\omega, x) = \psi(\omega \cdot n(x), 0)$ для $(\omega, x) \in \Gamma^+$ и $\psi_0 = 2\theta \int\limits_0^1 \psi(\mu', 0)\mu'\, d\mu' + 1 - \theta$, где ψ — решение следующей пространственно одномерной задачи:

$$-\mu \frac{d\psi(\mu, \tau)}{d\tau} + \psi(\mu, \tau) = \frac{\varpi}{2} \int\limits_{-1}^1 \psi(\mu', \tau)\, d\mu', \quad \mu \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \quad \tau \geqslant 0,$$

$$\psi(\mu, 0) = 2\theta \int\limits_0^1 \psi(\mu', 0)\mu'\, d\mu' + 1 - \theta, \quad \mu \in [-1, 0),$$

$$\psi(\mu, +\infty) = 0, \quad \mu \in (0, 1].$$

ЗАДАЧА МАРКОВА–ДУБИНСА С УПРАВЛЕНИЕМ НА ТРЕУГОЛЬНИКЕ[1]

А.А. Ардентов
(Переславль–Залесский, ИПС им. А.К. Айламазяна РАН)
aaa@pereslavl.ru

Рассматривается следующее однопараметрическое семейство задач оптимального управления на группе движений плоскости:

$$
\begin{aligned}
&\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \qquad q = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2_{x,y} \times S^1_\theta,\ u = (u_1, u_2) \in U,\\
&X_1 = (\cos\theta, \sin\theta, 0), \qquad X_2 = (0, 0, 1),\\
&q(0) = (0, 0, 0), \qquad q(T) = (x_1, y_1, \theta_1),\\
&T \to \min,
\end{aligned}
$$

где множество управлений задаётся равнобедренным треугольником

$$U = \left\{ (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 \geqslant 1, |u_2| \leqslant \frac{u_1^{\max} - u_1}{u_1^{\max} - 1} \right\}$$

со значением $u_1^{\max} - 1 > 0$, определяющим высоту треугольника. Предельный случай $u_1^{\max} = 1$ отождествляется с классическим случаем задачи Маркова–Дубинса [1, 2] при

$$U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 = 1, |u_2| \leqslant 1\}. \tag{1}$$

К задаче быстродействия с управлением на треугольнике был применён максимума Понтрягина (ПМП) [3]. Нетривиальные анормальные экстремали отсутствуют. Описаны условия, определяющие особые экстремали. Релейные экстремали определены через значение максимизированного гамильтониана ПМП. Доказано, что смешанные траектории возникают только при определенном значении уровня гамильтониана. Установлено, что вдоль каждой экстремальной траектории происходит регулярное переключение между тремя режимами постоянных управлений (вершинами треугольника, определяющего множество допустимых управлений). С учётом симметрий-отражений выделено три типа экстремальных управлений, для каждого типа описана характерная последовательность значений управлений и определены ограничения на интервалы постоянства этих

---

[1] Исследование А.А. Ардентова выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22–21–00877, `https://rscf.ru/project/22-21-00877/`) в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук.

значений. Для двух из трех типов доказано, что соответствующая оптимальная траектория может иметь не более двух переключений. У оптимальных траекторий третьего типа может возникать до четырёх переключений. Для каждого типа вычислены выражения для сужения экспоненциального отображения на траектории, подозрительные на оптимальность.

Далее оптимальность найденных экстремальных траекторий исследовалась методами современной геометрической теории управления [4], беря в основу геометрический подход, предложенный в работе [5] для решения классической задачи Маркова–Дубинса.

Литература

1. Марков А.А. Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах / A.A. Markov // Сообщ. Харьков. матем. общ. 2–я сер. — 1889. — Т. 1, № 2. — С. 250–276.

2. Dubins L.E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents / L.E. Dubins // American Journal of Math. — 1957. — Vol. 79, No. 3. — P. 497–516.

3. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов. / Л.С. Понтрягин , В.Г. Болтянский , Р.В. Гамкрелидзе , Е.Ф. Мищенко // М. : Наука, 1961.

4. Сачков Ю.Л. Введение в геометрическую теорию управления. / Ю.Л. Сачков // М. : URSS, 2021. — 160 с.

5. Bui X.–N. Shortest path synthesis for Dubins non–holonomic robot / X.–N. Bui, J.–D. Boissonnat, P. Soueres, J.–P. Laumond // Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Diego. — 1994. — Vol. 1, — P. 2–7.

ИСКУССТВЕННЫЕ ИММУННЫЕ СИСТЕМЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В РАЗЛИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ ЗНАНИЙ

И.Ф. Астахова, Ю.В. Хицкова (Воронеж, ВГУ)

astachova@list.ru

В мире современных высоких технологий всё чаще и чаще можно заметить, как алгоритмы и идеи, придуманные ещё в прошлом веке, реализуются, развиваются и имеют огромный спрос. Так появились и иммунные системы [1–2].

Целью данной работы является исследование и реализация алгоритмов решения задач на основе искусственной иммунной системы.

Искусственную иммунную систему можно представить как совокупность следующих элементов [3]:

$$IIS = \langle L, G, A, \mu, S \rangle,$$

где:
IIS – искусственная иммунная система.
L – пространство всех возможных антител. В зависимости от задачи антитело может представлять собой строку, список координат, дерево выражения.
G – множество всех возможных антигенов. В зависимости от задачи, может быть строкой, матрицей логических значений, списком значений функции в известных точках.
$A : L \times G \to [0, 1]$ – заданная мера аффинности, которая каждому антителу и каждому антигену ставит в соответствие число из отрезка [0, 1], которое показывает, насколько хорошо данное антитело реагирует на поданный антиген.
$\mu : L \to L$ – оператор мутации, применяемый к отдельному антителу с целью улучшения его свойств.
$S : A \subset L \to B \subset A \subset L$ – оператор селекции, оставляющий в текущей иммунной системе лучшие антитела, поддерживая размер сети.

Тогда алгоритм можно представить в виде последовательности следующих шагов:
1. Выбрать начальную популяцию $ImSystem \subset L$.
2. Подается $g \in G$, $\forall l \in ImSystem : a_l = A(l, g)$.
3. Находится наилучшее антитело – текущее решение:
$l^* = arg\max(a_l)$.
4. К антителам применяется оператор мутации:
$M = \{\mu(l), l \in ImSystem\}$.
5. Для сохранения размера сети применяется оператор селекции, который из текущего набора антител и множества мутировавших антител (полученного на 4) создает новый образ системы:
$ImSystem = S(ImSystem \cup M)$.
6. Если решение l^* удовлетворяет заданному критерию или достигнуто максимальное число итераций – выход, иначе – возврат к шагу 2.

Для различных технических задач эта модель и алгоритм будут незначительно меняться в зависимости от решаемой проблемы.

Рассматриваются следующие задачи: задача распознавания символов [3]; задача символьной регрессии [3]; задача сбора мусора роботом [3]; разработка модели обучающей системы и алгоритмов оптимизации ее функционирования [4]; применение механизмов работы иммунной системы для решения задачи обнаружения аномалий.

Для каждой задачи составляется модель антитела, антиген, предлагается операторы мутации и аффинность, влияющая на оптимизацию. Разрабатывается программное обеспечение и проводится вычислительный эксперимент для каждой задачи. Проведено сравнение искусственных иммунных систем и известных методов.

Сравнение результатов позволило сделать вывод о возможности применения иммунных систем при решении задач в различных отраслях знаний.

Литература

1. Искусственные иммунные системы и их применение : сб. статей / под ред. Д. Дасгупты. // М. : Физматлит. —2006. — 344 с.

2. Dasgupta D. Immunological Computation: Theory and Applica–tions / D. Dasgupta, F. Nino. // CRC Press. — 2008. — 296 с.

3. Ушаков С.А. Разработка и исследование алгоритмов решения задач распознавания на основе искусственных иммунных систем: дис. канд. техн. наук / С.А. Ушаков // Воронеж. — 2015. — 138 с.

4. Киселева Е.И. Разработка модели обучающей системы и алгоритмов ее функционирования с помощью интеллектуальных методов: дис. канд. физ–мат. наук / Е.И. Киселева // Воронеж. — 2018. — 138 с.

О ДВУСТОРОННИХ ОЦЕНКАХ УПРАВЛЯЮЩЕЙ ФУНКЦИИ В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ[1]

И.В. Асташова[1], Д.А. Лашин[2], А.В. Филиновский[3]
([123]Москва, [1]МГУ им. М.В. Ломоносова, РЭУ им. Г.В. Плеханова,
[2]ООО «ФИТО», [3]МГТУ им. Н.Э. Баумана,
МГУ им. М.В. Ломоносова)
ast.diffiety@gmail.com, dalashin@gmail.com, flnv@yandex.ru

Рассматривается краевая задача для параболического уравнения

$$u_t = (a(x,t)u_x)_x + b(x,t)u_x + h(x,t)u, \tag{1}$$

$$(x,t) \in Q_T \equiv (0,1) \times (0,T),$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u_x(1,t) = \psi(t), \quad 0 < t < T, \tag{2}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект РНФ № 20–11–20272).

$$u(x,0)=\xi(x),\quad 0<x<1, \tag{3}$$

с гладкими в $\overline{Q}_T$ коэффициентами $a, b, h,$ где $0 < a_1 \leqslant a(x,t) \leqslant a_2 < +\infty$, где a_1 a_2 — постоянные, а также граничными функциями $\varphi, \psi \in W_2^1(0,T)$ и начальной функцией $\xi \in L_2(0,1)$. Изучается следующая задача управления с точечным наблюдением: управляя температурой φ при фиксированных ξ и ψ, стараемся сделать температуру $u(x_0,t)$ в данной точке $x_0 \in (0,1)$ близкой к заданной функции $z(t)$ при всех $t \in (0,T)$. Экстремальные задачи для параболических уравнений рассматривались в работах [1, 2], причём наиболее изучены задачи с финальным или распределённым наблюдением. В данной работе мы продолжаем исследования работ [3–5] и получаем оценки нормы управляющей функции через значение функционала качества. Ранее нами были получены оценки снизу [8–10]. В настоящей работе получена оценка сверху нормы управляющей функции, применимая, в том числе, и для доказательства существования решения экстремальной задачи на неограниченных множествах управлений.

Пусть $V_2^{1,0}(Q_T)$ – банахово пространство функций $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \equiv \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(x,t)\|_{L_2(0,1)} + \|u_x\|_{L_2(Q_T)},$$

для которых отображение, действующее по правилу $t \mapsto u(\cdot,t)$ $([0,T] \to L_2(0,1))$ непрерывно ([6], с. 15), а $\widetilde{W}_2^1(Q_T)$ – линейное подпространство функций $\eta \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющих условиям $\eta(x,T)=\eta(0,t)=0$.

Слабым решением задачи (1)–(3) будем называть функцию $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(0,\cdot)=\varphi$ и для всех $\eta \in \widetilde{W}_2^1(Q_T)$ интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} \left(au_x\eta_x - bu_x\eta - hu\eta - u\eta_t\right)\,dx\,dt$$

$$= \int_0^1 \xi(x)\eta(x,0)\,dx + \int_0^T a(1,t)\psi(t)\eta(1,t)\,dt.$$

Теорема 1 [10]. *Задача (1)–(3) имеет единственное слабое решение $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, причём для некоторой константы C_1 (не зависящей от φ, ψ и ξ) имеет место оценка*

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leqslant C(\|\varphi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\psi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\xi\|_{L_2(0,1)}).$$

Пусть $\Phi \subset W_2^1(0,T)$ – множество управляющих функций φ, а $Z \subset L_2(0,T)$ – множество целевых функций z. Рассмотрим функционал

$$J[z,\rho,\varphi] \equiv \int_0^T (u_\varphi(x_0,t) - z(t))^2 \rho(t)\,dt, \quad \varphi \in \Phi, \quad z \in Z,$$

где u_φ – решение задачи (1) — (3) с управляющей функцией φ, а $\rho \in L_\infty(0,T)$ — весовая функция ($\operatorname{ess}\inf\limits_{t\in(0,T)} \rho(t) = \rho_1 > 0$), задающая норму $\|\varphi\|_{L_{2,\rho}} \equiv \left(\int_0^T \varphi^2(t)\rho(t)\,dt\right)^{1/2}$ в $L_2(0,T)$.

Теорема 2 [8–10]. *Если* $a_t(x,t) \geqslant 0$ *и* $b_x(x,t) \geqslant h(x,t)$ *при* $(x,t) \in Q_T$, $b(x,t) \geqslant 0$ *при* $(x,t) \in [0,x_0] \times [0,T]$ $(x_0 \in (0,1])$ *и* $b(1,t) \leqslant 0$ *при* $t \in [0,T]$, *то имеет место оценка*

$$\|\varphi\|_{L_1(0,T)} \geqslant \|z\|_{L_1(0,T)} - (TJ[\varphi,\rho,z]/\rho_1)^{1/2}$$
$$-x_0(a_2\|\psi\|_{L_1(0,T)} + \|\xi\|_{L_1(0,1)})/a_1.$$

Следствие. *В условиях теоремы 2 при* $\psi = 0 = \xi$ *справедливо неравенство*

$$\|\varphi\|_{L_1(0,T)} \geqslant \|z\|_{L_1(0,T)} - (TJ[\varphi,\rho,z]/\rho_1)^{1/2}.$$

Теорема 3. *Если* $\psi = 0 = \xi$, $\varphi = \gamma\varphi_1 + \varphi_2$, *где* $\gamma \in \mathbb{R}$ *и* $\|\varphi_1\|_{W_2^1(0,T)} = 1$, *то выполняется оценка*

$$\|\varphi\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant \ ((J[z,\rho,\varphi])^{1/2} + \|u_2(x_0,\cdot)\|_{L_{2,\rho}}$$
$$+\|z\|_{L_{2,\rho}})/\|u_1(x_0,\cdot)\|_{L_{2,\rho}} + \|\varphi_2\|_{W_2^1(0,T)},$$

где через u_i *обозначено решение задачи (1), (2) при* $\varphi = \varphi_i$.

Для фиксированных функций z и ρ рассмотрим задачу минимизации

$$m[z,\rho,\Phi] = \inf_{\varphi\in\Phi} J[z,\rho,\varphi].$$

Определение. Множество $\Phi \subset W_2^1(0,T)$ назовём *конечномерно аппроксимируемым*, если для некоторых конечной системы функций $\varphi_1,\ldots,\varphi_N \in \Phi$ и константы M любая функция $\varphi \in \Phi$ при некоторых $\gamma_1,...,\gamma_N \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству:

$$\|\varphi - \sum_{j=1}^N \gamma_j\varphi_j\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant M.$$

Теорема 4. *Если множество Φ непусто, замкнуто, выпукло и конечномерно аппроксимируемо, то для любой функции $z \in L_2(0,T)$ существует единственная функция $\varphi_0 \in \Phi$, для которой*

$$m[z,\rho,\Phi] = J[z,\rho,\varphi_0].$$

Литература

1. Troltzsch F. Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications / Troltzsch F. — Graduate Studies in Mathematics. V. 112. Providence : AMS, 2010.

2. Lurie K.A. Applied Optimal Control Theory of Distributed Systems / Lurie K.A. — Berlin : Springer, 2013.

3. Astashova I.V. On the dense controllability for the parabolic problem with time–distributed functional / Astashova I.V., Filinovskiy A.V. // Tatra Mt. Math. Publ. — 2018. — V. 71. — P. 9–25.

4. Astashova I.V. On properties of minimizers of a control problem with time–distributed functional related to parabolic equations / Astashova I.V., Filinovskiy A.V. // Opuscula Math. — 2019. — V. 39. — № 5. — P. 595–609.

5. Astashova I. On the estimates in various spaces to the control function of the extremum problem for parabolic equation / Astashova I., Filinovskiy A., Lashin D. // WSEAS. J. Appl. Theor. Mech. — 2021. — V. 16. — P. 187–192.

6. Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. — М. : Наука. — 1967.

7. Асташова И.В. Об управлении с точечным наблюдением для параболической задачи с конвекцией / Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В. // Тр. Моск. мат. о–ва. — 2019. — Т. 80. — № 2. — С. 258–274.

8. Astashova I.V. On properties of the control function in an control problem with a point observation for a parabolic equation / Astashova I.V., Filinovskiy A.V., Lashin D.A. // Funct. Diff. Equ. — 2021. — V. 28. — № 3–4. — P. 99–102.

9. Astashova I. On the estimates in various spaces to the control function of the extremum problem for parabolic equation / Astashova I., Filinovskiy A., Lashin D. // WSEAS Transactions on applied and theoretical mechanics. — 2021. — V. 16. — P. 187–192.

10. Асташова И.В. Об экстремальной задаче управления с точечным наблюдением для параболического уравнения / Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В. // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2022. — Т. 504. — С. 28–31.

О КАЧЕСТВЕННЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ[1]

И.В. Асташова, В.А. Никишов (Москва, МГУ)
ast.diffiety@gmail.com

Рассматривается уравнение

$$y' = (y - \alpha_1(x))(y - \alpha_2(x)), \tag{1}$$

где α_1, $\alpha_2 \in C(\mathbb{R})$, — ограниченные функции, $\alpha_1(x) \leqslant \alpha_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Дополнительно (за исключением теорем 1 и 2) предполагаем, что $\alpha_1, \alpha_2 \in C^1(\mathbb{R})$. Будем говорить, что решение y определено на промежутке Δ, если y определено в каждой точке промежутка Δ. Из леммы 4.1 [1] вытекает следующая

Лемма 1. *Если $x_0 \in \mathbb{R}$ и существует решение (1), определенное на $[x_0, +\infty)$, то существует такое решение y_* уравнения (1), определенное на $[x_0, +\infty)$, что для любого решения y уравнения (1), определенного на $[x_0, +\infty)$, выполнено соотношение $y(x) \leqslant y_*(x)$, $x \geqslant x_0$.*

Определение 1. Решение y_* уравнения (1) из леммы выше называется [1] *главным на* $(x_0, +\infty)$.

Определение 2. Решение $y(\cdot)$ уравнения (1) назовём *стабилизирующимся* [2], если существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) \equiv y_+ \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to-\infty} y(x) \equiv y_- \in \mathbb{R}.$$

Теорема 1. *Если решение $y(\cdot)$ уравнения (1) определено в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, то оно ограничено снизу при при $x \in [x_0, b)$, где b — правый конец максимального интервала существования решения y.*

Теорема 2. *Пусть $\alpha_2(x) \leqslant M$, $x \geqslant x_0$ и $\alpha_1(x) \geqslant m$, $x \leqslant x_0$, где $m, M \in \mathbb{R}$ — постоянные. Если решение $y(\cdot)$ уравнения (1) удовлетворяет условию $y(x_0) > M$, то существует такое $x^* > x_0$, что $y(\cdot)$ возрастает на (x_0, x^*) и*

$$x^* < x_0 + \frac{1}{y(x_0) - M}, \quad \lim_{x\to x^*-0} y(x) = +\infty,$$

[1] Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20–11–20272).

а если — условию $y(x_0) < m$, то существует такое $x_* < x_0$, что что $y(\cdot)$ возрастает на (x_*, x_0) и

$$x_0 - \frac{1}{m - y(x_0)} < x_*, \quad \lim_{x \to x_* + 0} y(x) = -\infty.$$

Теорема 3. *Если решения $y_3 < y_2 < y_1$ уравнения (1) определены в точке x_0, а решение y_1 определено на $[x_0, +\infty)$, то решения y_3, y_2 продолжаются на тот же промежуток, причём на нём функция $\frac{y_1(x)-y_3(x)}{y_1(x)-y_2(x)} \geqslant 1$ убывает и имеет при $x \to +\infty$ конечный предел, который в случае, когда y_1 — главное решение на $(x_0, +\infty)$, равен 1.*

Теорема 4. *Если решения $y_2 < y_1$ уравнения (1) определены на $[x_0, +\infty)$ и имеют разные конечные пределы при $x \to +\infty$, то y_1 — главное решение на $(x_0, +\infty)$, и всякое решение y, определённое на $[x_0, +\infty)$, и отличное от y_1, имеет при $x \to +\infty$ тот же предел, что и y_2.*

Теорема 5. *Если решения $y_2 < y_1$ уравнения (1) определены на $[x_0, +\infty)$ и имеют конечные (возможно, совпадающие) пределы при $x \to +\infty$, то любое решение y со значением $y(x_0) \leqslant y_1(x_0)$ продолжается на $[x_0, +\infty)$ имеет при $x \to +\infty$ тот же предел, что и y_2.*

Пример 1. Уравнение

$$y' = y(y-1) \tag{2}$$

имеет решения $y_1 = 1$ и $y_2 = 0$, причем y_1 — главное на $(0, +\infty)$. Если $y(0) < 1$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$.

Пример 2. Пусть $\alpha_2(x) = 16(x-n)^2(x-n-1)^2 + 1$, $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}_0$. Рассмотрим уравнение

$$y' = y(y - \alpha_2(x)), \tag{3}$$

Если $y(0) \leqslant 0$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$. Но у (3) есть периодическое решение, отличное от константы.

Пусть далее $\alpha_1(x) < \alpha_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$ и для некоторого $a > 0$ выполнены дополнительные условия

$$\begin{cases} \lim_{x \to \pm\infty} \alpha_j(x) \equiv \alpha_j^{\pm} \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \\ \alpha_1'(x) \neq 0 \neq \alpha_2'(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-a, a]. \end{cases} \tag{4}$$

Тогда [2] все ограниченные решения (1) — стабилизирующиеся, а все стабилизирующиеся решения в окрестности ∞ имеют не обращающуюся в нуль производную и разбиваются на следующие четыре типа:

$$\text{I тип: } y_- = \alpha_1^-,\ y_+ = \alpha_1^+; \qquad \text{II тип: } y_- = \alpha_2^-,\ y_+ = \alpha_1^+;$$

$$\text{III тип: } y_- = \alpha_2^-,\ y_+ = \alpha_2^+; \qquad \text{IV тип: } y_- = \alpha_1^-,\ y_+ = \alpha_2^+.$$

Теорема 6. *Если при условиях (4) уравнение (1) имеет стабилизирующееся решение II типа, то существуют и единственны решения y_I и y_{III} соответственно I и III типов, причём для любого решения $y(\cdot)$ имеем:*

1) если $y_I < y < y_{III}$, то $y(\cdot)$ – стабилизирующееся решение II типа;

2) если $y > y_{III}$, то существует такое $x^* \in \mathbb{R}$, что $y(\cdot)$ продолжается на интервал $(-\infty, x^*)$ и $y_- = \alpha_2^-$, $\lim\limits_{x \to x^* - 0} y(x) = +\infty$;

3) если $y < y_I$, то существует такое $x_* \in \mathbb{R}$, что $y(\cdot)$ продолжается на интервал $(x_*, +\infty)$ и $y_+ = \alpha_1^+$, $\lim\limits_{x \to x_* + 0} y(x) = -\infty$.

Теорема 7. *При условиях (4) для уравнения (1) верно ровно одно из следующих утверждений:*

1) существует стабилизирующееся решение II типа;

2) существует единственное стабилизирующееся решение, и оно относится к IV типу;

3) стабилизирующихся решений нет.

Пример 3. Пусть $\alpha_1 \equiv c_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 \equiv c_2 \in \mathbb{R}$, где $c_2 > c_1$. Тогда у уравнения (1) существует стабилизирующееся решение II типа.

Пример 4. Возьмем

$$\alpha_1(x) = \begin{cases} -1, x \leqslant 0, \\ k_0 x^2 (x-1)^2 - 1,\ x \in [0,1], \\ -(16(x-1)^2(x-2)^2)^{n_0} - 1,\ x \in [0, \frac{3}{2}], \\ -2,\ x \geqslant \frac{3}{2}, \end{cases}$$

$$\alpha_2(x) = \begin{cases} 0,\ x \leqslant \frac{3}{2}, \\ (16(x-1)^2(x-2)^2)^{n_0} - 1,\ x \in [\frac{3}{2}, 2], \\ -k_0 x^2 (x-1)^2 - 1,\ x \in [2,3], \\ -1,\ x \geqslant 3, \end{cases}$$

Нами было доказано, что

1. существуют такие $k_0 \in (0,16)$, $n_0 \in \mathbb{N}$, что уравнение (1) с соответствующими α_1 и α_2 имеет единственное стабилизирующееся решение, и оно относится к IV типу,

2. существуют такие $k_0 \in (0,16)$, $n_0 \in \mathbb{N}$, что уравнение (1) с соответствующими α_1 и α_2 не имеет стабилизирующихся решений.

Замечание. *Теоремы 1–2 дополняют результаты работы [3]. Более того, теорема 2 опровергает утверждение теоремы 5.7 [2, с. 150] об ограниченности решения на всей числовой прямой. Теоремы 6–7 дополняют теоремы 2.1–2.4 [2].*

Литература

1. Hartman P. On an ordinary differential equation envolving a convex function / P. Hartman // Transactions of the American Mathematical Society — 1969. — V. 146. — P. 179–202.

2. Палин В.В. О поведении стабилизирующихся решений для уравнения Риккати / В.В. Палин, Е.В. Радкевич // Тр. семин. им. И.Г. Петровского — 2016. — Т. 31. — С. 110–133.

3. Егоров А.И. Уравнение Риккати / А.И. Егоров. — М. : ФИЗМАТЛИТ. — 2001. — 320 с.

НЕЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА СВЕРТКИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА[1]

С.Н. Асхабов (Грозный, ЧГПУ, ЧГУ; Долгопрудный, МФТИ)
askhabov@yandex.ru

Рассматривается начальная задача вида

$$u^{\alpha}(x) = \int_0^x K(x-t)\, u'''(t)\, dt, \qquad \alpha > 1, \qquad x > 0, \tag{1}$$

$$u(0) = \lim_{x\to 0} u'(x) = \lim_{x\to 0} u''(x) = 0. \tag{2}$$

Предполагается, что ядро $K(x)$ удовлетворяет условию

$$K \in C^5[0,\infty),\ K^{(5)}(x) \text{ не убывает на } [0,\infty),$$

$$K(0) = K'(0) = \ldots = K^{(4)}(0) = 0 \text{ и } K^{(5)}(0) = p > 0. \tag{3}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22–11–00177) и Минобрнауки РФ (FEGS–2020–0001)

Решения начальной задачи (1)–(2) разыскиваются в классе:

$$Q_0^3 = \left\{u(x) : u \in C[0,\infty) \cap C^3(0\,\infty),\ u(0)=0,\ u(x)>0 \text{ при } x>0\right\}.$$

Наряду с задачей (1)–(2) изучается интегральное уравнение

$$u^\alpha(x) = \int_0^x K'''(x-t)u(t)\,dt, \quad \alpha>1, \tag{4}$$

решения которого разыскиваются в классе:

$$Q_0 = \{u(x) : u \in C[0,\infty),\ u(0)=0,\ u(x)>0 \text{ при } x>0\}.$$

Лемма 1. *Пусть $\alpha>1$ и выполнено условие (3). Если $u \in Q_0$ является решением уравнения (4), то $u(x)$ не убывает на $[0,\infty)$, трижды непрерывно дифференцируема при $x>0$ и для любого $x \in [0,\infty)$ удовлетворяет неравенствам $F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x)$, где*:

$$F(x) \equiv \left[\frac{p\cdot(\alpha-1)^3\cdot x^3}{3\,\alpha\,(\alpha+2)\,(2\,\alpha+1)}\right]^{1/(\alpha-1)},\ G(x) \equiv \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}K''(x)\right]^{1/(\alpha-1)}.$$

Отметим, что при $K(x)=x^5$ функция $F(x)$ является решением уравнения (4), что свидетельствует о точности нижней априорной оценки решения, полученной в лемме 1.

Лемма 2. *Пусть $\alpha>1$ и выполнено условие (3). Если $u \in Q_0^3$ является решением задачи (1)–(2), то $u \in Q_0$ и является решением интегрального уравнения (4). Обратно, если $u \in Q_0$ является решением интегрального уравнения (4) и выполнены еще условия*

$$\lim_{x\to 0} x^{-3}\int_0^x K^{(5)}(x-t)\,[K''(t)]^{1/(\alpha-1)}dt = 0, \tag{5}$$

$$\lim_{x\to 0} x^{-3(2\alpha-1)/(\alpha-1)}\int_0^x K^{(4)}(x-t)\,[K''(t)]^{1/(\alpha-1)}dt = 0, \tag{6}$$

то $u \in Q_0^3$ и является решением начальной задачи (1)–(2).

Заметим, что при $K(x)=x^5$ условия (3), (5) и (6) выполняются, если $1<\alpha<2,5$, причем $F(x)$ является решением задачи (1)–(2).

Введем класс $P_b = \{u(x) : u \in C[0,b]$ и $F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x)\}$.

Теорема 1. *Если выполнены условия (3), (5) и (6), то начальная задача (1)–(2) имеет в Q_0^3 (и в P_b при любом $b>0$) единственное решение. Это решение можно найти в полном метрическом* *пространстве P_b методом последовательных приближений пикаровского типа со сходимостью по метрике:*

$$\rho_b(u,v) = \sup_{0<x\leqslant b} \frac{|u(x)-v(x)|}{x^{3/(\alpha-1)} \cdot e^{\beta x}}, \quad \text{где } \beta = \frac{1}{p} \cdot \sup_{c\leqslant x\leqslant b} \frac{K^{(5)}(x)-p}{x},$$

а число $c \in (0,b)$ определяется из условия $K^{(5)}(c) < \alpha \cdot p$.

Ранее аналогичные результаты для интегро–дифференциальных уравнений первого и второго порядков вида (1) в связи с различными приложениями были получены в работах [1], [2].

Литература

1. Асхабов С.Н. Интегро–дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части / С.Н. Асхабов // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 6. — С. 786–795.

2. Askhabov S.N. On a second–order integro–differential equation with difference kernels and power nonlinearity / S.N. Askhabov // Bull. Karaganda Univ. Math. Series. — 2022. — No. 2(106). — P. 38–48.

О ВЫРОЖДЕННЫХ ОРБИТАХ В $\mathbb{C}^4$ ВЕЩЕСТВЕННЫХ 7–МЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ[1]

А.В. Атанов, В.В. Крутских, А.В. Лобода

(Воронеж, ВГУ, ВГТУ)

atanov.cs@gmail.com, krutskihvlad@mail.ru, lobvgasu@yandex.ru

В связи с задачей описания голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^4$ в сообщении обсуждаются орбиты 7–мерных алгебр Ли в этом пространстве. Одна из гипотез состоит в том, что при наличии 5–мерного абелева идеала в такой алгебре её 7–мерными орбитами в $\mathbb{C}^4$ могут быть только вырожденные по Леви гиперповерхности.

Мы рассматриваем ниже 15 типов алгебр Ли из списка [1], обладающих 5–мерным абелевым идеалом. Для всех этих типов высказанная гипотеза подтверждается. Уточним, что всего в списке [1] содержится 593 типа 7–мерных разрешимых неразложимых алгебр Ли; абелевы идеалы максимальной размерности 5 имеются у 59 из них.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20–01–00497) и РНФ (проект № 23–21–00109).

Обсуждения распадаются на три подслучая, связанные с типом 6–мерного ниль–радикала (максимального нильпотентного идеала) $N[6,2]$, $N[6,15]$ или $N[6,31]$, общего для 7–мерных алгебр Ли каждого из подслучаев, но проводятся в рамках общего подхода. Этот подход связан с совместным упрощением (см. [2, 3]) нескольких голоморфных векторных полей, касательных к гипотетической невырожденной орбите обсуждаемой 7–мерной алгебры. Для алгебр голоморфных векторных полей с $\mathbb{C}^4$, имеющих 5–мерный абелев идеал, возможна (локальная) голоморфная замена координат, выпрямляющая три базисных поля такого идеала (см. [3]).

Предложение 1. *Пусть 7–мерная алгебра Ли g_7 голоморфных векторных полей на Леви–невырожденной гиперповерхности $M \subset \mathbb{C}^4$ имеет 6–мерный ниль–радикал N_6 вида $N[6,2]$. Тогда (локальной) голоморфной заменой координат пять базисных полей из N_6 можно привести к одному из двух видов*

$$\begin{array}{ll} e_1 = (0,0,0,1), & e_1 = (0,0,0,1), \\ e_2 = (0,0,1,0), & e_2 = (0,0,1,0), \\ e_3 = (0,1,0,0), & e_3 = (0,0,c_3(z_1),d_3(z_1)), \\ e_4 = (0,b_4(z_1),c_4(z_1),d_4(z_1)), & e_4 = (0,0,c_4(z_1),d_4(z_1)), \\ e_6 = (0,b_6(z_1),c_6(z_1),d_6(z_1)), & e_6 = (0,1,0,0) \end{array} \tag{1}$$

с некоторыми функциями $b_j(z_1)$, $c_j(z_1)$, $d_j(z_1)$ одной переменной.

Аналогичные упрощения возможны с базисными полями 6–мерных нильпотентных алгебр $N[6,15]$ и $N[6,31]$. Однако уточнение (за счет коммутационных соотношений) вида оставшихся базисных полей 15 обсуждаемых 7–мерных алгебр из [1]

$$\begin{array}{ll} [7,[6,2],1,k], & k \in \{3,5,8,10,12\}, \\ [7,[6,15],1,k], & k \in \{2,3,4,5,6\}, \\ [7,[6,31],1,k], & k \in \{3,5,13,14,24\} \end{array}$$

достаточно легко приводит в обоих случаях (1) к следующему выводу.

Теорема 1. *Коммутационные соотношения для любого из 15 выписанных типов алгебр Ли не допускают существования у них невырожденных орбит в пространстве $\mathbb{C}^4$.*

Замечание. Справедливость обсуждаемой гипотезы была ранее установлена при некоторых условиях относительно коммутационных соотношений между элементом дополнения к 5–мерному абелеву идеалу и элементами самого идеала, а также доказана для нильпотентных 7–мерных алгебр Ли.

Литература

1. Parry A.R. A classification of real indecomposable solvable Lie algebras of small dimension with codimension one nilradicals [master's thesis] / A.R. Parry // Utah State University. — Logan, Utah, 2007. — 225 p.

2. Beloshapka V.K. Homogeneous hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$, associated with a model CR–cubic / V.K. Beloshapka, I.G. Kossovskiy // J. Geom. Anal. — 2010. — T. 20, № 3. P. 538–564.

3. Лобода А.В. О задаче описания голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей четырехмерных комплексных пространств / А.В. Лобода // Труды МИАН. — 2020. — Т. 311. — С. 194–212.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А.Х. Аттаев (Нальчик, ИПМА КБНЦ РАН)
attaev.anatoly@yandex.ru

В докладе будут обсуждаться вопросы, связанные с корректной постановкой основных краевых задач для нагруженных [1] гиперболических уравнений с различными видами нагрузки, в частности, уравнения вида

$$u_x + u_y = \lambda u_y(x_0, y),$$

$$u_x + u_y = \lambda \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) u_y(x_0, x - y),$$

$$u_{xx} - u_{yy} = \lambda u_{yy}(x_0, y),$$

где λ, x_0 – произвольные действительные числа.

Будет проведен анализ областей единственности и существования поставленных задач и показано существенная зависимость их от выбора вида нагрузки и значения точки x_0.

Эти исследования являются продолжением работ, начатых в статье [2].

Литература

1. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применения. / А.М. Нахушев. // М. : Наука. — 2012. — 232 с.

2. Attaev A.Kh. Boundary value problem for a loaded wave equation. / A.Kh. Attaev // Bulletin of the Karaganda university. — 2017. — V. 86, No 2. — P. 8–13.

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО–КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ С НЕГЛАДКОЙ БОКОВОЙ ГРАНИЦЕЙ

Е.А. Бадерко, С.И. Сахаров
(Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)
baderko.ea@yandex.ru, ser341516@yandex.ru

В полосе $D = \mathbb{R} \times (0, T)$ выделяется полуограниченная область Ω с негладкой боковой границей Σ из класса Дини–Гёльдера $H^{1/2+\omega}$ (в частности, допускающей «клювы»). В этой области рассматриваются первая и вторая начально–краевые задачи для неоднородных параболических по Петровскому систем второго порядка с Дини–непрерывными коэффициентами при ненулевых начальных условиях. С использованием результатов работ [1–4] доказываются теоремы об однозначной классической разрешимости в пространстве $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ поставленных задач при минимальных условиях на гладкость начальных функций. Кроме того, с опорой на результаты [5] показано, что в случае невыполнения рассматриваемого условия на характер непрерывности кривой Σ решение первой начально–краевой задачи из пространства $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ может не существовать.

Литература

1. Зейнеддин М. О потенциале простого слоя для параболической системы в классах Дини / М. Зейнеддин. — Дисс. канд .физ.–матем. наук. М. :МГУ имени М.В. Ломоносова. — 1992.

2. Baderko E.A. Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients / E.A. Baderko, M.F. Cherepova // Applicable Analysis. — 2021. — Vol. 100. No. 3, — P. 2900–2910.

3. Бадерко Е.А. Потенциал Пуассона в первой начально–краевой задаче для параболической системы в полуограниченной области на плоскости / Е.А. Бадерко, С.И. Сахаров // Дифференц. ур–ния. — 2022. Т. 58. № 10. — С. 1333–1343.

4. Бадерко Е.А. О единственности решений начально–краевых задач для параболических систем с Дини–непрерывными коэффициентами в полуограниченной области на плоскости / Е.А. Бадерко, С.И. Сахаров // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2023. Т. 63. № 4. — С. 54–65.

5. Камынин Л.И. Принцип максимума и локальные оценки Липшица вблизи боковой границы для решений параболического уравнения 2–го порядка / Л.И. Камынин, Б.Н. Химченко // Сиб. матем. ж. — 1975. Т. 16, № 6. — С. 1172–1187.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Д.Д. Баин (Ярославль, ЯрГУ)
danila.bain@yandex.com

Рассмотрим уравнение:

$$\ddot{u} + b\dot{u} + cu = sc \cdot \operatorname{sign}\bigl(u(t-1)\bigr), \qquad (*)$$

где $b, c, s \in \mathbb{R}$, $b^2 - 4c > 0$, $c \neq 0$, и $s = \pm 1$.

Для уравнения $(*)$ отыскиваются периодические решения, колеблющиеся около нуля. при этом рассматриваются только *медленно осциллирующие решения*, т.е. не пересекающие ноль более одного раза на периоде запаздывания.

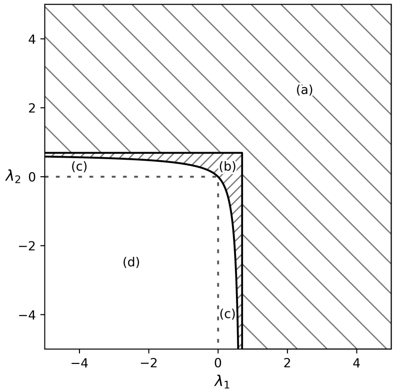
С целью нахождения медленно осциллирующих периодических решений рассматривается следующее множество начальных условий, составленное из начальных функций, к которым в пару поставлена их производная в точке ноль:

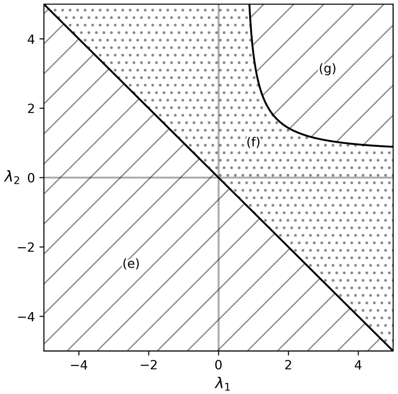
$$S_1 = \Bigl\{ \ (\varphi,\ \dot{\varphi}(0)) \ : \ \varphi \in C([-1,0]), \quad \varphi(t) < 0 \text{ при } t < 0, \\ \varphi(0) = 0,\ \ \dot{\varphi}(0) \in V \ \Bigr\} \subset C[a,b] \times V,$$

где $V \subset \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ — множество неотрицательных начальных скоростей, выбранное так, что решение, соответствующее начальному условию из множества S_1 не пересекает ноль на интервале $(0,1]$, но пересекает ноль на интервале $(1,+\infty)$ (в противном случае решение уравнения точно не является медленно осциллирующим).

Далее на множестве S_1 определяется отображенение Пуанкаре $\Pi : S_1 \to C[a,b] \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, с сечением $\{(u,\dot{u}) : u = 0\}$. В отображении Π выделяется отображение $p : V \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, переводящее $\dot{\varphi}(0)$ в производную решения в его следующем пересечении нуля. Далее отображение p исследуется на существование и устойчивость неподвижных и периодических точек. Доказывается, что условия существования и устойчивости неподвижных и периодических точек для отображений Π и p эквивалентны, в связи с чем получаются достаточные условия на коэффициенты уравнения для существования и устойчивости периодических решений исходного уравнения.

Пусть λ_1, λ_2 — (вещественные) корни характерестического многочлена левой части дифференциального уравнения $(*)$. На следующих рисунках изображены области значений параметров λ_1 и λ_2, при которых уравнение $(*)$ либо не имеет периодических решений, либо имеет устойчивое периодическое решение, либо имеет только неустойчивое периодическое решение.





На рисунках изображены области в пространстве параметров λ_1, λ_2 в случаях $s \cdot c < 0$ и $s \cdot c > 0$ соответственно: (a, b, e, g) — уравнение не имеет периодических решений; (c, d) — уравнение имеет устойчивое периодическое решение; (f) — уравнение имеет только неустойчивое периодическое решение.

Литература

1. Кащенко С.А. Сравнительный асимптотический анализ динамики автогенераторов с различными нелинейными запаздывающими связями / С.А. Кащенко // Фундамент. и прикл. матем. — 1999. — Том 5, Вып. 4. — 1027–1060.

2. Дмитриев А.С. Асимптотика нерегулярных колебаний в модели автогенератора с запаздывающей обратной связью / А.С. Дмитриев, С.А. Кащенко // Докл. РАН, 328:2. — 1993. — 174–177.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ СТРУКТУРЫ КЕНМОЦУ

М.Б. Банару (Смоленск, СмолГУ)
mihail.banaru@yahoo.com

Наиболее содержательными и важными примерами почти контактной метрической (almost contact metric, acm–) структуры являются косимплектическая структура, структура Эндо (или слабо косимплектическая структура), а также структуры Сасаки и Кенмоцу [1]. Эти структуры вместе с их многочисленными обобщениями служат предметом разнообразных исследований, проводимых как геометрами, так и специалистами в области теоретической физики.

Напомним, что почти контактной метрической структурой на ориентируемом многообразии N нечетной размерности называют четверку тензорных полей $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$, которая удовлетворяет таким условиям [1]:

$$\eta(\xi) = 1;\ \Phi(\xi) = 0;\ \eta \circ \Phi = 0;\ \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta;$$

$$\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y),\ \ X, Y \in \aleph(N).$$

Здесь через Φ обозначено поле тензора типа (1, 1), ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика, $\aleph(N)$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N.

Напомним также, что введенную в рассмотрение в начале 70–х годов прошлого века структуру Кенмоцу определяет равенство [2]:

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle \Phi X, Y \rangle\, \xi - \eta(Y)\Phi X, \quad X, Y \in \aleph(N).$$

Пятнадцать лет назад В.Ф. Кириченко и И.В. Ускорев ввели в рассмотрение новый тип почти контактных метрических структур — структуру, названную ими структурой косимплектического типа [3]. Она определяется как acm–структура с замкнутой контактной формой. Основным свойством почти контактной метрической структуры косимплектического типа является ее инвариантность относительно так называемых канонических конформных преобразований [3]. Самым простым примером структуры косимплектического типа служит, разумеется, косимплектическая структура, а важнейшим нетривиальным примером, во многом определяющем ее ценность в контактной геометрии, — структура Кенмоцу [3], [4]. В последнее время acm–структуры косимплектического типа изучаются под названием структур Кириченко–Ускорева [5]. Заметим, что построены примеры таких acm–структур, отличных и от косимплектической структуры, и от структуры Кенмоцу [6], [7].

Рассмотрим косимплектическую структуру и структуру Кенмоцу, которые, как сказано выше, являются примерами acm–структуры Кириченко–Ускорева. Как известно [1],[4], равенства

$$\begin{gathered} d\omega^\alpha = \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta, \\ \omega_\alpha = -\omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta, \\ d\omega = 0 \end{gathered} \tag{1}$$

и

$$\begin{gathered} d\omega^\alpha = \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + \omega \wedge \omega^\alpha, \\ d\omega_\alpha = -\omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta + \omega \wedge \omega_\alpha, \\ d\omega = 0 \end{gathered} \tag{2}$$

являются первой группой структурных уравнений Картана косимплектической и кенмоцевой структур, соответственно. В.Ф. Кириченко обращал внимание на то, что именно условие $d\omega = 0$ (оно присутствует, как видно и в (1), и в (2)) скорее всего характеризует acm–структуры косимплектического типа. Он считал, что это условие может быть выведено из проведенных им совместно с И.В. Ускоревым дифференциально–геометрических построений ([3], стр.846–847).

Оказывается, упомянутое выше условие является критерием принадлежности произвольной acm–структуры классу почти контактных метрических структур косимплектического типа. Мы представляем следующий результат.

Теорема. *Равенство $d\omega = 0$ в первой группе структурных уравнений почти контактной метрической структуры является условием, необходимым и достаточным для того, чтобы эта acm–структура являлась структурой Кириченко–Ускорева.*

Литература

1. Кириченко В.Ф. Дифференциально–геометрические структуры на многообразиях / В.Ф. Кириченко. // Одесса : Печатный дом, 2013. — 458 с.

2. Kenmotsu K. A class of almost contact Riemannian manifolds / K. Kenmotsu // Tôhoku Mathematical Journal. — 1972. — V. 24. — P. 93–103.

3. Кириченко В.Ф. Инварианты конформного преобразования почти контактных метрических структур / В.Ф. Кириченко, И.В. Ускорев // Математические заметки. — 2008. — Т. 84. — № 6. — С. 838–850.

4. Banaru M.B. Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds / M.B. Banaru., V.F. Kirichenko. // Journal of Mathematical Sciences (New York). — 2015. — V. 207. — N 4. — P. 513–537.

5. Банару М.Б О гиперповерхностях со структурой Кириченко–Ускорева в келеровых многообразиях / М.Б. Банару , Г.А. Банару // Сибирские электронные математические известия. — 2020. — Т. 17. — С. 1715–1721.

6. Abu–Saleem A. A note on 2–hypersurfaces of the nearly Kählerian six–sphere / A. Abu–Saleem., M.B. Banaru., G.A. Banaru. // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. — 2017. — N 3(85). — P. 107–114.

7. Банару Г.А. О несуществовании структуры Кенмоцу на acm–гиперповерхностях косимплектического типа келерова многообразия / Г.А. Банару // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — 2019. — Т. 50. — С. 23–28.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРОФИЛЯ ВЕТРА ПО ДАННЫМ ЛИДАРНОГО СКАНИРОВАНИЯ

Н.А. Баранов (Москва,
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН)
baranov@ians.aero

В практике метеорологических измерений все более широкое распространение получают средства дистанционного зондирования, в частности, лидарные средства измерения профиля ветра [1, 2]. Основным методом оценки точностных характеристик измерений являются экспериментальные методы [3, 4]. Теоретическим оценкам до последнего времени не уделялось внимания.

В работе рассматривается задача восстановления трех компонент скорости ветра по данным измерений радиальной составляющей вдоль направлений, равномерно расположенных на поверхности вертикального конуса с углом полураствора ε [2, 5]. Компоненты скорости u, v, w вычисляются как решение задачи минимизации функционала вида

$$J(u, v, w) = \sum_{j=0}^{n-1} (V_{rj} - (u \cdot \cos\varphi_j + v \cdot \sin\varphi_j) \cdot \sin\varepsilon - w \cdot \cos\varepsilon)^2,$$

где V_{rj} — измеренное значение скорости в направлении с азимутом $\varphi_j = j \cdot \Delta\varphi$, n — число измерений, $\Delta\varphi = 2 \cdot \pi/n$.

Предполагается, что ошибки измерений вдоль направлений независимы и удовлетворяют условию

$$|V_{rj} - V_{0j}| \leqslant \delta, j = 0, ..., n-1,$$

где V_{0j} — истинное значение радиальной скорости.

В работе получены следующие оценки для максимальных ошибок восстановления компонент скорости ветра:

$$\begin{gathered} \max|u - u_0| \leqslant \delta \cdot \frac{1}{\sin\varepsilon} \cdot \frac{1 + \frac{4}{\Delta\varphi}}{1 + \frac{\pi}{\Delta\varphi}}, \\ max\,|v - v_0| \leqslant \delta \cdot \frac{1}{\sin\varepsilon} \cdot \frac{4}{\pi}, \\ \max|w - w_0| \lesssim \delta \cdot \frac{1}{\cos\varepsilon}. \end{gathered} \tag{1}$$

В асимптотическом приближении оценки точности определения горизонталных компонент скорости одинаковы и имеют вид

$$\max|u - u_0|, \max|v - v_0| \lesssim \delta \cdot \frac{4}{\pi \cdot \sin\varepsilon}. \tag{2}$$

Для среднеквадратических ошибок получены оценки вида

$$\begin{gathered} \sigma_u = \sigma_v \sim \frac{\sqrt{2}}{\sin\varepsilon\sqrt{n}}\sigma_V, \\ \sigma_w = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \cos\varepsilon}\sigma_V, \end{gathered} \tag{3}$$

где σ_V — среднеквадратическая ошибка измерений радиальной составляющей скорости ветра V_r.

Литература

1. Liu Z. A review of progress and applications of pulsed doppler wind lidars / Z. Liu , J. F. Barlow, P. W. Chan, J. C. H. Fung, Y. Li, C. Ren, H. W. L. Mak, E. Ng // Remote Sensing. — 2019. — V. 11, No. 21:2522.

2. Bingöl F. Conically scanning lidar error in complex terrain / F. Bingöl, J. Mann, D. Foussekis // Meteorologische Zeitschrift. — 2009. — No. 18. — pp. 189–195.

3. Davies F. On the accuracy of retrieved wind information from doppler lidar observations / F. Davies, C. G. Collier, K. E. Bozier, G. N. Pearson // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. — 2003. — No. 129. — pp. 321–334.

4. Liu H. Performance validation on an all-fiber pulsed coherent doppler lidar for wind-profile measurement / H. Liu, L. Yuan, C. Fan, F. Liu, X. Zhang, X. Zhu, J. Liu, X. Zhu, W. Chen // Optical Engineering. — 2020. — V. 59. — pp. 1–11.

5. Baranov N. Algorithms of 3d wind field reconstructing by lidar remote sensing data / N. Baranov // Numerical Computations: Theory and Algorithms. NUMTA 2019. Lecture Notes in Computer Science. — 2020. — V. 11974. — pp. 306–313.

О ЗАДАЧАХ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НЕОДНОРОДНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ С РАЗЛИЧНЫМИ ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В.Р. Барсегян (Армения, Ереван, Институт механики НАН Армении, Ереванский государственный университет)
barseghyan@sci.am

Задачам управления и оптимального управления разнородных (кусочно–однородных) распределенных систем посвящены, в частности, работы [1–4]. В [1, 2] и других работах подобные задачи изучены и выведены формулы типа Даламбера. Необходимость моделирования и управления распределенных колебательных процессов составных систем с кусочно–постоянными характеристиками возникает во многих теоретических и прикладных областях науки и техники. Однако научное направление по управлению и оптимальному управлению неоднородными колебаниями пока еще недостаточно исследовано. Некоторые задачи граничного оптимального управления кусочно–однородной колебательной системой рассмотрены в [3, 4].

В предлагаемом докладе рассмотрены новые задачи граничного управления и оптимального управления некоторой неоднородной колебательной системой с заданными различными многоточечными промежуточными условиями на значения функции колебания и скоростей точек в разные промежуточные моменты времени. Управление осуществляется как смещением одного конца при закрепленном другом конце, так и смещением на двух концах. Для задач оптимального управления критерий качества задан на всем промежутке времени. Распределенная неоднородная колебательная система, описываемая кусочно–однородным волновым уравнением, в частности, описывает не только поперечные колебания неоднородной струны, но и продольные колебания неоднородного стержня.

Предполагается, что рассмотренный колебательный процесс состоит из двух участков с разными физическими характеристиками материалов. Длины однородных участков такие, что время прохождения волны по каждому из них является одинаковым. В задачах оптимального управления критериями качеств являются функционалы от квадрата функции смещения. Предполагается, что все функции такие, что выполняются соответствующие условия согласования и условия сопряжения в соединениях участков, а также обеспечивается существование классических решений [3, 4].

Для всех задач по единой схеме предложен конструктивный подход построения функции граничного управления и оптимального граничного управления колебаниями, обеспечивающих выполнение многоточечных промежуточных условий. Схема построения заключается в следующем: исходные задачи с неоднородными граничными условиями сводятся к задачам управления и оптимального управления распределенными воздействиями с нулевыми граничными условиями соответствено. Далее, используя метод разделения переменных, методы теории управления и оптимального управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями [5, 6], для произвольного числа первых гармоник построены граничные управления и оптимальные граничные управления.

Литература

1. Львова Н.Н. Оптимальное управление некоторой распределенной неоднородной колебательной системой / Н.Н. Львова // Автоматика и телемеханика. — 1973. — № 10. — С. 22–32.

2. Ильин В.А. Оптимизация граничного управления колебаниями стержня, состоящего из двух разнородных участков / В.А. Ильин // Доклады РАН. — 2011. — Т. 440, № 2. — С. 159–163.

3. Барсегян В.Р. Оптимальное граничное управление смещением на двух концах при колебании стержня, состоящего из двух участков

разной плотности и упругости / В.Р. Барсегян // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2022, № 2. — С. 41–54.

4. Barseghyan V. On the Optimal Control Problem for Vibrations of the Rod/String Consisting of Two Non–Homogeneous Sections with the Condition at an Intermediate Time / V. Barseghyan, S. Solodusha // Mathematics. — 2022. — Vol. 10(23). — P. 4444.

5. Барсегян В.Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями / В.Р. Барсегян // М. : Наука, 2016. — 230 с.

6. Красовский Н.Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский // М. : Наука, 1968. — 476 с.

О ЗАДАЧЕ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НЕОДНОРОДНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАДАННЫМИ ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ[1]

В.Р. Барсегян[1], С.В. Солодуша[2]
([1]Армения, Ереван, Институт механики НАН Армении, ЕГУ,
[2]Россия, Иркутск, ИСЭМ СО РАН)
barseghyan@sci.am, solodusha@isem.irk.ru

Представленный доклад примыкает к работам [1–4]. Пусть состояние неоднородного колебательного процесса задается функцией $Q(x,t)$, $-l_1 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$, которая описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_1^2 \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2}, & -l_1 \leqslant x \leqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ a_2^2 \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2}, & 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$Q(-l_1,t) = \mu(t), \ Q(l,t) = \nu(t), \ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

и с условиями сопряжения в точке $x=0$ соединения участков

$$Q(0-0,t) = Q(0+0,t), \ \ a_1^2 \rho_1 \frac{\partial Q}{\partial x} \left.\right|_{x=0-0} = a_2^2 \rho_2 \frac{\partial Q}{\partial x} \left.\right|_{x=0+0} . \tag{3}$$

[1] Исследование С.В. Солодуши выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU–2021–0006, тема No. AAAA–A21–121012090034–3).

В (1) и (3) обозначены: $a_i = \sqrt{\frac{k_i}{\rho_i}}$, $\rho_i = const$ — плотность, $k_i = const$ — модуль Юнга, $i = 1, 2$. В (2) функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ — управляющие воздействия. Предполагается, что выполняются соответствующие условия согласования [2, 4]. Длины l_1 и l участков выбраны так, что выполняется равенство $a_1 l = a_2 l_1$. Заданы начальные (при $t = 0$) и конечные (при $t = T$) условия

$$Q(x,0) = \varphi_0(x),\ \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(x),\ -l_1 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

$$Q(x,T) = \varphi_T(x),\ \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(x),\ -l_1 \leqslant x \leqslant l. \tag{5}$$

Пусть в моменты времени $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m < t_{m+1} = T$ заданы значения функции состояния и ее производной в виде

$$Q(x,t_i) = \varphi_i(x),\ -l_1 \leqslant x \leqslant l,\ i = 2\alpha - 1,\ \alpha = 1, ..., \frac{m}{2}, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=t_j} = \psi_j(x),\ -l_1 \leqslant x \leqslant l,\ j = 2\alpha,\ \alpha = 1, ..., \frac{m}{2}. \tag{7}$$

В (6) и (7) предполагается, что α — четное число.

Требуется найти такие оптимальные граничные управления $\mu^0(t)$ и $\nu^0(t)$ из (2), под воздействием которых колебательное движение системы (1) из заданного начального состояния (4) переходит в конечное состояние (5), обеспечивая выполнение условий (6), (7) и минимизирующие функционал $\left[\int\limits_0^T \left(\mu^2(t) + \nu^2(t)\right) dt\right]^{\frac{1}{2}}$.

В работе предложен конструктивный подход построения функции оптимального граничного управления. Построение осуществляется по следующей схеме. Задача сводится к задаче оптимального управления распределенными воздействиями с нулевыми граничными условиями [2, 3], далее используется метод Фурье и методы теории оптимального управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями [4].

Литература

1. Ильин В.А. Оптимизация граничного управления колебаниями стержня, состоящего из двух разнородных участков / В.А. Ильин // Доклады РАН. — 2011. — Т. 440, № 2. — С. 159–163.

2. Барсегян В.Р. Оптимальное граничное управление смещением на двух концах при колебании стержня, состоящего из двух участков

разной плотности и упругости / В.Р. Барсегян // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2022. — № 2. — С. 41–54.

3. Barseghyan V. On the Optimal Control Problem for Vibrations of the Rod/String Consisting of Two Non–Homogeneous Sections with the Condition at an Intermediate Time / V. Barseghyan, S. Solodusha // Mathematics. — 2022. — Vol. 10(23). — P. 4444.

4. Барсегян В.Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями / В.Р. Барсегян // М. : Наука. — 2016. — 230 с.

ОБ АЛГЕБРЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

А.Г. Баскаков, Г.В. Гаркавенко, Н.Б. Ускова

(Воронеж, ВГУ, ВГПУ, ВГТУ)

anatbaskakov@yandex.ru, g.garkavenko@mail.ru, nat-uskova@mail.ru

Пусть $L_p = L_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $p \in [1, \infty)$, — банахово пространство (классов эквивалентности) измеримых и суммируемых со степенью $p = [1, \infty)$ функций с нормой

$$\|x\|_p = \Big(\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^p \, dt \Big)^{\frac{1}{p}}, \qquad x \in L_p, \qquad p \in [1, \infty).$$

При $p = \infty$ пространство L_∞ — пространство существенно ограниченных (классов эквивалентности) функций с нормой $\|x\|_\infty = \operatorname{vrai} \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|$. Пространство L_1 является банаховой алгеброй со сверткой функций

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau) g(t - \tau) \, d\tau, \qquad f, g \in L_1,$$

в качестве операции умножения. Через $\widehat{f}$ обозначим преобразование Фурье функции $f \in L_1$ (или $f \in L_2$).

Ограниченный линейный оператор J называется инволюцией, если $J^2 = I$. В пространстве L_p, $p \in [1, \infty]$, стандартной инволюцией является оператор отражения $(Jx)(t) = x(-t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Для любой функции $\alpha \in L_1(\mathbb{R})$ рассмотрим оператор свертки A_α, определенный формулой

$$(A_\alpha x)(t) = (\alpha * x)(t) = \int_{\mathbb{R}} \alpha(\tau) x(t - \tau) \, d\tau, \quad \alpha \in L_1, \quad x \in L_p. \quad (1)$$

Рассмотрим операторы $A_{\alpha,\beta} = A_\alpha + A_\beta J$, α, $\beta \in L_1$.

Лемма 1. *Операторы $A_{\alpha,\beta}$ образуют банахову алгебру $\mathcal{M}$.*

Непосредственный подсчет показывает, что $\|A_{\alpha,\beta}\| \leqslant \|\alpha\|_1 + \|\beta\|_1$ и $A_{\alpha,\beta}A_{\alpha',\beta'} = A_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}$, где

$$\begin{cases} \widetilde{\alpha} = \alpha * \alpha' + \beta * J\beta', \\ \widetilde{\beta} = \alpha * \beta' + \beta * J\alpha'. \end{cases}$$

Очевидно также, что $A_\alpha \in \mathcal{M}$, $A_\beta J \in \mathcal{M}$.

Пусть S — оператор сдвига функций $(S(s)x)t = x(t+s)$, s, $t \in \mathbb{R}$, $x \in L_p$. Отметим, что формула (1) определяет на L_p, $p \in [1, \infty)$, структуру банахова $L_1(\mathbb{R})$–модуля, ассоциированного с представлением S (см. [1–3]). Обозначим через $\Lambda(x)$ спектр Берлинга [1–3] элемента $x \in L_p$, $p \in [1, \infty)$.

Лемма 2. *Имеют место следующие свойства.*

1. Операторы A_α, $\alpha \in L_1$, перестановочны между собой и с операторами свертки $S(s), s \in \mathbb{R}$.

2. Ядро $\operatorname{Ker} A_\alpha$ *оператора A_α состоит из таких $x \in L_p$, $p \in [1, \infty)$, что* $(\operatorname{supp} \widehat{\alpha}) \cap \Lambda(x) = \varnothing$.

3. $\Lambda(A_\alpha x) \subset \Lambda(x) \cap (\operatorname{supp} \widehat{\alpha})$, *$x \in L_p$.*

4. Спектр $\sigma(A_\alpha)$ оператора A_α совпадает с замыканием множества $\operatorname{Im} \widehat{\alpha}$.

5. Если $x \in L_2$, то в $\operatorname{Ker} A_\alpha$ *состоит из таких $x \in L_2$, что* $(\operatorname{supp} \widehat{\alpha}) \cap (\operatorname{supp} \widehat{x}) = \varnothing$.

6. В пространстве L_2 оператор A_α самосопряжен, если $\alpha(-t) = \overline{\alpha(t)}$, $t \in \mathbb{R}$.

Отметим, что операторы вида $A_{\alpha,\beta}$, действующие в L_2, изучались, например, в работах [4–5].

Литература

1. Reiter H. Classical harmonic analysis and locally compact groups / H. Reiter, J.D. Stegeman. // Oxford : The Clarendon Press, Oxford University Press, 2000. — 344 p.

2. Баскаков А.Г. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства / А.Г. Баскаков, И.А. Криштал // Изв. РАН. Сер. матем. — 2005. — Т. 69, № 3. — С. 3–54.

3. Baskakov A.G. Closed operator functional calculus in Banach modules and applications / A.G. Baskakov, I.A. Krishtal, N.B. Uskova // J. Math. Anal. Appl. — 2020. — V. 492, № 2. — 124473.

4. Александров Е.Л. О спектральных функциях интегральных операторов Карлемана с ядрами, зависящими от разности и сум-

мы аргументов / Е.Л. Александров, Б.И. Кириченко // Сиб. матем. журн. — 1978. — Т. 19, № 6. — С. 1219–1231.

5. Пальчиков А.Н. Спектральный анализ интегральных операторов с ядром, зависящим от разности и суммы аргументов / А.Н. Пальчиков // Изв. вузов. Матем. — 1990. — № 3. — С. 80–83.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–РАЗНОСТНЫЕ СИСТЕМЫ С ВЕСОВЫМ ПАРАМЕТРОМ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ, СУММИРУЕМЫХ НА СЕТЕПОДОБНОЙ ОБЛАСТИ

С. А. Баталова (Воронеж, ВГУ)

s.sonya.batalova@gmail.com

Сетеподобная ограниченная область $\Im \subset \mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Im$ состоит из областей $\Im_l$ с границами $\partial\Im_l$ $(l = \overline{1,N})$, соединенных в M узловых местах ω_j. В каждом узловом месте ω_j $(j = \overline{1,M})$ фиксированное число подобластей $\Im_l$ имеют общие границы, образующие поверхность их примыкания S_j $(\operatorname{meas} S_j > 0)$. Узловое место ω_j $(j = \overline{1,M})$ определяется своею поверхностью примыкания S_j, для которой каждая поверхность $S_{j\,s}$ $(s = \overline{1,m_j})$ также является поверхностью примыкания $\Im_{l_s}$ к $\Im_{l_0}$.

Пусть $L_2(\Omega)$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$ — гильбертово пространство действительных измеримых по Лебегу функций $u(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, скалярное произведение и норма в $L_2(\Omega)$ определены равенствами $(u,v)_\Omega = \int_\Omega u(x)v(x)dx$ и $\|u\|_\Omega = \sqrt{(u,u)}$. Далее, $W_2^1(\Omega)$ — соболевское пространство элементов $u(x) \in L_2(\Omega)$, для которых $u_{x_\kappa}(x) \in L_2(\Omega)$, $\kappa = \overline{1,n}$.

Пусть $\tilde{C}^1(\overline{\Im})$ — множество функций $u(x) \in C^1(\overline{\Im})$, для которых имеет место соотношения (условия примыкания)

$$\int_{S_j} a(x)_{S_j} \frac{\partial u(x)_{S_j}}{\partial n_j} ds + \sum_{i=1}^{m_j} \int_{S_{j\,i}} a(x)_{S_{j\,i}} \frac{u(x)_{S_{j\,i}}}{\partial n_{j\,i}} ds = 0,$$

$$x \in S_{j\,i},\ i = \overline{1,m_j}$$

на поверхностях S_j, $S_{j\,i}$ $(i = \overline{1,m_j})$ всех узловых мест ω_j, $j = \overline{1,M}$.

Определение 1. *Замыкание $\tilde{C}^1(\overline{\Im})$ в норме, назовем пространством $\tilde{W}^1(\Im)$, $\|\cdot\|_{\tilde{W}^1(\Im)} = \|\cdot\|_{W_2^1(\Im)} := \|\cdot\|_{\Im}^1$, которое используется для изучения краевых задач с общими краевыми условиями*

Определение 2. *Замыкание $\tilde{C}_0^1(\Im)$ в норме, назовем пространством $\tilde{W}_0^1(\Im)$, которое используется для анализа краевых задач с условиями Дирихле*

В пространстве $\tilde{W}_0^1(\Im)$ (или $\tilde{W}^1(\Im))$ рассматриваются операторно–разностные схемы с весовыми параметрами σ_1 и σ_2, от выбора которых зависит устойчивость и точность схем.

На отрезке $[0, T]$ введем равномерную сетку с шагом $\tau = T/K$: $\omega_\tau = \{t_k = k\tau, k = 0, 1, ..., K\}$.

$$y = y(k), \quad \hat{y} = y(k+1), \quad \check{y} = y(k-1),$$
$$y_t(0) = \frac{1}{\tau}(y(1) - y(0)), \quad y_t = \frac{1}{\tau}(\hat{y} - y), \quad y_{\bar{t}} = \frac{1}{\tau}(y - \check{y}), \; y_{\overset{\circ}{t}} = \frac{1}{2\tau}(\hat{y} - \check{y}),$$
$$y_{\bar{t}\,t} = \frac{1}{\tau^2}(\hat{y} - 2y + \check{y}), \quad y^{(\sigma_1,\sigma_2)} = \sigma_1\hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)y + \sigma_2\check{y}.$$

Рассмотрим

а) двухслойную операторно–разностную систему с весами σ_1, σ_2 для параболической системы уравнений

$$y_t + Ay^{(\sigma_1,\sigma_2)} = f(k), \quad k = \overline{1, K-1}, \quad y(0) = \varphi_0(x)$$

б) трехслойную операторно–разностные систему с весами σ_1, σ_2 для гиперболической системы уравнений

$$y_{\bar{t}\,t} + Ay^{(\sigma_1,\sigma_2)} = f(k), \quad k = \overline{1, K-1}, \quad y(0) = \varphi_0(x), \quad y_t(0) = \varphi_1(x)$$

Для каждого фиксированного k ($k = \overline{1, K-1}$) функция $y(k+1) \in \tilde{W}_0^1(\Im)$ является решением и удовлетворяет краевому условию

$$y(k+1)|_{x\in\partial\Gamma} = 0,$$

Определение 3. *Совокупность функций* $y(k) \in \tilde{W}_0^1(\Im)$, $k = 2, ..., K$, *называется слабым решением системы, если удовлетворяются тождества*

$$\int_{\Im} y_{\bar{t}t}\,\eta(x)dx + \ell(y^{(\sigma_1,\sigma_2)}, \eta) = \int_{\Im} f(k)\eta(x)dx \quad \forall\eta(x) \in \widetilde{W}_0^1(\Im),$$

$$k = \overline{1, K-1}, y(0) = \varphi_0(x), \quad y_t(0) = \varphi_1(x),$$

для каждого $y(k)$;

Литература

1. Баталова С. А. Дифференциально–разностная система в классе суммируемых на графе функций / С.А. Баталова // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ–2021) сборник трудов Всероссийской научной конференции. — Воронеж. — 2021. — С. 12–13.

2. Баталова С. А. Разрешимость дифференциально–разностной системы параболического типа с распределенными параметрами на графе / С.А. Баталова // Международная научная конференция «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна. — Воронеж. — 2022. — С. 20–25.

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ КОМПЛЕКСНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ВЕКТОР–ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА[1]

А.М. Бирюков (Москва, НИУ МЭИ)
birukovalmix@mail.ru

В данной работе рассматривается задача Коши для общих линейных систем дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,z) - A(t,z,D)u = h(t,z)$$
$$u(t_0,z) = \varphi(z),$$

в пространствах целых по переменной z и аналитических в круге $|t-t_0| < \delta$ по переменной t вектор–функций с интегральными метриками. Функции из рассматриваемых пространств могут допускать рост экспоненциального типа при $z \to \infty$.

Получены необходимые и достаточные условия корректности задачи Коши в указанной шкале функциональных пространств, тем самым, точно описана структура систем дифференциальных уравнений, для которых эта корректность имеет место. Область определения решения комплексной задачи Коши совпадает с областью определения правой части системы дифференциальных уравнений. Ранее в работе [1] подобные задачи рассматривались в классах аналитических функций с супремум–нормами и были получены критерии корректности в заданной шкале функциональных пространств. Оказывается, что условия, при выполнении которых имеет место корректность задачи Коши в пространствах с супремум–нормами и в пространствах с интегральными метриками, совпадают.

Литература

1. Дубинский Ю.А. Задача Коши в комплексной области / Ю.А. Дубинский. // М. : Издательство МЭИ, 1996. — 180 с.

---

[1] Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект FSWF–2023–0012).

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОЦИКЛЫ В АЛГЕБРЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ[1]

А.В. Болтачев, А.Ю. Савин (Москва, РУДН)
boltachevandrew@gmail.com, antonsavin@mail.ru

Рассмотрим многообразие $M = \mathbb{R}^n_+$ с координатами (x', x_n) и краем $X = \mathbb{R}^{n-1}$, определяемому уравнением $x_n = 0$. Рассмотрим алгебру символов операторов Буте де Монвеля на M (см. [1]) нулевого порядка и типа. Напомним, что элементами алгебры $\mathcal{A}$ являются пары

$$\widetilde{a} = (a, a_X) \in \mathcal{O}(T_0^*M) \oplus \mathcal{O}(T_0^*X, \mathcal{B}(H_+ \oplus \mathbb{C})), \tag{1}$$

где a — однородный символ нулевого порядка на кокасательном расслоении T_0^*M без нулевого сечения, называемый *внутренним символом* и удовлетворяющий свойству трансмиссии.

Функция a_X в (1) называется *граничным символом* и является гладкой оператор–функцией на T_0^*X вида

$$a_X(x', \xi') = \begin{pmatrix} \Pi_+ a|_{\partial T_0^*M} + \Pi' \mathfrak{g} & \mathfrak{c} \\ \Pi'_{\xi_n} \mathfrak{b} & \mathfrak{r} \end{pmatrix} : \begin{matrix} H_+ \\ \oplus \\ \mathbb{C} \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H_+ \\ \oplus \\ \mathbb{C} \end{matrix} . \tag{2}$$

Здесь

- $H_+ = \mathcal{F}_{x_n \to \xi_n}(\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ — пространство образов Фурье пространства Шварца $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ гладких функций на $\overline{\mathbb{R}}_+$, быстро убывающих на бесконечности;
- $a|_{\partial T_0^*M} \in C^\infty(T_0^*M|_{\partial M})$; $\mathfrak{r} \in C^\infty(T_0^*X)$;
- $\mathfrak{b} \in C^\infty(T_0^*X, H_-)$; $\mathfrak{c} \in C^\infty(T_0^*X, H_+)$, $\mathfrak{g} \in C^\infty(T_0^*X, H_+ \otimes H_-)$, где $H_- = \mathcal{F}(\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_-))$;
- операторы $\Pi_\pm : H_+ \oplus H_- \to H_\pm$ являются проекторами, причем Π' — функционал следующего вида

$$\begin{aligned} \Pi' : H_+ \oplus H_- &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ u(\xi_n) &\longmapsto \lim_{x_n \to 0+} \mathcal{F}^{-1}_{\xi_n \to x_n}(u(\xi_n)). \end{aligned}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 21–51–12006).

Мы определяем явные *периодические циклические коциклы* (см. [2]) на алгебре символов операторов Буте де Монвеля $\mathcal{A}$. Также рассматривается эквивариантный случай — изучается действие дискретной группы Γ на многообразии с краем и ассоциированное действие на алгебре $\mathcal{A}$.

Литература

1. Boutet de Monvel L. Boundary Problems for Pseudodifferential Operators / L. Boutet de Monvel // Acta Math. — 1971. — V. 126. — P. 11–51.

2. Connes A. Noncommutative Geometry / A.Connes // Academic Press, Inc. San Diego, CA, — 1994.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ–РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ[1]

Н.П. Бондаренко (Саратов, СГУ)
bondarenkonp@info.sgu.ru

Доклад посвящен обратным спектральным задачам для дифференциальных операторов, порожденных дифференциальными выражениями вида

$$\ell_n(y) := y^{(n)} + \sum_{k=0}^{m-1} (\sigma_{2k}^{(i_{2k})}(x) y^{(k)})^{(k)} + \\ + \sum_{k=0}^{m+\tau-2} \big((\sigma_{2k+1}^{(i_{2k+1})}(x) y^{(k)})^{(k+1)} + (\sigma_{2k+1}^{(i_{2k+1})}(x) y^{(k+1)})^{(k)} \big),$$

где $n = 2m + \tau > 2$, $m \in \mathbb{N}$, $\tau = 0, 1$, $x \in (0, T)$, $T \leqslant +\infty$, $(i_\nu)_{\nu=0}^{n-2}$ — целые числа, удовлетворяющие неравенствам $0 \leqslant i_{2k+j} \leqslant m - k - j$, $j = 0, 1$, $(\sigma_\nu)_{\nu=0}^{n-2}$ — регулярные функции (в разных случаях требуется выполнение условий $\sigma_\nu \in L_2(0, T)$ или $\sigma_\nu \in L_1(0, T)$), производные $\sigma_\nu^{(i_\nu)}$ понимаются в смысле обобщенных функций (распределений). Для работы с дифференциальным выражением $\ell_n(y)$ используется регуляризационный подход [1].

В [2,3] доказаны теоремы единственности решения обратных спектральных задач для уравнения $\ell_n(y) = \lambda y$ на конечном интерва-

[1] Работа выполнена в Саратовском государственном университете при финансовой поддержке РНФ (проект № 21–71–10001, `https://rscf.ru/project/21-71-10001/`).

ле $(0,1)$ и на полуоси $(0,+\infty)$ с соответствующими краевыми условиями. Рассматриваемые обратные задачи состоят в восстановлении функций $(\sigma_\nu)_{\nu=0}^{n-2}$ и коэффициентов краевых условий по матрице Вейля–Юрко $M(\lambda)$, аналогичной матрице Вейля, использовавшейся в [4] для восстановления дифференциальных операторов высших порядков с регулярными коэффициентами. В случае конечного интервала элементы матрицы $M(\lambda)$ однозначно определяются по $\frac{n(n-1)}{2}$ спектрам.

В [5] разработан конструктивный подход к решению обратных задач для дифференциальных операторов высших порядков с коэффициентами–распределениями на основе идей метода спектральных отображений. Получены формулы восстановления коэффициентов дифференциального выражения $\ell_n(y)$ в различных классах функций. Важную роль в работе [5] играют асимптотики спектральных данных (собственных значений и весовых чисел), полученные в [6]. В препринте [7] при помощи разработанного метода получены необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи для дифференциального уравнения третьего порядка ($n=3, i_0=1, i_1=0, \sigma_\nu \in L_2(0,1), \nu=0,1$).

Литература

1. Мирзоев К.А. Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами–распределениями / К.А. Мирзоев, А.А. Шкаликов // Матем. заметки. — 2016. — Т. 99, № 5. — С. 788–793.

2. Bondarenko N.P. Inverse spectral problems for arbitrary–order differential operators with distribution coefficients / N.P. Bondarenko // Mathematics. — 2021. — Vol. 9, no. 22. — Article ID 2989.

3. Bondarenko N.P. Linear differential operators with distribution coefficients of various singularity orders / N.P. Bondarenko // Math. Meth. Appl. Sci. — 2023. — Vol. 46, no. 6. — P. 6639–6659.

4. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач / В.А. Юрко // М. : ФИЗМАТЛИТ. — 2007. — 384 с.

5. Bondarenko N.P. Reconstruction of higher–order differential operators by their spectral data / N.P. Bondarenko // Mathematics. — 2022. — Vol. 10, no. 20. — Article ID 3882.

6. Bondarenko N.P. Spectral data asymptotics for the higher–order differential operators with distribution coefficients / N.P. Bondarenko // J. Math. Sci. — 2023. — https://doi.org/10.1007/s10958-022-06118-x.

7. Bondarenko N.P. Inverse spectral problem for the third–order differential equation / N.P. Bondarenko // Arxiv.org. — 2023. — https://arxiv.org/abs/2303.13124

ЯВЛЕНИЕ БИФУРКАЦИИ В НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

Е.З. Боревич (Санкт–Петербург, СПбГЭТУ)
danitschi@gmail.com

Рассматривается следующая краевая задача

$$\begin{cases} E'' + E'E = fH(E, E_0), \quad 0 < x < 1, \\ E(0) = E(1) = E_0, \quad E_0 > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где f – положительная константа, $H(E, E_0) = G(E) - G(E_0)$, а функция $G(E)$ класса C^2 удовлетворяет условиям:

1) функция $G(E)$ при $E > 0$ имеет ровно две точки экстремума: E_1 – локальный максимум, E_2 – локальный минимум, причем $E_1 < E_2$;

2) $G'(E) > 0$ при $E \in [0, E_1) \cup (E_2, +\infty)$, $\quad G'(E) < 0$ при $E \in (E_1, E_2)$.

Обозначим $E(x) = E_0 + u(x)$, $C_0^{(2)}([0,1])$ пространство функций $u(x)$, непрерывных на $[0,1]$, дважды непрерывно дифференцируемых на $(0,1)$ и удовлетворяющих условиям $u(0) = u(1) = 0$, а через $C([0,1])$ – пространство непрерывных функций на $[0,1]$. Будем рассматривать задачу (1) как нелинейную задачу на собственные значения, для чего запишем ее в виде

$$\begin{cases} Lu + fK(E_0)u + N(E_0, f, u) = 0, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $Lu = -u'' - E_0 u'$ – линейный оператор, действующий из $X = C_0^{(2)}([0,1])$ в $Y = C([0,1])$, $K(E_0) = H'(E_0)$, а $N(E_0, f, u) = -u'u + f(H(E_0 + u, E_0) - H'(E_0)u)$ – нелинейный оператор, действующий из $R^2 \times X$ в Y. Обозначим через S – замыкание множества всех нетривиальных решений $(f, u) \in R \times X$ задачи (2), и пусть S_k – максимальная компонента связности множества S, содержащая точку $(f_k, 0)$, где $f_k = -K(E_0)^{-1}(E_0^2/4 + \pi^2 k^2)$, $k = 1, 2, ...$

Теорема. *Пусть $E_0 \in (E_1, E_2)$, тогда для задачи (2) справедливы следующие утверждения:*

1) для любого $k \in N$ множество S_k неограничено в $R \times X$;

2) если $(f,u) \in S_k$, то решение $u(x)$ имеет ровно $(k+1)$ нулей на $[0,1]$, причем все нули простые;

3) для любого $k \in N$ существует константа $s_k > 0$, окрестность $U_k \subset R \times X$ решения $(f_k, 0)$ и два C^1–отображения $\hat{f}_k$: $(-s_k, s_k) \to R$, $\hat{u}_k : (-s_k, s_k) \to X$ такие, что $\hat{f}_k(s) = f_k + O(s)$, $\hat{u}_k(s) = su_k(x) + O(s^2)$ при $s \to 0$ и $S \cap U_k = \{(\hat{f}_k(s), \hat{u}_k(s)) : |s| < s_k\}$, где $u_k(x) = e^{-E_0 x/2} sin(\pi k x)$. Эти решения называются бифуркационными [1].

Литература

1. Grandall M.G., Rabinowitz P.H. Bifurcation from simple eigenvalues / M.G. Grandall, P.H. Rabinowitz // J. Funct. Anal. — 1971. — Vol.8. — P. 321–340.

ГЕОМЕТРИЯ ГРУППЫ ЛИ В ГРУППОВОМ АНАЛИЗЕ ОДНОМЕРНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ[1]

А.В. Боровских (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова)
bor.bor@mail.ru

Пусть G – n–мерная группа, реализованная как множество в $\mathbb{R}^n$, соответствующие переменные мы будем обозначать через $x = (x^1, \ldots, x^n))$; $\{\Xi_\alpha = \xi^i_\alpha \partial_i(x)\}^n_{\alpha=1}$ – базис соответствующей порождающей алгебры.

Теорема 1. *Множество метрик $g_{ij}(x)dx^i dx^j$, заданных на G и остающихся инвариантыми при действии этой группы, образует линейное пространство размерности $\frac{n(n+1)}{2}$.*

Теорема 2. *Пусть G – группа Ли размерности n, алгебра Ли которой имеет базис $\Xi_\alpha = \xi^i_\alpha(x)\partial_i$ и структурные константы $C^\gamma_{\alpha\beta}$. На этой группе существует ровно n линейных дифференциальных форм, инвариантных относительно этой алгебры.*

Следствие. *Все метрические формы из формулировки теоремы 1, инвариантные относительно алгебры, имеют вид квадратичной формы $ds^2 = q_{\alpha\beta}\omega^\alpha\omega^\beta$ от линейных дифференциальных форм $\omega^\alpha = \omega^\alpha_i dx^i$, $\alpha = 1, \ldots, n$ с постоянными коэффициентами $q_{\alpha\beta}$.*

Обозначим через ω^i_α матрицу, обратную к матрице ω^α_i, задающей инвариантные дифференциальные формы $\omega^\alpha = \omega^\alpha_i dx^i$. Тогда для операторов $\Omega_\alpha = \omega^i_\alpha \partial_i$ выполнено $[\Xi_\alpha, \Omega_\beta] = 0$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075–02–2023–939).

Определение. *Алгебру, образованную решениями* Ω *системы уравнений* $[\Xi_\alpha, \Omega] = 0$, мы назовем двойственной к алгебре, образованной операторами Ξ_α.

Замечание 1. Двойственная алгебра в принципе не совпадает с исходной.

Замечание 2. Инвариантные относительно Ξ_α формы ω^β являются формами Маурера–Картана для алгебры с базисом Ω_β. Аналогично, формы Маурера–Картана алгебры с базисом Ξ_α оказываются инвариантными относительно Φ_β, так что здесь действительно наблюдается определенная двойственность.

Пусть

$$\frac{dx^1}{\varphi^1(x)} = \cdots = \frac{dx^n}{\varphi^n(x)} \tag{1}$$

– уравнение семейства кривых, инвариантного относительно группы G. Умножением (1) на подходящий множитель можно добиться, чтобы $\omega_i^\alpha \varphi^i$ оказались константами. Обозначим их через λ^α.

Для любой инвариантной метрики $ds^2 = q_{\alpha\beta}\omega^\alpha\omega^\beta$ единичный касательный вектор $\tau = (\tau^i)$ к кривой (1) имеет вид

$$\tau^i = \frac{dx^i}{ds} = \frac{\varphi^i(x)}{\sqrt{Q}}, \qquad Q = q_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta$$

и поэтому на касательном векторе τ соответствующая линейная форма оказывается постоянной: $\omega_i^\alpha \tau^i = \frac{\lambda^\alpha}{\sqrt{Q}}$.

Замечание. Вектор $\varphi^i = \lambda^\alpha \omega_\alpha^i$ является линейной комбинацией векторных полей, порождающих двойственную алгебру Φ, поэтому изучаемые нами траектории, инвариантные относительно алгебры Ξ, являются траекториями однопараметрической подгруппы, порожденной оператором из двойственной алгебры.

Обозначим через $\tau_N = (\tau_N^k)$ репер Френе, занумерованный индексом $N = 1, \ldots, n$, и, соответственно, $\lambda_N^\alpha = \omega_i^\alpha \tau_N^i$.

Теорема 3. *В терминах величин* λ_N^α *система Френе имеет вид*

$$\frac{d\lambda_N^\gamma}{ds} + H_{\alpha\beta}^\gamma \lambda_N^\alpha \lambda_1^\beta = -\varkappa_{N-1}\lambda_{N-1}^\gamma + \varkappa_N \lambda_{N+1}^\gamma,$$

где $H_{\alpha\beta}^\gamma$ *– постоянные, определяемые формулой*

$$H_{\alpha\beta}^\gamma = -\frac{1}{2}[q^{\gamma\sigma} q_{\mu\beta} C_{\alpha\sigma}^{*\mu} + C_{\alpha\beta}^{*\gamma} + q^{\gamma\sigma} q_{\alpha\nu} C_{\beta\sigma}^{*\nu}],$$

$C_{\alpha\beta}^{*\gamma}$ *– структурные константы алгебры с базисом* Ω_α.

Следствие. *Для всех инвариантных кривых все кривизны и все величины λ_N^α являются постоянными.*

Полученные результаты позволили дать геометрическую интерпертацию групповой классификации одномерного кинетического уравнения $f_t + cf_x + (Ff)_c = 0$.

ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ВОЗМУЩЕНИЯ ОПЕРАТОРА БЕССЕЛЯ

Д.Ю. Бородинова (Москва, МГУ)
dashaborodinova@gmail.com

Для операторов, соответствующих дифференциальным операциям:

$$L_0 = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}, \;\; L_1 = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2} + q(x)$$

на интервале (0,1), где $q(x)$ — комплекснозначный потенциал из $L_\infty(0,1)$, изучаются системы их корневых функций. Собственные и присоединенные функции понимаются в обобщенном смысле, т. е., как почти всюду решения уравнений $L_\alpha y_n = \mu^2 y_n + \mathrm{sgn} n \cdot y_{n-1}$; здесь $n = 0, 1, \ldots, s(\mu)$, $\mu \in M$, где $M \subset \mathbb{C}$ — некоторое счетное множество.

Интерес к подобным системам возникает при исследовании спектральных разложений для общих краевых задач, связанных с дифференциальной операцией L_0 и её возмущением L_1 (см., например, [1–2]).

Была построена цепочка корневых функций операции L_0 следующего вида:

$$u_n(x,\mu) = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{\mu^{2(n-k)}} u_k^*(x,\mu);$$

$$u_0^*(x,\mu) = u_0(x,\mu) = a j_\nu(\mu x) + b\gamma_\nu(\mu x);$$

$$j_\nu(z) = \sqrt{z} J_\nu(z); \; \gamma_\nu(z) = \sqrt{z} Y_\nu(z);$$

$$u_k^*(x,\mu) = \frac{1}{\mu^k} x^k (a j_{\nu+n}(\mu x) + b\gamma_{\nu+n}(\mu x)).$$

В случае возмущенной операции L_1 построена интегральная формула «сдвига» для корневых функций, вида:

$$y_n(x \pm t, \mu) = u_n(x \pm t, \mu) + \sum_{k=0}^{n} \mathcal{W}_\pm^{k+1} \left(q(x \pm t) y_{n-k}(x \pm t) \right),$$

$$\text{где } \mathcal{W}_{\pm} f(t) = \frac{\pi}{2\mu} \int_0^t W(x \pm t, x \pm \tau) f(\tau) \mathrm{d}\tau,$$

x — любое фиксированное число из интервала $(0, 1)$.

Данные результаты позволили доказать так называемую антиаприорную оценку для L_2–норм корневых функций операций L_0 и L_1. Оценки такого вида играют большую роль в изучении вопросов сходимости спектральных разложений в случае бесконечного числа присоединенных функций.

Теорема 1. *Пусть в системах* $\{u_n(x, \mu)\}$ *и* $\{y_n(x, \mu)\}$ *корневых функций операций* L_0 *и* L_1 *множество* M *удовлетворяет условию:* $|\operatorname{Im} \mu| \leqslant A$ *и порядок* $s(\mu) \leqslant B$. *Тогда выполнена равномерная оценка в норме* $L_2(0, 1)$*:*

$$\|u_n(x, \mu)\|_2 \leqslant c(1 + |\mu|)\|u_{n+1}(x, \mu)\|_2,$$

$$\|y_n(x, \mu)\|_2 \leqslant c(1 + |\mu|)\|y_{n+1}(x, \mu)\|_2.$$

Литература

1. Ильин В.А. О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка / В.А. Ильин // Доклады АН СССР. — 1983. — Т. 273, № 5. — С. 1048–1053.

2. Крицков Л.В. Представление и оценки корневых функций сингулярных дифференциальных операторов на отрезке / Л.В. Крицков // I: Дифференц. уравнения. — 1992. — Т. 28, № 8. — С. 1291–1302; II: Дифференц. уравнения. — 1993. — Т. 29, № 1. — С. 64–73.

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРО–АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С ПЕРЕМЕННЫМ НИЖНИМ ПРЕДЕЛОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ[1]

М.Н. Ботороева, М.В. Булатов

(Иркутск, ИГУ, ИДСТУ СО РАН)

masha888888@mail.ru, mvbul@icc.ru

В докладе будут рассматриваться системы интегральных уравнений Вольтерра I и II родов, оба придела интегрирования в которых переменные. Рассматривается случай линейного относительно переменной t нижнего предела вида at.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда. Проект № 22–11–00173, `https://rscf.ru/project/22-11-00173/`.

Такие системы станем называть интегро–алгебраическими уравнениями с переменными пределами интегрирования, они могут быть представленны в виде

$$A(t)x(t) + \int_{at}^{t} K(t,s)x(s)ds = f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где $A(t)$ и $K(t,s)$ — $(n \times n)$ матрицы, элементами которых являются заданные непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $t \in [0,1]$ и в области $\{(t,s) \in R^2 | at \leqslant s \leqslant t\}$ соответственно, $f(t)$ — n–мерная вектор–функция с известными, достаточно гладкими элементами, $x(t)$ — искомая n–мерная вектор–функция. Известно постоянное значение $0 \leqslant a < 1$. Ненулевая матрица $A(t)$ является тождественно вырожденной.

Поставленная задача является обобщением интегро–алгебраических уравнений (ИАУ), в которых $a = 0$ и нижний предел интегрирования становится постоянным. Их исследование началось с работы В.Ф. Чистякова [1].

Исследованию другого частного случая (при $n = 1$) рассматриваемых систем посвящена монография А.С. Апарцина [2].

В докладе будут описаны основные отличия поставленной задачи от указанных выше частных случаев. Будут представлены условия существования единственного непрерывного решения ИАУ с переменным нижним пределом интегрирования at.

Литература

1. Чистяков В.Ф. О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах / В.Ф. Чистяков // Функции Ляпунова и их применения. — Новосибирск : Наука, 1987. — С. 231–239.

2. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы / А.С. Апарцин. — Новосибирск : Наука Сибирская издательская фирма РАН, 1999. — 193 с.

О ПОСТРОЕНИИ ЭКСТРАПОЛЯЦИОННЫХ ДВУХСТАДИЙНЫХ МНОГОШАГОВЫХ МЕТОДАХ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО–АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ[1]

О.С. Будникова, М.В. Булатов (Иркутск, ИГУ, ИДСТУ)
osbud@mail.ru, mvbul@icc.ru

В докладе планируется рассмотреть систему взаимосвязанных алгебраических уравнений и интегральных уравнений типа Вольтерра первого и второго рода, которая имеют форму уравнения

$$A(t)x(t) + \int\limits_0^t K(t,s)x(s)\,ds = f(t),\ t \in [0;T], \tag{1}$$

с ненулевой тождественно вырожденной $(n \times n)$–матрицей $A(t)$. Такие задачи в совеременной литературе принято называть интегро-алгебраическими уравнениями (ИАУ). Предполагается, что элементы входных данных достаточно гладкие.

Рассматриваемый класс задач имеет важное практическое применение при моделировании сложных динамических систем [2], а первые публикации посвященные исследованию разрешимости ИАУ и построению методов их численного решения вышли в конце 80–х годов [1].

Для численного решения задачи (1) предлагается строить неявные двустадийные многошаговые методы. В докладе будут представлены условия на весовые коэффициенты, при которых разработанные алгоритмы являются устойчивыми и результаты численных расчетов тестовых примеров для иллюстрации теоретических положений и выявления реально достигнутого порядка точности.

Представляемые результаты являются естественным продолжением исследований начатых в [3].

Литература

1. Чистяков В.Ф. О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах / В.Ф. Чистяков // Функции Ляпунова и их применения. Новосибирск: Наука. — 1987. С. 231–239.

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–11–00173, `https://rscf.ru/project/22-11-00173/`

2. Ботороева М.Н. Численное решение интегроалгебраических уравнений со слабой граничной особенностью k–шаговыми методами / М.Н. Ботороева, О.С. Будникова, М.В. Булатов, С.С. Орлов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2021. — Vol. 61, No. 11. — P. 1825–1838.

3. Будникова О.С. Численное решение интегроалгебраических уравнений многошаговыми методами / О.С. Будникова, М.В. Булатов // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 2012. — Т. 52, No 5. — С. 829–839.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ И НЕКЛАССИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА[1]

С.А. Будочкина (Москва, РУДН)
budochkina-sa@rudn.ru

Известный в классической механике принцип Остроградского выделяет действительное движение системы из всех кинематически возможных движений при более широких предположениях относительно сил по сравнению с принципом Гамильтона. В первом случае силы, действующие на систему, предполагаются произвольными, во втором — потенциальными. Уравнениями движения системы, к которым приводит принцип Остроградского, являются уравнения Лагранжа второго рода. Если на систему одновременно действуют потенциальные и непотенциальные активные силы, то уравнения движения принимают следующий вид:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \mathsf{P}_i = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

где $L = L(q, \dot{q}, t)$ — лагранжиан системы, $\mathsf{P}_i = \mathsf{P}_i(q, \dot{q}, t)$ — обобщенная непотенциальная сила, отнесенная к координате q_i. Аналогичные уравнения в механике систем с бесконечным числом степеней свободы, то есть уравнения вида

$$\frac{\delta L}{\delta u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta u_t}\right) + \Lambda = 0, \tag{1}$$

[1] Публикация выполнена в рамках проекта № 002092–0–000 Российского университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы

где через $\delta/\delta u$ и $\delta/\delta u_t$ обозначены функциональные производные по u и u_t соответственно, называются уравнениями Эйлера—Лагранжа с непотенциальными плотностями сил (при $\Lambda \equiv 0$ — уравнениями Эйлера—Лагранжа).

Вопросы представимости дифференциальных уравнений в виде (1), а также канонических и неканонических уравнений Гамильтона тесно связаны с обратными задачами вариационного исчисления (ОЗВИ) в различных постановках. Решению ОЗВИ посвящены работы многих ученых (см., например, работы [1–6] и имеющуюся в них библиографию).

Основные результаты.

1. Получены необходимые и достаточные условия представимости операторного уравнения с первой производной по времени, т.е. уравнения

$$N(u) \equiv P_{t,u}u_t + Q(t,u) = 0, \tag{2}$$

в виде (1), построен функционал — вариационный принцип.
2. Доказано, что при выполнении соответствующих условий уравнение (2) имеет структуру уравнений Биркгофа, откуда в частном случае получена структура классических уравнений Биркгофа, а из формулы для построения вариационного принципа — известный функционал Пфаффа.
3. Уравнение (2) представлено в форме B_u–гамильтонова уравнения.
4. Операторное уравнение со второй производной по времени

$$N(u) \equiv P_{2t,u}u_{tt} + P_{1t,u}u_t + P_{3t,u}u_t^2 + Q(t,u) = 0$$

представлено в форме Гамильтона–допустимых уравнений.

Литература

1. Santilli R.M. Foundations of theoretical mechanics, II: Birkhoffian generalization of Hamiltonian mechanics / R.M. Santilli. — New–York—Berlin : Springer–Verlag, 1983. — 370 p.

2. Tonti E. Variational formulation of nonlinear differential equations / E. Tonti // Bull. Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. — 1969. — V. 55. — P. 137–165 (Pt.I); 1969. — V. 55. — P. 262–278 (Pt.II).

3. Филиппов В.М. Вариационные принципы для непотенциальных операторов / В.М. Филиппов. — М. : УДН, 1985. — 206 с.

4. Филиппов В.М. Вариационные принципы для непотенциальных операторов / В.М. Филиппов, В.М. Савчин, С.Г. Шорохов // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. — М. : ВИНИТИ. — 1992. — Т. 40. — С. 3–176.

5. Савчин В.М. Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем / В.М. Савчин. — М. : УДН, 1991. — 237 с.

6. Задорожний В.Г. Методы вариационного анализа / В.Г. Задорожний. // М.–Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. — 316 с.

МОДЕЛИ ОХЛАЖДЕНИЯ И ЗАМОРАЖИВАНИЯ ЖИВОЙ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ТКАНИ ПЛОСКИМ ЛИНЕЙЧАТЫМ АППЛИКАТОРОМ

Б.К. Буздов (Нальчик, ИИПРУ КБНЦ РАН)
beslan.buzdov@yandex.ru

Известно, что при охлаждении биологической ткани в криомедицине используются криоинструменты с различными формами охлаждающей поверхности. Криоинструменты могут располагаться как на поверхности биоткани, так и полностью внедряться в нее. С понижением температуры охлаждающей поверхности в ткани возникает нестационарное температурное поле, зависящее в общем случае от трех пространственных координат и времени. Интерес представляют как распределение температурного поля в ткани, так и размеры зон криопоражения, замораживания и влияния холода в биоткани, а также время выхода температурного поля на стационар.

Характерной особенностью моделей охлаждения и замораживания живой биологической ткани является существование стационарных решений и пространственная локализация температурного поля. Подавляющее большинство встречающихся в научной литературе математических моделей замораживания живой биоткани основано на модели Пеннеса (или ее незначительных модификациях), из которой виден линейный характер зависимости источников тепла от искомого температурного поля. Такой характер зависимости не позволяет описать реально наблюдаемую пространственную локализацию тепла. Кроме того, модель Пеннеса не учитывает того факта, что замерзание межклеточной жидкости происходит гораздо раньше, чем замерзание внутриклеточной жидкости и соответствующее этим двум процессам тепло выделяется в разные моменты времени.

В предлагаемой работе построены новые математические модели охлаждения и замораживания живой биологической ткани плоским, достаточно протяженным линейчатым аппликатором, располагаемым на ее поверхности. Наличие источников тепла специального вида позволяют учесть указанные выше особенности. Модели представляют собой двумерные краевые задачи (в том числе типа Стефана) и имеют приложение в криохирургии. Метод численного исследования поставленных задач основан на сглаживании разрывных функций и применении к «сглаженным» задачам локально-одномерных разностных схем без явного выделения границы влияния холода и границ фазового перехода [1,2]. Проведенные численные расчеты на ЭВМ показали, что стабилизация температурного поля к предельному стационарному состоянию наступает примерно через 6 минут. Обнаружена связь между шагами по времени и пространству, что указывает на условную устойчивость построенных разностных схем. Кроме того, численные эксперименты показали возможность выбора «большого» шага по времени (примерно на два порядка больше шага по пространству), что существенно сокращает время проведения численных расчетов, особенно при решении многомерных задач. Методика численного исследования была достаточно успешно опробована автором ранее при решении других двумерных задач [3–5].

Литература

1. Самарский А.А. Экономичные разностные схемы решения задачи Стефана / А.А. Самарский, Б.Д. Моисеенко // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. — 1965. — Т. 5, — № 6. — С. 816–827.

2. Будак Б.М. Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задачи Стефана / Б.М. Будак, Е.Н. Соловьева, А.Б. Успенский // Журнал вычисл. математики и матем. физики. — 1965. — Т. 5, — № 5. — С. 828–840

3. Буздов Б.К. Численное исследование одной двумерной математической модели с переменным коэффициентом теплообмена, возникающей в криохирургии / Б.К. Буздов // Сибирский журнал индустриальной математики. —2017. — Т. 20, — № 4. — С. 22–28.

4. Буздов Б.К. Моделирование криодеструкции биологической ткани / Б.К. Буздов // Журн. Математическое моделирование. — 2011. — Т. 23, — № 3. — С. 27–37.

5. Буздов Б.К. Об одной двумерной краевой задаче типа Стефана, возникающей в криохирургии / Б.К. Буздов // Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2019. — Т. 167, — С. 20–26

ОПЕРАТОР $B_{-\gamma}$ В ВЕСОВОЙ БИЛИНЕЙНОЙ ФОРМЕ

Ю.Н. Булатов (Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина)
y.bulatov@bk.ru

Данная работа продолжает исследования начатые в [1] и [2]. Речь идет о сингулярном дифференциальном операторе Бесселя

$$B_{-\gamma} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{-\gamma}{x}\ \frac{d}{dx}\,, \quad -\gamma < 0\,.$$

в области $x \in \mathbb{R}_1^+ = \{x:\ \ x > 0\}$. Ранее сингулярный дифференциальный оператор Бесселя с параметром $-1 < -\gamma < 0$ изучался в [1], что привело к исследованию нового специального класса весовых сферических функций.

Отметим, что области определения оператора Бесселя $B_{-\gamma}$ принадлежат четные и нечетные бесконечно дифференцируемые функции, определенные на $[0,\infty)$ и для которых справедлива оценка

$$x^{-\gamma}u(x) = O(x)\ ,\ x \to 0. \tag{1}$$

Введем следующую билинейную форму

$$(u,v)_\omega = \int\limits_0^\infty u(x)\ v(x)\ x^\omega\ dx \tag{2}$$

при условии $\omega < 0$ указанная выше оценка (1) принимает вид

$$x^\omega u = O(x),\ x \to 0.$$

В качестве основного пространства функций рассматриваем подпространство Шварца $S_{ev} = S_{ev}[0,\infty)$, состоящее из быстро убывающих вместе со всеми производными функций, четных по каждой координате аргумента.

Введем весовую билинейную форму, в рамках которой сингулярный дифференциальный оператор Бесселя $B_{-\gamma}$ может быть не самосопряженным. Дополнительно положим, что

$$\varphi \in S_{ev,\omega} {=} S_{ev,\omega}[0,\infty),\ \text{если}\ \ x^\omega\varphi(x) = O(x),\ x \to +0.$$

Функционал Дирака–Киприянова определим равенством

$$(\delta_{-\gamma},\,\varphi)_\gamma = \varphi(0),\ \forall\,\varphi \in S_{ev}\,.$$

Теорема 1. *Пусть* $\gamma \in (0,1)$, ω *– произвольное действительное число. Тогда формула*

$$(B_{-\gamma}u, v)_\omega = \left(u, \left[B_{\gamma+2\omega} + \frac{(\gamma+\omega)(\omega-1)}{x^2}\right]\ v\right)_\omega$$

справедлива при $\omega > 0$ *для всех функции* $u(x)$ *и* $v(x)$, *принадлежащих основному пространству функций* $S_{ev,\omega} = S_{ev}[0,\infty)$.

На основе билинейной формы (2) введем весовое пространство Лебега—Киприянова

$$L_2^\omega\ [0,\infty) = \{f:\ x^\omega f \in L_2\ [0,\infty),\ \ \omega > -1\}$$

Следствие 1. *Оператор*

$$\left[B_{\gamma+2\omega} + \frac{(\gamma+\omega)(\omega-1)}{x^2}\right] \tag{3}$$

является сопряжённым к оператору $B_{-\gamma}$ *в* L_2^ω.

Заметим, что при $\omega = -\gamma$ оператор $B_{-\gamma}$ самосопряжённый (симметрический) в $L_2^{-\gamma}$ для всех функций u и v из области определения оператора $B_{-\gamma}$. В случае $\omega = 1$ оператор (3) оказывается сопряжённым оператору к $B_{-\gamma}$.

Литература

1. Ляхов Л. Н. Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B–гармонического уравнения / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина // Дифференциальные уравнения — 2020. — Т. 56, № 12. — С. 1610–1620.

2. Ляхов Л. Н. Псевдосдвиг и фундаментальное решение оператора Δ_B Киприянова / Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов, С.А. Рощупкин, Е.Л. Санина // Дифференциальные уравнения — 2022. — Т. 58, № 12. — С. 1654–1665.

3. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические задачи / И.А. Киприянов // М.: Наука. — 1997. — С. 199.

О БЛОЧНЫХ МЕТОДАХ ДЛЯ ИНТЕГРО–АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ[1]

М.В. Булатов, Л.С. Соловарова, Т.С. Индуцкая
(Иркутск, ИДСТУ СО РАН)
mvbul@icc.ru, soleilu@mail.ru, indutskaya.tat@yandex.ru

В докладе рассмотрены линейные системы интегральных уравнений Вольтерра вида

$$A(t)x(t) + \int_0^t K(t,\tau)x(\tau)dt = f(t),\ 0 \leqslant \tau \leqslant 1,$$

где $A(t)$, $K(t,\tau)$ — $(n \times n)$–матрицы, $f(t)$ — известная, $x(t)$ — искомая n–мерные вектор–функции. Предполагается, что

$$det A(t) \equiv 0.$$

Такие системы будем называть интегро–алгебраическими уравнениями (ИАУ).

Численные методы строятся для ИАУ, для которых выписаны достаточные условия существования и единственности решения в классе $C^p_{[0,1]}$ [1]. Описаны блочные конечно–разностные алгоритмы для рассматриваемых задач, построение которых основано на идеях из [2]. Произведено исследование на устойчивость предлагаемых методов. Отмечено, что в ряде случаев данные методы могут быть неустойчивыми.

Литература

1. Чистяков В.Ф. О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах / В.Ф. Чистяков // Функция Ляпунова и их применения. — Новосибирск : Наука, — 1987. — С. 231–239.

2. Булатов М.В. О блочных разностных схемах высокого порядка для жестких линейных дифференциально–алгебраических уравнений / М.В. Булатов, В.Х. Линь, Л.С. Соловарова // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2019. — Т. 59, № 7. — С. 1100–1107.

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–11–00173.

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ РАЗЛИЧНОЙ ГЛАДКОСТИ ПО ПЕРЕМЕННЫМ

В.Б. Васильев (Белгород, НИУ «БелГУ»)
vbv57@inbox.ru

Многомерное евклидово пространство $\mathbb{R}^M$ мы представим в виде ортогональной суммы подпространств [2], в которых только некоторые из координат $x_1, x_2, \dots, x_M$ отличны от нуля. Более точно, если $K \subset 1, ..., M$ – непустое множество, мы полагаем

$$\mathbb{R}^K = \{x \in \mathbb{R}^M : x = (x_1, \dots, x_M), x_j = 0, \forall j \notin K\} \subset \mathbb{R}^M.$$

Пусть $K_1, K_2, \dots, K_n \subset \{1, 2, \dots, M\}$ – некоторые подмножества, так что

$$\bigcup_{j=1}^{n} K_j = \{1, 2, \dots, M\}, \quad K_i \cap K_j = \varnothing, i \neq j.$$

Таким образом, мы имеем представление

$$\mathbb{R}^M = \mathbb{R}^{K_1} \oplus \mathbb{R}^{K_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}^{K_n},$$

обозначая x_{K_j} элемент пространства $\mathbb{R}^{K_j}$.

Теперь мы определим пространство (см. [1]) Соболева–Слободецкого $H^S(\mathbb{R}^M)$ как гильбертово пространство с нормой

$$||f||_S = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^M} (1 + |\xi_{K_1}|)^{2s_1} (1 + |\xi_{K_2}|)^{2s_2} \cdots (1 + |\xi_{K_n}|)^{2s_n} |\tilde{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Псевдодифференциальный оператор A определяется формулой

$$(Au)(x) = \frac{1}{(2\pi)^M} \int\limits_{\mathbb{R}^M} \int\limits_{\mathbb{R}^M} e^{i(x-y)\cdot\xi} \tilde{A}(\xi) u(y) dy d\xi,$$

в которой заданная измеримая функция $\tilde{A}(\xi)$ называется символом оператора A.

Символ $\tilde{A}(\xi)$ предполагается удовлетворяющим следующему условию

$$c_1 \prod_{j=1}^{n} (1 + |\xi_{K_j}|)^{\alpha_j} \leqslant |A(\xi)| \leqslant c_2 \prod_{j=1}^{n} (1 + |\xi_{K_j}|)^{\alpha_j},$$
$$\alpha_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, n,$$

с положительными постоянными c_1, c_2.

Пусть $C_{K_j} \subset \mathbb{R}^{K_j}$ — выпуклый конус, не содержащий целой прямой. Положим

$$C = C_{K_1} \times C_{K_2} \times \cdots \times C_{K_n}.$$

Нас интересует разрешимость следующего уравнения

$$(Au)(x) = v(x), \quad x \in C, \tag{1}$$

решение которого разыскивается в пространстве $H^S(C)$.

В предположении наличия волновой факторизации символа $\tilde{A}(\xi)$ относительно C [3] в ряде случаев можно выписать общее решение уравнения (1), которое приводит к постановке краевых задач, допускающих единственное решение.

Литература

1. Волевич Л.Р. Обобщенные функции и уравнения в свертках / Л.Р. Волевич, С.Г. Гиндикин // М. : Физматлит. — 1994. — 336 с.

2. Nagel A. Algebras of singular integral operators with kernels controlled by multiple norms / A. Nagel, F. Ricci, E.M. Stein, S. Wainger // Memoirs of AMS. — 2018. — V. 256, No 1230. vii, — 141 p.

3. Vasil'ev V.B. Wave factorization of elliptic symbols: Theory and applications / V.B. Vasil'ev // Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers. — 2000. — 192 p.

ДИСКРЕТНЫЕ АНАЛОГИ ОБЩЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В.Б. Васильев, А.А. Машинец (Белгород, НИУ «БелГУ»)

anastasia.kho@yandex.ru

Пусть $\mathbb{Z}^2$ — целочисленная решетка на плоскости, $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_1 > 0, x_2 > 0\}$ — первый квадрант, $K_d = h\mathbb{Z}^2 \cap K, h > 0$, $\mathbb{T}^2 = [-\pi, \pi]^2, \hbar = h^{-1}$, $u_d(\tilde{x}), \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in h\mathbb{Z}^2$ – функция дискретного аргумента.

Вводится дискретный аналог пространства Соболева–Слободецкого $H^s(h\mathbb{Z}^2)$ [1], в которых действуют дискретные псевдодифференциальные операторы.

Пусть $\widetilde{A}_d(\xi)$ — периодическая функция, определенная на $\mathbb{R}^2$ с основным квадратом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$. Под дискретным псевдодифференциальным оператором A_d с символом $\widetilde{A}_d(\xi)$ в дискретном квадранте

K_d мы понимаем следующий оператор

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^2} h^2 \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} \widetilde{A}_d(\xi) e^{i(\tilde{y}-\tilde{x})\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in K_d.$$

Мы работаем в классе символов, удовлетворяющих условию

$$c_1(1+|\zeta^2|)^{\alpha/2} \leqslant |\widetilde{A}_d(\xi)| \leqslant c_2(1+|\zeta^2|)^{\alpha/2},$$

$$\zeta^2 = h^{-2}((e^{ih\cdot\xi_1}-1)^2 + (e^{ih\cdot\xi_2}-1)^2)$$

с положительными постоянными c_1, c_2, не зависящими от h. Этот класс символов обозначен E_α.

Здесь изучается разрешимость и аппроксимационные свойства дискретного уравнения

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{x} \in K_d, \tag{1}$$

в пространстве $H^s(K_d)$ в отличие от работ [1,2] , где рассматривался случай дискретного полупространства.

Предполагая, что символ $\widetilde{A}_d(\xi)$ допускает периодическую волновую факторизацию относительно K [3,4] с индексом æ таким, что $æ - s = n + \delta, n \in \mathbb{N}, |\delta| < 1/2$, вводятся следующие граничные условия

$$\begin{aligned} &(B_{d,j} u_d)(\tilde{x}_1, 0) = b_{d,j}(\tilde{x}_1), \\ &(G_{d,j} u_d)(0, \tilde{x}_2) = g_{d,j}(\tilde{x}_2), \quad j = 0, 1. \cdots, n-1, \end{aligned} \tag{2}$$

где $B_{d,j}, G_{d,j}$ – дискретные псевдодифференциальные операторы с символами $\widetilde{B}_{d,j}(\xi) \in E_{\beta_j}, \widetilde{G}_{d,j}(\xi) \in E_{\gamma_j}$ соответственно:

$$(B_{d,j} u_d)(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\hbar\mathbf{T}^2} \sum_{\tilde{y} \in h\mathbf{Z}^2} e^{i\xi\cdot(\tilde{x}-\tilde{y})} \widetilde{B}_{d,j}(\xi) \tilde{u}_d(\xi) d\xi,$$

$$(G_{d,j} u_d)(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\hbar\mathbf{T}^2} \sum_{\tilde{y} \in h\mathbf{Z}^2} e^{i\xi\cdot(\tilde{x}-\tilde{y})} \widetilde{G}_{d,j}(\xi) \tilde{u}_d(\xi) d\xi.$$

Описаны условия однозначной разрешимости задачи (1),(2) и показано, что из разрешимости непрерывного аналога этой задачи следует разрешимость задачи (1),(2) при достаточно малых h.

Отметим, что аналогичный результат с граничным условием Неймана был получен в [4].

Литература

1. Vasilyev A.V. Pseudo–differential operators and equations in a discrete half–space / A.V. Vasilyev, V.B. Vasilyev // Math. Model. Anal. —2018. —V. 23, no. 3. —P. 492–506.

2. Vasilyev A.V. Discrete boundary value problems as approximate constructions / A.V. Vasilyev, V.B. Vasilyev, O.A. Tarasova // Lobachevskii J. Math. —2022. —V. 43, no. 6. —P. 1446–1457.

3. Vasil'ev V.B. Wave factorization of elliptic symbols: Theory and applications / V.B. Vasil'ev. —Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2000. —192 p.

4. Mashinets A.A. On discrete Neumann problem in a quadrant / A.A. Mashinets, A.V. Vasilyev, V.B. Vasilyev // Lobachevskii J. Math. —2023. —V. 44, no. 3. P. 1011–1021.

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В МНОГОМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ С РАЗРЕЗАМИ

В.Б. Васильев, Н.В. Эберлейн (Белгород, НИУ «БелГУ»)

eberlein92@mail.ru

Пусть C_1 и C_2 – конусы в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно, не содержащие целой прямой. Очевидно, что $C_1 \times C_2$ – это конус в пространстве $\mathbb{R}^{m+n}$, не содержащий целой прямой в $\mathbb{R}^{m+n}$. Тогда мы можем рассматривать уравнение с псевдодифференциальным оператором A в конусе $C_1 \times C_2$ при наличии волновой факторизации относительно «большого» конуса [1], ставить соответствующие краевые задачи и исследовать ситуации, когда параметры конусов стремятся к своим предельным значениям.

Вот пример краевой задачи, соответствующий описанной выше ситуации:

$$\left\{ \begin{array}{c} (Au)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^5 \setminus \overline{(C_+^a \times C_+^{bd})} \\ \int\limits_{\mathbb{R}^2} u(x_1, x_2.x_3, x_4, x_5) dx_2 dx_5 = g(x_1, x_3, x_4) \end{array} \right. \tag{1}$$

где

$$C_+^a \subset \mathbb{R}^2, C_+^{bd} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > a|x_1|, a > 0\},$$

$$C_+^{bd} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (x_1, x_2, x_3).x_3 > b|x_1| + d|x_2|, b, d > 0\},$$

A – псевдодифференциальный оператор с символом $\tilde{A}(\xi), \xi \in \mathbb{R}^5$, допускающим волновую факторизацию [1] относительно $C_+^a \times C_+^{bd}$ с индексом æ, таким, что $1/2 <$ æ $- s < 3/2$. Решение ищется в пространстве Соболева–Слободецкого $H^s(\mathbb{R}^5 \setminus \overline{(C_+^a \times C_+^{bd})})$, граничная функция из $H^{s+1}(\mathbb{R}^3)$.

Методами, предложенными в [2–4], конструируется решение задачи (1), и затем изучается поведение решения, когда некоторые параметры a, b, d стремятся к 0 или ∞. Показано, что такие предельные решения могут существовать, только если граничная функция удовлетворяет некоторому интегральному уравнению.

Литература

1. Vasilyev V.B. Wave factorization of elliptic symbols: Theory and applications / V.B. Vasil'ev. // Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers. — 2000. — 192 p.

2. Vasilyev V.B. Pseudo–differential equations, wave factorization, and related problems / V.B. Vasilyev // Math.Meth. Appl. Sci. — 2018. — V. 41, No 18. — Pp. 9252–9263.

3. Vasilyev V.B. Pseudo–differential equations and conical potentials: 2–dimensional case / V.B. Vasilyev // Opusc. Math. — 2019. — V. 39, No 1. — Pp. 109–124.

4. Vasilyev V.B. On certain 3–dimensional limit boundary value problems / V.B. Vasilyev // Lobachevskii J. Math. — 2020. — V. 41, No 5. — Pp. 917–925.

К ИССЛЕДОВАНИЮ РАЗМЕРНОСТИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ САМОСОПРЯЖЁННОГО КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

М.Ю. Ватолкин (Ижевск, ИжГТУ им. М.Т. Калашникова)
vmyu6886@gmail.com

Пусть оператор L есть квазидифференциальный оператор второго порядка, порожденный общим самосопряжённым квазидифференциальным выражением второго порядка ${}^2_{\mathcal{P}}x(t)$ ($t \in (a, b)$, a и $b \in \mathbb{R}$, $a < b$), где $\mathcal{P}$ — нижняя треугольная матрица (см. [1]), и двухточечными краевыми условиями вида

$$ {}^0_{\mathcal{P}}x(a) = 0,\ {}^0_{\mathcal{P}}x(b) = 0. \tag{1}$$

Не исключается случай, когда $a = -\infty$ или (и) $b = +\infty$.

Оператор L действует действует в пространстве функций, суммируемых с квадратом на интервале (a, b), и имеет в нём плотную область определения.

Кроме того, пусть $\psi_-(\gamma_1, t)$ $\big(\psi_-(\gamma_2, t)\big)$ есть решение уравнения

$$ {}_{\mathcal{P}}^{2}x(t) + \lambda {}_{\mathcal{P}}^{0}x(t) = 0 \left(t \in J = (a, b)\right) \tag{2} $$

при $\lambda = \gamma_1$ $(\lambda = \gamma_2)$, где γ_1 и $\gamma_2 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее первому из условий (1), то есть условию ${}_{\mathcal{P}}^{0}x(a) = 0$.

Пусть $W_0(u, v)$ означает число нулей вронскиана $W(u, v)$, составленного для функций u и v.

Предполагая простоту и вещественность собственных значений, скажем, что спектральная проекция $RanP_{(\gamma_1,\gamma_2)}(L)$ оператора L относительно интервала (γ_1, γ_2) вещественной оси — совокупность собственных функций этого оператора, отвечающих собственным значениям оператора L из интервала (γ_1, γ_2) [2].

Определяется число собственных значений оператора L, находящихся в интервале (γ_1, γ_2), или, что то же самое, размерность спектральной проекции оператора L относительно интервала (γ_1, γ_2), которая обозначается так $dimRanP_{(\gamma_1,\gamma_2)}(L) = 0$.

Имеет место следующая теорема о нулях вронскиана (ср. с аналогичными утверждениями из [2]).

Теорема 1. *Пусть уравнение* ${}_{\mathcal{P}}^{2}x(t) = 0$ *неосцилляционно на* (a, b) *(см. [1]) и* $u_{\lambda_\mu}(t)$, *а также* $u_{\lambda_\nu}(t)$, *суть две собственные функции задачи (2), (1), отвечающие соответственно собственным значениям* λ_μ *и* λ_ν. *Предположим, что между этими числами* $\lambda_\mu < \lambda_\nu$ *заключено* k *собственных значений задачи (2), (1). Тогда вронскиан*

$$ W(u_{\lambda_\mu}, u_{\lambda_\nu})(t) = {}_{\mathcal{P}}^{0}u_{\lambda_\mu}(t) {}_{\mathcal{P}}^{1}u_{\lambda_\nu}(t) - {}_{\mathcal{P}}^{0}u_{\lambda_\nu}(t) {}_{\mathcal{P}}^{1}u_{\lambda_\mu}(t) $$

имеет в точности k *нулей в интервале* (a, b).
Утверждение, обратное к теореме 1, также справедливо.

Основным утверждением настоящей работы является теорема 2 (её доказательство существенно использует теорему 1).

Теорема 2. *Пусть уравнение* ${}_{\mathcal{P}}^{2}x(t) = 0$ *неосцилляционно на* (a, b) *и* $\gamma_1 < \gamma_2$. *Тогда либо*

$$ dimRanP_{(\gamma_1,\gamma_2)}(L) = W_0\left(\psi_-(\gamma_1, t), \psi_-(\gamma_2, t)\right), \tag{3} $$

либо

$$ dimRanP_{(\gamma_1,\gamma_2)}(L) = W_0\left(\psi_-(\gamma_1, t), \psi_-(\gamma_2, t)\right) + 1. $$

Если при этом либо $dimRanP_{(\gamma_1,\gamma_2)}(L) = 0$, *либо индекс дефекта оператора* L *равен* $(1,1)$ $\big($*b есть предельная точка относительно оператора* $L\big)$, *то имеет место равенство (3).*

Таким образом, здесь результат работы [2] распространён на квазидифференциальный оператор L, порождённый общим самосопряжённым квазидифференциальным выражением второго порядка (то есть элементы матрицы $\mathcal{P}$, функции $p_{10}(t)$ и $p_{21}(t)$, вообще говоря, не равны нулю, в [2] эти функции равны нулю) и однородными двухточечными краевыми условиями вида (1). Поэтому в нашем случае метод работы [2], основанный на преобразовании Прюфера, не проходит, что не позволяет перенести технику доказательства основных утверждений на рассматриваемый более общий случай. Доказательство этой теоремы по существу отличается от доказательства аналогичного утверждения работы [2].

Литература

1. Дерр В.Я. К обобщённой задаче Валле Пуссена / В.Я. Дерр // Дифференц. уравнения — 1987. — Т. 23, № 11. — С. 1861–1872.

2. Gesztesy F. Zeros of the wronskian and renormalized oscillation theory / F. Gesztesy, B. Simon, G. Teschl // Amer. Math. Soc. — 1996. — V. 118. — P. 571–594.

О ВЫБОРЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЧИСЛА ЭЛЕМЕНТОВ КОНЕЧНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В МЕТОДЕ ВЕСОВОГО РЕШЕТА

Е.В. Вахитова, С.Р. Вахитова (Воронеж, ВГУ)
algebraist@yandex.ru

Настоящая работа посвящена выбору приближения числа элементов конечной последовательности в методе весового решета, активно разрабатываемого в современной теории чисел.

При оценке количества элементов последовательности целых чисел $A = \{a_n \in \mathbf{Z} | a_n \leqslant x\}$ ($n \in \mathbf{N}$, x — достаточно большое положительное число), которые не делятся ни на какое простое число из данного множества простых, как правило, применяют метод решета, который сводит эту задачу к оценке числа элементов конечной последовательности вида $A_d = \{a_n \in A,\ a_n \equiv 0 (mod\, d)\}$ для различных d, где $d \in \mathbf{N}$.

С целью оценки числа элементов последовательности A_d ищется достаточно точная аппроксимация числа элементов этого множества в виде $\frac{\omega(d)}{d}X$, где $\omega(d)$ — некоторая мультипликативная функция, а X — некоторая положительная функция, $X > 1$ (например, $X = \frac{li\ x}{\varphi(d)}$ для $|A_d| = \pi(x; d, l),\ l \in \mathbf{N},\ \pi(x; d, l) = \sum_{\substack{2 \leqslant p \leqslant x \\ p \equiv l \ (mod\ d)}} 1$).

Выбор функций $\omega(d)$ и X определяется условием минимизации

$$R(X, d) = \left| |A_d| - \frac{\omega(d)}{d} X \right|.$$

Отметим, что не всегда удается получить явную оценку величины $R(X; d)$ в классе предполагаемых функций X; и в этом случае подбирают функцию так, чтобы остаточный член был мал «в среднем» в смысле теоремы Бомбьери—Виноградова.

Авторами получены следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть последовательность A определена равенством: $A = |\{\Phi(p)|, p \leqslant x\}|$, для нее выполнены условия в методе решета, $d \in \boldsymbol{N}$, $d < \frac{x^{1/2}}{\ln^{C_0} x}$, d свободно от квадратов, x — достаточно большое положительное число. Тогда существует мультипликативная функция $\omega(d)$ такая, что $\frac{\omega(d)}{d} li\ x$ является достаточно точным приближением для числа элементов в последовательности A, которые делятся на d, где $li\, x$ – интегральный логарифм: $li\, x = \int_2^x \frac{du}{\ln u}$.*

Теорема 2. *Пусть $d \in \boldsymbol{N}$, $d < \frac{x^{1/2}}{\ln^{C_0} x}$, d не делится на квадрат простого числа, и пусть последовательность A определяется равенством: $A = \{\Phi(pq)| \quad p \neq q, p \leqslant x^{\alpha}, q \leqslant x^{1-\alpha}\}$. Тогда существует мультипликативная функция $\omega(d)$ такая, что $\frac{\omega(d)}{d} X(x)$, где $X(x) = (li\ x^{\frac{1}{2}})^2$, является приближением числа элементов в последовательности A, которые делятся на d, где $0 < \alpha < 1$.*

Теорема 3. *Пусть d — натуральное число, свободное от квадратов, последовательность A определена равенством: $A = \{\Phi(pq)| \, p \neq q, \, pq \leqslant x\}$. Тогда существует мультипликативная функция $\omega(d)$, такая, что $\frac{\omega(d)}{d} X$, где*

$$X = \sum_{\substack{pq \leqslant x \\ p > y_o,\, q > y_0}} 1, \quad y_0 = \exp((\ln \ln x)^3),$$

является приближением числа элементов в последовательности A, которые делятся на d. Причем для $X = X(x)$ выполнено неравенство:

$$X \geqslant \frac{x}{\ln x} \ln \ln x$$

для достаточно больших x.

Теоремы 1–3 доказаны в работах [1]–[4].

Отметим, что при выборе приближения числа элементов в последовательности важную роль играют усредненные оценки числа простых чисел в арифметических прогрессиях. Эти оценки основаны на использовании идей большого решета Ю.В. Линника. Обычно пользуются следующей оценкой: существует постоянная C $(0 < C < 1)$, такая, что при любой постоянной $C' > 0$

$$\sum_{d\leqslant X^C} \mu^2(d) \max_{\substack{l(mod\, d)\\(l,\ d)=1}} |\pi(X;d,l) - \frac{li\ X}{\varphi(d)}| = O(\frac{X}{\ln^{C'} X}),$$

где $\pi(X;d,l)$ — число простых чисел $p \leqslant X$ и $p \equiv l(mod\, d)$, $\mu(n)$ — функция Мебиуса, $\mu(n) = \begin{cases} 1, \ \textit{если} \quad n=1, \\ (-1)^s, \ \textit{если} \quad n = p_1p_2...p_s, \\ 0, \ \textit{если} \ n \vdots p^2, \end{cases}$

$n, s \in \mathbf{N}$, $p_1, p_2, ..p_3$– попарно различные положительные простые числа, p–простое число, $\varphi(n)$ — функция Эйлера, $\varphi(n) = \sum_{\substack{x\leqslant n\\(x,n)=1}} 1$, $li\ X$ — интегральный логарифм, X — достаточно большое положительное число.

Эту оценку М. Б. Барбан доказал при $C = \frac{3}{8} - \varepsilon$, А. И. Виноградов и А. Бомбьери при $C = \frac{1}{2} - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — произвольная постоянная.

Выбор приближения можно осуществлять по–разному. Чем меньше остаточный член (по крайней мере, в среднем), тем лучше результат.

Авторами для остаточного члена показано, что он достаточно мал в том смысле, что выполнено условие на последовательность: существуют постоянные $C_3' \geqslant 1$ и $C_0 \geqslant 1$, такие, что

$$\sum_{d<\frac{X^{1/2}}{\ln^{C_0} X}} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} |R(X,\ d)| \leqslant C_3' \frac{X}{\ln^4 X},$$

где $\nu(n)$ – число простых делителей натурального числа n.

Литература

1. Вахитова Е.В. Об одном неравестве, связанном с приближением числа элементов в конечной последовательности специального вида / Е.В. Вахитова, С.Р. Вахитова // Чебышевский сборник. Труды IX Междунар. конф. «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» 22 — 26 апреля 2012 г. — Тула: Изд–во ТГПУ. — 2012. — Т. 13. Вып. 2(42). — С. 18–27.

2. Вахитова Е.В. Об одной оценке остаточного члена / Е.В. Вахитова, С.Р. Вахитова // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронежской весенней математической школы 3—9 мая 2012г. — Воронеж: Изд.–полиграф. центр ВГУ. — 2012. — С. 39–42.

3. Вахитова Е.В. О выборе приближения числа элементов в последовательности значений неприводимого полинома от аргумента pq с ограничениями на p и q / Е.В. Вахитова, С.Р. Вахитова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13. Вып. 1. Ч. 1. — С. 3–8.

4. Вахитова Е.В. О выборе приближения числа элементов в последовательности специального вида / Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2016. — № 3. — С. 92–100.

ОБ УСЛОВИИ ГАМИЛЬТОНОВОСТИ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ В ПОТОКЕ ЧАСТИЦ

Г.А. Верёвкин (Москва, МГУ)
verevkin_g.a@mail.ru

Обсуждается вопрос о гамильтоновости задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц. Для тела произвольной формы эта динамическая система не гамильтонова, однако при выполнении некоторых условий на форму тела и расположение точки закрепления система может быть гамильтоновой. Примеры таких тел можно найти в работе А.А.Бурова и А.В.Карапетяна, где также были выписаны некоторые достаточные условия для того, чтобы рассматриваемая система была гамильтоновой. Как оказалось, эти условия можно ослабить, получив тем самым критерий гамильтоновости рассматриваемой системы. Также для этой задачи получены условия на расположение неподвижной точки в кубе и прямоугольном параллелепипеде, при котором уравнения движения будут гамильтоновы.

Литература

1. Gadzhiev M.M. On the Motion of a Rigid Body with a Fixed Point in a Flow of Particles / M.M. Gadzhiev, A.S. Kuleshov // 2022.

2. Burov A.A. *Some properties of commutative algebras*, The motion of a solid in a flow of particles / A.A. Burov, A.V. Karapetyan // 1993. — Vol 57. — P 295–299.

ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ НАСЛЕДОВАНИЯ ФЕНОТИПИЧЕСКИХ ПРИЗНАКОВ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ СЕЛЕКЦИИ

Ю.П. Вирченко, Д.А. Черкашин (Белгород, БГТУ)
virch@bsu.edu.ru

Изучается задача генетической оценки т.н. *племенной ценности животного*, используемой при племенной селекции. Процесс селекции выстраивается согласно результатам решения такой задачи и он определяет генетический прогресс в животноводстве. В настоящее время общепринятым является подход к генетической оценке животных методом наилучшего линейного несмещенного прогноза (BLUP) [1]. Игнорирование применения этого метода приводит к потерям в эффективности селекции, которые могут достигать 40% и более [2]. Метод расчета BLUP формулируется в терминах стохастического линейного преобразования [1]. В сообщении предлагается подход для оценки племенной ценности, основанный на байесовском оценивании, которое также приводит к линейной модели.

Введем упорядоченный набор $\mathbf{y}$ размерности m представляет собой совокупность числовых показателей, которая описывает характеристики конкретного животного, представляющие экономический интерес для животноводства. По каждому числовому показателю, входящему в этот набор, имеется информация о его племенной ценности, которая численно выражается индексами племенной ценности (селекционными индексами).

Племенная ценность — это выражаемый численно прогноз генетического потенциала племенного животного относительно выборочного среднего значения по популяции. Величина племенной ценности (генетической) влияет на проявление хозяйственно полезного признака потомства через дисперсионную (случайную) величину, коэффициента наследуемости при передаче генотипа животного потомкам. Это связано с тем, что ожидаемые результаты проведения селекционных мероприятий не являются точно предстказуемыми, то есть на их численные значения оказывают влияние различные случайные факторы. Тогда естественно применить для описания результатов спаривания представления теории вероятностей.

Пусть, для простоты, набор $\mathbf{y}$ состоит из одной компоненты y. Обозначим посредством A линейное стохастическое преобразование, описывающее появление значения y. Это преобразование действует на величину h селекционного индекса, $y = \mathsf{A}(h)$. По результатам спаривания селекционный индекс переоценивается аналогично тому как это делается при баейсовском оценивании так, что его новое значение h' полагается равным

$$h' = y^{-1}\mathsf{A}(h)\,. \tag{1}$$

Таким образом, задача математического моделирования, на основе которой происходит переоценка племенной ценности, сводится к построению преобразвания A. Это преобразование состоит из двух частей. Первая часть описывает регулярное влияние индивидуальных генетических характеристик на процесс спаривания согласно законам Менделя посредством так называемой матрицы родства, а вторая является стохастической. Стохастическая часть описывает как случайные естественные отклонения от законов Менделя, свяанные с тем, что он выражает только лишь связь между средними генотипическими значениями, так и случайные эффекты влияния условий при которые производится селекция. Существенно, что при расчете матрицы родства приходится учитывать эффекты имбридинга [3], то есть отрицательное влияние близкого родства. Влияние условий среды учитывается стандартным методом математической статистики на основе набора статистических данных по той популяции, в которой происходит селекция. Она моделируется на основе бернуллиевского процесса независимых случайных испытаний, в применении его к фиксированному акту спаривания. Этот бернуллиевский процесс умножается на коэффициент, определяемый средним квадратичным уклонением по стаду характеристики y.

Литература

1. Henderson C.R. Accounting for Selection and Mating Biases in Genetic Evaluation / C.R. Henderson // In Gianola D.; Hammond K. (eds.). Advances in Statistical Methods for Genetic Improvement of Livestock: Springer–Verlag Inc.. — 1990. — P. 413–436.

2. Кузнецов В.М. Генетическая оценка молочного скота методом BLUP. / В.М. Кузнецов // Зоотехния. — 1995. — №11. — С. 8–15.

3. Allaire F.R. Inbreeding Within an Artificially Bred Dairy Cattle Population / F.R. Allaire // Journal of Dairy Science. — 1965. — 48 (10). — P. 1366—1371.

ОСОБЕННОСТИ ИНТЕРВАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ В БАЙЕСОВСКИХ СЕТЯХ ДОВЕРИЯ

Ю.Е. Гагарин, У.В. Никитенко, М.А. Степович
(Калуга, КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана, КГУ)
gagarin_ye@bmstu.ru

Байесовские сети могут использоваться для описания причинно–следственных отношений параметров модели на основе входящих информативных сигналов. В байесовских сетях доверия случайные события соединены причинно–следственными связями, и такие структуры характеризуются наследованной неопределённостью. Описания ситуаций методом причин и следствий позволяет оценивать вероятности событий.

Рассмотрим байесовскую сеть доверия, в которой вершинами являются события A_j, $j = \overline{1, M}$. Случайная величина может иметь несколько состояний и определяется априорной вероятностью $P(A_j)$. Вершины сети связаны условными плотностями вероятностей $P(x|A_j)$, параметрический вид которых известен и соответствуют нормальному закону с параметрами (μ_j, σ_j^2).

Исходные данные являются результатами конкретных экспериментов, и как любые измерения содержат случайные ошибки, которые необходимо учитывать. В действительности значения признаков x_i, $i = \overline{1, n}$, соответствующие определенным событиям не являются истинными и включают в себя случайные ошибки.

Оценивание параметров (μ_j, σ_j^2) условных плотностей вероятностей $P(x|A_j)$ методами конфлюэнтного анализа дает возможность учесть ошибки в значениях функций и аргументов, и получить несмещенные оценки параметров (μ_j, σ_j^2). Помимо оценок параметров необходимо определять и дисперсии оценок, поскольку значения оценок параметров в каждом конкретном эксперименте могут отличаться от значений параметров и, следовательно, остается еще известная доля неопределенности, которую нужно учитывать. Дисперсии оценок параметров $D(\mu_j), D(\sigma_j^2)$ определяются из матрицы вторых производных по соответствующим параметрам. С учетом погрешности исходной информации значения параметров будут изменяться в диапазоне: $\mu_j \pm \Delta_j, \sigma_j^2 \pm \Delta_j$.

Значения условных плотностей вероятностей $P(x|A_j)$, в каждом значении признака x_j, также имеют некоторую неопределенность $P(x|A_j) \pm \Delta(P(x, A_j)$, т.е. изменяются в пределах: $P(x|A_j) \leqslant P(x|A_j) \leqslant P(x|A_j)$.

Особенность интервального оценивания условных плотностей вероятностей $P(x|A_j)$ заключается в том, что для определения нижних $P(x|A_j)$ и верхних $P(x|A_j)$ интервальных оценок необходимо учитывать разные варианты смещения оценок параметров. Т.е. определять интервальные оценки $P(x|A_j)$ со следующими значениями параметров: $(\mu_j + \Delta_j, \sigma_j^2 + \Delta_j)$, $(\mu_j - \Delta_j, \sigma_j^2 - \Delta_j)$, $(\mu_j + \Delta_j, \sigma_j^2 - \Delta_j)$, $(\mu_j - \Delta_j, \sigma_j^2 + \Delta_j)$ и выбирать из этого набора те значения параметров, которые обеспечивают наибольший диапазон интервальных оценок условных плотностей вероятностей $P(x|A_j)$. Такой подход позволяет повысить точность нахождения интервальных оценок $P(x|A_j)$ и достоверность принятия решений в байесовских сетях доверия.

Литература

1. Гагарин Ю.Е. Использование конфлюентного анализа для интервального оценивания функции Гаусса / Ю.Е. Гагарин, У.В. Никитенко, М. А. Степович // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 20–й международной Саратовской зимней мат. школы. — Саратов : ИПЦ «Научная книга». — 2020. — С. 105–107.

2. Gagarin Yu.E. Interval estimation of conditional probabilities in Bayesian Belief Network / Y.E. Gagarin, U.V. Nikitenko, M.A. Stepovich // Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. — 2021 J. Phys.: Conf. Ser.1902 012106

РЕШЕНИЕ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЧЕБЫШЕВА

О.В. Гермидер, В.Н. Попов

(Архангельск, САФУ имени М.В. Ломоносова)

o.germider@narfu.ru, v.popov@narfu.ru

Многие практически значимые инженерные проблемы, такие как деформация тонкой пластины и течение жидкости, приводят к бигармоническому уравнению [1–8]. Построение его решения вызывает ряд трудностей, в частности, связанных с наличием в этом уравнении производных четвертого порядка, оказывающих существенное влияние на обусловленность исходных краевых задач [8]. При этом достижение требуемой степени детализации области интегрирования предполагает решение систем линейных уравнений очень высокого порядка с неразреженной матрицей [7]. Одним из перспективных подходов к решению проблемы является развитие методов полиномиальной аппроксимации.

Представленная работа посвящена решению неоднородного бигармонического уравнения с использованием системы ортогональных многочленов Чебышева первого рода. Выбор в качестве базисных функций многочленов Чебышева обусловлен тем, что такое приближение минимизирует количество членов усеченного ряда, необходимых для аппроксимации решения [9]. Такой подход не только обеспечивает точность построенного решения при сравнительно небольшом количестве базисных функций, но и сохраняет устойчивость к ошибкам округления [10]. В представленной работе предложено развитие метода полиномиальной аппроксимации Чебышева путем представления в виде усеченного ряда по полиномам Чебышева производных четвертого порядка искомой функции решения бигармонического уравнения и использования в качестве узлов интеполирования как точек экстремумов, так и нулей этих многочленов. Показано достижение высокой точности и повышенного порядка сходимости решений при использовании матричного варианта этого метода.

Литература

1. Belyaev V.A. H–, p–, and HP–versions of the least–squares collocation method for solving boundary value problems for biharmonic equation in irregular domains and their applications / V.A. Belyaev, L.S. Bryndin, S.K. Golushko, B.V. Semisalov, V.P. Shapeev // Comput. Math. Math. Phys. — 2022. — V. 62, N. 4. — P. 517–537.

2. Голушко С.К. Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин / С.К. Голушко, С.В. Идимешев, В.П. Шапеев // Вычисл. технологии. — 2013. — Т. 18, № 6. – С. 31–43.

3. Mai–Duy N. A new high–order nine–point stencil, based on integrated–RBF approximations, for the first biharmonic equation / N. Mai–Duy, D. Strunin , W. Karunasena // Engineering Analysis with Boundary Elements. — 2022. — V. 143. — P. 687–699.

4. Shao W. An effective Chebyshev tau meshless domain decomposition method based on the integration–differentiation for solving fourth order equations / W. Shao, X. Wu // Appl. Math. Model. — 2015. — V. 39, N. 9. — P. 2554–2569.

5. Ye X. A family of H–div–div mixed triangular finite elements for the biharmonic equation / X. Ye, Sh. Zhang // Results in Applied Mathematics. — 2022. — V. 15, 100318.

6. Карчевский А.Л. Вычисление напряжений в угольном пласте с учетом диффузии газа / А.Л. Карчевский // Сиб. журн. индустр. математики. — 2016. — Т. 19, № 4. — С. 31–43.

7. Ряжских В.И. Численное интегрирование бигармонического уравнения в квадратной области / В.И. Ряжских, М.И. Слюсарев, М.И. Попов // Вестн. С.–Петербург. ун–та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. — 2013. — Т. 1. — С. 52–62.

8. Шапеев В.П. hp–Вариант метода коллокации и наименьших квадратов с интегральными коллокациями решения бигармонического уравнения / В.П. Шапеев, Брындин Л.С., Беляев В.А. // Вестн. Сам. гос. техн. ун–та. Сер. Физ.–мат. науки. — 2022. — Т. 26, № 3. — С. 556–572.

9. Mason J. Chebyshev polynomials / J. Mason, D. Handscomb. — Florida: CRC Press, 2003 — 360 p.

10. Baseri A. A collocation method for fractional diffusion equation in a long time with Chebyshev functions / A. Baseri, S. Abbasbandy , E. Babolian // Applied Mathematics and Computation. — 2018. — V. 322. — P. 55–65.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

А.В. Гилёв (Самара, Самарский университет)
toshqaaa@gmail.com

В данной работе рассмотрена нелокальная задача в области $\Omega = (0, \alpha) \times (0, \beta)$ для уравнения

$$u_{yy} - (a(x,y)u_x)_x - (b(x,y)u_{xyy})_x + c(x,y)u = f(x,y) \qquad (1)$$

со следующими условиями

$$u_x(0,y) = h(y),\ u_y(x,0) = r(x), \qquad (2)$$

$$u(x,0) + \int\limits_0^x K(\xi)u(\xi,0)d\xi = \varphi(x)$$

$$u(0,y) + \int\limits_0^y L(\eta)u(0,\eta)d\eta = \psi(y). \qquad (3)$$

Уравнение (1) можно интерпретировать как некоторое обобщение уравнения Буссинеска–Лява. Множество работ посвящено изучению начально–краевых задач для уравнений подобного вида, а также исследовались как обратные задачи [1], так и нелокальные [2–4].

Мы будем понимать уравнение (1) как уравнение с доминирующей смешанной производной, в случае, когда $b \neq 0$. Считая $b = const$, запишем уравнение (1) в виде

$$u_{xxyy} + (Au_x)_x + (Bu_y)_y + Cu = F(x,y),$$

где

$$A = \frac{a(x,y)}{b}, \quad B = \frac{1}{b}, \quad C = -\frac{c(x,y)}{b}, \quad F = -\frac{f(x,y)}{b}.$$

Для подобных уравнений естественно ставить задачи с данными на характеристиках, чему и посвящены работы [5-7]. Для исследования разрешимости поставленной нелокальной задачи, мы сведем задачу (1)–(3) к двум задачам для уравнений второго порядка, одна из которых будет являться обыкновенной задачей Гурса, а вторая же – интегральным аналогом задачи Гурса для нагруженного уравнения.

На основании исследования была сформулирована и доказана следующая теорема

Теорема 1. *Если* $A, B, C, F \in C(\overline{\Omega})$, *а также если* $K \in C[0,\alpha]$, $L \in C[0,\beta]$, $\varphi(x), r(x) \in C^2[0,\alpha]$, $\psi(y), h(y) \in C^2[0,\beta]$ *и выполняются условия согласования* $h(0) = r(0)$, $\varphi(0) = \psi(0)$, *то существует и притом единственное решение задачи (1)-(3).*

Литература

1. Намсараева В.Г. Линейные обратные задачи для некоторых аналогов уравнения Буссинеска / В.Г. Намсараева // Математические заметки СВФУ. — 2014. — Т. 21, № 2. — С. 47–59.

2. Pulkina L.S. Solution to nonlocal problems of pseudohyperbolic equations / L.S. Pulkina // Electron. J. Differ. Equ. — 2014. — Т. 2014, № 116.

3. Beylin A.B. Nonlocal approach to problems on longitudal vibration in a short bar / A.B. Beylin, L.S. Pulkina // Electron. J. Differ. Equ. — 2019. — Т. 2019, № 29.

4. Богатов А.В. Задача с нелокальным условием для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками / А.В. Богатов, А.В. Гилёв, Л.С. Пулькина // Вестн. рос. унив., мат. — 2022. — Т. 27, № 139. — С. 214–230.

5. Жегалов В.И. Уравнения с доминирующей частной производной / В.И. Жегалов, А.Н. Миронов, Е.А. Уткина. — Изд–во Казанского университета, 2014. — 385 с.

6. Жегалов В.И. Об одной задаче для обобщенного уравнения Буссинеска–Лява / В.И. Жегалов // Вестн. Сам. гос. техн. ун–та, сер. физ.–мат. — 2019. — Т. 23, № 4. — С. 771–776.

7. Уткина Е.А. О единственности решения задач с нормальными производными в граничных условиях для уравнения Буссинеска–Лява / Е.А. Уткина // Изв. ВУЗов, мат. — 2017. — Т.2017, № 7. — С. 67–73.

О ПОСТРОЕНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ БЕРСА

Ю.А. Гладышев, Е.А. Лошкарева
(Калуга, КГУ им. К.Э. Циолковского)
losh-elena@yandex.ru

Примем, что x, t декартовы координаты на плоскости. Считая x, t действительными независимыми переменными, введем функции $f(x,t), \upsilon(x,t), ...$, которые имеют непрерывные вторые производные по x, t. Функции $a_1(x), a_2(x)$, зависящие только от x, считаем непрерывными от x. Введем операторы

$$D_z = \frac{1}{2}\left(a_2(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\frac{\partial}{\partial x}\right) + \alpha\frac{\partial}{\partial t}\right),$$
$$\bar{D}_z = \frac{1}{2}\left(a_2(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\frac{\partial}{\partial x}\right) - \alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

при произвольном α. На основе операторов

$$D(1) = a_2(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad D(2) = \alpha\frac{\partial}{\partial t}$$

введем обобщенные степени [2]. Операторы $D(1), D(2)$ допускают построение аппарата параметрических обобщенных степеней (ПОС). Действительно, функция обобщенной константы имеет вид $C = C_1 + X_B^{(1)}C_2$, где $X_B^{(1)} = \int\limits_x^x \frac{dx}{a_1(x)}$ и C_1, C_2 — постоянные (параметры). Правый обратный оператор для $D(1)$ можно взять в виде

$$I(1) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\xi_1}{a_1(\xi_1)} \int\limits_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{d\xi_2}{a_2(\xi_2)}.$$

Обобщенные степени найдем по формуле

$$X^{(p_1)}(1)\,X^{(p_2)}(2)\,C = p_1!p_2!I^{p_1}(1)\,t^{p_2}C.$$

Построение обобщенных степеней можно найти в [2,3,4]. Обобщенные степени обладают свойством

$$D(1)\,X^{(p_1)}(1)\,X^{(p_2)}(2)\,C = p_1X^{(p_1-1)}(1)\,X^{(p_2)}(2)\,C,$$
$$D(2)\,X^{(p_1)}(1)\,X^{(p_2)}(2)\,C = p_2X^{(p_1)}(1)\,X^{(p_2-1)}(2)\,C.$$

Введем многочлен ОС, построенный на основе бинома

$$Z^{(n)}C = (X(1) - X(2))^n C = \sum C_n^i X^{n-i}(1)\,X^i(2)\,C$$

с легко проверяемым свойством $D_z\bar{Z}^nC = 0, \quad \bar{D}_z\bar{Z}^nC = nZ^{(n-1)}C.$

Далее считаем, что $a_1(x) = x^p$,$a_2(x) = -x^p$. После подстановки ОС имеем бесконечную последовательность автомодельных многочленов, которые после перехода к переменному $\eta = \frac{x}{2\sqrt{t}}$ примут вид $Z^{(n)}C = t^nH(\eta)$. Уравнение для полученных многочленов в переменных η, t примет вид

$$\frac{d^2H}{d\eta^2} - \frac{1}{\eta^pe^{-x^2}}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta^pe^{-x^2}\right)\frac{\partial H}{\partial\eta} + 2nH = 0,$$

где $H(0) = 0$.

Используя формулу Грина для оператора $D(1)$ с коэффициентами $a_1(x) = x^p$, $a_2(x) = x^{-p}$, придем к ортогональности последовательности функции H_n , если определить скалярное произведение функций H_{n_1}, H_{n_2} как

$$(H_{n_1}, H_{n_2}) = \int\limits_0^\infty \xi^pe^{-\xi^2}H_{n_1}(\xi)\,H_{n_2}(\xi)\,d\xi.$$

Литература

1. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. // М. : Наука. — 1963. — 1100 с.

2. Гладышев Ю.А. Формализм Бельтрами–Берса и его приложения в математической физике / Ю.А. Гладышев. // Калуга : Из–во КГПУ — 1997. — 228 с.

3. Гладышев Ю.А. О методах построения комплексных обобщенных степеней Берса / Ю.А. Гладышев, Е.А. Лошкарева // Вестник Калужского университета. — 2020. — № 2(47). — С. 77–80.

4. Гладышев Ю.А. Об использовании аппарата обобщенных степеней Берса при построении решений краевых задач теории переноса методом Фурье / Ю.А. Гладышев, Е.А. Лошкарева // Вестник Калужского университета. — 2018. — № 3. — С. 53–57.

ДИНАМИКА ДИСКРЕТНОЙ RCL–ЛИНИИ С КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ[1]

С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов (Ярославль, ЯрГУ)
glyzin.s@gmail.com

Рассматривается цепочка последовательно связанных RCL–контуров, к одному из концов которой подсоединен источник постоянного напряжения, а к другому – туннельный диод и постоянная емкость. Математической моделью такой цепочки из N элементов служит система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая после нормировок принимает вид

$$\dot u_1 = -N(v_2 - v_1), \quad \dot v_1 = -Nu_1 - \varepsilon v_1,$$
$$\dot u_n = -N(v_{n+1} - v_n),$$
$$\dot v_n = -N(u_n - u_{n-1}) - \varepsilon v_n, \quad n = 2, \dots, N-1, \tag{1}$$
$$\dot u_N = \frac{N}{1+\beta N}(\mu u_N - u_N^3 + v_N),$$
$$\dot v_N = -N(u_N - u_{N-1}) - \varepsilon v_N,$$

где ε, β, μ – положительные параметры (см. также [1], [2]).

Нами показано, что в данной модели реализуется известное явление буферности. А именно, с помощью сочетания аналитических и численных методов устанавливается неограниченный рост числа сосуществующих аттракторов этой системы при увеличении количества RCL–контуров и при надлежащем изменении остальных параметров.

Причина, по которой представляет интерес исследование аттракторов системы (1), состоит в том, что она является одной из возможных дискретизаций соответствующей непрерывной модели

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon v, \tag{2}$$

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–11–00209, https://rscf.ru/project/22-11-00209/

$$u|_{x=0} = 0, \quad \beta \frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{x=1} + v|_{x=1} + (\mu u - u^3)_{x=1} = 0, \tag{3}$$

где $0 \leqslant x \leqslant 1$, $t \geqslant 0$. Эта модель в различных ее вариантах рассматривалась многими авторами (см., например, [3]). Разработанные в [4] асимптотические методы позволяют изучить ее локальные аттракторы, бифурцирующие из нулевого положения равновесия при малых ε, μ. Однако при $\mu \sim 1$ эти методы заведомо не работают и остается лишь один способ анализа аттракторов краевой задачи (2), (3) – численное исследование соответствующей дискретной модели. В настоящей работе в качестве такой модели предлагается система (1).

Следует отметить, что в случае нелинейных краевых задач гиперболического типа возможна аномальная ситуация, когда динамические свойства непрерывной модели и ее дискретизации по пространственным переменным существенно различны. Поэтому к выбору дискретной модели следует подходить с некоторой степенью осторожности. В нашей ситуации выбор в качестве дискретизации задачи (2), (3) системы (1) представляется удачным, поскольку такая дискретизация имеет физический смысл не только при $N \gg 1$, но и при любом конечном натуральном N.

В связи со сказанным, в краевой задаче (2),(3) и в системе (1) был выполнен сравнительный анализ локальной динамики. В частности, показано, что при достаточно малых ε, μ рождается набор локальных аттракторов, число элементов которого растет с ростом N в случае дискретной задачи и бесконечно в случае непрерывной. Найдены условия устойчивости соответствующих режимов. На основе этого анализа делается вывод о близости в некотором смысле динамики дискретной и непрерывной RCL–линий. Затем при $\varepsilon \sim 1$, $\mu \sim 1$ используются численные методы и изучаются фазовые перестройки, происходящие с локальными циклами при изменении бифуркационного параметра.

Литература

1. Глызин С. Д., Колесов А.Ю. Автоколебательные процессы в дискретной RCL–линии с туннельным диодом / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов // ТМФ. — 2023. — Т. 215, № 3.

2. Глызин С. Д. О явлениях хаоса в кольце из трех однонаправленно связанных генераторов / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2006. — Т. 46, № 10. С. 1809–1821.

3. Bryton R. K. Nonlinear oscillations in distributed networks / R. K. Bryton // Quartelly Applied Mathematics. — 1967. — V. 24, no 4. — P. 289–301.

РЕГУЛЯРНАЯ ЦИКЛИЧЕСКАЯ МАТРИЦА ИЗОЛИРОВАННОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ ОДНОЗНАЧНОГО ХАРАКТЕРА УРАВНЕНИЯ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ СТАНДАРТНОГО ВИДА

А.А. Голубков (Москва, МГУ)
andrej2501@yandex.ru

Асимптотика решений уравнения Штурма–Лиувилля

$$u''(z) + (Q(z) - \lambda^2)u(z) = 0 \qquad (1)$$

с голоморфным потенциалом Q в произвольной выпуклой области G комплексной плоскости $\mathbf{C}$ полностью изучена [1]. В частности, известно, что, если i — мнимая единица, $\lambda = |\lambda| \exp(i\varphi_\lambda)$, $z_f - z_0 = |z_f - z_0| \exp(i\varphi_z) \neq 0$, то в точке $z_f \in G$ непрерывно дифференцируемые решения u_1 и u_2 уравнения (1), удовлетворяющие условиям

$$u_1(z_0) = 1,\ u_1'(z_0) = 0,\ u_2(z_0) = 0,\ u_2'(z_0) = 1\ (z_0 \in G), \qquad (2)$$

являются целыми функциями спектрального параметра $\rho := \lambda^2$ регулярного роста порядка $1/2$ и типа $|z_f - z_0|$ с тригонометрическим индикатором $|z_f - z_0||\cos(\varphi_\lambda + \varphi_z)|$ (о целых функциях см. [2]).

Однако, если потенциал имеет особые точки, и уравнение (1) рассматривается в невыпуклой области аналитичности потенциала, то в общем случае известно лишь, что решения (1), удовлетворяющие условиям (2), являются целыми функциями ρ порядка $1/2$. В докладе с целью более полной характеризации решений уравнения (1) как целых функций параметра ρ в случае неодносвязной области аналитичности потенциала исследованы свойства регулярной циклической матрицы $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$ уравнения (1) для изолированной особой точки z_s однозначного характера потенциала $Q(z)$ (см. определение 2)

Определение 1. *Пусть потенциал $Q(z)$ голоморфен в области $G \subset \mathbf{C}$, и $u_1(z), u_2(z)$ — непрерывно дифференцируемые решения уравнения* (1) *вдоль пути $\gamma \subset G$, удовлетворяющие условиям* (2).

Назовём передаточной матрицей уравнения (1) *между точками* z_0 *и* z *пути* γ *матрицу*

$$\hat{P}(\gamma, z, z_0) := \begin{pmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) \end{pmatrix}.$$

Определение 2. *Пусть* $G \subset \mathbf{C}$ *— ограниченная выпуклая область со спрямляемой границей* δG, *содержащая ровно одну особую точку* z_s *потенциала* $Q(z)$, *и во всех точках* δG *потенциал голоморфен. Тогда передаточную матрицу уравнения* (1) *вдоль начинающегося и кончающегося в точке* $z_0 \in \delta G$ *пути* γ, *обходящего границу области* G *против часовой стрелки, будем называть регулярной циклической матрицей* $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$ *изолированной особой точки* z_s *уравнения* (1).

В докладе доказано, что регулярная циклическая матрица особой точки z_s может быть определена для точки z_0 аналитичности потенциала $Q(z)$ тогда и только тогда, когда особая точка z_s является изолированной, и отрезок, соединяющий точки z_s и z_0, не содержит особые точки потенциала, отличные от точки z_s. При этом для фиксированных точек z_0 и z_s матрица $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$ не зависит от выбора области G, удовлетворяющей условиям определения 2 и справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* z_s *— изолированная особая точка однозначного характера потенциала* $Q(z)$, $z_0 \neq z_s$, *отрезок, соединяющий точки* z_0 *и* z_s, *не содержит особых точек* $Q(z)$, *отличных от точки* z_s, $\rho := \lambda^2 = |\lambda|^2 \exp(2i\varphi_\lambda)$ *и* $z_0 - z_s = |z_0 - z_s| \exp(i\varphi_{s0})$. *Тогда либо регулярная циклическая матрица* $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$ *уравнения Штурма–Лиувилля* (1) *равна единичной матрице при всех значениях* ρ, *либо все её элементы являются целыми функциями* ρ *порядка 1/2 с одинаковыми тригонометрическими индикаторами* $2|z_s - z_0||\cos(\varphi_\lambda + \varphi_{s0})|$. *В последнем случае след матрицы* $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$ *является целой функцией* ρ *порядка 1/2 минимального типа, которая не зависит от положения точки* z_0.

В докладе с использованием теоремы 1 также исследована асимптотика передаточной матрицы уравнения (1) для кривой γ произвольной формы, которая принадлежит односвязной ограниченной выпуклой области, содержащей единственную особую точку однозначного характера z_s потенциала $Q(z)$ ($z_s \notin \gamma$).

Литература

1. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений / В. Вазов. // М. : Мир. — 1968. — 465 с.

2. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин. // М. : ГИТТЛ. — 1956. — 632 с.

ОБ ИНТЕГРАЛАХ ОТ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И НЕКОТОРЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[1]

В.А. Горелов (Москва, НИУ «МЭИ»)

gorelov.va@mail.ru

Одним из основных методов в теории трансцендентных чисел является метод Зигеля–Шидловского (см. [1]), позволяющий доказывать трансцендентность и алгебраическая независимость значений т.н. E–функций (дифференциального подкольца целых функций 1–го порядка, замкнутого относительно интегрирования и замены аргумента z на αz при $\alpha \in \mathbb{A}$, где $\mathbb{A}$ — множество всех алгебраических чисел). Рассматриваемые E–функции должны удовлетворять линейным дифференциальным уравнениям с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$ и быть алгебраически независимыми над $\mathbb{C}(z)$. E–функциями, например, являются гипергеометрические E–функции ${}_l\varphi_q(\vec{\nu};\vec{\lambda};\alpha z^{q-l})$, где

$$ {}_l\varphi_q(\vec{\nu};\vec{\lambda};z) = {}_{l+1}F_q\left(\left.\begin{matrix}1,\nu_1,\ldots,\nu_l\\ \lambda_1,\ldots,\lambda_q\end{matrix}\right| z\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\nu_1)_n\ldots(\nu_l)_n}{(\lambda_1)_n\ldots(\lambda_q)_n}z^n, $$

$0 \leqslant l < q,\ (\nu)_0 = 1,\ (\nu)_n = \nu(\nu+1)\ldots(\nu+n-1),\ \vec{\nu} = (\nu_1,\ldots,\nu_l) \in \mathbb{Q}^l,$ $\vec{\lambda} \in (\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}_{\leqslant 0})^q,\ \alpha \in \mathbb{A}.$

С помощью метода Зигеля–Шидловского получено большое число результатов об алгебраической независимости значений гипергеометрических функций в алгебраических точках (библиографию см., например, в [1]).

Но не все E–функции, как недавно доказали Ж. Фрезан и П. Жоссен [2], могут быть алгебраически выражены через гипергеометрические E–функции.

Автором были рассмотрены E–функции

$$ V(z) = V_{\lambda,\alpha}(z) = e^{\alpha z}\int_0^z e^{-\alpha t}\varphi_\lambda(t)dt = z + \left(\frac{1}{\lambda+1}+\alpha\right)\frac{z^2}{2} + \ldots, $$

[1] Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект № FSWF–2023–0012).

$\alpha \in \mathbb{A},\ \lambda \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_{<0}$, удовлетворяющие уравнениям

$$y'' + (-\alpha - 1 + \lambda/z)y' + (\alpha - \lambda\alpha/z)y = \lambda/z,$$

где

$$\varphi_\lambda(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(\lambda+1)\dots(\lambda+n)}, \quad \lambda \neq -1, -2, \dots.$$

В статье [3] автором доказано, что E–функции $V_{\lambda,\alpha}(z)$ и $V'_{\lambda,\alpha}(z)$ алгебраически зависимы над $\mathbb{C}(z)$ тогда и только тогда, когда $\lambda = 0,\ \alpha \in \mathbb{Q}$, либо $\lambda = 1/2,\ \alpha = 2$, либо $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2},\ \alpha = 1$. Кроме того, были найдены все случаи выражения $V_{\lambda,\alpha}(z)$ в виде многочлена от показательных функций и функций вида $\varphi_{\lambda_j}(\alpha_j z)$.

В настоящее время автором доказана более общая

Теорема. *Пусть* $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leqslant 0},\ \ \alpha_i \in \mathbb{C},\ \ i = 1, \dots, m,\ \ (\lambda_i, \alpha_i) \neq (\lambda_l, \alpha_l)$ *при* $i \neq l$*;* $\mu_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z},\ \gamma_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ k = 1, \dots, n,\ \mu_k - \mu_l \notin \mathbb{Z}$ *при* $\gamma_k = \gamma_l$*; числа* $\beta_1, \dots, \beta_p$*, а также* $\zeta_1, \dots, \zeta_q$ *принадлежат* $\mathbb{C}$ *и линейно независимы над* $\mathbb{Q}$*,* $\zeta_1 \in \mathbb{Q},\ \ q \in \mathbb{N},\ \ n, p \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$*. Тогда для алгебраической зависимости* $2m + n + p + q$ *функций*

$$V_{\lambda_1,\alpha_1}(z), V'_{\lambda_1,\alpha_1}(z), \dots, V_{\lambda_m,\alpha_m}(z), V'_{\lambda_m,\alpha_m}(z),$$

$$\varphi_{\mu_1}(\gamma_1 z), \dots, \varphi_{\mu_n}(\gamma_n z),\ e^{\beta_1 z}, \dots, e^{\beta_p z},\ z^{\zeta_1}, \dots, z^{\zeta_q},$$

над $\mathbb{C}$ *необходимо и достаточно хотя бы одно из следующих условий:*

1. $\lambda_i - \mu_j \in \mathbb{Z},\ \gamma_j = 1$ *для некоторых* $1 \leqslant i \leqslant m,\ \ 1 \leqslant j \leqslant n$.

2. $\lambda_i - \lambda_l \in \mathbb{Z}$ *для некоторых* $1 \leqslant i < l \leqslant m$.

3. $\lambda_i = 0,\ \ \alpha_i \in \mathbb{L}\{1, \beta_1, \dots, \beta_p\}$*, либо* $\alpha_i = 1,\ \ \lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$*, для некоторого* $1 \leqslant i \leqslant m$*, где* $\mathbb{L}\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ *— линейное пространство над* $\mathbb{Q}$*, порождённое числами* $\omega_1, \dots, \omega_n \in \mathbb{C}$.

4. $\alpha_i = 1,\ \ \lambda_i \neq 1$ *и либо* $1 \in \mathbb{L}\{\beta_1, \dots, \beta_p\}$*, либо* $\alpha_l = 1,\ \ \lambda_l \neq 1$*, для некоторых* $1 \leqslant i < l \leqslant m$.

5. $\alpha_i = \alpha_l = 2,\ \ \lambda_i + \lambda_l \in \mathbb{Z}$ *для некоторых* $1 \leqslant i \leqslant l \leqslant m$.

Литература

1. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа / А. Б. Шидловский. // М. : Наука, 1987. — 448 с.

2. Fresan J. A non–hypergeometric E–function / J. Fresan, P. Jossen // Ann. of Math. – 2021. — V. 194(3). — P. 903–942.

3. Gorelov V.A. On the Algebraic Independence of the Values of Functions Associated with Hypergeometric Functions / V. Gorelov // Axioms. — 2023. — V. 12(1), 36. — P. 1–7.

ПОВЫШЕНИЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ АЛГОРИТМА ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ МОДУЛЕЙ ЗА СЧЕТ УТОЧНЕНИЯ ОБЛАСТИ РЕШЕНИЙ

О.А. Голованов, А.Н. Тырсин

(Екатеринбург, Уральский федеральный университет,
Институт экономики Уральского отделения РАН)

golovanov.oa@uiec.ru

Устойчивая оценка временных рядов является одной из актуальных задач в статистическом моделировании процессов. Однако, наличие стохастической неоднородности может в значительной степени отразиться на результатах оценивания ввиду невыполнения предпосылки Гаусса–Маркова о некоррелированности между ошибками и объясняющими переменными. Это приводит к неустойчивости оценок с помощью методов наименьших квадратов и наименьших модулей. Для преодоления этого недостатка был предложен обобщенный метод наименьших модулей (ОМНМ) [1]

$$Q(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} \rho(|y_i - \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{a} \rangle|). \qquad (1)$$

где $\rho(\cdot)$ — некоторая монотонно возрастающая, всюду дважды непрерывно–дифференцируемая на положительной полуоси функция, причем $\rho(0) = 0$ и $\forall x > 0\ \rho'(x) > 0,\ \rho''(x) < 0$.

Алгоритм нахождения оптимального решения [2] заключается в спуске по узловым прямым к узловой точке, дальнейший спуск из которой невозможен. Узловой прямой и точкой являются места пересечения $(m-1)$ и m гиперплоскостей $\Omega_i = \Omega(\mathbf{a}, \mathbf{x}_i, y_i)$ вида $y_i - \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{a} \rangle = 0,\ (i = 1, 2, ..., n)$ соответственно. Для найденной узловой точки u^* необходимо найти α окрестность, представляющую из себя множество гиперплоскостей наиболее приближенных к u^* и при помощи полного перебора определить точку, где целевая функция принимает наименьшее значение.

Перебор узловых точек входящих в окрестность совместно с вычислением значения целевой функции требует выполнения $V \approx O(C_n^m * mn)$ операций, что приводит к экспоненциальному росту вычислительных затрат и времени вычисления с ростом числа наблюдений n и коэффициентов m. Таким образом, определение оптимальной области решений позволит значительно сократить зависимость от n и m, а следовательно, расширить область применения модели для более трудоемких задач.

Численные эксперименты основываются на методе статистических испытаний Монте–Карло [3]. Для $n = 50, 100, \dots, 500$ и $m = 2, 3, \dots, 5$ проведем 1000 испытаний для выборок, сгенерированных с засорением и без, что позволит получить относительно универсальную область решений вне зависимости от исходных данных. В результате были получены зависимости α с коэффициентом детерминации $R^2 \geqslant 0.99$, а также экспериментально установлено, что оптимальным подходом к поиску решения будет допускать долю ошибок с заданной вероятностью 0.95, уменьшив тем самым исследуемую окрестность примерно в 2.5 раза относительно точного решения, а соответственно значительно снизив вычислительную сложность алгоритма без статистически значимой потери точности. В качестве конечных результатов будут выступать усредненные оценки окрестностей четырех вариантов генерации данных, что возможно вследствие их однородности, таким образом: $\alpha_{95} = 7.06/n^{0.93} * m^{0.57}$, $\alpha_{99} = 21.98/n^{0.84} * m^{0.04}$.

Литература

1. Тырсин А.Н. Робастное построение регрессионных зависимостей на основе обобщенного метода наименьших модулей / Записки научных семинаров ПОМИ. // 2005. — Т. 328. — С. 236–250.

2. Тырсин А.Н. Методы устойчивого построения линейных моделей на основе спуска по узловым прямым / Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. // 2018. — № 1(25). — С. 188–202.

3. Ермаков С.М. Метод Монте–Карло и смежные вопросы: / С.М. Ермаков // М.: Наука. ФИЗМАТЛИТ. — 1975. — 472 с.

ОСКОЛОЧНО КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ СУПЕРПОЗИЦИИ[1]

Э.Б. Грищенко (Владикавказ, СОГУ)

elya.gris@gmail.com

Нелинейные операторы суперпозиции, известные так же как операторы Немыцкого, образуют один из самых важных подклассов операторов, возникающих в нелинейном анализе [1, 2]. Теория про-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10–01–00000).

странств Кете–Бохнера сильно измеримых вектор–функций изложена в [3]. Приведем необходимые определения.

Пусть $E(X)$ — пространство Кете–Бохнера и Y — векторное пространство. Отображение $T\colon E(X) \to Y$ называется *ортогонально аддитивным оператором*, если

$$T(f+g) = Tf + Tg \text{ для любых дизъюнктных } f, g \in E(X).$$

Множество всех осколков элемента $f \in E(X)$ обозначается $\mathfrak{F}_f$.

Пусть Y — нормированное пространство. Ортогонально аддитивный оператор $T\colon E(X) \to Y$ называется *осколочно компактным*, если множество $\mathcal{T}(\mathfrak{F}_f)$ относительно компактно в Y для любого $f \in E(X)$. Пусть теперь (A, Σ, μ) — пространство с конечной мерой, $E(X)$ — пространство Кете–Бохнера на (A, Σ, μ). Функция $N : A \times X \to X$ называется:

1. $E(X)$ *– супер–измеримой*, если $N(t, f(\cdot)) \in E(X)$ для любого элемента $f \in E(X)$;

2. нормализованной, если $N(\cdot, 0) = 0$ для μ — почти всех $t \in A$.

С каждой нормализованной, $E(X)$ — супер–измеримой функцией $N : A \times X \to X$ связан нелинейный оператор суперпозиции $T_N\colon E(X) \to E(X)$, заданный формулой

$$T_N(f)(\cdot) = N(\cdot, f(\cdot)), \;\; f \in E(X).$$

Сформулируем теперь основной результат, доказанный в работе [4].

Теорема 1. *Пусть (A, Σ, μ) – пространство с конечной безатомной мерой, $E(X)$ – пространство Кете–Бохнера с порядково непрерывной мерой и $N : A \times X \to X$ – нормализованная $E(X)$ – супер–измеримая функция. Тогда для оператора $T_N\colon E(X) \to E(X)$ эквивалентны следующие два условия:*

1. T_N – осколочно компактен;

2. $N(\cdot, f(\cdot)) = 0$ для любого элемента $f \in E(X)$.

Литература

1. J. Appell. Nonlinear superposition operators/ J. Appell, P. P. Zabrejko. // Cambridge University Press. — 1990. — 319 p.

2. T. Runst. Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators, and nonlinear partial differential equations/ T. Runst, W. Sickel. // De Gruyter. — 1996. — 514 p.

3. P. K. Lin. Köthe–Bochner function spaces/ P. K. Lin. — Birkhäuser. — 2004. — 352 p.

4. N. Dzhusoeva. Narrow operators on C–complete lattice–normed spaces / N. Dzhusoeva, E. Grishenko, M. Pliev, F. Sukochev // Submitted.

ОБ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ[1]

М.Т. Дженалиев, М.Г. Ергалиев (Алматы, ИММM)
muvasharkhan@gmail.com, ergaliev.madi.g@gmail.com

В прямоугольной области $\Omega_a = \{x, y| -1 < x < 1, -a < y < a,\ 0 < a = \text{const} \leqslant 1\}$ с границей $\partial\Omega_a$ мы изучаем спектральную задачу:

$$\Delta^2 w = \lambda^2(-\Delta w),\ (x, y) \in \Omega_a, \tag{1}$$

$$w = 0,\ \partial_{\vec{n}} w = 0,\ (x, y) \in \partial\Omega_a, \tag{2}$$

где $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ – оператор Лапласа, $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega_a$, исключая вершины прямоугольника Ω_a.

Во–первых, мы рассматриваем случай квадратной области Ω_1, т.е. $a = 1$. В этом случае задача (1)–(2) была предметом изучения работ [1, 2], а также монографий [3, 4]. Она названа задачей исследования колебаний изгибов зажатой квадратной пластины, в отличие от задачи для закрепленной пластины, где второе условие в (2) заменяется на следующее:

$$\Delta w = 0,\ (x, y) \in \partial\Omega_1, \tag{3}$$

и последняя названа базовой спектральной задачей. Спектр базовой задачи дает нижнюю оценку собственных значений исходной задачи, которая, вообще говоря, может быть и достаточно грубой. Для улучшения этой оценки используется семейство специальных промежуточных задач, получаемых последовательным «усилением» условий (3) и получением условий, аппроксимирующих второе условие из (2). Этот подход называют методом промежуточных задач Ароншайна–Вайнштейна [3, 4]. Отметим, что в работах [3, 4] также отмечается важность задачи (1)–(2) для строительной механики, механики судостроения и т.д.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке КН МНВО Республики Казахстан (грант № AP09258892, 2021–2023).

Мы пришли к задаче (1)–(2) (в точности, не проводя никаких искусственных преобразований), изучая вопросы численного решения прямых и обратных задач для линеаризованного двумерного уравнения Навье–Стокса. При этом мы использовали известное (для двумерного случая) понятие функции тока.

Ранее, спектральная задача (1)–(2) была нами изучена в работе [5] для случая, когда область Ω представляет собой круг с единичным радиусом.

Замечание. В ([3], глава VII, п. 2) указано следующее: «Если зажатая пластина имеет форму квадрата или любую другую форму, отличную от круга, то» ... собственные значения ... «нельзя выразить точно через элементарные или протабулированные специальные функции.»

Для формулировки базовой задачи мы будем заменять вторые граничные условия из (2) только частично. А, именно, вместо условий (2) будем иметь

$$\begin{cases} w(-1,y) = \partial_x w(-1,y) = w(1,y) = \partial_x w(1,y) = 0, \\ w(x,-1) = \partial_y^2 w(x,-1) = w(x,1) = \partial_y^2 w(x,1) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Во–вторых, отдельно рассматривается случай $a \neq 1$, т.е. когда область Ω_a является прямоугольником. Отмечаются отличия нижних оценок собственных значений задачи (1)–(2) с помощью промежуточных спектральных задач как в соответствии с формулами (3), так и – с формулами (4).

Литература

1. Weinstein A. Étude des spectres des equations aux dérivées partielles de la théoriè des plaques élastiques / A. Weinstein // Mém. des Sciences math., facs. Thèses de l´entre–deux–guerres, Gauthier–Villars, Paris. — 1937. — V. 88. — P. 1–63.

2. Aronszajn N. Rayleigh–Ritz and A. Weinstein methods for approximation of eigenvalues. I, II / N. Aronszajn // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1943. — V. 34. — P. 474–480, 594–601.

3. Gould S.H. Variational Methods for Eigenvalue Problems. An Introduction to the Weinstein Method of Intermediate Problems / S.H. Gould. // London : Oxford University Press. — 1966. — XVI+275 p.

4. Weinstein A. Methods of Intermediate Problems for Eigenvalues. Theory and Ramifications / A. Weinstein, W. Stenger // New York : Academic Press. — 1972. — XII+236 p.

5. Jenaliyev M.T. On the numerical solution of one inverse problem for a linearized two–dimensional system of Navier–Stokes equations /

M.T. Jenaliyev, M.I. Ramazanov, M.G. Yergaliyev // Opuscula Math. — 2022. — V. 42, No. 5. — P. 711–727.

ВЛИЯНИЯ ЛИМИТИРУЮЩЕЙ СТАДИЙНОЙ РЕАКЦИИ НА ВЫБОР ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА НАХОЖДЕНИЕ КОНСТАНТ СКОРОСТЕЙ ПРИЭЛЕКТРОДНЫХ ПРОЦЕССОВ[1]

М.С. Дмитриев, Л.Н. Кашапов, А.Д. Кудрявый, В.Ю. Чебакова (Казань, КФУ)
vchebakova@mail.ru

Кинетика гетерогенных процессов играет важную роль в самых разнообразных областях, таких, как электролиз, электро–химическое оксидирование металлов, производства пигментов, выщелачивание металлов. Электро–химические стадийные реакции, описывающие выделения вещества в процессе электролиза, могут быть описаны с помощью системы кинетических уравнений. Однако стоит отметить что, константы скоростей электрохимических реакций зависят от факторов свойственных техническим параметрам конкретных электролизеров. При этом процесс электролиза относится к гетерогенные гетерофазным реакции, для них характерно наличие истинного и кажущегося порядка реакции [1] . Непосредственно электролиз можно отнести к реакциям нулевого порядока, когда концентрация линейно уменьшается от времени и наблюдается линейная зависимость. Кажущийся порядок — порядок реакции зависит от условий эксперимента. Скорость общей реакции зависит от скорости лимитирующей реакции (самой медленной из стадийных реакций). Так например, в работе [2] наблюдается линейная зависимость выхода водорода при электролизе, а в работе [3] в начальной стадии образования зародышей цинка линейность нарушается. В работе [4] представлен численный алгоритм, позволяющей находить скорости констант в приэлектродных процессах в соответствии с заданными экспериментальными данными по выходу, а также рассчитывать концентрации веществ, участвующих в приэлектродных процессах на конкретные моменты времени. Данный алгоритм основывается на применении прямого метода численной оптимизации для решения обратной задачи, тогда как для решения системы кинетических уравнений, необходимого для нахождения целевой функции происходит методом Рунге–Кутты. В данной работе рассмотрено

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23–29–00099).

влияние выбора метода решения системы, состоящей из задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, в численном алгоритме, реализующем поиск констант скоростей гетерогенных процессов и описанном в работе [4]. Проведено сравнение результатов при использование явного метода Рунге–Кутта четвертого порядка и не явного метода Рунге—Кутты, применяемого для решения жестких систем уравнений.

Литература

1. Дьяченко А.Н. Химическая кинетика гетерогенных процессов: учебное пособие / А.Н. Дьяченко, В.В. Шагалов — Томск. // Изд–во Томского политехнического университета, 2014. — 102 с.

2. Бабаев Р.К. Исследование кинетических закономерностей получения водорода электролизом воды / Р.К. Бабаев, С.А. Алиев // Проблемы науки. — 2018. — Т. 4, вып. 28. — С. 31–33.

3. Zhang Y. The Electrowinning of Zinc from Sodium Hydroxide Solutions / Y. Zhang, J. Deng, J. Chen, P. Yu, X. Xing //Hydromettallurgy. — 2014. — Vol.146 — pp. 59–63.

4. Кашапов Р.Н. Кинетика двухфазных газожидкостных сред в процессах электролиза / Р.Н. Кашапов ,Л.Н. Кашапов , Н.Ф. Кашапов , В.Ю. Чебакова // Теплофизика высоких температур. — 2021. — Т. 59, № 6. — С. 869–876.

ОБ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ С ФАЗОВЫМИ И СМЕШАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

А.В. Дмитрук (Москва, ЦЭМИ РАН)
optcon@mail.ru

Рассматривается задача Лагранжа КВИ в понтрягинской форме

$$J \;:=\; F_0(x(t_0), x(t_1)) \;\to\; \min, \tag{1}$$

$$F_i(x(t_0), x(t_1)) \leqslant 0, \qquad i = 1, \ldots, d(F), \tag{2}$$

$$\dot{x}(t) = \; f(x(t), u(t)), \qquad K(x(t_0), x(t_1)) \;=\; 0, \tag{3}$$

с дополнительными фазовыми и смешанными ограничениями

$$\Phi_i(x(t)) \;\leqslant\; 0, \qquad i = 1, \ldots, d(\Phi), \tag{4}$$

$$G_j(x(t), u(t)) \;\leqslant\; 0, \qquad j = 1, \ldots, d(G), \tag{5}$$

где $x \in AC^n[t_0, t_1]$, $u \in L^r_\infty[t_0, t_1]$, отрезок времени $[t_0, t_1]$ фиксирован, $d(a)$ обозначает размерность вектора a.

Нас интересует вопрос о необходимых условиях слабого минимума, т.е. локального минимума относительно нормы $||x||_C + ||u||_\infty$.

Задача (1)–(5) есть частный случай абстрактной задачи вида

$$F_0(w) \to \min, \quad F_i(w) \in K_i\,, \quad g(w) = 0, \tag{6}$$

где F_i, G_j, g – гладкие отображения из банахова пространства W в некоторые банаховы пространства Z_i , Y а K_i – замкнутые выпуклые конусы с непустой внутренностью в пространствах Z_i .

Эта постановка включает большинство как теоретических, так и прикладных задач оптимизации, в том числе задачи оптимального управления с ограничениями неравенства (4–5), которые можно трактовать как принадлежность $\Phi_i(t, x(t))$ и $G_j(t, x(t), u(t))$ конусам неположительных функций в пространствах C и L_∞ . Если все $Z_i = \mathbb{R}$, а $K_i = \mathbb{R}_-$, то получаем обычную *задачу нелинейного программирования* с неравенствами $F_i(w) \leqslant 0$. В общем случае включения $F_i(w) \in K_i$ задают бесконечное число ограничений неравенства. Наличие бесконечного числа ограничений неравенства есть основное отличие задач оптимального управления от задач классического вариационного исчисления (КВИ).

Необходимое условие локального минимума в задаче (6) можно получить известным методом Дубовицкого–Милютина [1, 2], одним из главных пунктов которого является *теорема о «мульти–отделимости» конусов*:

если в топологическом векторном пространстве X заданы непустые выпуклые конусы $\Omega_1, \ldots, \Omega_m, \Omega_{m+1}$, из которых первые m открыты, то их непересечение эквивалентно существованию элементов $x_i^* \in \Omega_i^*$ (из сопряженных конусов), не все из которых нули, сумма которых равна нулю.

Применяя этот метод, получаем [3] обобщение правила множителей Лагранжа (ПМЛ): если w_0 есть точка локального минимума, то существуют множители $\alpha_0 \geqslant 0$, $z_i^* \in Z_i^*$, $y^* \in Y^*$, не все $= 0$, такие что $\langle z_i^*,\, K_i\rangle \leqslant 0$, $\langle z_i^*,\, F_i(w_0)\rangle = 0$, и при этом функция Лагранжа $\mathcal{L}(w) = \alpha_0 F_0(w) + \sum \langle z_i^*,\, F_i(w)\rangle + \langle y^*, g(w)\rangle$ стационарна в точке w_0 , т.е. $\mathcal{L}'(w_0) = 0$.

Таким образом, множителями при ограничениях $F_i(w) \in K_i$ являются элементы сопряженных пространств Z_i^* . Для фазовых ограничений это будут неотрицательные меры Стилтьеса $d\mu(t) \geqslant 0$, сосредоточенные на множестве выхода оптимальной траектории на фазовую границу, а для смешанных ограничений – элементы пространства L_∞^* , которое, как известно, гораздо шире "хорошего" пространства L_1, поскольку содержит *сингулярные* функционалы. Расшифровка абстрактного условия стационарности $\mathcal{L}'(w_0) = 0$ для задачи (1)–(5) приводит к *уравнению Эйлера–Лагранжа* или *локальному принципу максимума.* Если сами смешанные ограничения *регулярны,* то в полученном уравнении Эйлера–Лагранжа сингулярные функционалы удается исключить, и все множители при смешанных ограничениях будут функциями из L_1 . В общем случае наличие сингулярных элементов исключить нельзя.

Смешанные ограничения (5) называются регулярными [2, 3], если в любой точке $w = (x, u)$ их градиенты по управлению $G'_{iu}(x, u)$, где i таковы, что $G_i(x, u) = 0$, *позитивно независимы* (т.е. линейно независимы при неотрицательных коэффициентах).

Случай нерегулярных смешанных ограничений далеко не экзотичен: например, таковым является ограничение $x^2 + u^2 \leqslant 1$ в точках $(x, u) = (\pm 1, 0)$. Какими будут условия локального минимума при наличии таких ограничений?

Для решения этого вопроса А.Я. Дубовицкий и А.А. Милютин предложили следующую модификацию своего метода [1, 2]. Вместо того, чтобы точно «разделять» данные конусы элементами сопряженного пространства, можно разделять их *приближенно* элементами *предсопряженного* пространства, если таковое имеется. (Заметим, что у пространства L_∞ – основного пространства теории оптимального управления – предсопряженное есть, это L_1). При этом вместо точного условия стационарности $\mathcal{L}'(w_0) = 0$ получим, разумеется, лишь приближенное условие $||\mathcal{L}'(w_0)|| < \varepsilon$.

Полагая $\varepsilon = 1/n,\ \ n = 1, 2, \dots$, получаем последовательность наборов множителей из предсопряженных конусов, сумма которых по норме стремится к нулю. Далее надо как–то перейти к пределу в самих этих множителях. Если вся последовательность L_1 –множителей равномерно интегрируема (т.е. имеет общий модуль интегрируемости), то можно считать ее слабо сходящейся к некоторой функции из L_1 , и тогда в пределе мы получаем обычный локальный принцип максимума, как и для регулярного случая.

В общем случае последовательность L_1 –множителей можно разбить на сумму равномерно интегрируемой последовательности и такой, которая сосредоточена на множествах исчезающей меры, и ее норма на этих множествах отделена от нуля. Вот это второе слагаемое в пределе и порождает сингулярный функционал из L_∞^* . В условиях стационарности важно лишь его действие на фазовую компоненту $x(t)$, т.е. важна та мера, которая является проекцией этого сингулярного функционала на пространство C. Поэтому отличие нерегулярного случая от регулярного будет лишь в уравнении для сопряженной переменной $\psi(t)$.

Например, если ограничений (4) нет, а ограничение (5) скалярное: $G(x,u) \leqslant 0$, результат будет следующим [1, 2, 4].

Введем множество *фазовых точек*

$$\mathcal{N} = \{ (x,u) \in \mathbb{R}^{n+m} : \quad G(x,u) = 0, \quad G_u(x,u) = 0 \}.$$

Пусть $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$ есть оптимальная пара, Γ есть график функции $\hat{u}(t)$. Его *замыканием по мере* называется множество $\mathrm{clm}\,(\hat{u})$, состоящее из всех точек $(t,v) \in \mathbb{R}^{1+m}$, таких что для любой окрестности $O \ni (t,v)$ проекция ее пересечения с Γ на компоненту t имеет положительную меру, и пусть $\mathrm{clm}\,(\hat{u})(t)$ есть соответствующее ему многозначное отображение $[t_0,t_1] \to \mathbb{R}^m$. Введем множество

$$D := \{ t \in [t_0,t_1] : \quad (\hat{x}(t), \mathrm{clm}\,(\hat{u})(t)) \cap \mathcal{N} \neq \varnothing \}.$$

и зададим на нем многозначную функцию

$$S(\hat{x}(t),\, \mathrm{clm}\,(\hat{u})(t)) = \{ G_x(\hat{x}(t),u) : \ u \in \mathrm{clm}\,(\hat{u})(t), \ (\hat{x}(t),u) \in \mathcal{N} \}.$$

Сопряженная переменная ψ есть функция ограниченной вариации, подчиненная уравнению

$$d\psi = -\psi f_x(\hat{x},\hat{u})\,dt + \lambda(t)\,G_x(\hat{x},\hat{u})\,dt + s(t)\,d\eta\,, \tag{7}$$

где $\lambda \in L_1[t_0,t_1]$, $\lambda(t) \geqslant 0$ и $\lambda(t)G(\hat{x}(t),\hat{u}(t)) = 0$, мера $d\eta \in C^*[t_0,t_1]$ сосредоточена на множестве D, $d\eta \geqslant 0$, а функция $s(t)$ измерима и существенно ограниченна относительно $d\eta$, и при этом $s(t) \in \mathrm{conv}\, S\big(\hat{x}(t), \mathrm{clm}\,(\hat{u})(t)\big)$ п.в. по $d\eta$.

Если на поверхности $G(x,u) = 0$ всегда $G_u(x,u) \neq 0$, то смешанное ограничение регулярно, множества $\mathcal{N}$ и D пусты, и мера $d\eta = 0$, так что последний член в (7) исчезает.

Условие стационарности по управлению в обоих случаях одинаково: $\psi f_u(\hat{x},\hat{u}) - \lambda G_u(\hat{x},\hat{u}) = 0$, так же одинаковы и условия трансверсальности.

Таким образом, отличие от регулярного случая состоит в том, что в сопряженном уравнении присутствует дополнительный член, соответствующий возможным скачкам $\psi(t)$ на множестве D. Направления этих скачков $s(t)$ лежат в выпуклой оболочке множества $S(\hat{x}(t),\, \mathrm{clm}\,(\hat{u})(t))$; значения функции $s(t)$ вне D не играют роли.

Литература

1. Дубовицкий А.Я. Необходимые условия слабого экстремума в общей задаче оптимального управления / А.Я. Дубовицкий, А. А. Милютин. — М. : Наука, 1971. — 114 с.

2. Милютин А.А. Принцип максимума в общей задаче оптимального управления / А.А. Милютин. — М. : Физматлит, 2001. — 304 с.

3. Dmitruk A.V. A general Lagrange multipliers theorem and related questions / A.V. Dmitruk, N.P. Osmolovskii // Control Systems and Mathematical Methods in Economics (Feichtinger et al. eds.).— Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems.— Springer.— 2018.— v. 687.— p. 165–194, .

4. Dmitruk A.V. Local minimum principle for an optimal control problem with a nonregular mixed constraint / A.V. Dmitruk, N.P. Osmolovskii // SIAM J. Control and Optimization. — 2022. — v. 60. — p. 1919–1941.

ЛОКАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ СМЕШАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

А.В. Дмитрук, Н.П. Осмоловский (Москва, ЦЭМИ РАН; Варшава, Институт Системных Исследований ПАН)

optcon@mail.ru, nikolai.osmolovskii@ibspan.waw.pl

Рассмотрим простейшую задачу со смешанным ограничением:

$$J(x(t_0), x(t_1)) \to \min, \quad \dot{x} \;=\; f(x,u), \quad G(x,u) \,\leqslant\, 0, \qquad (1)$$

где $t \in [t_0, t_1]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, функции J, f, G гладкие, и нас интересуют необходимые условия слабого минимума на некотором процессе $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$.

Если при $G(x,u) = 0$ всегда $G_u(x,u) \neq 0$, то смешанное ограничение *регулярно*, и сопряженная переменная должна удовлетворять обычному уравнению $-\dot{\psi} = \psi f_x(\hat{x},\hat{u}) - \lambda G_x(\hat{x},\hat{u})$ и условию стационарности по управлению $\psi f_u(\hat{x},\hat{u}) - \lambda G_u(\hat{x},\hat{u}) = 0$, где $\lambda \in L_1[t_0,t_1]$, $\lambda(t) \geqslant 0$ и $\lambda(t) G(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) = 0$ (см. напр. [1]).

Для общей задачи с *нерегулярными* смешанными ограничениями необходимые условия слабого минимума получены А.Я. Дубовицким и А.А. Милютиным [2]. Для задачи (1) они состоят в следующем. Введем *множество фазовых точек*

$$\mathcal{N} := \{ (x,u) \in \mathbb{R}^{n+m} : \quad G(x,u) = 0, \quad G_u(x,u) = 0\}.$$

Пусть Γ есть график функции $\hat{u}(t)$. Введем его замыкание по мере Лебега $\mathrm{clm}\,(\hat{u})$, состоящее из всех точек $(t,v) \in \mathbb{R}^{1+m}$, таких что для любой окрестности $O \ni (t,v)$ проекция ее пересечения с Γ на компоненту t имеет положительную меру, и пусть $\mathrm{clm}\,(\hat{u})(t)$ есть соответствующее ему многозначное отображение $[t_0,t_1] \to \mathbb{R}^m$. Введем замкнутое множество

$$D := \{ t \in [t_0,t_1] : \quad (\hat{x}(t), \mathrm{clm}\,(\hat{u})(t)) \cap \mathcal{N} \neq \varnothing \}.$$

и зададим на нем многозначную функцию

$$S(\hat{x}(t),\, \mathrm{clm}\,(\hat{u})(t)) := \{ G_x(\hat{x}(t),u) \, : \, u \in \mathrm{clm}\,(\hat{u})(t), \, (\hat{x}(t),u) \in \mathcal{N} \}.$$

Теорема. *Пусть процесс* $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$ *доставляет слабый минимум. Тогда найдутся множители: число* $\alpha_0 \geqslant 0$, *функция* $\lambda \in L_1[t_0,t_1]$, *такая что п.в.* $\lambda(t) \geqslant 0$ *и* $\lambda(t)G(\hat{x}(t),\hat{u}(t)) = 0$, *функция* $\psi(t) \in BV[t_0,t_1]$, *мера* $d\eta \in C^*[t_0,t_1]$, $d\eta \geqslant 0$, *сосредоточенная на множестве* D, *и* $d\eta-$*измеримая ограниченная функция* $s(t) \in conv\, S\big(\hat{x}(t), \mathrm{clm}\,(\hat{u})(t)\big)$ *п.в. по* $d\eta$, *для которых выполнены:*

условие нетривиальности $\alpha_0 + \|\lambda\|_1 + d\eta\,([t_0,t_1]) > 0$, (2)

сопряженное уравнение в терминах мер:

$$d\psi \;=\; -\psi f_x(\hat{x},\hat{u})\, dt \;+\; \lambda\, G_x(\hat{x},\hat{u})\, dt \;+\; s\, d\eta\,, \tag{3}$$

условия трансверсальности

$$\psi(t_0 - 0) \;=\; \alpha_0 J_{x_0}\,, \qquad \psi(t_1 + 0) \;=\; -\alpha_0 J_{x_1}\,, \tag{4}$$

и обычное условие стационарности по управлению

$$\psi f_u(\hat{x},\hat{u}) \;-\; \lambda\, G_u(\hat{x},\hat{u}) \;=\; 0. \tag{5}$$

Основное отличие от регулярного случая состоит в том, что теперь $\psi(t)$ это функция ограниченной вариации, и в сопряженном уравнении присутствует дополнительный член, соответствующий возможным скачкам $\psi(t)$ на множестве D. Направления этих скачков $s(t)$

лежат в выпуклой оболочке множества $S(\hat{x}(t), \operatorname{clm}(\hat{u})(t))$; значения функции $s(t)$ вне D не играют роли.

Подробное доказательство теоремы дается в [3].

Литература

1. Милютин А.А. Принцип максимума в оптимальном управлении / А.А. Милютин, А.В. Дмитрук, Н.П. Осмоловский. — М. : Мехмат МГУ, 2004. — 168 с. `https://kafedra-opu.ru/node/139`.

2. Дубовицкий А.Я. Необходимые условия слабого экстремума в общей задаче оптимального управления / А.Я. Дубовицкий, А.А. Милютин. — М. : Наука, 1971. — 114 с.

3. Dmitruk A.V. Local minimum principle for an optimal control problem with a nonregular mixed constraint / A.V. Dmitruk, N.P. Osmolovskii // SIAM J. Control and Optimization. — 2022. — V. 60. — P. 1919–1941.

УСРЕДНЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ КРАЯ ВНУТРЕННЕЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛАКУНЫ[1]

М.А. Дородный (Санкт–Петербург, СПбГУ)
mdorodni@yandex.ru

Рассматривается действующий в $L_2(\mathbb{R})$ эллиптический дифференциальный оператор $A_\varepsilon = -\frac{d}{dx} g(x/\varepsilon) \frac{d}{dx} + \varepsilon^{-2} V(x/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Здесь g — измеримая функция такая, что $0 < \alpha_0 \leqslant g(x) \leqslant \alpha_1 < \infty$, $g(x+1) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, и $V \in L_1(0,1)$, $V(x+1) = V(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Мы предполагаем, что $\inf \operatorname{spec} A = 0$, $A := A_1$.

Хорошо известно, что процедуру усреднения для оператора A_ε можно рассматривать как пороговый эффект вблизи нижнего края спектра. Спектр оператора A_ε имеет зонную структуру и может иметь лакуны. Имеет ли смысл связывать аналоги задач усреднения с краями внутренних лакун? Мы изучаем этот вопрос для нестационарного уравнения Шрёдингера и гиперболического уравнения с оператором A_ε.

Пусть $\sigma > 0$ — (невырожденный) левый край зоны с нечётным номером s в спектре оператора A. Пусть $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in L_2(\mathbb{R})$. Рассмотрим

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075–15–2022–287 от 06.04.2022) и конкурса «Молодая математика России».

задачи Коши

$$\begin{cases} i\partial_t u_\varepsilon(x,t) = (A_\varepsilon u_\varepsilon)(x,t), \\ u_\varepsilon(x,0) = (\Upsilon_\varepsilon \mathfrak{f})(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t^2 v_\varepsilon(x,t) = -(A_\varepsilon v_\varepsilon)(x,t) + \varepsilon^{-2}\sigma v_\varepsilon(x,t), \\ v_\varepsilon(x,0) = (\Upsilon_\varepsilon \mathfrak{f})(x),\ (\partial_t v_\varepsilon)(x,0) = (\Upsilon_\varepsilon \mathfrak{g})(x), \end{cases}$$

$$(\Upsilon_\varepsilon \mathfrak{f})(x) := (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} (\Phi\mathfrak{f})(k) \sum_{j=s}^{\infty} e^{ikx} \varphi_j(x/\varepsilon, \varepsilon k) \chi_{\widetilde{\Omega}_{j-s+1}}(\varepsilon k)\, dk.$$

Здесь $\{e^{ikx}\varphi_j(x,k)\}_{j=s}^{\infty}$ — блоховские волны, отвечающие спектральным зонам оператора A с номерами $j \geqslant s$,

$$\widetilde{\Omega}_j = (-j\pi, -(j-1)\pi] \cup ((j-1)\pi, j\pi], \quad j \in \mathbb{N},$$

— зоны Бриллюэна, а $(\Phi\mathfrak{f})(k)$ — Фурье–образ функции $\mathfrak{f}(x)$. Мы доказываем следующие оценки:

$$\|u_\varepsilon(\cdot,t) - e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma}\varphi_\sigma(\cdot/\varepsilon)u_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant C(1+|t|^{1/2})\varepsilon\|\mathfrak{f}\|_{H^2(\mathbb{R})}, \quad \mathfrak{f} \in H^2(\mathbb{R}),$$

$$\|v_\varepsilon(\cdot,t) - \varphi_\sigma(\cdot/\varepsilon)v_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant C(1+|t|^{1/2})\varepsilon(\|\mathfrak{f}\|_{H^{3/2}(\mathbb{R})} + \|\mathfrak{g}\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})}), \quad \mathfrak{f} \in H^{3/2}(\mathbb{R}),\ \mathfrak{g} \in H^{1/2}(\mathbb{R}),$$

где u_0 и v_0 — решения эффективных задач

$$\begin{cases} i\partial_t u_0(x,t) = (A_\sigma^{\mathrm{hom}} u_0)(x,t), \\ u_0(x,0) = \mathfrak{f}(x), \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_t^2 v_0(x,t) = -(A_\sigma^{\mathrm{hom}} v_0)(x,t), \\ v_0(x,0) = \mathfrak{f}(x),\ (\partial_t v_0)(x,0) = \mathfrak{g}(x), \end{cases}$$

$A_\sigma^{\mathrm{hom}} = -b_\sigma \frac{d^2}{dx^2}$, $b_\sigma > 0$ — коэффициент в асимптотике s–ой зонной функции $E(k) = E_s(k)$: $E(k) \sim \sigma + b_\sigma k^2$, $k \sim 0$; а $\varphi_\sigma(x) = \varphi_s(x,0)$ — периодическое решение уравнения $A\varphi_\sigma = \sigma\varphi_\sigma$, нормированное в $L_2(0,1)$.

Эти результаты точны как по типу нормы, так и относительно зависимости от t. Рассмотрены также случаи других краёв спектральных зон. Результаты опубликованы в [1].

Литература

1. Dorodnyi M.A. High–frequency homogenization of nonstationary periodic equations / M.A. Dorodnyi // Applicable Analysis. — 2023. http://dx.doi.org/10.1080/00036811.2023.2199031.

ДОМИНАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА ДЛЯ МОДЕЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ[1]

Е.С. Дубцов (Санкт–Петербург)
dubtsov@pdmi.ras.ru

Пусть B_d — открытый единичный шар из $\mathbb{C}^d$, $d \geqslant 1$, и пусть σ — нормированная мера Лебега на единичной сфере $S_d = \partial B_d$.

Голоморфная функция $I : B_d \to B_1$ называется *внутренней*, если $|\lim_{r\to 1-} I(r\zeta)| = 1$ для σ–п.в. $\zeta \in S_d$. Пусть $H^2 = H^2(B_d)$ — стандартное пространство Харди. Для внутренней функции I в шаре B_d, $d \geqslant 1$, положим $I^*(H^2) = H^2(B_d) \ominus IH^2(B_d)$. Если Θ — внутренняя функция в круге B_1, то пространство $\Theta^*(H^2(B_1))$ обычно называют модельным, для него используется стандартное обозначение K_Θ.

Определение. Измеримое по Лебегу множество $E \subset S_d$, $d \geqslant 1$, называется доминантным для $I^*(H^2)$, если $\Sigma(E) < 1$ и

$$\|f\|_{H^2}^2 \leqslant C \int_E |f|^2 \, d\sigma \quad \text{для всех } f \in I^*(H^2) \text{ и константы } C > 0.$$

Основной результат — это следующая теорема существования, которую для круга B_1 ранее доказал В.В. Капустин (см. [1]).

Теорема 1. *Пусть I — внутренняя функция в единичном шаре B_d, $d \geqslant 2$. Существует множество, которое является доминантным для пространства $I^*(H^2)$.*

Ключевым инструментом для доказательства теоремы 1 является семейство мер Кларка, порождённое функцией I (соответствующие определения приведены в работе [2]).

Литература

1. Blandignères, A. Reverse Carleson embeddings for model spaces / E. Fricain, F. Gaunard, A. Hartmann, W. Ross // J. London. Math. Soc. — 2013. — V. 88, № 2. — P. 437–464.

2. Aleksandrov A.B. Clark measures on the complex sphere / E. Doubtsov // J. Funct. Anal. — 2020. — V. 278, № 2. — 108314.

---

[1] Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 19–11–00058.

О СИНГУЛЯРНОМ СЛЕДЕ ТРЕХМЕРНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ И СООТВЕТСТВУЮЩИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ[1]

Ю.А. Дубинский (Москва, НИУ МЭИ)
julii_dubinskii@mail.ru

В докладе будут представлены следующие результаты:

1. Установлены операторы сингулярного следа основных операций теории поля первого порядка, а именно сингулярные следы векторных полей $[\mathrm{rot}u, n]$, $\mathrm{div}u$, $\partial u/\partial n$ и их линейных комбинаций на границе области;

2. Найдена формула связи граничных значений градиента и ротора векторных полей;

3. Описан оператор различия (девиатор) билинейных форм, отвечающих оператору Лапласа в дивергентно–градиентном и роторно–градиентном представлении (см. [1], [2]);

4. Рассмотрены нестандартные краевые задачи теории поля (на основе пп. 1–3) в форме отображений в рамках двойственности пространств Соболева и их сопряженных пространств.

Литература

1. Дубинский Ю.А. Теорема о следе и её приложения. / Ю.А. Дубинский // Проблемы математического анализа. — 2018. — Вып. 90. — С. 49–54.

2. Дубинский Ю.А. Об одной формуле 3D–векторных полей и полевой форме задачи Неймана. / Ю.А. Дубинский // Проблемы математического анализа. — 2022. — Вып. 117. — С. 67–73.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект FSWF–2023–0012).

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ ЗИГМУНДА

А.Ю. Егорова (Рязань, РГУ им. С. А. Есенина)
an_ batseva@mail.ru

В полосе $D = \mathbb{R} \times (0;T)$, $0 < T < \infty$, рассматривается задача Коши для равномерно параболической в смысле И. Г. Петровского системы с постоянными коэффициентами

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u - A\partial_x^2 u & = & 0, \\ u|_{t=0} & = & \psi, \end{array} \right. \tag{1}$$

где $u = (u_1, u_2, ..., u_m)^T$. Определение параболических пространств Зигмунда $H_a(\bar{D})$, $a \in \mathbb{N}$ получается из анизотропных пространств Липшица путем замены в нормах разностей Δf разностями второго порядка $\Delta^2 f$. Нормы в весовых параболических пространствах Зигмунда $H_a^{(b)}(D)$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant -a$, где a, b — целые числа, определены в работе [1]. Индекс a указывает на локальную гладкость в полосе D, а индекс $(-b)$ — на гладкость в замыкании области $\bar{D}$. Разрешимость одного параболического уравнения с переменными коэффициентами в шкале пространств Зигмунда установлена в работе [2].

Для плотности $\varphi \in L_\infty(\mathbb{R})$ обозначим потенциал Пуассона:

$$\Pi\varphi(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}} Z(x-y,t)\varphi(y)dy. \tag{2}$$

С помощью оценок [3] для фундаментальной матрицы решений системы (1) доказывается

Теорема 1. *Пусть m, l — целые числа, такие, что $m\geqslant l\geqslant 0$. Тогда оператор $\Pi : \varphi \to \Pi\varphi$ является ограниченным из пространства $H_l(\mathbb{R})$ в $H_m^{(-l)}(D)$.*

Из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Пусть $m\geqslant 3$, $0 < l \leqslant m$, $\psi \in H_l(\mathbb{R})$. Тогда существует единственное решение задачи Коши (1) из $H_m^{(-l)}(D)$, причем*

$$|u|_{m,D}^{(-l)} \leqslant C(|\psi|_{l,\mathbb{R}}).$$

.

Литература

1. Конёнков А. Н. Задача Коши для уравнения теплопроводности в пространствах Зигмунда / А.Н. Конёнков // Дифференциальные уравнения — 2005. — Т. 41, № 6. — С. 820–831.

2. Конёнков А. Н. Задача Коши для параболических уравнений в пространствах Зигмунда / А. Н. Конёнков // Дифференциальные уравнения — 2006. — Т. 42, № 6. — С. 867—873.

3. Ладыженская О.А. / Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева . — М., 1967. — 736 с.

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С $Q(x) = X^2$ ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

А.Г. Елисеев (Москва, МЭИ)

predikat@bk.ru

Данная работа посвящена развитию метода регуляризации на сингулярно возмущенную задачу Коши для уравнения Шредингера с «сильной» точкой поворота первого порядка у предельного оператора. Метод регуляризации классифицирует три группы точек поворота:

1. «Простая» точка поворота — собственные значения предельного оператора изолированы друг от друга, одно собственное значение в отдельных точках t обращается в нуль [1, 3].

2. «Слабая» точка поворота — хотя бы одна пара собственных значений пересекаются в отдельных точках t, но при этом предельный оператор сохраняет диагональную структуру вплоть до точек пересечения. Базис из собственных векторов остается гладким по t [4].

3. «Сильная» точка поворота — хотя бы пара собственных значений пересекаются в отдельных точках t, но при этом предельный оператор меняет диагональную структуру на жорданову в точках пересечения. Базис в точках пересечения теряет гладкость по t [2].

Постановка задачи. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} i\varepsilon \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\varepsilon^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 u + h(x,t), \\ u(x,0) = f(x), t \in [0,T], \quad -\infty < x < +\infty \end{cases} \tag{1}$$

[1] Результаты А. Г. Елисеева были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF–2023–0012)

с условиями:

1. $\forall\ k\ h^{(k)}(x,t) \in L_1 \bigcap C^{\infty}(0,+\infty) \times [0,T]$;
2. $\forall\ k\ f^{(k)}(x) \in L_1 \bigcap C^{\infty}(0,+\infty) \times [0,T]\, \forall (x,t) \in (-\infty,+\infty) \times [0,T]$.

В случае задачи (1) регуляризирующая функция, описывающая временной пограничный слой имеет вид:

$$e^{-i\frac{x^2 tg 2t}{2\varepsilon}}$$

Дополнительные регуляризирующие сингулярные операторы, связанные с точечной необратимостью предельного оператора, строятся с помощью фундаментального решения. Задача их вложить правую часть уравнения в образ предельного оператора. Фундаментальное решение уравнения (1) имеет вид:

$$K(x,\xi,t) = \frac{1-i}{2\sqrt{\pi\varepsilon \sin(2t)}} exp\left[i\left(\mathrm{ctg}\,(2t)\frac{x^2+\xi^2}{2\varepsilon} - \frac{x\xi}{\varepsilon \sin(2t)} \right) \right].$$

Сингулярные интегральные операторы для регуляризации правой части задачи получим, если проинтегрировать фундаментальное решение по переменной ξ. Тогда получим:

$$\sigma_0(x,t,\varepsilon)f(t) = -i\int_0^t f(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} K(x,\xi,t-\tau)d\xi =$$
$$= -i\int_0^t f(\tau)\frac{1}{\sqrt{\cos 2(t-\tau)}} e^{-\frac{ix^2 \mathrm{tag}\, 2(t-\tau)}{2\varepsilon}} d\tau,$$

$$\sigma_1(x,t,\varepsilon)f(t) = -i\int_0^t f(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \xi K(x,\xi,t-\tau)d\xi =$$
$$= -ix\int_0^t f(\tau)\frac{1}{\sqrt{\cos 2(t-\tau)}^3} e^{-\frac{ix^2 \mathrm{tag}\, 2(t-\tau)}{2\varepsilon}} d\tau.$$

Регуляризованное решение задачи (1) ищем в виде

$$u(x,t,\varepsilon) = v(x,t,\varepsilon)e^{-\frac{ix^2 tg\, 2t}{2\varepsilon}} + \sigma_0(y(t,\varepsilon)) + \\ +\sigma_1(z(t,\varepsilon)) + w(x,t,\varepsilon). \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1) и выделив слагаемые при регуляризирующих функциях, получим итерационные задачи для определения этих слагаемых. Главный член асимптотики имеет вид:

$$u_{gl}(x,t)=\frac{1}{\varepsilon}[\int\limits_0^t \frac{h(0,\tau)}{\sqrt{\cos 2(t-\tau)}}e^{-\frac{ix^2 tg\, 2(t-\tau)}{2\varepsilon}}d\tau+$$

$$+x\int\limits_0^t \frac{\frac{\partial h(0,\tau)}{\partial x}}{\sqrt{\cos 2(t-\tau)}^3}e^{-\frac{ix^2 \operatorname{tg} 2(t-\tau)}{2\varepsilon}}d\tau]+\frac{1}{\sqrt{\cos 2t}}[f(\frac{x}{\cos 2t})-$$

$$-h_0(\frac{x}{\cos 2t},0)]e^{-\frac{ix^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon}}+\int\limits_0^t \frac{\frac{\partial h_0(0,\tau)}{\partial \tau}}{\sqrt{\cos 2(t-\tau)}}e^{-\frac{ix^2 \operatorname{tg} 2(t-\tau)}{2\varepsilon}}d\tau-$$

$$-x\int\limits_0^t \frac{\frac{\partial^2 h_0}{\partial\tau\partial x}(0,\tau))}{\sqrt{\cos 2(t-\tau)}^3}e^{-\frac{ix^2 \operatorname{tg} 2(t-\tau)}{2\varepsilon}}d\tau+\frac{h(x,t)-h(0,t)-x\frac{\partial h}{\partial x}(0,t)}{x^2}.$$

где $h_0(x,t)$–гладкая функция $h_0(x,t)=\frac{h(x,t)-h(0,t)-x\frac{\partial h}{\partial x}(0,t)}{x^2}$.

Теорема *Оценка остаточного члена.* Пусть выполнены:

1. $\forall\ k\ h^{(k)}(x,t)\in L_1\bigcap C^{\infty}(0,+\infty)\times[0,T]$;
2. $\forall\ k\ f^{(k)}(x)\in L_1\bigcap C^{\infty}(0,+\infty)\times[0,T]$

$$\forall(x,t)\in(-\infty,+\infty)\times[0,T]\,\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0].$$

Тогда $\exists C>0\,|R_N(x,t,\varepsilon)|\leqslant C\,\forall(x,t)\in(-\infty,+\infty)\times[0,T]\,\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

Литература

1. Eliseev A.G. Asymptotic integration of singularly perturbed problems / A.G. Eliseev, S.A. Lomov // Londun Mathematical Society. Russ. Math. Surveys. — 1988. — V. 43. P. 1–63.

2. Елисеев А.Г. Пример решения сингулярно возмущенной задачи Коши для параболического уравнения при наличии «сильной» точки поворота / А.Г. Елисеев // Диффенц. уравнения и процессы управления. — 2022. — № 3. С. 46–59.

3. Yeliseev A. Regularized Asymptotics of the Solution of the Singularly Perturbed First Boundary Value Problem on the Semiaxis for a Parabolic Equation with a Rational «Simple» Turning Point / A. Yeliseev, T. Ratnikova, D. Shaposhnikova // Mathematics. — 2021. — № 9. — 405 p. `doi.org/10.3390/math9040405`.

4. Елисеев А.Г. Сингулярно возмущенная задача Коши при наличии «слабой» точки поворота первого порядка у предельного оператора с кратным спектром / А.Г. Елисеев, П.В. Кириченко // Диффенц. уравнения. — 2022. — Т. 58. № 6. — С. 733–746. doi.org/10.31857/S0374064122060024.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ НА ПОЛУОСИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ПРИ НАЛИЧИИ СИЛЬНОЙ ТОЧКИ ПОВОРОТА[1]

А.Г. Елисеев, П.В. Кириченко (Москва, НИУ «МЭИ»)
yeliseevag@mpei.ru, kirichenkopv@mpei.ru

Типичными физическими примерами сингулярно возмущенных задач являются уравнение Навье–Стокса с малой вязкостью и уравнение Шредингера, если постоянную Планка $\hbar$ считать малой величиной. Формальный предельный переход $\hbar \to 0$ в соотношениях квантовой теории осуществляет переход от квантовой к классической механике (см., например, [1], § 6), поэтому в тех случаях, когда целесообразно искать приближенные (по малому $\hbar$) решения уравнения Шредингера, говорят о квазиклассическом приближении. Описанный квазиклассический переход в нестационарном уравнении Шредингера в координатном представлении на полуоси с гамильтонианом $\hat{H}(p,x) = \hat{p}^2 + \hat{x}$ порождает сингулярно возмущенную задачу, асимптотическому интегрированию методом регуляризации С.А. Ломова [2] которой посвящены наши исследования. Рассматривается задача (будем использовать обозначение ε вместо $\hbar$, что является более естественным в теории сингулярных возмущений):

$$\begin{cases} i\varepsilon \dfrac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xu = h(x,t), \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < t \leqslant T, \\ u(x,0) = f(x), \quad u(0,t) = \psi(t), \quad \psi(0) = f(0), \end{cases} \tag{1}$$

где выполнены условия:

1) $\forall\ k\ h^{(k)}(x,t) \in L_1 \bigcap C^\infty(0,+\infty) \times [0,T]$;

2) $\forall\ k\ f^{(k)}(x) \in L_1 \bigcap C^\infty(0,+\infty) \times [0,T]$.

[1] Результаты Елисеева А. Г. были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF–2023–0012).

Для наглядного представления о виде особенности в поставленной задаче следует перейти к матричной форме записи:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - i\varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix},$$

здесь введена замена $\varepsilon \cdot \partial u/\partial x = v$. Тогда матрица предельного оператора имеет вид:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Теперь легко заметить, что матрица (2) диаганолизируема и имеет гладкий базис из собственных векторов при $x \neq 0$, а в точке пересечения собственных значений (т.е при $x = 0$) соответствующий ей предельный оператор меняет диагональную структуру на жорданову и базис из собственных векторов теряет гладкость по x. Согласно принятой в работах Елисеева А.Г. и его учеников классификации (см., например, работы [3], [4]), такая спектральная особенность представляет собой сильную точку поворота.

В общем случае регуляризирующие функции необходимо строить, опираясь на каноническую форму предельного оператора (см.,например, работу [5]) и соответсвующий базис из собственных векторов, но в предложенной задаче оператор уже имеет каноническую форму и в соответсвующих построениях нет необходимости. Более того, необходимо произвести регуляризацию правой части $h(x,t)$, т.к. оператор $A(x)$ в точке $x = 0$ необратим, и описать пограничный слой обусловленной этой точкой. Можно показать, что сформулированные задачи по регуляризации соответственно решает регуляризирующая функция

$$e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon}, \text{ где } \varphi(x,t) = t \cdot \Big(x + \frac{t^2}{3}\Big),$$

и два дополнительных регуляризирующих оператора

$$\hat{\sigma}(x,t,\varepsilon)(\cdot) = \int\limits_0^t d\tau(\cdot) \exp\Big(- \frac{i\varphi(x,t-\tau)}{\varepsilon}\Big),$$

и

$$\hat{\chi}(\cdot) = \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int\limits_0^t d\tau(\cdot) \left(\sqrt{t-\tau} + \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}}\right) \cdot$$
$$\cdot \exp\left(-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon} + \frac{i(t-\tau)}{4\varepsilon}\left(t-\tau-\frac{x}{t-\tau}\right)^2\right).$$

Действие указанных операторов на произвольную функцию $f(t)$ запишутся как свёртки:

$$\hat{\sigma}(f(t)) = f(t) * \exp\Big(-\frac{it}{\varepsilon}\cdot\big(x+\frac{t^2}{3}\big)\Big),$$
$$\hat{\chi}(f(t)) = f(t) * \left(\frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon}}\left(\sqrt{t}+\frac{x}{t^{3/2}}\right)\cdot\exp\left(-\frac{it^3}{3\varepsilon}+\frac{it}{4\varepsilon}\left(t-\frac{x}{t}\right)^2\right)\right),$$

а основными свойствами, которые можно установить непосредственным вычислением, являются следующие:

$$L_\varepsilon\hat{\sigma}(f(t)) = i\varepsilon f(t), \quad L_\varepsilon\hat{\chi}\left(f(t)\right) = 0, \quad \hat{\chi}\left(f(t)\right)\Big|_{x=0} = f(t),$$
$$\text{где} \quad L_\varepsilon \equiv i\varepsilon\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - x. \tag{3}$$

Тогда решение задачи (1) следует искать в виде:

$$u(x,t,\varepsilon) = e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\upsilon_k(x,t)\cdot\varepsilon^k + \sum_{k=-1}^{\infty}\hat{\sigma}(z_k(t))\cdot\varepsilon^k +$$
$$+\sum_{k=-1}^{\infty}\hat{\chi}(y_k(t))\cdot\varepsilon^k + \sum_{k=0}^{\infty}\omega_k(x,t)\cdot\varepsilon^k. \tag{4}$$

Подставляя ряд (4) в задачу (1) и учитывая свойства (3) введенных операторов, собираем слагаемые перед регуляризирующей функцией и без неё. Таким образом получим серии итерационных задач по степеням ε, разрешая которые, можно найти любой член ряда (4).

Теорема. Об оценке остатка (асимтотическая сходимость).

Пусть дана смешанная задача (1) и выполнены условия 1), 2). Тогда верна оценка

$$\Bigg\| u(x,t,\varepsilon) - e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon}\sum_{k=0}^{n}\upsilon_k(x,t)\cdot\varepsilon^k - \sum_{k=-1}^{n}\hat{\sigma}(z_k(t))\cdot\varepsilon^k -$$
$$-\sum_{k=-1}^{n}\hat{\chi}(y_k(t))\cdot\varepsilon^k - \sum_{k=0}^{n}\omega_k(x,t)\cdot\varepsilon^k\Bigg\|_{C(\mathbf{R}\times[0,T])} \leqslant \mathbb{C}\cdot\varepsilon^{n+1},$$

где $\mathbb{C} \geqslant 0$ — *константа, не зависящая от* ε, *а* $\upsilon_k(x,t), z_k(t), y_k(t), \omega_k(x,t)$ *получены из решения итерационных задач при* $-1 \leqslant k \leqslant n+1$.

Главный член асимптотики:

$$u_{\text{гл.}}(x,t,\varepsilon) = \frac{i}{\varepsilon}\Bigg[-\int\limits_0^t d\tau \cdot h(0,\tau) \cdot e^{-i\frac{(t-\tau)\left(x+(t-\tau)^2/3\right)}{\varepsilon}} +$$
$$+\int\limits_0^t d\tau \cdot e^{-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon}} \cdot h(0,\tau) \cdot \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}\right)\Bigg] +$$
$$+\int\limits_0^t d\tau \cdot \left.\frac{\dot h(x,\tau) - \dot h(0,\tau)}{x}\right|_{x=0} \cdot e^{-i\frac{(t-\tau)}{\varepsilon}\left(x+\frac{(t-\tau)^2}{3}\right)} +$$
$$+\Bigg[\psi(t) - e^{-\frac{it^3}{3\varepsilon}} \cdot \left(f(t^2) + \frac{h(t^2,0)-h(0,0)}{t^2}\right) + \left.\frac{h(x,t)-h(0,t}{x}\right|_{x=0} -$$
$$-\int\limits_0^t d\tau \cdot e^{-\frac{-i(t-\tau)^3}{3\varepsilon}} \cdot \left.\frac{\dot h(x,\tau) - \dot h(0,\tau)}{x}\right|_{x=0}\Bigg] \cdot \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}\right) +$$
$$+e^{-\frac{it\left(x+t^2/3\right)}{\varepsilon}} \cdot \left(f(x+t^2) + \frac{h(x+t^2,0)-h(0,0)}{x+t^2}\right) -$$
$$-\frac{h(x,t)-h(0,t)}{x} + \underline{O}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right),$$

здесь введено обозначение $\operatorname{ierfc}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int\limits_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot e^{iz^2}$.

Литература

1. Ландау Л.Д. Курс теоретической физики, Т. 3, Квантовая механика (нерелятивистская теория) / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц // М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 800 с.

2. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С.А. Ломов // М. : Наука, 1981. — 400 с.

3. Елисеев А.Г. О регуляризованной асимптотике решения задачи Коши при наличии слабой точки поворота у предельного оператора / А.Г. Елисеев // Матем. сб. — 2021. — Т. 212, № 10. — С. 76–95.

4. Елисеев А.Г. Пример решения сингулярно возмущенной задачи Коши для параболического уравнения при наличии сильной точки поворота / А.Г. Елисеев // Дифф. уравн. и проц. управл. — 2022. № 3. — С. 46–59.

5. Арнольд В.И. О матрицах, зависящих от параметров. / В.И. Арнольд // УМН, — 1971, — Т. 26, № 2(158), — С. 101–114.

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННАЯ ЗАДАЧА НА ПОЛУОСИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С $Q(x) = X^2$ ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

А.Г. Елисеев, Т.А. Ратникова, Д.А. Шапошникова
(Москва, МЭИ)
predikat@bk.ru, ratnikovata@mpei.ru, shaposhnikovda@mpei.ru

Данная работа посвящена развитию метода регуляризации на сингулярно возмущенную задачу Коши для параболического уравнения с «сильной» точкой поворота первого порядка у предельного оператора. Метод регуляризации классифицирует три группы точек поворота:

1. «Простая» точка поворота — собственные значения предельного оператора изолированы друг от друга, одно собственное значение в отдельных точках t обращается в нуль [1, 3].

2. «Слабая» точка поворота — хотя бы одна пара собственных значений пересекаются в отдельных точках t, но при этом предельный оператор сохраняет диагональную структуру вплоть до точек пересечения. Базис из собственных векторов остается гладким по t [4].

3. «Сильная» точка поворота — хотя бы пара собственных значений пересекаются в отдельных точках t, но при этом предельный оператор меняет диагональную структуру на жорданову в точках пересечения. Базис в точках пересечения теряет гладкость по t [2].

Постановка задачи. *Рассмотрим задачу*

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 u + h(x,t), \\ u(x,0) = f(x), \\ u(x,t) = \psi(t), f(0) = \psi(0), \quad t \in [0,T], \quad 0 \leqslant x < +\infty \end{cases} \tag{1}$$

с условиями:

$$1) \exists M > 0 \forall k |h^{(k)}(x,t)| < M, h(x,t) \in C^\infty(0,+\infty) \times [0,T];$$
$$2) \exists M > 0 \forall k |f^{(k)}(x)| < M, f(x) \in C^\infty(0,+\infty).$$

[1] Результаты А. Г. Елисеева были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF–2023–0012)

В случае задачи (1) регуляризирующая функция, описывающая временной пограничный слой имеет вид:

$$e^{-\frac{x^2 th2t}{2\varepsilon}}$$

Дополнительные регуляризирующие сингулярные операторы, связанные с точечной необратимостью предельного оператора, строятся с помощью фундаментального решения [5]. Задача их вложить правую часть уравнения в образ предельного оператора. Фундаментальное решение уравнения (1) согласно работе [5] имеет вид:

$$K(x,\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \mathrm{sh}\, 2t}} exp\left[-\left(\mathrm{cth}\, 2t\frac{x^2+\xi^2}{2\varepsilon} + \frac{x\xi}{\varepsilon \mathrm{sh}\, 2t}\right)\right].$$

Сингулярные интегральные операторы для регуляризации правой части задачи получим, если проинтегрировать ядро Мелера по переменной ξ. Тогда получим:

$$\sigma_0(x,t,\varepsilon)(f(t)) = \int_0^t (f(\tau))d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} K(x,\xi,t-\tau)d\xi =$$
$$= \int_0^t (f(\tau))\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\, 2(t-\tau)}} e^{-\frac{x^2 \mathrm{th}\, 2(t-\tau)}{2\varepsilon}} d\tau,$$

$$\sigma_1(x,t,\varepsilon)(f(t)) = \int_0^t (f(\tau))d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \xi K(x,\xi,t-\tau)d\xi =$$
$$= x\int_0^t (f(\tau))\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\, 2(t-\tau)}^3} e^{-\frac{x^2 \mathrm{th}\, 2(t-\tau)}{2\varepsilon}} d\tau.$$

Сингулярный интегральный оператор для описания параболического пограничного слоя в точке $x=0$ имеет вид:

$$G(\Psi) = \int_0^t \Psi(\tau)W(x,t-\tau,\varepsilon)d\tau =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon \mathrm{th}\, 2t}}}^{\infty} \frac{\Psi\left(t - \frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{2b}{1-b}\right)\right)e^{-z^2}}{\sqrt[4]{1-b^2}} dz,$$

где $W(x,t,\varepsilon) = \dfrac{4x}{\sqrt{\varepsilon\pi}} \dfrac{e^{-\frac{x^2 \operatorname{cth} 2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{2\operatorname{sh} 2t}^3}$, $b = \dfrac{x^2}{2\varepsilon z^2}$. Регуляризованное решение задачи (1) ищем в виде

$$u(x,t,\varepsilon) = v(x,t,\varepsilon)e^{-\frac{x^2 th\, 2t}{2\varepsilon}} + G(\Psi(t,\varepsilon)) + \sigma_0(y(t,\varepsilon)) + \\ +\sigma_1(z(t,\varepsilon)) + w(x,t,\varepsilon). \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1) и выделив слагаемые при регуляризирующих функциях, получим итерационные задачи для определения этих слагаемых. Главный член асимптотики имеет вид:

$$u_{gl}(x,t) = \frac{1}{\varepsilon}[G(\Psi_{-1}(t)) + \int\limits_0^t \frac{h(0,\tau)}{\sqrt{\operatorname{ch} 2(t-\tau)}} e^{-\frac{x^2 th\, 2(t-\tau)}{2\varepsilon}} d\tau + \\ + x\int\limits_0^t \frac{\frac{\partial h(0,\tau)}{\partial x}}{\sqrt{\operatorname{ch} 2(t-\tau)}^3} e^{-\frac{x^2 \operatorname{th} 2(t-\tau)}{2\varepsilon}} d\tau] + \\ + \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} 2t}}[f(\frac{x}{\operatorname{ch} 2t}) - h_0(\frac{x}{\operatorname{ch} 2t}, 0)]e^{-\frac{x^2 \operatorname{th} 2t}{2\varepsilon}} + \\ + G(\Psi_0(t)) - \int\limits_0^t \frac{\frac{\partial h_0(0,\tau)}{\partial \tau}}{\sqrt{\operatorname{ch} 2(t-\tau)}} e^{-\frac{x^2 \operatorname{th} 2(t-\tau)}{2\varepsilon}} d\tau - \\ - x\int\limits_0^t \frac{\frac{\partial^2 h_0}{\partial\tau\partial x}(0,\tau))}{\sqrt{\operatorname{ch} 2(t-\tau)}^3} e^{-\frac{x^2 \operatorname{th} 2(t-\tau)}{2\varepsilon}} d\tau + \frac{h(x,t) - h(0,t) - x\frac{\partial h}{\partial x}(0,t)}{x^2}.$$

где $h_0(x,t)$–гладкая функция $h_0(x,t) = \frac{h(x,t)-h(0,t)-x\frac{\partial h}{\partial x}(0,t)}{x^2}$.

Теорема *(оценка остаточного члена). Пусть выполнены:*

1) *условия 1) и 2) для задачи Коши (1)*;
2) $\exists M > 0\, |H(x,t,\varepsilon)| \leqslant M\, \forall (x,t) \in (-\infty,+\infty)\times[0,T]\, \forall\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$;

Тогда $\exists C > 0\, |R_N(x,t,\varepsilon)| \leqslant C\, \forall (x,t) \in (-\infty,+\infty)\times[0,T]\, \forall\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

Литература

1. Eliseev A.G. Asymptotic integration of singularly perturbed problems / A.G. Eliseev, S.A. Lomov // Londun Mathematical Society. Russ. Math. Surveys. — 1988. — V. 43,. — P. 1–63.

2. Елисеев А.Г. Пример решения сингулярно возмущенной задачи Коши для параболического уравнения при наличии «сильной»

точки поворота/ А.Г. Елисеев // Диффенц. уравнения и процессы управления. — 2022. — № 3. — С. 46–59.

3. Eliseev A.G. Regularized Asymptotics of the Solution of the Singularly Perturbed First Boundary Value Problem on the Semiaxis for a Parabolic Equation with a Rational «Simple» Turning Point / A.G. Eliseev, T.A. Ratnikova, D.A. Shaposhnikova // Mathematics. — 2021. — № 9. — 405 p.

4. Елисеев А.Г. Сингулярно возмущенная задача Коши при наличии «слабой» точки поворота первого порядка у предельного оператора с кратным спектром / А.Г. Елисеев, П.В. Кириченко // Диффенц. уравнения. 2022. — Т. 58, № 6. — С. 733–746.

5. Mehler F.G. Ueber die Entwicklung einer Function von beliebig vielen Variablen nach Laplaceschen Functionen honerer Ordnung / F.G. Mehler // J. fur die Reine und Angewandte Mathematik. — 1866. — P. 161–176.

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ НЕЦЕЛОГО ПОРЯДКА[1]

Д.П. Емельянов (Москва, МГУ им. Ломоносова)
emelianov@cs.msu.ru

В области $\Omega = (0,1) \times (0,b)$ рассматривается следующая краевая задача Дирихле

$$\begin{cases} u''_{xx} + y^m u''_{yy} + c(y)u'_y - a(y)u = f(x,y), & (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) = 0, & (x,y) \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

где $m \in (1,2)$, а $a(y)$, $c(y)$, $f(x,y) \in A(G)$ как функции аргумента y, $[0,b] \subset G \subset \mathbb{C}$. Также мы предполагаем, что выполнены условия $c(0) = 0$ и $a(y) \geqslant 0, y \in [0,b]$ на коэффициенты уравнения.

Доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть правая часть* $f(x,y) \in C^1_y(\bar{\Omega})$, *при каждом фиксированном* $y \in (0,b)$ *принадлежит классу Гёльдера как функция*

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075–15–2022–284.

переменного x. Тогда существует классическое решение задачи (1), представимое в виде следующего ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} y^{n(2-m)}\cdot\psi_{k,n}(y)\right]\cdot\sin\pi kx,\quad (x,y)\in\bar{\Omega},$$

который сходится абсолютно и равномерно в $\bar{\Omega}$, функции $\psi_{k,n}(y)$ аналитичны в G, $\psi_{k,0}(0)=0$, внутренний ряд сходится в $A(G\setminus\{0\})$.

Литература

1. Келдыш М. В. О некоторых случаях вырожденных уравнений эллиптического типа на границе области / М.В. Келдыш // Доклады АН СССР. — 1951. — Т. 77, № 2. С. 181–183.

2. Емельянов Д. П. Эллиптические дифференциальные операторы с аналитическими коэффициентами и линейным вырождением / Д.П. Емельянов // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58, № 5. С. 607–627.

О ПОТОКАХ В СЕТЯХ СО СВЯЗАННЫМИ ДУГАМИ

Я.М. Ерусалимский, В.А. Скороходов,
В.А. Русаков (Ростов–на–Дону, ЮФУ)
ymerusalimskiy@sfedu.ru, vaskorohodov@sfedu.ru vrusakov@sfedu.ru

Понятие связанных дуг было введено сравнительно недавно в [1]. Непустое подмножество дуг сети называлось связанным, если для дуг этого подмножества заданы не пропускные способности каждой из них, а их общая (суммарная) пропускная способность. Сети со связанными дугами возникали естественным образом при построении разверток сетей с ограничениями на достижимость различных типов (см. [2], [3], [4]). В [5] было доказано, что в общем случае задача поиска максимального потока в сети со связанными дугами является NP–полной. Однако, для некоторых типов ограничений на достижимость задача нахождения максимального потока с помощью построения развертки — вспомогательной сети со связанными дугами — является задачей полиномиальной сложности ([5]). Существование таких задач приводит к вопросу о том, какие свойства сети со связанными дугами гарантируют полиномиальную сложность задачи нахождения максимального потока.

В данной работе демонстрируется влияние топологии сети со связанными дугами на возможность построения алгоритма полиномиальной сложности решения задачи о максимальном потоке. Определены два подкласса сетей: параллельные и древовидные сети. Построены алгоритмы проверки принадлежности сети к описанным классам.

На примерах решения задачи о максимальном потоке в сетях со связанными дугами показано, что не только топология сети в целом влияет на возможность построения алгоритма полиномиальной сложности, но и, в большей степени, взаимное расположение связанных между собою дуг. В классических потоковых задачах изменение величины потока по дуге оказывает влияние лишь на значение потока на достижимых из неё дугах (такое свойство потоков мы назвали локальностью). Наличие связанных дуг в сети влечет за собой потерю свойства локальности. Построены примеры, показывающие, что потеря этого свойства приводит к наличию во множестве допустимых потоков блокирующего, но не максимального потока. Самым простым классом сетей являются параллельные сети, но и для них задача нахождения максимального потока при наличии связанных дуг является полиномиальной только в случае, когда каждый из путей, ведущих из источника в сток содержит не более одной дуги из каждого множества связанных между собой дуг.

Литература

1. Ерусалимский Я.М. Потоки в сетях со связанными дугами / Я.М. Ерусалимский, В.А. Скороходов // Известия вузов. Северо–Кавказский регион. Ест. науки, Приложение №8. — 2003. — С. 9–12.

2. Ерусалимский Я.М. Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения / Я.М. Ерусалимский, В.А. Скороходов, М.В. Кузьминова, А.Г. Петросян // Ростов н/Д.: ЮФУ. — 2009. — 196 С.

3. Ерусалимский Я.М. Графы с вентильной достижимостью. Марковские процессы и потоки в сетях / Я.М. Ерусалимский, В.А. Скороходов // Известия вузов. Северо–Кавказский регион. Ест. науки. — 2003. — №3. — С. 3–5.

4. Ерусалимский Я.М. Многопродуктовые потоки в сетях с нестандартной достижимостью / Я.М. Ерусалимский, А.Г. Петросян // Известия вузов. Северо–Кавказский регион. Ест. науки. Приложение. — 2005. — №6. — С. 8–16.

5. Ерусалимский Я.М. NP–полнота задачи нахождения максимального потока в графах с дополнительными ограничениями на до-

стижимость / Я.М. Ерусалимский, Н.Н. Водолазов // Современные методы теории краевых задач: «Понтрягинские чтения — XXI». — Воронеж: ВГУ. — 2010. — (доп. выпуск) — С. 14–15.

ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ СОЗДАНИЯ ЭЛЕКТРОННОГО УЧЕБНИКА КАК СРЕДСТВА ОБУЧЕНИЯ[1]

Я.М. Ерусалимский, И.А. Шкурай (Ростов–на–Дону, ЮФУ)
ymerusalimskiy@sfedu.ru, shkuray@sfedu.ru

Активное внедрение информационных технологий в образовательную сферу изменило требования к учебнику как основному средству обучения. Электронный учебник может и должен стать не только носителем содержания, но и взять на себя некоторые функции, не свойственные классическому учебнику: контроль за усвоением его содержания и оценивание усвоения изученного. В докладе сравниваются зоны «ответственности» электронного и классического учебника в процессе трансляции знаний обучающимся. В связи с тем, что зона «ответственности» электронного учебника значительно шире, процесс его создания значительно более трудоемкий и требует параллельной разработки контента, и заложенных в учебник образовательных технологий. Выделяются следующие трудности, которые сопровождают процесс разработки электронного учебника. Во–первых, в создании электронного учебника задействовано большое количество специалистов, и автор содержания учебника должен взять на себя руководство работой всего коллектива и финансирование его деятельности, что представляется почти невозможным. Предполагается, что эти функции должны будут выполнять издательства. Во–вторых, возникают серьезные вопросы не столько технического или организационного, сколько экономического и правового характера. Что же ожидает в ближайшее время традиционный учебник? Предполагается, что электронные учебники будут создаваться как электронные версии лучших, хорошо себя зарекомендовавших классических учебников. В этом случае классический учебник можно рассматривать и как апробацию содержательной части будущего электронного учебника. Влияние же электронных учебников на традиционные в большей мере связано с формой изложения материала.

---

[1]

Литература

1. Беспалько В.П. Теория учебника / В.П. Беспалько. — М. : Педагогика, 1988. — 160 с. 2. Ерусалимский Я.М. Болонский учебник и наоборот / Я.М. Ерусалимский. — Ростов н/Д : Изд–во ЮФУ, 2010. — 188 с.

3. Ерусалимский Я.М. Современный учебник в меняющейся системе образования / Я.М. Ерусалимский. — Palmarium Academic Publishing, 2013. — 211 с.

4. Ерусалимский Я.М. Современный учебник математики и требования к нему / Я.М. Ерусалимский // Известия Южного федерального университета. Педагогические науки. — 2010. — № 1. — С. 41–49.

5. Ерусалимский Я.М. Современный учебник математики как элемент культуры / Я.М. Ерусалимский // Известия Южного федерального университета. Педагогические науки. — 2010. — № 3. — С. 69–75.

6. Ерусалимский Я.М. Развитие символьного языка линейной алгебры / Я.М. Ерусалимский // Известия Южного федерального университета. Педагогические науки. — 2015. — № 1. — С. 23–30.

7. Костенко И.П. Вузовский учебник: суть проблемы, корни. Статья первая / И.П. Костенко // Университетская книга. — 1997. — № 6. — С. 14–18.

8. Костенко И.П. Вузовский учебник: история реформы–60, результаты. Статья вторая / И.П. Костенко // Университетская книга. — 1997. — № 8. — С. 21–26.

9. Костенко И.П. Вузовский учебник: монополия антидидактики. Статья третья / И.П. Костенко // Университетская книга. — 1997. — № 9. — С. 32–35.

10. Полякова Т.С. История математического образования в России / Т.С. Полякова. — М. : Изд–во Московского ун–та, 2002. — 624 с.

11. Тупальский Н. И. Основные проблемы вузовского учебника / Н.И. Тупальский. // Минск : Вышэйшая шк., 1976. — 183 с.

МЕТОД ПОЛЕВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Д.С. Жалукевич (Белосток, БГУ)
den.zhal@yandex.by

Рассмотрим автономную систему 2–го порядка [1]:

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (x, y) \in G \subseteq \Re^2. \tag{1}$$

Введем обозначения

$$\vec{v} = \hat{T}\vec{r}, \quad \vec{a} = \hat{T}\vec{v}, \quad \vec{w} = \hat{T}\vec{a}, \tag{2}$$

где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\hat{T} = \dfrac{d}{dt} = \vec{v} \cdot \nabla$, $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j}$.
Дифференцируя систему (1) по времени, мы получаем систему

$$\ddot{x} = F_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}), \quad \ddot{y} = F_2(x, y, \dot{x}, \dot{y}), \tag{3}$$

где

$$F_1 = \dot{P} = \vec{v} \cdot \nabla P, \quad F_2 = \dot{Q} = \vec{v} \cdot \nabla Q. \tag{4}$$

Дифференцируя систему (3) по времени, мы получаем систему

$$\dddot{x} = \Phi_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}), \quad \dddot{y} = \Phi_2(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}), \tag{5}$$

где

$$\Phi_1 = \dot{F_1} = \ddot{P} = \vec{a} \cdot \nabla P + \vec{v} \cdot \nabla F_1, \quad \Phi_2 = \dot{F_2} = \ddot{Q} = \vec{a} \cdot \nabla Q + \vec{v} \cdot \nabla F_2. \tag{6}$$

Определитель произвольного порядка может быть записан через скобки Пуассона

$$J_k = det A_k = -\{P^{(k-1)}, Q^{(k-1)}\}, \tag{7}$$

где $P^{(0)} = P$, $Q^{(0)} = Q$, $P^{(k-1)} = \dfrac{d^{(k-1)}P}{dt^{(k-1)}}$, $Q^{(k-1)} = \dfrac{d^{(k-1)}Q}{dt^{(k-1)}}$, $k = \overline{1, n}$.

Теорема 1. *Для стационарного плоского поля системы (1) связи между первичной, вторичной и третичной матрицами имеют вид*

$$A_2 = A_1^2 + \vec{v} \cdot \nabla A_1, \tag{8}$$

$$A_3 = A_1A_2 + A_2A_1 + \vec{v}\cdot\nabla A_2 + \vec{a}\cdot\nabla A_1. \tag{9}$$

Введем обозначения

$$\sigma_1 = TrA_1 = \nabla\cdot\vec{v}, \quad \sigma_2 = TrA_2 = \nabla\cdot\vec{a}, \quad \sigma_3 = TrA_3 = \nabla\cdot\vec{w}, \tag{10}$$

$$\vec{\rho}_1 = \nabla\times\vec{v} = \rho_1\vec{k}, \quad \vec{\rho}_2 = \nabla\times\vec{a} = \rho_2\vec{k}, \quad \vec{\rho}_3 = \nabla\times\vec{w} = \rho_3\vec{k}, \tag{11}$$

где TrA_1, TrA_2 и TrA_3 являются следами первичной, вторичной и третичной матриц.
Потоки и циркуляции произвольного порядка связаны выражениями

$$\sigma_{k+1} = \sigma_k^{(1)} = \sigma_1^{(k)}, \quad \rho_{k+1} = \rho_k^{(1)} = \rho_1^{(k)}, \tag{12}$$

где $\sigma_1^{(k)} = \dfrac{d^{(k)}\sigma_1}{dt^{(k)}}, \rho_1^{(k)} = \dfrac{d^{(k)}\rho_1}{dt^{(k)}}, k = \overline{1,n}.$

Характеристические уравнения для первичной, вторичной и третичной матриц имеют вид

$$\lambda_{kl}^2 - \sigma_k\lambda_{kl} + J_k = 0, \quad D_k = \sigma_k^2 - 4J_k, \tag{13}$$

где $k = \overline{1,3}, l = \overline{1,2}.$

Теорема 2. *Для стационарного плоского поля системы (1) соотношения между первичными, вторичными и третичными характеристиками поля имеют вид [2]*

$$\sigma_2 = \sigma_1^2 - 2J_1 + \vec{v}\cdot\nabla\sigma_1, \tag{14}$$

$$\rho_2 = \sigma_1\rho_1 + \vec{v}\cdot\nabla\rho_1, \tag{15}$$

$$\sigma_3 = 2\sigma_1\sigma_2 - 2\dot{J}_1 + \vec{a}\cdot\nabla\sigma_1 + \vec{v}\cdot\nabla\sigma_2, \tag{16}$$

$$\rho_3 = \sigma_2\rho_1 + \sigma_1\rho_2 + \vec{a}\cdot\nabla\rho_1 + \vec{v}\cdot\nabla\rho_2, \tag{17}$$

где

$$\dot{J}_1 = \sigma_1 J_1 + \vec{v}\cdot\nabla J_1.$$

Литература

1. Андронов А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов., А.А. Витт, С.Э. Хайкин. // М. : Наука. — 1981. — 568 с.

2. Матвеев А.Н. Электродинамика и теория относительности / А.Н. Матвеев. // М. : Высшая школа. — 1964. — 424 с.

РЕДУКЦИЯ НЕКОТОРЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Д.С. Жалукевич (Белосток, БГУ)
den.zhal@yandex.by

Рассмотрим эволюционные уравнения k–го порядка:

$$u_t + A_0(t,x,u) + \sum_{i=1}^{k} A_i(t,x,u)u_{ix} = 0, \tag{1}$$

где $u_{ix} = \dfrac{\partial^i u}{\partial x^i}, k = 2, 3, 4.$
Обратимые преобразования для эволюционных уравнений (1) имеют вид [1–4]

$$\widetilde{t} = \varphi(t,x,u,\varepsilon), \quad \widetilde{x} = \psi(t,x,u,\varepsilon), \quad \widetilde{u} = \chi(t,x,u,\varepsilon), \tag{2}$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}$, причем

$$\varphi(t,x,u,0) = t, \quad \psi(t,x,u,0) = x, \quad \chi(t,x,u,0) = u. \tag{3}$$

Построение группы симметрии эквивалентно определению ее инфинитезимальных преобразований

$$\begin{array}{ll} \widetilde{t} = t + \varepsilon\tau(t,x,u) + ..., & \widetilde{x} = x + \varepsilon\xi(t,x,u) + ..., \\ \widetilde{u} = u + \varepsilon\eta(t,x,u) + ..., & \end{array} \tag{4}$$

где

$$\begin{array}{ll} \tau(t,x,u) = \dfrac{\partial\varphi(t,x,u,0)}{\partial\varepsilon}, & \xi(t,x,u) = \dfrac{\partial\psi(t,x,u,0)}{\partial\varepsilon}, \\ \eta(t,x,u) = \dfrac{\partial\chi(t,x,u,0)}{\partial\varepsilon}. & \end{array} \tag{5}$$

Теорема 1. *Для уравнения (1) преобразования симметрии (2) имеют вид*

$$\widetilde{t} = \varphi(t,\varepsilon), \quad \widetilde{x} = \psi(t,x,\varepsilon), \quad \widetilde{u} = \chi(t,x,u,\varepsilon), \tag{6}$$

это означает, что можно искать инфинитезимальные симметрии в форме

$$X = \tau(t)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t,x)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{7}$$

где

$$\eta = b(t,x)u + c(t,x). \tag{8}$$

Среди уравнений (1) найдены следующие уравнения, которые могут быть редуцированны:

$$u_t + u^n u_x + f(t,x)u_{kx} = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

$$u_t + u^n u_x + (f(t,x)u)_{kx} = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

$$u_t + u^n u_x + f(t,x)u_{xx} + g(t,x)u_{xxx} + h(t,x)u_{xxxx} = 0, \tag{11}$$

$$u_t + u^n u_x + (f(t,x)u)_{xx} + (g(t,x)u)_{xxx} + (h(t,x)u)_{xxxx} = 0, \tag{12}$$

$$u_t + q(t,x)u^n u_x + u_{kx} = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

$$u_t + (q(t,x)u^{n+1})_x + u_{kx} = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

Литература

1. Hydon P.E. Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginner's Guide / P.E. Hydon. // New York. : Cambridge University Press. — 2000. — 213 p.

2. Ibragimov N.H. Transformation Groups Applied to Mathematical Physics / N.H. Ibragimov. // U.S.A. : Springer. — 1985. — 394 p.

3. Ovsiannikov L.V. Group Analysis of Differential Equations / L.V. Ovsiannikov. // New York : Academic. — 1982. — 399 p.

4. Olver P.J. Applications of Lie Groups to Differential Equations / P.J. Olver. // New York : Springer–Verlag. — 1993. — 501 p.

РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ПОДСТАНОВКИ

Д.С. Жалукевич (Белосток, БГУ)

den.zhal@yandex.by

Рассмотрим алгебраическое уравнение степени n [1–3]:

$$y = f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0, \quad a_n \neq 0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

которое на плоскости oxy задает некоторый график функции, а решением его есть нахождение точек пересечения графика функции с осью ox или нахождение нулей функции.

Введем замену переменных $x = \varphi(t)$, которая при подстановке в уравнение (1) преобразует наш график функции $y = f(\varphi(t)) = g(t)$. Перейдя в новое двумерное пространство с координатами t, y, решение уравнения (1) будем искать там.
Замену переменных выберем так чтобы уравнение в новых переменных имело полиномиальный вид

$$y = g(t) = \sum_{i=0}^{k} b_i t^i = 0, \quad b_k \neq 0. \tag{2}$$

В данной работе будут использоваться замены следующего вида:
1. Полиномиальная

$$x = \sum_{i=0}^{m} c_i t^i; \tag{3}$$

2. Лорана

$$x = \sum_{i=-m}^{m} c_i t^i; \tag{4}$$

3. Дробно–рациональная

$$x = \frac{\sum_{i=0}^{m} c_i t^i}{\sum_{i=0}^{m} d_i t^i}. \tag{5}$$

Отсюда видно что, для замен (3) и (4) коэффициенты b_i уравнения (2) зависят от коэффициентов a_i, c_i, а для замены (5) от коэффициентов a_i, c_i, d_i.
Сформулируем пару теорем которые в дальнейшем будут полезны при решении алгебраических уравнений.

Теорема 1. *Коэффициенты уравнения (2) для замены переменных*

$$x = c_0 + c_1 t, \tag{6}$$

имеют вид

$$b_k = c_1^k \frac{f^{(k)}(c_0)}{k!}, \quad f^{(k)}(c_0) = \frac{d^k f(c_0)}{dc_0^k}. \tag{7}$$

Если положить $c_0 = -\dfrac{a_{n-1}}{na_n}$ *в (6), то* $b_{n-1} = 0$.

Теорема 2. *Коэффициенты уравнения (2), где* $g(t) = t^{-2n} \sum_{i=0}^{k} b_i t^i$ *для замены переменных*

$$x = c_{-1} t^{-1} + c_0, \tag{8}$$

имеют вид

$$b_k = c_{-1}^{n-k}\frac{f^{(n-k)}(c_0)}{(n-k)!}, \quad f^{(n-k)}(c_0) = \frac{d^{n-k}f(c_0)}{dc_0^{n-k}}. \tag{9}$$

Если положить $c_0 = -\dfrac{a_{n-1}}{na_n}$ *в (8), то* $b_1 = 0$.

Литература

1. Васильев А.В. Высшая алгебра: конспект лекций / А.В. Васильев, Д.В. Лыткина, В.Д. Мазуров. // Новосибирск. : Издательство Института Математики. — 2020. — 252 с.

2. Белый Е.К. Алгебраические уравнения: учебное пособие для абитуриентов и студентов первого курса / Е.К. Белый, Ю.А. Дорофеева. // Петрозаводск. : Издательство ПетрГУ. — 2015. — 240 с.

3. Jean–Pierre Tignol. Galois' Theory of Algebraic Equations / Jean–Pierre Tignol. // Belgium. : World Scientific Publishing Company. — 2001. — 348 p.

О РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО–КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ДИНИ–НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

И.В. Женякова, М.Ф. Черепова (Москва, НИУ «МЭИ»)

zheniakovaiv@mpei.ru , cherepovamf@mpei.ru

В полосе $D = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)\}$, $0 < T < +\infty$, рассматривается равномерно–параболический по Петровскому матричный оператор

$$Lu = \partial_t u - \sum_{l=0}^{2} A_l(x,t)\partial_x^l u,\ u = (u_1 \ldots u_m),\ m \geqslant 1,$$

где $A_l = \|a_{ij}^l\|_{i,j=1}^m$ — матрицы, элементы которых есть вещественные функции, определенные в $\overline{D}$ и удовлетворяющие условиям:

а) собственные числа μ_r матрицы A_2 подчиняются неравенству $Re\mu_r(x,t) \geqslant \delta_0$ для некоторого $\delta_0 > 0$ и всех $(x,t) \in \overline{D}$, $r = \overline{1,m}$;

б) функции a_{ij}^l, $i,j = \overline{1,m}$, $l = 0,1,2$, ограничены в $\overline{D}$;

[1] Результаты работы получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF–2023–0012).

в) $|a^l_{ij}(x+\Delta x, t+\Delta t) - a^l_{ij}(x,t)| \leqslant \omega_0(|\Delta x| + |\Delta t|^{1/2})$, $i,j=\overline{1,m}$, $l=0,1,2$, где модуль непрерывности ω_0 удовлетворяет дважды условию Дини и для некоторого $\varepsilon_0 \in (0,1)$ функция $\omega_0(z)z^{-\varepsilon_0}$, $z>0$, почти убывает (см. определения в [1]).

В D выделяется полуограниченная область $\Omega = \{(x,t) : x > g(t), 0 < t < T\}$ с негладкой, вообще говоря, боковой границей $\Sigma = \{(x,t) \in \overline{\Omega} : x = g(t)\}$. Пусть для функции g выполнено условие

$$|g(t+\Delta t) - g(t)| \leqslant K|\Delta t|^{1/2}\omega_1(|\Delta t|^{1/2}),\ t, t+\Delta t \in [0,T], \qquad (1)$$

где модуль непрерывности ω_1 удовлетворяет условию Дини и для некоторого $\varepsilon_1 \in (0,1)$ функция $\omega_1(z)z^{-\varepsilon_1}$, $z>0$, почти убывает.

Пусть P — параболическая граница Ω, $\delta(x,t) = \inf\limits_{(\xi,\tau)\in P, \tau\leqslant t}\{|x-\xi|+|t-\tau|^{1/2}\}$ — параболическое расстояние от точки $(x,t)\in\Omega$ до P, ω — модуль непрерывности. Обозначим через $C^0_\omega(\Omega)$ пространство непрерывных вектор–функций $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, для которых конечна величина

$$\|f;\Omega\|^0_\omega = \sup_{\Omega}\left\{\left[\frac{\omega(\delta(x,t))}{\delta(x,t)} + 1\right]^{-1} f(x,t)\right\}.$$

В области Ω рассмотрим задачу отыскания классического решения первой начально–краевой задачи:

$$Lu = f \text{ в } \Omega,\ u(x,0) = 0,\ x \geqslant g(0),\ u(g(t),t) = \psi(t),\ t \in [0,T]. \qquad (2)$$

Пусть для вектор–функций f и ψ выполнены условия:

1) $f \in C^0_\omega(\Omega)$, где модуль непрерывности ω удовлетворяет дважды условию Дини и для некоторого $\varepsilon \in (0,1)$ функция $\omega(z)z^{-\varepsilon}$, $z>0$, почти убывает;

2) f локально Дини–непрерывна по x в Ω с модулем непрерывности, удовлетворяющим условию Дини;

3) $\psi \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$ (см. определение пространства в [1]).

Теорема. *Пусть для коэффициентов оператора L выполнены условия а)–в) и для боковой границы Σ — условие (1). Тогда для любых вектор–функций f и ψ, удовлетворяющих условиям 1)–3), существует (единственное) решение $u \in \underset{0}{C}^{1,0}(\Omega)$ задачи (2) и выполнена оценка*

$$\|u;\Omega\|^{1,0} \leqslant C(\|f;\Omega\|^0_\omega + \|\psi;[0,T]\|^{1/2}).$$

Замечание. Утверждение теоремы при $f \equiv 0$ получено в [1]. Единственность решения задачи (2) установлена в [2].

Аналогичное утверждение справедливо для второй начально–краевой задачи

$Lu = f$ в Ω, $u(x,0) = 0$, $x \geqslant g(0)$, $\partial_x u(g(t),t) = \Theta(t)$, $t \in [0,T]$, с граничной функцией $\Theta \in \underset{0}{C}[0,T]$.

Литература

1. Baderko, E.A., Cherepova, M.F. Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients / E.A. Baderko, M.F. Cherepova // Appl. Anal. — 2021. — Vol. 100. № 13, Pp. 2900–2910.

2. Бадерко Е. А., Сахаров С. И. Единственность решений начально–краевых задач для параболических систем с Дини–непрерывными коэффициентами в плоских областях / Е. А. Бадерко, С. И. Сахаров // ДАН. Математика, Информатика, процессы управления. — 2022. — Т. 503. С. 26–29.

ЭТА–ИНВАРИАНТЫ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ С ПАРАМЕТРОМ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ДЕЙСТВИЕМ ДИСКРЕТНОЙ ГРУППЫ[1]

К.Н. Жуйков, А.Ю. Савин (Москва, РУДН)
zhuykovcon@mail.ru

В работе исследуются эта–инварианты для класса нелокальных операторов с параметром, ассоциированных с изометрическим действием дискретной группы степенного роста на гладком замкнутом многообразии.

Пусть X—гладкое замкнутое риманово многообразие, а Γ—подгруппа группы изометрий многообразия X. Будем предполагать, что Γ является группой полиномиального роста в смысле Громова [1]. Через $\Psi_p^m(X)$ обозначим пространство классических псевдодифференциальных операторов (ПДО) с параметром $p \in \mathbb{R}$ (см. напр., [2]), порядка $\leqslant m$. На X рассматриваются семейства операторов вида

$$D(p) = \sum_{(\gamma,k)\in\Gamma\times\mathbb{Z}} D_{\gamma,k}(p) T_\gamma e^{2\pi i k p} \colon C^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X), \qquad (1)$$

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке конкурса «Молодая математика России», а также РФФИ и Немецкого научно-исследовательского сообщества (проект № 21–51–12006).

где $D_{\gamma,k} \in \Psi_p^m(X)$, а $T_\gamma u(x,p) = u(\gamma^{-1}(x),p)$—представление группы Г операторами сдвига, индуцированное действием на X. Используя подход Мельроуза, аналогично работе [3], мы определяем η–инвариант обратимого семейства операторов (1) как некоторую регуляризацию числа вращения и устанавливаем его основные свойства. В частности, доказано, что η–инвариант обладает логарифмическим свойством, а также получена формула для производной η–инварианта семейства операторов по параметру.

Литература

1. M. Gromov. Groups of polynomial growth and expanding maps / M. Gromov. — Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. — 1981. — Vol. 53. — P. 53–78.

2. М.А. Шубин. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория / М.А. Шубин. — М. : Наука, 1978. — 280 с.

3. К.Н. Жуйков. Эта–инвариант для семейств с параметром и периодическими коэффициентами / К.Н. Жуйков, А.Ю. Савин // Уфимск. матем. журн. — 2022. — Т. 14, № 2. — С. 37–57.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С МАЛОЙ ДИФФУЗИЕЙ В СЛУЧАЕ МНОГИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ[1]

А.В. Заборский, А.В. Нестеров

(Москва, РЭУ им. Г.В. Плеханова; Обнинск, ООО «РАДИКО»)

andrenesterov@yandex.ru

Строится асимптотика решения (АР) задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциально–операторного уравнения

$$\varepsilon^2(U_t + \sum_{i=1}^{m} D_i(p)U_{x_i}) = L_pU + \varepsilon F(U,p) + \varepsilon^3 \sum_{i=1}^{m} B_i(p)U_{x_ix_i}, \qquad (1)$$

$$U(\bar{x},0,p) = \omega\left(\bar{x}\varepsilon^{-1}, p\right) \qquad (2)$$

[1] Данное исследование выполнено в рамках государственного задания в сфере научной деятельности Министерства науки и высшего образования РФ на тему «Модели, методы и алгоритмы искусственного интеллекта в задачах экономики для анализа и стилизации многомерных данных, прогнозирования временных рядов и проектирования рекомендательных систем», проект № FSSW–2023–0004.

$0 < \varepsilon << 1$, линейный оператор L_p, действующий по переменной p, имеет однократное нулевое собственное значение $\lambda = 0, \forall\lambda \neq 0$ $Re\lambda < 0$; начальные условия имеют вид узкой «шапочки»

$|\omega^{(k)}(\bar{z}, p)| \leqslant Ce^{-\sigma\|\bar{z}\|^2}, \sigma > 0, \forall k = 0, 1, \ldots$. Настоящая работа является продолжением работ [1] , [2].

АР задачи (1)–(2) построено в виде

$$U(\bar{x}, t, p, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i (s_i(\bar{\zeta}, t, p) + p_i(\bar{\xi}, \tau, p)) + R = U_N + R \qquad (3)$$

переменные $\bar{\xi}$, τ, $\bar{\zeta}$ выражаются через данные задачи. Получены задачи для определения всех членов разложения (3). При определенных условиях на функции $D_i(p), B_i(p)$, главный член АР описывается уравнением типа обобщенного на многомерное пространство уравнения БКдФ.

Литература

1. Нестеров А.В. Об одном эффекте влияния малой взаимной диффузии на процессы переноса в многофазной среде. / А. В. Нестеров // Журнал выч. матем. и матем физики, — 2021. — Т.61. №3. — С. 519–528.

2.Заборский А.В. Об асимптотике решения задачи Коши для сингулярно возмущенного диференциально–операторного уравнения переноса с малой диффузией. / А.В. Заборский , А.В. Нестеров // Журнал выч. матем. и матем физики, — 2023. —Т.63. №2. — С. 273–281.

3. Васильева А.Б. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях / А.Б. Васильева , В.Ф. Бутузов // М. : Изд–во МГУ. — 1978, — 262 с.

ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИИ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ[1]

Н.С. Задорожная (Ростов–на–Дону, РГУПС)

simon@sfedu.ru

Как известно, изучение магнитно–динамических волн в геофизике, астрофизике, металлургии, ядерной энергетике представляет большой интерес. Как правило, в моделях гидродинамики жидкость

[1]

описывается как сплошная среда, без учета микроскопического строения. Рассмотрим постановку задачи движения электропроводящей идеальной жидкости в магнитном поле. В МГД жидкость называется идеальной, если не обладает внутренним молекулярным трением ($\nu\rho = 0$, ν — кинематическая вязкость жидкости, $\rho = cost, \rho > 0$ — плотность), и коэффициент её электропроводимости $\sigma_\epsilon = \infty$ (сопротивление равно нулю). В данной работе изучается влияние наложения стационарной вертикальной компоненты.

Система уравнений движения идеальной жидкости при постоянной температуре в переменных Эйлера имеет вид:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\,\nabla)\vec{v} = \frac{1}{\rho} grad(p);\; div\vec{v} = 0.$$

Эти четыре уравнения позволяют найти четыре неизвестные функции v_x, v_y, v_z и p. Для решения соответствующей краевой задачи математической физики необходимо знать граничные условия для скорости и давления на поверхностях, ограничивающих объем жидкости. Граничное условие для поля скоростей идеальной жидкости заключается в том, что жидкость не протекает через твердую поверхность, т.е. нормальная к поверхности компонента скорости жидкости v_n равна нормальной составляющей скорости твердой поверхности $V_n : v_n = V_n$. Для неподвижной поверхности $v_n = 0$. Граничное условие для скорости на свободной поверхности заключается в том, что нормальная компонента скорости равна нормальной компоненте скорости свободной поверхности.

В работе решена линейная задача о свободных длинноволновых колебаниях идеальной жидкости, ограниченной снизу абсолютно твердым диэлектриком, а сверху вакуумом. Найдены собственные числа (частоты) и собственные функции (моды) соответствующей неклассической спектральной краевой задачи для ОДУ 4–го порядка.

Литература

1. Куликовский А.Г. Магнитная гидродинамика / А. Г. Куликовский, Г.А. Любимов. // М. : Логос, 2005. — 325 с.

2. Баринов В.А. Математическое моделирование магнитогидродинамических поверхностных волн / В.А. Баринов, Н.Г. Тактаров. — Саранск. — 1991. — 96 с.

3. Задорожная Н.С. Спектральная краевая задача колебаний невязкой жидкости бесконечной электропроводности /

Н.С. Задорожная // Транспорт: наука, образование, производство: Сборник научных трудов . Т.1: Технические и естественные науки. — Ростов–на–Дону : РГУПС. — 2020. — С.225–229.

СУЩЕСТВОВАНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.В. Зайцева (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, Российский университет дружбы народов)
n.v.zaiceva@yandex.ru

В полупространстве $\{(x,t)\,:\,x\in\mathbb{R}^n,\,t>0\}$ исследован вопрос существования классических решений уравнения

$$u_{tt}(x,t)-a^2\sum_{j=1}^{n}u_{x_jx_j}(x,t)+b\,u(x-h,t)=0, \tag{1}$$

где $a\neq 0$, $b>0$ — заданные вещественные числа; $h:=(h_1,\ldots,h_n)$ — заданный вектор с действительными координатами, длина которого не равна нулю.

Теорема [1]. *При выполнении условия*

$$a^2|\xi|^2+b\cos(h\cdot\xi)>0$$

для всех $\xi\in\mathbb{R}^n$*, семейство функций*

$$G(x,t;A,B,\xi):=C_1\,e^{t\,G_1(\xi)}\sin(t\,G_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)+$$

$$+C_2\,e^{-t\,G_1(\xi)}\sin(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)$$

удовлетворяет уравнению (1) в классическом смысле при любых значениях параметров $C_{1,2}\in\mathbb{R}^1$ *и* $\xi\in\mathbb{R}^n$.

Здесь функции определяются по формулам

$$G_1(\xi)=\rho(\xi)\sin\varphi(\xi),\quad G_2(\xi)=\rho(\xi)\cos\varphi(\xi),$$

$$\rho(\xi)=\left[\left(a^2|\xi|^2+b\cos(h\cdot\xi)\right)^2+b^2\sin^2(h\cdot\xi)\right]^{1/4},$$

$$\varphi(\xi)=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{b\sin(h\cdot\xi)}{a^2|\xi|^2+b\cos(h\cdot\xi)}.$$

Литература

1. Зайцева Н.В. Гладкие решения гиперболических уравнений со сдвигом на произвольный вектор в свободном члене / Н.В. Зайцева, А.Б. Муравник // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 3. — С. 368–373.

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ B–ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Н.В. Зайцева (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, Российский университет дружбы народов)
n.v.zaiceva@yandex.ru

К 100–летию Ивана Александровича Киприянова

В прямоугольной области $D = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$, $l, T > 0$ — заданные действительные числа, рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - x^{-k}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^k\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \tag{1}$$

где $B_x u := x^{-k}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^k\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ — дифференциальный оператор Бесселя, $k \neq 0$ — заданное действительное число.

Для B–гиперболического уравнения (1) (согласно терминологии И.А. Киприянова [1, с. 5]) в прямоугольной области D исследованы на корректность смешанные или начально–граничные задачи с интегральными условиями типа Самарского–Ионкина (интегральные условия первого рода) и с интегральными условиями второго рода при различных значениях параметра k в операторе Бесселя, а именно, рассмотрены случаи: $k \leqslant -1$; $-1 < k < 1$ и $k \neq 0$; $k \geqslant 1$. Подробные результаты опубликованы в монографии [2].

Литература

1. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И.А. Киприянов. // М. : Наука. Физматлит. — 1997. — 208 с.

2. Зайцева Н.В. Смешанные задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений с оператором Бесселя / Н.В. Зайцева. // М. : Изд–во Московского университета. — 2021. — 120 с.

К ЗАДАЧЕ О КОЛЕБАНИЯХ СМЕСИ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Д.А. Закора (Симферополь, КФУ им. В.И. Вернадского)
dmitry.zkr@gmail.com

Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$, полностью заполненную гомогенной смесью $n \geqslant 2$ сжимаемых жидкостей. Введём систему координат $Ox_1x_2x_3$, жёстко связанную с областью Ω, таким образом, что ось Ox_3 направлена против действия силы тяжести $-g\mathbf{e}_3$, $g > 0$, а начало координат находится в области Ω. Задача о малых движениях смеси в симметризованной форме описывается следующей системой уравнений, граничных и начальных условий:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{c_i^{1/2}\rho_i}{\rho_{i0}^{1/2}}\right) - \frac{1}{\rho_{i0}}\sum_{j=1}^{n} L_{ij}\mathbf{u}_j + \frac{1}{\rho_{i0}}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) + \mathbf{f}_i,$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = -\frac{c_i^{1/2}}{\rho_{i0}^{1/2}}\operatorname{div}(\rho_{i0}\mathbf{u}_i), \quad (t,x) \in [0,+\infty) \times \Omega, \quad i = 1,\dots,n,$$

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\mathbf{T}_i\mathbf{n}) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad (t,x) \in [0,+\infty) \times \partial\Omega,$$

$$\mathbf{u}_i(0,x) = \mathbf{u}_i^0(x), \quad \rho_i(0,x) = \rho_i^0(x), \quad i = 1,\dots,n.$$

где $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(t,x) = \big(u_{i1}(t,x); u_{i2}(t,x); u_{i3}(t,x)\big)^\tau$ $(x = (x_1; x_2; x_3) \in \Omega)$ — поле скоростей i–ой компоненты смеси (символом τ обозначена операция транспонирования), $\rho_i = \rho_i(t,x)$ — плотность i–ой компоненты смеси, $\rho_{i0} = \rho_{i0}(0)\exp(-gc_i^{-1}x_3)$, где $\rho_{i0}(0)$ — стационарная плотность i-й компоненты смеси в начале координат, $a_{ij} = a_{ji} \geqslant 0$ — коэффициенты, отвечающие за интенсивность обмена импульсом между составляющими смеси, $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i(t,x)$ — известное малое поле внешних массовых сил, наложенное на гравитационное поле, $\mathbf{T}_i = \mathbf{T}_i(t,x)$ — тензор напряжений, $L_{ij} := -\mu_{ij}\Delta - (\mu_{ij} + \lambda_{ij})\nabla\operatorname{div}$ — дифференциальный оператор теории упругости. Матрицы вязкостей $\mathbf{M} := \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^n$ и $\mathbf{\Lambda} := \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^n$ подчинены следующим условиям: $\mathbf{M} > 0$, $2\mathbf{M} + 3\mathbf{\Lambda} > 0$.

Приведённая система с граничными и начальными условиями трактуется в виде задачи Коши с замкнутым оператором $\mathcal{A}$ в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\xi + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0.$$

Определение. *Существенным спектром* замкнутого оператора $\mathcal{A}$ называется множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A})$, состоящее из тех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$ не является фредгольмовым.

Положим $\mathbf{\Phi} := \{\delta_{ij} c_i \rho_{i0}(x_3)\}_{i,j=1}^n$, $\mathbf{R} := \{\delta_{ij}\rho_{i0}(x_3)\}_{i,j=1}^n$.

Теорема. *Пусть граница $\partial\Omega$ области Ω не является поверхностью вращения. Спектр $\sigma(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ расположен на действительной положительной полуоси за исключением, быть может, конечного числа комплексно–сопряжённых собственных значений конечной алгебраической кратности, а*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \ \det\big(\lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) - \mathbf{\Phi}\big) = 0, \ \ x \in \overline{\Omega}\right\}.$$

Множество $\sigma(\mathcal{A}) \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A})$ состоит из изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности и содержит подпоследовательность с асимптотическим поведением

$$\lambda_k^{(\infty)}(\mathcal{A}) = \mathcal{C}^{-2/3} k^{2/3}(1 + o(1)), \quad k \longrightarrow \infty,$$

$$\mathcal{C} := \frac{1}{6\pi^2} \int\limits_{\Omega} \left(\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}\big)^{-\frac{3}{2}} + 2\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}\big)^{-\frac{3}{2}}\right) d\Omega.$$

Утверждение, аналогичное приведенному в теореме, для граничного условия прилипания (Дирихле) доказано в [1]. Отметим, что в [2] решается вопрос о существовании слабых обобщённых решений нелинейной начально–краевой задачи, описывающей баротропное движение смеси нескольких сжимаемых вязких жидкостей.

Литература

1. Закора Д.А. Спектральные свойства оператора в задаче о колебаниях смеси вязких сжимаемых жидкостей / Д.А. Закора // Дифференциальные уравнения. — 2023. — № 4. — (в печати).

2. Мамонтов А.Е. Разрешимость нестационарных уравнений многокомпонентных вязких сжимаемых жидкостей / А.Е. Мамонтов, Д.А. Прокудин // Изв. РАН Сер. матем. — 2018. — Т. 82, № 1. — С. 151–197.

РЕАЛИЗАЦИЯ РЕКОМЕНДАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКИХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ НА ОСНОВЕ СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ МАТРИЦ

М.Е. Залыгаева, Д.С. Бурнашев, О.И. Парфенова
(Воронеж, Воронежский государственный университет)
zalygaeva@math.vsu.ru

В данной работе разрабатывается и реализуется на языке Python алгоритм рекомендательной системы на основе сингулярного векторного разложения, а также определяется его точность с помощью метрики RMSE.

Исследуется задача о наилучшей рекомендации для определенного пользователя некоторого продукта (объекта). Рекомендательная система на основе сингулярного разложения матриц (SVD разложения) позволяет получать для каждого пользователя системы свои личные рекомендации, такие как поиск продуктов (объектов), схожих с теми которые высоко оценил пользователь; рекомендация продуктов (объектов) на основе предсказания рейтингов не просмотренных продуктов (объектов).

Также благодаря скорости работы программы решается вопрос так называемого «холодного старта». Новому пользователю предлагается на выбор либо ввести в поле поиска любимые объекты и оценить их, либо если любимых объектов нет — выбрать соответствующий пункт в графическом меню.

Программа после получение данных добавляет пользователя в базу данных и рассчитывает матрицу рекомендаций продуктов (объектов) и SVD разложение. Также SVD разложение решает проблему разреженности матрицы оценок пользователей.

Литература

1. Дирвестер С. Индексирование с помощью скрытого семантического анализа. / С. Дирвестер, С. Дюме, Т. Ландауэр, Г. Фернас, Р. Харшман // Журнал Американского общества информатики — 1990. — V. 41. P. 391–407.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ФИНАНСОВЫХ МОДЕЛЕЙ МАРКОВИЦА, ТОБИНА И ШАРПА

М.Е. Залыгаева, А.А. Золотарев
(Воронеж, Воронежский государственный университет)
zalygaeva@math.vsu.ru

В данной работе рассматриваются модели финансовых портфелей Марковица, Тобина и Шарпа [1] с точки зрения условной оптимизации и метода множителей Лагранжа для нахождения минимума функции риска, а также разрабатываются алгоритмы для реализации трех данных моделей на языке программирования Python.

Исходные задачи оптимизации сводятся к решению систем линейных уравнений и исследованию вопроса существования их решений при различных изменениях начальных данных. Данная задача представляет актуальный математический интерес, т.к. прежде, по-видимому, не изучалась.

Литература

1. Rubinstein M., Markowitz's Portfolio Selection: A Fifty–Year Retrospective. / M. Rubinstein // Journal of Finance. — 2002. — V. 57. — I.3. — P. 1041–1045.

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПСЕВДО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю.В. Засорин (Воронеж, ВГУ)
York-York-York-1960@yandex.ru

Пусть x, ξ — точки R^n, $D = \{D, \dots D_n\}$, $D_k = -i\partial/\partial x_k$, $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $Z(R^n)$ пространство пробных аналитических функций $\varphi(x)$, таких, что их фурье–образы $\hat{\varphi}(\xi) \in C_0^\infty(R^n)$, а через $Z'(R^n)$ — двойственное к $Z(R^n)$ пространство так называемых *аналитических функционалов* $u(x) : Z(R^n) \to \mathrm{C}$ (см., напр.,[1]). Через $\mathcal{M}_C$ обозначим класс псевдо–дифференциальных операторов $P(D) : Z'(R^n) \to Z'(R^n)$, коммутирующих со сдвигами и действующих по правилу:

$$(P(D)u(x))\hat{}(\xi) = P(\xi)\hat{u}(\xi)\,,$$

где $P(\xi) \in C^{\infty}(R^n)$ и, как обычно, называется *символом* оператора $P(D)$ (в том случае, если $P(\xi)$ является полиномом, $P(D)$ представляет собой обычный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами). Положим, далее:

$$\mathcal{N}(P) = \{\xi \in R^n : P(\xi) = 0\}$$

— множество всех вещественных нулей символа $P(\xi)$.

Определение. Пусть $P(D), Q(D) \in \mathcal{M}_C$. Если $\mathcal{N}(P) \subset \mathcal{N}(Q)$, мы будем говорить, что оператор $P(D)$ *подчинен* оператору $Q(D)$ и писать при этом: $P(D) \prec Q(D)$. Если же $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(Q)$, то мы будем говорить, что операторы $P(D)$ и $Q(D)$ *эквивалентны* и писать при этом: $P(D) \sim Q(D)$.

Таким образом, класс Пусть $\mathcal{M}_C$ разбивается на классы эквивалентности $\mathcal{M}_C((N))$, где множество $\mathcal{N} = \mathcal{N}(P)$ определяется каким–либо представителем $P(D)$ класса $\mathcal{M}_C(\mathcal{N})$.

Рассмотрим теперь два произвольных оператора $P(D)$ и $Q(D)$ из $\mathcal{M}_C$ (возможно, принадлежащих двум разным классам эквивалентности) и два уравнения в классе $Z'(R^n)$:

$$P(D)u(x) = 0\,, \quad x \in R^n\,, \tag{1}$$

и

$$Q(D)u(x) = 0\,, \quad x \in R^n\,, \tag{2}$$

где $u(x) \in Z'(R^n)$, и добавим к каждому из этих уравнений одно и то же ограничение (*условие регулярности решения на бесконечности*):

$$\Psi(D)u(x) = \theta(|x|^{-\lambda})\,, \quad x \to \infty\,, \tag{3}$$

где $\Psi(D) \in \mathcal{M}_C$, $\lambda \geqslant 0$, символ $\theta(\cdot)$ может означать $o(\cdot)$ или $O(\cdot)$, а сама оценка $\theta(\cdot)$ может быть как равномерной, так и простой оценкой по нескольким направлениям (или вообще по одному направлению). При этом ограничение (3) понимается в слабом смысле (т.е., в смысле теории распределений). Наконец, ограничение (3) может представлять собой как единственное ограничение, так и систему ограничений.

Доказывается следующее утверждение.

Теорема. *Если $P(D) \prec Q(D)$, то из того, что задача (2),(3) имеет единственное (тривиальное) решение, следует что и задача*

(1),(3) также имеет единственное (тривиальное) решение, а из того, что задача (1.3) имеет неединственное решение, следует, что и задача (2),(3) имеет неединственное решение.

Если $P(D) \sim Q(D)$, то либо обе задачи (1),(3) и (2),(3) имеют только тривиальное решение, либо обе задачи (1),(3) и (2),(3) имеют неединственное решение.

Замечание. Более простой случай дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, действующими в шварцевском пространстве $S'(R^n)$ распределений умеренного роста подробно разобран Ю.В.Засориным в работе [2].

Литература

1. Хёрмандер, Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных / Л. Хёрмандер. // М.: Изд–во. иностр. лит. — 1959. — 190 с.

2. Засорин Ю.В. О теоремах единственности для уравнений в частных производных и универсальности условия регулярности решения на бесконечности / Ю.В. Засорин // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2021. — № 3. — С. 48–58.

ЗАДАЧИ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ УСЛОВИЕМ[1]

М.Б. Зверева, М.И. Каменский (Воронеж, ВГУ)
margz@rambler.ru, mikhailkamenski@mail.ru

Задачи граничного управления колебательными процессами для упругих систем на отрезке в случае линейных граничных условий изучались в работах В.А. Ильина, Е.И. Моисеева и их учеников. В докладе будут обсуждаться задача граничного управления колебаниями системы струн на графе – звезде с нелинейным условием в узле, а также задача граничного управления двумерными колебаниями струны с нелинейным краевым условием.

Приведем задачу на графе – звезде. Предположим, что в положении равновесия система из n струн расположена вдоль геометрического графа – звезды с ребрами одинаковой длины. Дополнительно

[1] Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Министерства просвещения Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы QRPK–2023–0002). Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 22–71–10008.

в узле установлен ограничитель на колебательный процесс. В свою очередь, ограничитель может перемещаться в перпендикулярном к плоскости графа направлении так, что его движение задано отображением $C(t) = [-h, h] + \xi(t)$. Обозначим через $u(x,t)$ определенную на графе функцию, описывающую отклонение струнной системы от положения равновесия в точке x в момент времени t. Сужение $u(x,t)$ на ребра будем обозначать через $u^i(x,t)$, $i = 1, 2, ..., n$. Введенная параметризация ставит в соответствие узлу графа точку $x = l$, а граничным вершинам соответствуют $x = 0$. В ходе колебательного процесса узловая точка струнной системы $u(l,t)$ находится внутри ограничителя, т.е. $u(l,t) \in C(t)$. При этом при соприкосновении с границей ограничителя происходит совместное движение узловой точки с ограничителем. Таким образом, выполняется условие $-\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u^i}{\partial x}(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t))$, где множество

$$N_{C(t)}(u(l,t)) = \{\xi \in R^1 : \xi \cdot (c - u(l,t)) \leqslant 0 \quad \forall c \in C(t)\}$$

обозначает внешний нормальный конус к $C(t)$ в точке $u(l,t)$. Математическая модель задачи имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u^i}{\partial t^2}, 0 < x < l, 0 < t < T (i = 1, 2, ...n) \\ u^i(x,0) = \varphi^i(x), \\ \dfrac{\partial u^i}{\partial t}(x,0) = 0, \\ -\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u^i}{\partial x}(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t)), \\ u(l,t) = u^1(l,t) = u^2(l,t) = ...u^n(l,t), \\ u^i(0,t) = \mu^i(t). \end{cases} \tag{1}$$

Требуется найти функции $\mu^i(t) \in W_2^1[0,T]$ $(i = 1, 2, ...n)$ такие, что

$$u^i(x,T) = \varphi *^i (x), \quad (u^i)'_t(x,T) = \psi *^i (x),$$

где $\varphi*^i \in W_2^1[0,l]$, $\psi*^i \in L^2[0,l]$ – заданные функции. Будем предполагать, что функции $\xi(t)$ и $\varphi^i(x)$ удовлетворяют условию Липшица на своих областях определения.

Теорема. Для $T < l$ решение задачи (1) определено единственным образом. Функции $\mu^i(t)$ должны иметь вид

$$\mu^i(t) = \frac{1}{2}(\varphi^i(t) - \widehat{\psi*^i}(T-t) + \varphi *^i (T-t)).$$

При этом для всех $i = 1, 2, ..., n$ начальные и финальные данные задачи должны быть связаны между собой равенствами

$$\widehat{\psi *^i}(x) - \varphi *^i(x) + \varphi^i(x - T) \equiv 0, \quad T \leqslant x \leqslant l,$$

$$\widehat{\psi *^i}(x) + \varphi *^i(x) - \varphi^i(x + T) \equiv 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l - T,$$

$$\widehat{\psi *^i}(x) + \varphi *^i(x) - 2g_0(T + x - l) + \varphi^i(2l - x - T) \equiv 0, \quad l - T \leqslant x \leqslant l.$$

Здесь для каждого $i = 1, 2, ..., n$ через $\widehat{\psi *^i}$ обозначена первообразная для функции $\psi *^i$, удовлетворяющая равенству

$$\widehat{\psi *^i}(x_0^i) - \varphi *^i(x_0^i) + \varphi^i(x_0^i - T) = 0,$$

$x_0^i \in [T, l]$ – фиксирован. Функция $g_0(t)$ — решение sweeping процесса

$$\begin{cases} -g_0'(t) \in N_{C(t)}(g_0(t)) + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi^{i'}(l - t), t \in [0, l] \\ g_0(0) = \varphi(l), \end{cases}$$

$\varphi(l) = \varphi_1(l) = \varphi_2(l) = ... = \varphi_n(l)$.

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

В.Г. Звягин, А.С. Арсентьев, М.В. Турбин (Воронеж, ВГУ)
zvg_vsu@mail.ru, arsenyandre@gmail.com, mrmike@mail.ru

В гидродинамике для определения траекторий движения жидкости необходимо решить следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = v(t, X), \quad t \in [t_0, T], \quad X(0) = x_0 \in \Omega \subset R^n, \quad n = 2, 3. \qquad (1)$$

Из теоремы Пикара–Линделёфа известно, что если функция v непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию Липшица по переменной X, то существует глобальное решение задачи (1).

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–11–00103, `https://rscf.ru/project/22-11-00103/`

При этом в реальных приложениях возникают задачи, в которых функция v принадлежит только соболевским пространствам. Разрешимость задачи (1) в классе $C([0,T], L_p(\Omega)^n)$ для функции $v \in L_1([0,T], W_p^1(\Omega)^n)$ впервые была установлена в работе [1]. На основе этой работы в дальнейшем была создана теория регулярных лагранжевых потоков, которая используется во многих областях, в частности в задачах гидродинамики.

В докладе рассматривается разрешимость следующей задачи близкой к задаче (1).

$$z(t,t_0,x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(s, z(s,t_0,x_0))ds. \tag{2}$$

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть*

$$v \in L_2(t_0,T; W^{1,p}(\Omega)^n), \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\mathrm{div} v \in L_1(t_0,T; L_\infty(\Omega)) \quad n = 2,3.$$

Тогда задача (2) имеет единственное решение $z \in C([t_0,T] L_p(\Omega)^n)$.

Для доказательства теоремы рассматриваемая задача аппроксимируется такой же задачей но с гладкой функцией v_ε и устанавливается разрешимость этой задачи. Затем на основе априорных оценок устанавливается, что решение аппроксимационной задачи сходится к решению задачи (2) при стремлении параметра аппроксимации к нулю. После чего доказывается единственность решения рассматриваемой задачи для чего существенно используется ограниченность $divv$ по норме $L_\infty(\Omega)$.

Литература

1. DiPerna R.J. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces / R.J. DiPerna, P.L. Lions // Invent. math. — 1989. — V. 98. — P. 511–547.

РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО–КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ МОДЕЛИ КЕЛЬВИНА–ФОЙГТА ПРИ ОТСУТСТВИИ ОГРАНИЧЕНИЯ СНИЗУ НА НАЧАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПЛОТНОСТИ[1]

В.Г. Звягин, М.В. Турбин (Воронеж, ВГУ)
zvg_vsu@mail.ru, mrmike@mail.ru

Неоднородные несжимаемые жидкости, называемые также несжимаемыми жидкостями с переменной плотностью, активно исследуются с середины прошлого века вплоть до наших дней. Первая постановка задачи о слабых решениях для системы Навье–Стокса с переменной плотностью была предложена А.В. Кажиховым в работе [1]. В данной постановке предполагается, что начальное условие на плотность отделено от нуля, то есть существует константа $m > 0$ такая, что $\rho(x,0) = \rho_0(x) \geqslant m, \rho_0 \in L_\infty(\Omega)$. При этом предположении Кажиховым в указанной работе доказано существование слабого решения для рассматриваемой задачи.

В работе Симона [2] для слабой постановки задачи для системы Навье–Стокса с переменной плотностью была предпринята попытка отказаться от отделимости от нуля начального условия на плотность. При этом вводится другое, на самом деле близкое по смыслу, ограничение $\rho_0 \in L_\infty(\Omega), 1/\rho_0 \in L_{6/5}(\Omega)$. Данное условие обозначает, что ρ_0 не может обращаться в ноль на множестве положительной меры. Но отказ от отделимости начального условия от нуля привёл к необходимости задавать начальное условие на произведение плотности на скорость ρv в более слабом смысле. Стоит отметить, что решение, полученное Симоном является решением в смысле Кажихова.

С физической точки зрения такое ограничение не имеет смысла и обусловлено исключительно методами доказательства. Для сильных решений несжимаемой системы Навье–Стокса с переменной плотностью без каких–либо ограничений О.А. Ладыженской и В.А. Солониковым в [3] было доказано существование сильных решений (глобальных в двумерном случае и локальных в трёхмерном случае или глобальных в трёхмерном случае, но для малых данных задачи). Основой для отказа от условия отделимости здесь является непрерывность произведения ρv по времени в случае сильных решений и отсутствие такого факта для слабых решений.

---

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–11–00103, https://rscf.ru/project/22-11-00103/

В последнее время активно исследуются модели несжимаемой неоднородной жидкости для неньютоновских жидкостей [4,5,6]. В слабых постановках задач в этих работах предполагается, что начальное условие на плотность отделено от нуля. В этом докладе рассматривается начально – краевая задача для несжимаемой модели Кельвина–Фойгта с переменной плотностью без указанного условия.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n, n = 2,3$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $[0,T], 0 < T < \infty$ — промежуток времени, $Q_T = \Omega \times [0,T]$. Рассматривается начально–краевая задача:

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho\sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_1\Delta v - \mu_2\frac{\partial \Delta v}{\partial t}$$

$$-\int\limits_0^t G(t,s)\Delta v(s)\,ds + \nabla p = \rho f, \quad (x,t)\in Q_T; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0; \quad \operatorname{div} v = 0, \quad (x,t)\in Q_T; \tag{2}$$

$$v|_{t=0}(x) = a(x), \quad \rho|_{t=0}(x) = \rho_0(x), \quad x\in\Omega, \quad v|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3}$$

Здесь v и ρ это скорость и плотность жидкости, p — давление, а f — плотность внешних сил. Функция $G(t,s)$ представляет собой сумму экспонент в отрицательной степени и характеризует память жидкости, константа $\mu_2 > 0$ характеризует время запаздывания. $0 \leqslant \rho_0(x) \leqslant M$, где M — положительная константа.

Введем пространства

$$W_1 = \left\{u : u\in C([0,T],V^1), u'\in L_2(0,T;V^1)\right\}$$

$$E_1 = \left\{\varrho : \varrho\in L_\infty(Q_T), \varrho'\in L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))\right\}.$$

Будем предполагать, что $a\in V^1, \rho_0\in L_\infty(\Omega)$, а $f\in L_2(0,T,V^0)$.

Определение 1. *Пара функций $(\rho,v)\in E_1\times W_1$ называется слабым решением начально – краевой задачи (1)–(3), если для любого $\varphi\in V^1$ и при п.в. $t\in[0,T]$ она удовлетворяет равенству*

$$\int\limits_\Omega \rho v'\varphi dx + \sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_\Omega \rho v_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\varphi_j dx + \mu_1\int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi dx$$

$$+\mu_2\int\limits_\Omega \nabla v' : \nabla\varphi dx + \int\limits_0^t G(t,s)\int\limits_\Omega \nabla v(s) : \nabla\varphi dx ds = \int\limits_\Omega \rho f\varphi dx,$$

для любого $\psi \in H_0^1(\Omega)$ *и при п.в.* $t \in [0, T]$ *удовлетворяет равенству*

$$\langle \rho', \psi \rangle - \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \rho v_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \, dx = 0,$$

а также начальным условиям: $v(0) = a, \rho(0) = \rho_0$.

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Существует хотя бы одно слабое решение начально–краевой задачи (1)–(3).*

Доказательство проводится на основе аппроксимационно–топологического подхода к исследованию задач гидродинамики [7].

Литература

1. Кажихов А.В. Разрешимость начально–краевой задачи для уравнений движения неоднородной вязкой несжимаемой жидкости / А.В. Кажихов // Докл. АН СССР. — 1974. — Т. 216, № 5. — С. 1008–1010.

2. Simon J. Nonhomogeneous viscous incompressible fluids: existence of velocity, density and pressure / J. Simon // SIAM J. Math. Anal. — 1990. — V. 21, №5. — P. 1093–1117.

3. Ладыженская О.А. Об однозначной разрешимости начально–краевой задачи для вязких несжимаемых неоднородных жидкостей / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1975. — Т. 52. — С. 52–109.

4. Antontsev S.N. The classical Kelvin–Voigt problem for incompressible fluids with unknown non–constant density: existence, uniqueness and regularity / S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira, Kh. Khompysh // Nonlinearity. — 2021. — V. 34, № 5. — P. 3083–3111.

5. Zvyagin V. Optimal feedback control problem for inhomogeneous Voigt fluid motion model / V. Zvyagin, M. Turbin // Journal of Fixed Point Theory and Applications. — 2021. — V. 23, № 4. — Article 4.

6. Звягин В.Г. Задача оптимального управления с обратной связью для модели Фойгта с переменной плотностью / В.Г. Звягин, М.В. Турбин // Известия вузов. Математика. — 2020. — Т. 4. — С. 93–98.

7. Звягин В.Г. Аппроксимационно–топологический подход к исследованию математических задач гидродинамики / В.Г. Звягин // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2012. — Т. 46. — С. 92–119.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПЛОЩАДИ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В МОДЕЛИ КЛЕТОЧНЫХ СХЕМ

В.С. Зизов (Москва, ВМК МГУ)
vzs815@gmail.com

Введение. Впервые модель клеточных схем (**КС**) в «стандартном» базисе из функциональных и коммутационных элементов, где под сложностью **КС** понималась ее площадь, была предложена в 1967 году С.С. Кравцовым в [1]. В работе [3] были получены уточненные асимптотические верхние и нижние оценки для площади схем, реализующих дешифратор порядка n, которые совпадают в первом члене разложения, имеют вид $n2^{n-1}\left(1 \pm O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ и могут считаться асимптотическими оценками высокой степени точности (АОВСТ).

Ранее в работе [4] исследовалась индивидуальная сложность симметрических функций. В частности, был доказан результат, что любая симметрическая функция S может быть реализована СФЭ с одним выходом, сложность которой оценивается линейно от числа переменных $L(S) = O(n)$ при одновременной оценке на глубину схемы $D(S) = O(\log n)$.

Следует отметить, что аналогичный результат является прямым следствием работы Лупанова [5], в которой исследовались асимптотически наилучшие методы синтеза формул. Данная тематика получила развитие в работе [6], где было показано, что верхняя оценка сложности для симметрических функций составляет $4,5n+o(n)$. Известна также и нижняя оценка, равная $2,5n-c$, показанная в работе [7].

В настоящей работе исследуется площадь клеточной схемы, реализующей все возможные симметрические функции, т.е. класс функций S_n, содержащий 2^{n+1} функции, каждая из которых определяется однозначно своими значения на т.н. слоях булева куба, т.е. всех тех множествах наборах, число единиц в которых попарно совпадает между собой.

Определение. Симметрической функцией $f(n)$ от n БП называет булева функция, значение которой не зависит от перестановки аргументов. Иными словами, для всех перестановок $\overline{x} = transposition(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ значение функции не меняется $f(\overline{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Введём *функционал площади* **КСФКЭ**, который далее будет служить критерием их сложности. Площадью $A(\Sigma)$ клеточной схемы Σ называется площадь её прямоугольной решетки,

$A(\Sigma) = l(\Sigma)h(\Sigma)$, где $l(\Sigma)$ и $h(\Sigma)$ – горизонтальный и вертикальный линейные размеры решётки, называемые *длиной* и *высотой* схемы соответственно. Всюду далее не ограничивая общности будем считать, что $h(\Sigma) \leqslant l(\Sigma)$. При этом для системы ФАЛ $F = (f_1, \ldots, f_m)$ из $P_2^m(n)$ определим, как обычно, величину $A(F)$, равную минимальной площади **КСФКЭ**, реализующих F, которую будем называть *площадью* (сложностью) системы F.

Теорема 1. Для площади КСФКЭ Σ, реализующей систему всех симметрических функций, верна верхняя оценка площади: $A(\Sigma) \leqslant 2^{n+1} \log n$.

Литература

1. Кравцов С.С. О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов. // Проблемы кибернетики.// М.: Наука. — 1967. — Вып. 19. С. 285–292.

3. Ложкин С. А., Зизов В. С. Уточненные оценки сложности дешифратора в модели клеточных схем из функциональных и коммутационных элементов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2020. — Т. 162 №3. — С. 322–334. — DOI: 10.26907/2541-7746.2020.3.322-334.

4. Muller D. E., Preparata F. P. Bounds to complexities of networks for sorting and for switching // Journal of the ACM (JACM). — 1975. — Т. 22. №. 2. — С. 195–201.

5. Лупанов О. Б. О реализации функций алгебры логики формулами ограниченной глубины в базисе $\wedge, \vee, \neg$ // Доклады Академии наук. — Российская академия наук. — 1961. — Т. 136. №. 5. — С. 1041–1042.

6. Demenkov E. et al. New upper bounds on the Boolean circuit complexity of symmetric functions // Information Processing Letters. — 2010. — Т. 110. №. 7. — С. 264–267.

7. Stockmeyer L. J. On the combinational complexity of certain symmetric Boolean functions // Mathematical Systems Theory. — 1976. — Т. 10. №. 1. — С. 323–336.

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ЗАДАЧ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА» НА ПЛАТФОРМЕ MOODLE С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНСТРУМЕНТАРИЯ JUPYTER NOTEBOOK

А.Ю. Золотаревский (Москва, Финансовый университет)
artyom@zolotarevskiy.ru

В современном мире обучение стало более доступным благодаря развитию информационных технологий. Одним из важных инструментов в области образования является платформа *«Moodle»* , которая позволяет создавать и проводить онлайн–курсы по различным дисциплинам. Одной из таких дисциплин является «Теория вероятностей и математическая статистика».

Для повышения эффективности методического обеспечения и сопровождения указанной дисциплины автором разработана система *«TaskGenerator»* которая упрощает процесс параметризации задач и последующую их интеграцию в систему управления обучением. Новая система позволяет генерировать задачи любой сложности дисциплины, включая различные распределения как дискретных, так и непрерывных случайных величин, а также выборки из многомерных распределений для их последующего статистического анализа.

Представленное решение объединяет в едином комплексе все преимущества системы компьютерной верстки «TEX», высокоуровневого языка программирования общего назначения *«Python»* и системы вычислительных ноутбуков *«Jupyter Notebook»*, при этом ни в чём не ограничивая пользователей.

Разработанная система позволяет создавать экзаменационные билеты, демонстрационные варианты, проверочные работы, раздаточные материалы как в виде отдельного «*PDF*» документа, так и с возможностью последующей имплементации в систему *«Moodle»*. При этом web–версии вариантов полноценно поддерживают переносы слов , а за набор математических символов отвечает *«MathJax»*.

Официальный сайт *LMS «Moodle»* – `https://moodle.org/`

Домашняя страница проекта *«TaskGenerator»* с пользовательскими инструкциями – `https://github.com/artyom-zolotarevskiy/taskgen`. Об ошибках следует сообщать в разделе *«Issues»*, либо на почту автору.

Перенос слов работает по тому же алгоритму, что используется в системе «TEX», который предложил М.Л. Франклин и описал в своей диссертации «Word Hy–phen–a–tion by Com–put–er».

Параметризации подлежит не только условие задачи, но и само решение, что сильно упрощает и ускоряет процесс проверки работ. При этом проверку численных ответов берет на себя система *«Moodle»* с возможностью настройки допустимой погрешности.

Авторская система предоставляет удобный рабочий процесс поддержки дисциплины. Визуальное представление заданий отделено от логики параметризации. Данные задач хранятся в папках, которые можно структурировать по темам и разделам. Иерархия папок определяется пользователем и ничем не ограничивается. Возможно назначение весов, определяющих вероятность выбора той или иной задачи в момент сборки вариантов, что даёт составителю достаточную гибкость для установления сложности билетов.

Также планируется реализовать генерацию параметризованных файлов *«Jupyter Notebook»*. Такие интерактивные ноутбуки позволяют объединить теоретический материал и практические задания, что делает процесс обучения более интересным и эффективным.

В заключение, можно сказать, что параметризация задач является эффективным способом предотвращения списывания со стороны студентов, которое является серьёзной проблемой на текущий момент не только при преподавании дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», но и в российской системе образования в целом.

Литература

1. Золотаревский А.Ю. PythonTEX как основа автоматической системы генерации банка задач / А.Ю. Золотаревский // Современная математика и концепции инновационного математического образования. — 2022. — Т. 9, № 1. — С. 214–219.

2. Franklin M.L. Word Hy–phen–a–tion by Com–put–er: dissertation / M.L. Franklin // Department of Computer Science, Stanford University. — 1983.

3. Cervone D.P. MathJax: A Platform for Mathematics on the Web / D.P. Cervone // Notices of the American Mathematical Society. — 2012.

4. Hoftich M. TEX4ht: LATEX to Web publishing / M. Hoftich // TUGboat. — 2019. — Vol. 40, № 1. — P. 76–81.

О НЕСТАНДАРТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ[1]

П.В. Зубков (Москва, НИУ «МЭИ»)
ZubkovPV@mpei.ru

Рассматривается в ограниченной области $G \subset R^n$, $n \geqslant 1$, с гладкой границей Γ краевая задача для системы эллиптических уравнений второго порядка

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i}\right) = \vec{h}(x), \quad x \in G,$$

$$\int_\Gamma \left(\vec{u}\big|_\Gamma, \vec{\varphi}\right) d\gamma = 0,$$

$$\left.\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{\nu}}\right|_\Gamma = \alpha\vec{\varphi}(\gamma), \gamma \in \Gamma.$$

Здесь $\vec{\nu}$ — вектор–конормаль, коэффициенты $a_{ij}(x)$ — скалярные функции, удовлетворяющие неравенствам

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \mu|\xi|^2, \quad \lambda > 0, \mu > 0,$$

при любых вещественных $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Искомыми величинами в этой задаче являются вектор–функция $\vec{u}(x) = (u_1(x), \ldots, u_n(x))$ и число $\alpha \in R^1$. Напротив, функционал $\vec{h}(x) \in \left(W_2^1(G)\right)^*$ и граничная функция $\vec{\varphi}(\gamma) \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ заданы.

Очевидно, если $\vec{\varphi}(\gamma) = 0$ почти всюду, то задача является классической задачей Неймана. Предположим, что $\vec{\varphi}(\gamma)$ — нетривиальный элемент пространства $W_2^{1/2}(\Gamma)$.

Решение $\vec{u}(x)$ ищется в пространстве

$$W_{2,\varphi}^1(G) = \left\{\vec{u}(x) \in W_2^1(G): \quad \int_\Gamma \left(\vec{u}\big|_\Gamma, \vec{\varphi}\right) d\gamma = 0\right\},$$

являющимся ядром функционала следа функции $\vec{\Phi}(x) \in W_2^1(G)$ такой, что $\left.\vec{\Phi}(x)\right|_\Gamma = \vec{\varphi}(\gamma), \gamma \in \Gamma$.

[1] Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № FSWF–2023–0012).

Определение. *Пару* $\left(\vec{u}(x) \in W^1_{2,\varphi}(G), \alpha \in R^1\right)$ *будем называть слабым решением задачи, если для любой функции* $\vec{v}(x) \in W^1_2(G)$ *справедливо интегральное равенство*

$$\int_G \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_j}\right) dx - \alpha \int_\Gamma (\vec{\varphi}, \vec{v}|_\Gamma)\, d\gamma = \left\langle \vec{h}, \vec{v} \right\rangle, \qquad (1)$$

где $\left\langle \vec{h}, \vec{v} \right\rangle$ *— значение функционала* $\vec{h} \in \left(W^1_2(G)\right)^*$ *на функции* $\vec{v}(x)$.

При выборе функции $\vec{\varphi}(\gamma)$, удовлетворяющей условию

$$\int_\Gamma (\vec{\varphi}, \vec{c})\, d\gamma = 0 \quad \forall \vec{c}, \qquad (2)$$

задача инвариантна относительно аддитивной постоянной вектор–функции $\vec{c}$ в том смысле, что наряду с решением $\vec{u}(x) \in W^1_{2,\varphi}(G)$ функция $\vec{u}(x)+\vec{c}$ также принадлежит пространству $W^1_{2,\varphi}(G)$ и также является решением этой задачи.

Будем считать условие (2) выполненным. Тогда полагая $\vec{v}(x) \equiv \vec{c}$ в тождестве (1), получаем, что функционал $\vec{h}(x)$ должен удовлетворять условию

$$\left\langle \vec{h}, \vec{c} \right\rangle = 0, \qquad (3)$$

которое, следовательно, является необходимым условием разрешимости задачи.

Справедлива следующая

Теорема. *Для любой функции* $\vec{\varphi}(\gamma) \in W^{1/2}_2(\Gamma)$, *удовлетворяющей условию* (2), *и любого функционала* $\vec{h}(x) \in \left(W^1_2(G)\right)^*$, *удовлетворяющего условию* (3), *существует единственное (с точностью до аддитивной постоянной вектор–функции* $\vec{c}$*) слабое решение задачи.*

Литература

1. Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. // М. : Наука, 1973. — 576 с.

2. Дубинский Ю.А. О ядрах функционалов следа и граничных задачах теории поля на плоскости / Ю.А. Дубинский // Труды математического института им. В.А. Стеклова. — 2021. — Т. 312. — С. 158–169.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ СПЕКТРОМ В ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

С.П. Зубова, Е.В. Раецкая (Воронеж, ВГУ, ВГЛТУ)
spzubova@mail.ru; raetskaya@inbox.ru

Управление спектром в системе

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [t_0, t_k], \tag{1}$$

$x(t) \in R^n, \quad u(t) \in R^m, \quad A : n \times n, \quad B : n \times m$, осуществляется с помощью матрицы K обратной связи, такой, что

$$u(t) = Kx(t). \tag{2}$$

Заданы произвольно n значений $\mu_i \in \mathbf{C}$, комплексно упорядоченных.

Требуется построить K, такую, что спектр σ матрицы $A + BK$ совпадает с множеством μ_i :

$$\sigma(A + BK) = \{\mu_i\}_{i=1}^n. \tag{3}$$

Решение такой задачи особенно актуально при построении стабилизирующих управления и состояния динамической системы, когда требуется, чтобы стабилизирующее состояние $x(t)$ быстро стремилось к нулю с ростом t :

$$\|x(t)\| \leqslant c \cdot e^{-wt}, \quad w \geqslant 0.$$

Скорость убывания $x(t)$ зависит от расположения μ_i в левой полуплоскости комплексной плоскости. Поэтому говорят о назначении спектра, об управлении спектром.

Известна [1]

Теорема. *Для разрешимости задачи (1) – (3) необходимо и достаточно, чтобы пара (A, B) была управляемой.*

Однако формулы для построения матрицы K получены позже другими авторами лишь для частного случая $m = 1$.

Метод каскадной декомпозиции, разработанный в [2]–[8] для широкого круга задач, позволяет построить K для произвольного m.

Для этого уравнение

$$(A + BK)v = \lambda v,$$

с неизвестными K и v расщепляется на два уравнения, в одном из них известно только K, в другом только v. Сначала определяются $v = v(\lambda)$, подставляются сюда $\lambda = \mu_i, \quad i = 1, 2, ..., n$, затем строится K.

Приводится пример построения K для управления движением спутника по экваториальной орбите вокруг Земли.

Литература

1. Kalman R.E. Topics in Mathematical System Theory / R.E. Kalman, P.L. Falb, M.A. Arbib // MC Craw Hill Book Company. — New York. — 1969.

2. Zubova С.П. Solution of the multi–point control problem for a dynamic system in partial derivatives / S.P. Zubova, E.V. Raetskaya // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — New York. — 2021. — Vol. 44, № 15, P. 11998–12009.

3. Зубова С.П. Решение обратнных задач для линейных динамических систем каскадным методом / С.П. Зубова // Доклады РАН. — 2012. — Т. 447, № 6. — С. 599–602.

4. Зубова С.П. Решение задачи управления для линейной дескрипторной системы с прямоугольно–матричными коэффициентами / С.П. Зубова // Математические заметки. — 2010. — Т. 88, № 6. — С. 884–895.

5. Zubova С.П.Construction of Controls Providing the Desired Output of the Linear Dynamic System / S.P. Zubova, E.V. Raetskaya // Automation and Remote Control. — 2018. — Vol. 79, № 5, P. 774–791.

6. Раецкая Е.В. Исследование сингулярно возмущенной системы управления / S.P. Zubova, E.V. Raetskaya // Вестник Тамбовского университета. Сер. :Естественные и технические науки. Тамбов. — 2018. — Т. 23, № 122. — С. 303–307.

7. Zubova С.П. Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition / S.P. Zubova, E.V. Raetskaya // Automation and Remote Control. — 2017. — Vol. 78, № 7, P. 1189–1202.

8. Zubova С.П.Построение управления для получения заданного выхода в системе наблюдения / С.П. Зубова, Е.В. Раецкая // Вестник Тамбовского университета. Сер. :Естественные и технические науки. Тамбов. — 2015. — Т. 20, № 5. — С. 1400–1404.

О СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ ОПЕРАТОРА ДИРАКА НА МНОГООБРАЗИЯХ С ДОМЕННЫМИ СТЕНКАМИ[1]

А.В. Иванов (Санкт–Петербург, ПОМИ РАН)
regul1@mail.ru

Теорема Атьи–Зингера–Патоди об индексе связывает индекс оператора Дирака на многообразии с границей с интегралом от плотности Понтрягина по внутренней части многообразия и с η–инвариантом вспомогательного оператора Дирака на границе. Это соотношение весьма примечательно с точки зрения теоретической физики, поскольку плотность Понтрягина является локальной аксиальной аномалией Адлера–Белла–Джекива. При этом можно показать, что η–инвариант определяет аномалию четности.

Относительно недавней и довольно плодотворной идеей является распространение теоремы об индексе на конфигурацию типа доменной стенки, которая встречается в различных физических приложениях, например, в ферромагнетике. Согласно подходу из работы [1] доменные стенки определяются как подмногообразие, на котором происходит скачок коэффициентов оператора Дирака.

Данный доклад посвящен результатам из работ [2,3], в которых доказывается обобщение теоремы на случай, когда компоненты римановой связности и связности Янга–Миллса испытывают скачок на подмногообразии коразмерности 1.

Литература

1. Vassilevich D.V. Index Theorems and Domain Walls / D.V. Vassilevich // JHEP. — 2018. — V. 1807. — 108 p.

2. Ivanov A.V. Atiyah–Patodi–Singer Index Theorem for Domain Walls / A.V. Ivanov., D.V. Vassilevich // 2020 J. Phys. A: Math. Theor. — 2020. — V. 53. — 305201

3. Ivanov A.V. Index Theorem for Domain Walls / A.V. Ivanov // 2021 J. Phys. A: Math. Theor. — 2021. — V. 54. — 095203

[1] Работа автора поддержана Министерством науки и высшего образования РФ, грант 075–15–2022–289, и Фондом развития теоретической физики и математики «БАЗИС», грант «Молодая Математика России».

ГЛАДКОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦЕНТАМИ[1]

Н.О. Иванов (Москва, РУДН)
noivanov1@gmail.ru

На интервале $Q = (0, d)$, $d = N + \theta$, $N \in \mathbb{N}$, $0 < \theta \leqslant 1$ рассматривается задача

$$-\left(R_Q v'\right)' = f(x), \quad x \in Q, \tag{1}$$

$$v(0) = v(d) = 0, \tag{2}$$

$f \in L_2(Q)$ — комплекснозначная функция и $R_Q = P_Q R I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$, где $I_Q : L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R})$ — оператор продолжения нулем функции из $L_2(Q)$ в $\mathbb{R} \setminus (Q)$, $P_Q : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(Q)$ — оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R})$ на Q, а разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ определен по формуле

$$(Rv)(x) = \sum_{l=-N}^{N} b_l(x) v(x + l), \tag{3}$$

где $b_l(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ — комплекснозначные функции.

Обозначим через $R_\alpha = R_\alpha(x)$, $x \in \overline{Q}_{\alpha 1}$, матрицу порядка $N(\alpha) \times N(\alpha)$, с элементами

$$r_{ij}^\alpha(x) = b_{j-i}(x + i - 1), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

где $i, j = 1, \ldots, N(\alpha)$, и α — номер класса подынтервалов, получаемых выбрасыванием орбит концов интервала Q, порождаемых группой целочисленных сдвигов; $\alpha = 1$ при $\theta = 1$ и $\alpha = 1, 2$ при $0 < \theta < 1$; $N(1) = N + 1$, $N(2) = N$.

Предположим, что выполнено условие

$$Re(R_\alpha(x)Y, Y)_{\mathbb{C}^{N(\alpha)}} \geqslant c\|Y\|^2_{\mathbb{C}^{N(\alpha)}}, \tag{5}$$

для всех $x \in \overline{Q}_{\alpha 1}$, $\alpha = 1, 2$, и $Y \in \mathbb{C}^{N(\alpha)}$, где $c > 0$ не зависит от x и Y.

---

[1] Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (мегагрант соглашение № 075–15–2022–1115).

Доказано существование единственного обобщенного решения рассматриваемой задачи. Исследованы условия на правую часть уравнения, обеспечивающие гладкость обобщенного решения на всем интервале $Q = (0, d)$, а именно, доказано, что в случае ортогональности правой части в $L_2(Q)$ конечному числу линейно независимых функций обобщенное решение задачи принадлежит пространству Соболева $W_2^2(Q)$.

Аналогичные результаты для первой краевой задачи для дифференциально–разностного уравнения с постоянными коэффициентами были получены в работе [1], а в случае второй краевой задачи для диффернциально–разностного уравнения с переменными коэффициентами в работах [2], [3].

Литература

1. Skubachevskii A.L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications/ A.L Skubachevskii // Basel—Boston—Berlin : Birkhäuser, 1997. — 298 с.

2. Скубачевский А.Л. Об обобщенных решениях второй краевой задачи для дифференциально–разностных уравнений с переменными коэффициентами / А.Л. Скубачевский, Н.О. Иванов // СМФН. — 2021. — Т. 67, № 3. — С. 576–595.

3. Скубачевский А.Л. Об обобщенных решениях второй краевой задачи для дифференциально–разностных уравнений с переменными коэффициентами на интервале нецелой длины /А.Л. Скубачевский, Н.О. Иванов // Матем. заметки. — 2022. — Т. 111, № 6. — С. 873–886.

О РАЗРЕЖЕННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ОРТОГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ[1]

И.М. Избяков (Самара, Самарский университет)
iliya-izbyakov@mail.ru

В настоящее время активно разрабатываются новые методы обработки информации. При этом для создания быстрых алгоритмов восстановления информации предпочтение отдается векторам, имеющим наибольшее количество нулевых координат. Такие решения называются разреженными.

[1] Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно–образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075–02–2023–878).

Рассмотрена простейшая модель получения разреженного представления вектора–сигнала в $\mathbb{R}^D$, основанная на системе линейных уравнений с ортогональной матрицей. Изучаемая модель не позволяет изменять размерность исходных данных, однако с ее помощью можно исследовать закономерности получения их более разреженных представлений.

Такие представления получают путем процедуры минимизации целевой функции, сочетающей в себе выбранный функционал и отклонение от точного решения. В качестве функционала выбираются квазинорма $\|\cdot\|_0$, норма $\|\cdot\|_1$, и евклидова норма, последняя из которых не позволяет увеличивать разреженность представления в то время как две другие позволяют балансировкой невязки и параметра λ при функционале получать более разреженные решения.

В рамках проведенного исследования установлена зависимость количества нулевых координат от выбранного параметра λ, а также дан ответ на вопрос при выборе какой из двух норм $\|\cdot\|_1$ и квазинормы $\|\cdot\|_0$. при одинаковом параметре λ можно получать более разреженное представление. Приведены примеры и построены графики зависимости значений координат разреженного вектора от параметра λ.

Литература

1. Elad M. Sparse and Redundant Representations: From Theory to Applications in Signal and Image Processing / M. Elad. — New York: Springer, 2010. — 396 p.

ОБ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСАХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ РАССЛОЕНИЯХ

Н.Р. Изварина (Москва, РУДН)
izvarinanat@gmail.com

Рассматриваются комплексы операторов, действующих в сечениях гильбертовых расслоений. Теория псевдодифференциальных операторов (ПДО) нулевого порядка на функциях, принимающих значения в гильбертовых пространствах, была построена в работе [1]. Пусть X — компактное многообразие. Рассмотрим комплекс операторов Люк, определённых на многообразии X.

$$0 \longrightarrow L^2(X, H_0) \xrightarrow{P_0} L^2(X, H_1) \xrightarrow{P_1} \dots \xrightarrow{P_{m-1}} L^2(X, H_m) \longrightarrow 0, \quad (1)$$

где H_j — гильбертовы пространства, а $P_j(x, -i\frac{\partial}{\partial x})$ — ПДО Люк, $x \in X$. Последовательность (1) является комплексом, то есть, $d_{j+1}d_j = 0$.

Запишем символьную последовательность для комплекса (1).

$$0 \longrightarrow H_0 \xrightarrow{p_0(x,\xi)} H_1 \xrightarrow{p_1(x,\xi)} \dots \xrightarrow{p_{m-1}(x,\xi)} H_m \longrightarrow 0, \tag{2}$$

где $p_j(x,\xi)$ — символ оператора P_j, $(x,\xi) \in T^*X$.

Последовательность (2), вообще говоря, не является комплексом.

Определение. *Параметриксом* символьной последовательности (2) называется последовательность

$$0 \longleftarrow H_0 \xleftarrow{q_0(x,\xi)} H_1 \xleftarrow{q_1(x,\xi)} \dots \xleftarrow{q_{m-1}(x,\xi)} H_m \longleftarrow 0, \tag{3}$$

где q_j — символы компактной вариации, и

$$p_{j-1}q_{j-1} + q_j p_j - 1 = k_j,$$

где k_j — операторнозначная функция порядка -1, принимающая значения в пространствах компактных линейных отображений, действующих на H_j.

Определение. Комплекс (1) называется *эллиптическим*, если его символьная последовательность (2) обладает параметриксом (3).

Теорема 1. *Если комплекс (1) эллиптичен, то он фредгольмов.*

Литература

1. G. Luke. Pseudodifferential Operators on Hilbert Bundles. / G. Luke // Journal of Differential Equations. — 1972. — Vol. 12. — P. 566–589.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ПРОИЗВОЛЬНОГО ИНДЕКСА[1]

Т.С. Индуцкая (Иркутск, ИДСТУ СО РАН)
indutskaya.tat@yandex.ru

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений дробного порядка

$$D^{\alpha}\left(Au(t)\right) + Bu(t) = f(t),\ t \in [0;1],\ 0 < \alpha < 1, \tag{1}$$

$$D^{\alpha-1}\left(Au(t)\right)\Big|_{t\to+0} = u_0,\ u_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (№ 22–11–00173, `https://rscf.ru/project/22-11-00173/`).

Здесь A, B постоянные $(n \times n)$ матрицы, причем $detA(t) = 0$, а $u = u(t)$, $f = f(t)$ — искомая и заданная n–мерные вектор–функции, а производная понимается в смысле Римана–Лиувилля [1], т.е.

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{d}{dt} I^{\,1-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \, \frac{d}{dt} \int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds.$$

Начальная задача (1), (2) традиционно называется задачей типа Коши [1]. Под ее решением будем понимать вектор–функцию $u(t) \in C_{[0;1]}$, которая обращает в тождество уравнение (1) и удовлетворяет начальному условию (2).

Действие оператором интегрирования Римана–Лиувилля I^{α} дробного порядка $0 < \alpha < 1$ на уравнение (1) преобразует задачу типа Коши (1), (2) к интегро–алгебраическому уравнению типа Абеля

$$Au(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} Bu(s) ds = I^{\alpha} f(t) + \frac{u_0 t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \qquad (3)$$

Сформулированы условия, при выполнении которых задача типа Коши (1), (2) и ее интегральная форма (3) имеют единственное непрерывное решение.

Предложен численный метод решения задачи типа Коши (1), (2) построенный на основе представления (3). Для вычисления интегрального слагаемого использована квадратурная формула правых прямоугольников и метод интегрирования произведений [2]. Приведем данный алгоритм.

Зададим на отрезке $[0;1]$ равномерную сетку

$$t_i = ih, \quad i = 1, \cdots, N, \, h = \frac{1}{N},$$

и обозначим $f_i = f(t_i)$, $u_i \approx u(t_i)$, тогда предлагаемый метод имеет вид:

$$Au_i + \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{j=1}^{i} \omega_{i,j} Bu_j = \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{j=1}^{i} \omega_{i,j} f_j,$$

в котором веса квадратурной формулы имеют вид

$$\omega_{i,j} = \left((i-j+1)^{\alpha} - (i-j)^{\alpha}\right).$$

Проведен анализ сходимости к точному решению разработанного метода и представлены результаты численных экспериментов проведенных на тестовых примерах.

Литература

1. Kilbas A.A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. — Amsterdam; Boston; Heidelberg : Elsevier Science Publishing. — 2006. — 541 p.

2. Weiss R. Product integration for the generalized Abel equation / R. Weiss // Mathematics of computation. — 1972. — T. 26, № 117. — P. 177–190.

ОБ УТОЧНЕННОЙ ФУНКЦИИ РОСТА[1]

М.В. Кабанко, К.Г. Малютин; Б.Н. Хабибуллин
(Курск, КГУ; Уфа, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН)
kabankom@gmail.com, malyutinkg@gmail.com, khabib-bulat@mail.ru

В теории целых и субгармонических функций одной из важнейших проблем является проблема связи между ростом функции и распределением нулей целой или распределением риссовской меры субгармонической функции. История вопроса восходит к А. Пуанкаре и известна как проблема Адамара [1]: проблема нахождения таких узких плотных классов функций, с помощью которых можно описывать рост целых и субгармонических функций. В настоящем исследовании мы рассматриваем классы эталонных функций, введенных в статье [2]. Введенное здесь понятие модельной функции роста, охватывает большой класс функций. Функции конечного порядка относительно модельной функции, могут иметь порядок роста в классическом его понимании равный бесконечности или нулю.

Определение 1. *Строго положительная неограниченная функция M на открытом положительном луче $(0,+\infty)$ называется модельной функцией роста, если $rM'(r) > 0$ при всех $r > 0$.*

Определение 2. *Строго положительная дифференцируемая функция V на некотором луче $(a,+\infty)$ с $a \geqslant 0$ называется уточненной функцией роста относительно модельной функции роста M, если существует хотя бы один из равных между собой пределов* $\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{M(r)V'(r)}{M'(r)V(r)} = \lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{(\ln V(r))'}{(\ln M(r))'} = \lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{(\ln v(x))'}{(\ln m(x))'} =$

[1] Исследование второго автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22–21–00012, https://rscf.ru/project/22-21-00012/),

Исследование третьего автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22–21–00026, https://rscf.ru/project/22-21-00026/).

$\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{m(x)v'(x)}{m'(x)v(x)}\in[0,+\infty)$, *где функция* $m\colon x\mapsto M(e^x)$ *по определению 1 выпуклая на действительной прямой, а* $v\colon x\mapsto V(e^x)$ *дифференцируемая на* $\bigl\{\ln r\colon r\in(a,+\infty)\bigr\}$.

Основные результаты исследования — следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть* M *— модельная функция роста,* V *— строго положительная дифференцируемая функция на некотором луче* $(a,+\infty)$ *с* $a\geqslant 0$. *Эквивалентны два утверждения:* 1) *Функция* V *— уточненная функция роста относительно функции* M. 2) *Для функции* $\rho_M(r):=\ln V(r)/\ln M(r)$, *называемой уточненным порядком для* V *относительно модельной функции роста* M, *существуют пределы*

1) $\varrho=\lim\limits_{r\to+\infty}\rho_M(r)=\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{\ln V(r)}{\ln M(r)}\in[0,+\infty)$ *и*

2) $\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{M(r)}{M'(r)}\ln M(r)\rho_M'(r)=\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{\ln M(r)}{(\ln M(r))'}\rho_M'(r)=0\,.$

При выполнении любого из этих двух утверждений справедливы равенства $\varrho=\lim\limits_{r\to+\infty}\rho_M(r)=\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{M(r)V'(r)}{M'(r)V(r)}\,.$

Теорема 2. *Пусть* M *— модельная функция роста,* A *— возрастающая строго положительная функция конечного порядка относительно* M *в том смысле, что* $\varlimsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{\ln A(r)}{\ln M(r)}=\varrho\in[0,+\infty)$. *Тогда существует уточненная функция роста* $V\colon r\longmapsto(M(r))^{\varrho+\psi(r)}$ *относительно модельной функции роста* M, *для которой*

1) $\rho_M(r)=\varrho+\psi(r)$ *— абсолютно непрерывная монотонная функция;*

2) $\lim\limits_{r\to\infty}\psi(r)=0,\quad \varlimsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{A(r)}{V(r)}=1$*;*

3) *Если* $\psi\not\equiv 0$, *то функции* ψ *и* $\psi\ln^2 M$ *— монотонные при* $r\geqslant r_0$, $M(r_0)\geqslant e$, *имеющие различные направления роста, и, в частности,*

$$\varlimsup_{r\to\infty}\left|\frac{\psi(r+h)-\psi(r)}{h}\right|\leqslant\frac{2|\psi(r)|M'(r)}{M(r)\ln M(r)}\quad \text{\itshape при}\quad r\geqslant r_0.$$

И в этом случае $A(r)\leqslant V(r)$, *а также существуют такие последовательности* $r_n\to\infty$ *и* $t_{k,n}$, *что*

$$\lim_{k\to\infty}t_{k,n}=r_n,\qquad \lim_{k\to\infty}A(t_{k,n})=V(r_n).$$

Литература

1. Hadamard J. Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor / J. Hadamard // J. Math. Pure et Appl. — 1892. — Serie 4. — V. 8, — p. 154–186

2. Хабибуллин Б.Н. Обобщение уточненного порядка / Б.Н. Хабибуллин // Доклады Башкирского университета. — 2020. — Т. 5, № 1. — С. 1–5.

МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Л.Ю. Кабанцова (Воронеж, ВГУ)
dlju@yandex.ru

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \varepsilon_1(t)A\frac{\partial y}{\partial z} + \varepsilon_2(t)y + b(t,z), \tag{1}$$

$$y(t_0,z) = y_0(z), \tag{2}$$

где $t \in T = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, t_0 задано, $y : T\times\mathbb{R} \to Y$ — искомое отображение, $b : T\times\mathbb{R} \to Y$ — случайный векторный процесс, A — постоянный оператор, действующий в пространстве Y, Y — конечномерное пространство со скалярным произведением $<\cdot,\cdot>$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — случайные процессы, $y_0(z)$ — случайный векторный процесс.

Будем считать, что процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и b заданы характеристическим функционалом, т.е. известен $\psi(v_1,v_2,v_3) = E[\exp(i\int\limits_T \varepsilon_1(s)v_1(s)ds +$ $+ i\int\limits_T \varepsilon_2(s)v_2(s)ds + i\iint\limits_{T\mathbb{R}} < b(s_1,s_2), v_3(s_1,s_2) > ds_2ds_1)]$. Здесь $<\cdot,\cdot>$ обозначает скалярное произведение в Y.

С помощью характеристического функционала можно находить моментные функции случайного процесса [1], например,

$$\left.\frac{\delta_p\psi(v_1,v_2,v_3)}{\delta v_1(t)}\right|_{v_1=v_2=v_3=0} = iE[\varepsilon_1(t)], \ \left.\frac{\delta_p^2\psi(v_1,v_2,v_3)}{\delta v_1(t)\delta v_2(\tau)}\right|_{v_1=v_2=v_3=0} = -E[\varepsilon_1(t)\varepsilon_2(\tau)]$$

где, например, $\frac{\delta_p\psi}{\delta v_1(t)}$ обозначает частную вариационную производную по переменной v_1.

Исследуемая задача сводится к детерминированной системе дифференциальных уравнений с частными и вариационными производными

$$\frac{\partial \widetilde{y}}{\partial t} = -iA\frac{\delta_p}{\delta v_1(t)}\frac{\partial \widetilde{y}}{\partial z} - i\frac{\delta_p}{\delta v_2(t)}\widetilde{y} - i\frac{\delta_p \psi}{\delta v_3(t,z)}, \tag{3}$$

$$\widetilde{y}(t_0, z, v_1, v_2, v_3) = E[y_0(z)]\psi(v_1, v_2, v_3), \tag{4}$$

для которой удается получить явную формулу решения.

Определение 1. *Математическим ожиданием $E[y(t,z)]$ решения задачи (1)–(2) называется $\widetilde{y}(t,z,0,0,0)$, где $\widetilde{y}(t,z,v_1,v_2,v_3)$ решение задачи (3)–(4) в некоторой окрестности точки $v_1 = 0, v_2 = 0, v_3 = 0$.*

Теорема 1. *Если случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и b независимы, тогда*

$$E[y(t,z)] = \psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(t_0,t))F_\xi^{-1}(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(t_0,t)A)) * E[y_0(z)]+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t} \psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(s,t))F_\xi^{-1}(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(s,t)A)) * E[b(s,z)]ds$$

является математическим ожиданием решения задачи (1)–(2). Здесь $\psi_{\varepsilon_1}, \psi_{\varepsilon_2}$ — характеристические функционалы для $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ соответственно, F_ξ^{-1} — обратное преобразование Фурье, а $*$ — свертка по переменной z.

Кроме того, были получены явные формулы для смешанных моментных функций и второй моментной функции решения мультипликативно возмущенного векторного дифференциального уравнения в частных производных с двумя случайными коэффициентами (1)–(2).

Литература

1. Задорожний В.Г. Методы вариационного анализа / В.Г. Задорожний. // М.–Ижеск : РХД, 2006. — 316 с.

2. Задорожний В.Г. Мультипликативно возмущенное случайным шумом дифференциальное уравнение в банаховом пространстве / В.Г. Задорожний, М.А. Коновалова // СМФН. — 2017. — Т. 63, № 4. — С. 599–614.

3. Задорожний В.Г. О решении линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка / В.Г. Задорожний, Л.Ю. Кабанцова // СМФН. — 2021. — Т. 67, № 3. — С. 549–563.

4. Задорожний В.Г. О системе дифференциальных уравнений со случайными параметрами / В.Г. Задорожний, Г.С. Тихомиров // СМФН. — 2022. — Т. 68, № 4. — С. 621—634.

КРАЕВЫЕ И НАЧАЛЬНО–КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ И СТАТИСТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ В ПЛОСКО–ПАРАЛЛЕЛЬНОМ СЛОЕ

А.В. Калинин, А.А. Тюхтина, А.А. Бусалов
(Нижний Новгород, ННГУ им. Н.И. Лобачевского)
avk@mm.unn.ru

Широкий класс физических и технических задач приводит к необходимости изучения интегро–дифференциальных уравнений теории переноса излучения. Математические основы и вопросы численного решения соответствующих линейных задач обсуждались в [1–4]. При учете взаимодействия излучения со средой в отсутствие локального термодинамического равновесия рассматриваются нелинейные системы интегро–дифференциальных уравнений [4–7]. Основные аспекты нелинейных задач могут быть описаны системой уравнений переноса излучения и статистического равновесия [6]. Вопросы математической корректности и свойств решений этой системы в ограниченных областях были изучены в работах [8–11].

В настоящей работе рассматриваются постановки стационарных [12–14] и нестационарных задач для нелинейной системы интегро-дифференциальных уравнений переноса излучения и статистического равновесия в плоско–параллельном слое в кинетическом и диффузионном [6] приближениях. С использованием методов теории упорядоченных пространств [15] изучаются вопросы корректности постановок задач и исследуются свойства решений. Обосновываются итерационные линеаризующие алгоритмы решения рассматриваемых задач. Обсуждаются вопросы численной реализации предложенных алгоритмов.

Литература

1. Владимиров В.С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц / В.С. Владимиров // Труды МИАН СССР. — 1961. — Вып. 61. — С. 2–158.

2. Гермогенова Т.А. Локальные свойства решений уравнения переноса / Т.А. Гермогенова. // М. : Наука. — 1986. — 272 с.

3. Марчук Г.И. Численные методы в теории переноса нейтронов / Г.И. Марчук, В.И. Лебедев. // М. : Атомиздат. — 1981. — 456 с.

4. Басс Л.П. Методы дискретных ординат в задачах переноса излучения / Л.П. Басс, А.М. Волощенко, Т.А. Гермогенова. // М. : ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. — 1986. — 231 с.

5. Гольдин В.Я. Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения / В.Я. Гольдин // Журнал вычисл. математики и матем.физики. — 1964. — № 4. — С. 1078–1087.

6. Михалас Д. Звездные атмосферы / Д. Михалас. // М. : Мир. — 1982. — 352 с.

7. Четверушкин Б.Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа / Б.Н. Четверушкин. // М. : Наука. — 1985. — 303 с.

8. Калинин А.В. Об одной нелинейной краевой задаче теории переноса излучения / А.В. Калинин, С.Ф. Морозов // Журнал вычисл. математики и матем.физики. — 1990. — Т. 30. — С. 1071–1080.

9. Калинин А.В. О разрешимости "в целом"нелинейной задачи переноса излучения / А.В. Калинин, С.Ф. Морозов // Дифференциальные уравнения. — 1985. — Т. 21, № 3. — С. 482–494.

10. Калинин А.В. Смешанная задача для нестационарной системы нелинейных интегродифференциальных уравнений / А.В. Калинин, С.Ф. Морозов // Сиб. мат. журнал. — 1999. — Т. 40, № 5. — С. 1052–1066.

11. Калинин А.В. О нелинейной задаче для системы интегродифференциальных уравнений теории переноса излучения / А.В. Калинин, А.А. Тюхтина // Журнал вычисл. математики и матем.физики. — 2022. — Т. 62, № 6. — С. 95–106.

12. Калинин А.В. Об одной нелинейной краевой задаче теории переноса излучения в плоско–параллельном слое / А.В. Калинин, А.Ю. Козлов // Вестник ННГУ. — 2011. — Т. 4, № 1. — С. 140–145.

13. Бусалов А.А. Нелинейная стационарная задача теории переноса в диффузионном приближении / А.А. Бусалов // Проблемы информатики. — 2021. — № 2. — С. 6–14.

14. Kalinin A.V. An iterative method for solving a nonlinear system of the theory of radiation transfer and statistical equilibrium in a plane-parallel layer / A.V. Kalinin, A.A. Tyukhtina, A.A. Busalov // MMST 2022, Nizhny Novgorod, Russia, Revised Selected Papers. — Springer, CCIS 1750. — 2022. — P. 106–120.

15. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — М. : Наука. — 1977. — 744 с.

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

В.А. Калитвин

(Липецк, ЛГПУ имени П.П. Семенова–Тян–Шанского)

kalitvin@mail.ru

Рассмотрим линейное уравнение с частными интегралами

$$x(t,s)=\int\limits_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau+\int\limits_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma+$$
$$+\int\limits_a^t\int\limits_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma+f(t,s) \qquad (1)$$

Найти решение уравнения (1) в явном виде достаточно сложно, поэтому актуальной задачей является разработка приближенных и численных схем решения и создание современных программ, реализующих эти алгоритмы. Операторы с частными интегралами не являются компактными даже в случае ненулевых непрерывных ядер l, m, n, поэтому применение известных методов решения линейных интегральных уравнений к уравнениям (1) требует осторожности.

Частный случай уравнения (1) имеет вид

$$x(t,s)=\int\limits_a^t c(\tau,s)x(\tau,s)d\tau+\int\limits_a^t\int\limits_c^d k(\tau,s,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma+f(t,s). \quad (2)$$

здесь $t\in[a,b], s\in[c,d]$, функции $c(\tau,s), k(\tau,s,\sigma)$, $f(t,s)$ и $f'_t(t,s)$ непрерывны по совокупности переменных, а интегралы понимаются в смысле Лебега. Одним из подходов для построения алгоритмов приближенного и численного решения уравнения (2) является переход к эквивалентной задаче Коши для интегро–дифференциального уравнения Барбашина (ИДУБ)

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t}=c(t,s)x(t,s)+\int\limits_c^d k(t,s,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma+f'_t(t,s) \qquad (3)$$

с начальным условием

$$x(a,s)=f(a,s). \qquad (4)$$

Задача Коши (3)/(4) эквивалентна интегральному уравнению:

$$x(t,s)=\int\limits_a^t\int\limits_c^d r(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma+g(t,s)\equiv(Rx)(t,s)+g(t,s), \quad (5)$$

где $r(t,s,\tau,\sigma)=e^{\int\limits_\tau^t c(\xi,s)d\xi}k(\tau,s,\sigma)$,

$$g(t,s)=\int\limits_a^t e^{\int\limits_\tau^t c(\xi,s)d\xi}f'_t(\tau,s)d\tau+f(a,s)e^{\int\limits_a^t c(\xi,s)d\xi}.$$

Полученное уравнение (5) — линейное интегральное уравнение с непрерывным ядром $r(t,s,\tau,\sigma)$ и непрерывной функцией $g(t,s)$, имеет единственное решение в $C(D)$ [2,3], численное решение которого может быть найдено, например, методом механических квадратур.

Похожая схема может быть использована для решения нелинейного уравнения с частным интегралом

$$x(t,s) = \int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_a^t \int_c^d m(t,s,\tau,\sigma)n(\tau,\sigma,x(\tau,\sigma))d\tau d\sigma + \\ + f(t,s), \qquad (6)$$

где $t \in [a,b]$, $s \in [c,d]$, функции l, m, n, f непрерывны, функция n удовлетворяет условию Липшица: $|n(\tau,\sigma,u) - n(\tau,\sigma,v)| \leqslant n_0|u-v|$, а решением уравнения считается функция из пространства $C(D)$ непрерывных на $D = [a,b] \times [c,d]$ функций. Нелинейное уравнение (6) с частным интегралом и с оператором Гаммерштейна имеет единственное решение в $C(D)$ [3]. Уравнение (6) можно преобразовать к эквивалентному нелинейному двумерному интегральному уравнению с непрерывным ядром, удовлетворяющим условию Липшица. Для таких уравнений обоснование использования метода механических квадратур дано Г.М. Вайникко [4].

В $C(D)$ уравнение (6) эквивалентно интегральному уравнению

$$x(t,s) = \int_a^t \int_c^d k(t,s,\tau,\sigma)n(\tau,\sigma,x(\tau,\sigma))d\tau d\sigma + g(t,s) \equiv (Kx)(t,s), \quad (8)$$

где $k(t,s,\tau,\sigma) = m(t,s,\tau,\sigma) - \int_\tau^t r(t,s,\tau_1)m(\tau_1,s,\tau)d\tau_1$, $r(t,s,\tau) = \sum\limits_{p=1}^{\infty} l^{(p)}(t,s,\tau)$, $l^{(p)}(t,s,\tau) = \int_\tau^t l^{(1)}(t,s,u)l^{(p-1)}(u,s,\tau)du$, $l^{(1)}(t,s,\tau) = l(t,\tau,s)$, а $g(t,s) = f(t,s) - \int_a^t r(t,s,\tau)f(\tau,s)d\tau$.

При численном решении линейного интегрального уравнения (2) и нелинейного уравнения (6) с частными интегралами можно перейти к эквивалентным двумерным интегральном уравнениям и решать их с помощью известных методов численного решения линейных интегральных уравнений, например, с применением метода механических квадратур. Другие алгоритмы численного решения основаны на применении метода механических квадратур и итерационных алгоритмов к уравнениям (2) и (6).

Для реализации отдельных алгоритмов численного решения уравнений (2) и (6) разработаны программы на языке python, показывающие достаточно хорошие результаты.

Литература

1. Appell, J.M. Partial Integral Operators and Integro–Differential Equations / J.M. Appell, A.S. Kalitvin, P.P. Zabrejko. // New York–Basel : Marcel Dekker. — 2000. — 560 p.

2. Калитвин, А.С. Линейные операторы с частными интегралами / А.С. Калитвин. // Воронеж : ЦЧКИ. — 2000. — 252 с.

3. Калитвин, А.С. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра–Фредгольма с частными интегралами / А.С. Калитвин, В.А. Калитвин. // Липецк : ЛГПУ. — 2006. — 177 с.

4. Вайникко Г. М. Возмущенный метод Галёркина и общая теория приближенных методов для нелинейных уравнений/ Г. М. Вайникко // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1967. Том. 7, № 4. — С. 723–751.

К СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА $\alpha \in (1, 2)$[1]

М.И. Каменский, В.В. Обуховский, Г.Г. Петросян
(Воронеж, ВГУ, ВГПУ, ВГУИТ)
garikpetrosyan@yandex.ru

В работе рассматривается вопрос о спектре периодический задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка в банаховом пространстве E, следующего вида

$$^{C}D_0^{\alpha}u(t) = \lambda u(t), \tag{1}$$

$$u(0) = u(T),\, u'(0) = u'(T), \tag{2}$$

где $^{C}D_0^{\alpha}$ – дробная производная Капуто порядка $\alpha \in (1, 2)$, а число $\lambda \in \mathbb{C}$.

Нахождение спектра для системы описываемой задачей (1)–(2) производится с помощью программы в среде Python 3 и асимптотических методов.

Литература

1. Kamenskii M. On semilinear fractional order differential inclusions in Banach spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J.–C. Yao // Fixed Point Theory. — 2017. — V. 18, № 1. — P. 269–292.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 22–71–10008.

2. Kamenskii M. Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space / M. Kamenskii, V. Obu khovskii, G. Petrosyan, J.–C. Yao // Applicable Analysis. . — 2017. — V. 96, Iss. 4. — P. 571–591.

3. Kamenskii M. On approximate solutions for a class of semilinear fractional–order differential equations in Banach spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J.–C. Yao // Fixed Point Theory and Applications. — 2017. — V. 4. — P. 1–28.

4. Kamenskii M. Existence and approximation of solutions to nonlocal boundary value problems for fractional differential inclusions / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J.–C. Yao // Fixed Point Theory and Applications. — 2019. — V. 2. — P. 1–17.

5. Kamenskii M. On a Periodic Boundary value problem for a fractional–order semilinear functional differential inclusions in a Banach space / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J.–C. Yao // Mathematics. — 2019. — V. 7, Is. 12. — P. 5–19.

6. Kamenskii M. On the existence of a unique solution for a class of fractional differential inclusions in a Hilbert space / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J.–C. Yao // Mathematics. — 2021. — V. 9, Iss. 2. — P. 136–154.

7. Kamenskii M. An existence result for a periodic boundary value problem of fractional semilinear differential equations in a Banach space / M. Kamenskii, G. Petrosyan, C.–F. Wen // J. Nonlinear Var. Anal. — 2021. — V. 5, № 1. — P. 155–177.

8. Kamenskii M. On a periodic boundary value problem for fractional quasilinear differential equations with a self–adjoint positive operator in Hilbert spaces / M. Kamenskii, G. Petrosyan, P. Raynaud de Fitte, J.–C. Yao // Mathematics. — 2022. — V. 10, Is. 2. — P. 219–231.

9. Obukhovskii, V., Petrosyan, G., Soroka (Afanasova), M. A controllability problem for causal functional inclusions with an infinite delay and impulse conditions / V. Obukhovskii, G. Petrosyan, M. Soroka (Afanasova) // Advances in Systems Science and Applications. — 2021. — V. 21, № 3. — P. 40–62.

10. Soroka (Afanasova) M. On controllability for a system governed by a fractional–order semilinear functional differential inclusion in a Banach space / M. Soroka (Afanasova), Y.–C. Liou, V. Obukhovskii, G. Petrosyan // Journal of Nonlinear and Convex Analysis. — 2019. — V. 20, № 9. — P. 1919–1935.

НАЧАЛЬНО–КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КЛАССЕ ХАРДИ

Т.В. Капицына (Москва, НИУ МЭИ)
kapitsynatv@mpei.ru

В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T)$, где основание Ω является областью с ляпуновской границей, рассматривается вырождающееся параболическое уравнение второго порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + au = f$$

с коэффициентами $a_{ij}(x,t)$, $a_i(x,t) \in C^1(\overline{Q})$, $a(x,t) \in C(\overline{Q})$ и правой частью $f(x,t) \in L_{p,\,\mathrm{loc}}(Q)$. При этом вырождение на боковой границе предполагается трикомовского типа, т.е. выполняется неравенство

$$c \leqslant \sum\nolimits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\nu_i \nu_j \leqslant c^{-1}, \quad x \in \partial\Omega,$$

с некоторой постоянной $c > 0$, где $\nu(x)$ — вектор внешней по отношению к Ω единичной нормали к поверхности $\partial\Omega$ в точке x.

Вводятся классы типа Харди H_p решений этого уравнения, для которых устанавливаются аналоги теорем Рисса и Литллвуда–Пэли. Доказывается теорема об однозначной разрешимости первой смешанной задачи в случае, когда граничная и начальная функции принадлежат пространствам типа L_p.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ B–ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.А. Катрахова, В.С. Купцов (Воронеж, ВГТУ)
avckuptsov@rambler.ru

В работе рассматривается смешанная краевая задача для сингулярного уравнения, содержащего оператор Бесселя и доказывается, что классическое решение этой задачи совпадает с обобщенным решением почти всюду в области Ω^+ пространства $\mathrm{R}_+^{n+1} = \{x \in$

$R^{n+1} : x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = \left(x^{'}, y\right), x^{'} \in R^n, y > 0, y \in R\}$, которая ограничена гиперплоскостью $\Gamma^0 : y = 0$ и произвольной поверхностью типа Ляпунова Γ^+. Пусть Q_T^+ — цилиндр в пространстве $\mathrm{R}_+^{n+1}; \mathrm{Q}_T^+ = \Omega^+ \times [0, T]$. В цилиндре рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Pu = f \qquad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi; \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi; u|_{\Gamma^0 \times [0,T]} = 0; \frac{\partial u}{\partial y}|_{\Gamma^0 \times [0,T]} = 0 \qquad (2)$$

где $\varphi\,(x)$,$\psi\,(x)$ — данные функции, $f(x,t)$ функция задана в цилиндре $\mathrm{Q}_T^+ : x \in \Omega^+, t \in [0, T]$.

$P\left(D_{x'}; B_y\right) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + bB_y + c; B_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial}{\partial y}, k > 0, c \leqslant 0$

Предполагается, что $P\left(D_{x'}; B_y\right)$ — оператор B–эллиптического типа [1] .

Ранее в работе [2] были получены результаты качественного анализа достаточных условий на границу области, начальные функции и правую часть уравнения, при которых существует классическое решение задачи (1)–(2), представимое в виде ряда Фурье, где $\vartheta_p(x)$ — собственные функции, а λ_p, соответствующие собственные значения краевой задачи

$$P\upsilon + \lambda\upsilon = 0; (x \in \Omega^+), \upsilon|_{\Gamma^+} = 0, \frac{\partial \upsilon}{\partial y}|_{\Gamma^0} = 0 \qquad (3)$$

Пусть коэффициенты $a_{ij}, b\,(i, j = 1, 2, \cdots n)$ и коэффициент с оператора $P\left(D_{x'}; B_y\right)$ удовлетворяет условиям B–эллиптичности, $f(x) \in \mathrm{C}_{(0,\mu)}(\overrightarrow{\Omega_+})$, где $G(x, \xi)$ — главное фундаментальное решение оператора $\varphi(x) = \int_{\Omega_+} G(x, \xi) f(x, \xi) \eta^k dx$.

В работе [3] нами было доказано, что для того, чтобы функция $\upsilon(x) \in \mathrm{H}_{1,k}^0(\Omega^+) = L_{2,k}(\Omega^+)$ была обобщенным решением задачи Дирихле вида:

$$P\left(D_{x'}; B_y\right) \upsilon = -f(x)(x \in \Omega^+), \upsilon \in \mathrm{H}_{1,k}^0(\Omega^+) \qquad (4)$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $u(x) = \upsilon(x) - \varphi(x)$ была обобщенным решением краевой задачи:

$$Pu = 0; (x \in \Omega^+); (u + \varphi) \in \mathrm{H}_{1,k}^0(\Omega^+) \qquad (5)$$

По определению, обобщенным решением задачи (4) называется такая функция $\upsilon_0(x)$, которая доставляет минимум функционалу

$$J(\upsilon) = \int_{\Omega^+} \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \upsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \upsilon}{\partial x_j} + b \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y}^2 \right) - c\upsilon^2 - f\upsilon \right] y^k dx \qquad (6)$$

в пространстве функций $\mathrm{H}^0_{1,k}$.

Докажем, что в этом случае классическое решение задачи Дирихле

$$P\upsilon = -f(x); (x \in \Omega^+) \qquad (7)$$

$$\upsilon|_{\Gamma^+} = 0, \frac{\partial \upsilon}{\partial y}|_{\Gamma^0} = 0 \qquad (8)$$

почти всюду в области Ω^+ совпадает с обобщенным решением этой задачи. Обозначим через $\upsilon_{\text{кл}}$ — классическое решение а, соответственно, через $\upsilon_{\text{об}}$ — обобщенное решение задачи (7)–(8). Представим произвольную функцию $\varphi(x) \in \mathrm{H}^0_{1,k}(\Omega^+)$, как предел по норме пространства $\mathrm{H}^0_{1,k}(\Omega^+)$ последовательности непрерывных функций $\varphi_p(x)$ четных по переменной y, равных нулю в окрестности поверхности Γ^+. Применяя к функциям $\upsilon_{\text{кл}}(x)$ и $\varphi_p(x)$ первую формулу Грина [4] и учитывая, что $P\upsilon_{\text{кл}} = -f(x)$ получим тождество вида:

$$\int_{\Omega^+} \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \upsilon_{\text{кл}}}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_j} + b \frac{\partial \upsilon_{\text{кл}}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_p}{\partial y} - c\upsilon_{\text{кл}}\varphi_p \right] y^k dx - \int_{\Omega^+} f\varphi_p y^k dx = 0 \qquad (9)$$

Функция $\upsilon_{\text{кл}}(x)$ является четной по переменной y, квадратично интегрируемой с весом y^k в области Ω^+, поэтому в тождестве (9) можно перейти к пределу $p \to \infty$. В результате получим тождество, совпадающее с интегральным выражением, определяющим обобщенное решение задачи (7)–(8). В силу единственности обобщенного решения, отсюда следует, что $\upsilon_{\text{кл}}(x) = \upsilon_{\text{об}}(x)$.

Литература

1. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И.А. Киприянов // Москва: Наука. — 1997.

2. Катрахова А.А. О применении классического метода Фурье к решению смешанной краевой задачи для сингулярного гиперболического уравнения, содержащего оператор Бесселя / А.А. Катрахова // Материалы Воронежской математ. школы «Понтрягинские чтения XXII» — Издательско–полиграфический центр ВГУ. — 2011. — С. 86–87.

3. Катрахова А.А., Сазонов А.Ю., Купцов В.С. О разрешимости некоторых сингулярных краевых задач для уравнений гиперболического и параболического типов, содержащих оператор Бесселя // Сб.трудов VII Международной научной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий». — Изд. Научная книга. — 2014. — С. 186–188.

4. Катрахова А.А. Об оценке функции Грина одной краевой задачи для сингулярного уравнения содержащего оператор Бесселя / А.А. Катрахова, В.С. Купцов // Материалы Международной конференции. «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения–XXXIII». — Изд. дом ВГУ. Воронеж. — 2022. — С. 137–138.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ СПЕКТРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ В НУЛЕ

А.В. Качкина (Москва, МГУ)
alisa-kachkina@mail.ru

Порожденный дифференциальным выражением $\mathbb{L}_q y = -y'' + q(x)y$ оператор $\mathbb{L}_q$ называется оператором Штурма–Лиувилля, а непрерывная действительнозначная функция q называется потенциалом. $D(\mathbb{L}_q) = \{y \in L_2[0, +\infty) : y, y'$ абсолютно непрерывны на любом $[a, b] \subset [0, +\infty)$ и $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0\}$ – область определения оператора $\mathbb{L}_q$. Такой оператор хорошо изучен и является самосопряженным для действительнозначной q.

В данной работе будут рассматриваться только потенциалы, быстро растущие на бесконечности, то есть спектр оператора $\mathbb{L}_q$ будет дискретен и можно занумеровать собственные числа $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ оператора в порядке неубывания (см. [1]).

Введем классы быстро растущих функций $\mathfrak{Q} = \{q \in C[0, +\infty) \cap C^2(0, +\infty) : q''(x) \geqslant 0,\ x \geqslant x_0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{xq'(x)}{q(x)} = +\infty\}$, $\mathfrak{Q}_{\beta,\mu} = \{q \in \mathfrak{Q} : \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln q(x)}{\ln^\beta x} = \mu\}$. Тогда при $\beta = 1$ рост потенциалов будет полиномиальным. Э.Ч. Титчмарш в работе [2] получил асимптотику для $q(x) = x^k,\ k > 0$.

В работах [3], [4], [5] и [6] были найдены асимптотики для $\beta \geqslant 2,\ \beta \in (3/2, 2],\ \beta \in (4/3, 3/2],\ \beta \in (5/4, 4/3]$ и $\beta \in (6/5, 5/4]$.

Теорема. *Пусть* $q \in \mathfrak{Q}_{\beta,\mu}$, $c_n = (\pi n)^2$, $\beta \in (7/6, 6/5]$, $\delta = \mu^{-\frac{1}{\beta}}$. *Тогда для спектра оператора* $\mathbb{L}_q$ *справедливо*

$$\lambda_n \sim c_n \exp\Bigg(-2\delta\Bigg\{\ln^{\frac{1}{\beta}} c_n - \frac{2\delta}{\beta}\ln^{\frac{2}{\beta}-1} c_n + (2\delta)^2\frac{3-\beta}{2\beta^2}\ln^{\frac{3}{\beta}-2} c_n -$$

$$-(2\delta)^3\frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\ln^{\frac{4}{\beta}-3} c_n + (2\delta)^4\frac{125-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\ln^{\frac{5}{\beta}-4} c_n -$$

$$-(2\delta)^5\frac{108-180\beta+105\beta^2-25\beta^3+2\beta^4}{10\beta^5}\ln^{\frac{6}{\beta}-5} c_n\Bigg\} + o(1)\Bigg),\ n \to +\infty.$$

Следствие. Полученная теорема обобщает известные ранее результаты из работ [3], [4], [5], [6] для β из других промежутков.

В заключение выражаю благодарность А.И. Козко за полезные советы и замечания.

Литература

1. Молчанов А.М. Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка / А.М. Молчанов // Труды Моск. матем. об–ва. — Т.2. — 1953. — С. 169–200.

2. Титчмарш Э.Ч. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка / Э.Ч. Титчмарш. — Т.1, М., ИЛ. — 1960. — С. 158–169.

3. Козко А.И. Асимптотика спектра дифференциального оператора $-y''+q(x)y$ с граничным условием в нуле и быстро растущим потенциалом /А.И. Козко // Дифференц. уравнения. — 41:5. —2005. — P.611–622; Differ. Equ. — 41:5. — 2005. — P. 636–648.

4. Киселева А.Ю. Асимптотика спектра задачи Штурма–Лиувилля с быстро растущим потенциалом / А.Ю. Киселева // Дипломная работа. — 2006.

5. Насртдинов И.Г. Асимптотика спектра оператора Штурма–Лиувилля в $L_2(\mathbb{R}_+)$ с граничным условием $y(0)cos(\alpha)+y'(0)sin(\alpha) = 0$ / И.Г. Насртдинов // XV Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова. — 31 мая 2018 г.

6. Качкина А.В. Асимптотика спектра оператора Штурма–Лиувилля с граничным условием в нуле и быстро растущим потенциалом / А.В. Качкина // Библиотека Чебышевского сборника: материалы XXI Международной конференции, посвященной 85–летию со дня рождения А. А. Карацубы, «Алгебра, теория чисел, дискретная

геометрия и многомасштабное моделирорвание: современные проблемы, приложения и проблемы истории». — 17–21 мая 2022. — г. Тула. — тезисы. — С. 271–273.

МЕТОД ПОТОКОВОЙ ПРОГОНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА КОМПОНЕНТ ЭЛЕКТРОЛИТА[1]

Л.Н. Кашапов, Н.Ф. Кашапов, В.Ю. Чебакова
(Казань, КФУ)
vchebakova@mail.ru

В настоящее время не только открываются и рассматриваются новые возможности применения электролизного оборудования, но также усовершенствуются и существующие модели электролизеры для повышения эффективности в традиционных областях для их применения. Так в [1] рассмотрен щелочной безмембранный электролизер, позволяющий бесперебойно получать водород под высоким давлением. В [2] рассмотрены три подхода в конструировании безмембранных электролизеров для разделения выделившихся газов (водорода и кислорода). Так же электрохимические процессы используются при выщелачивание обедненных рук, электрохимическом оксидирование металлов [3,4]. Математическое моделирование представляется одним из способов исследования разных моделей электролизеров на эффективность. Электролиз относится к гетерогенным реакциям, где основные процессы происходят на границе раздела между металлическим электродом и жидким электролитом. Внутренние процессы в электролитах различаются в зависимости от кислотности среды, так чистая вода является слабым электролитом и диссоциирует с образованием ионов гидрооксония и ионов гидроксида, в щелочных электролитах вода дисоциирует с образованием иона водорода и иона гидрооксида. Так как при этом константа диссоциации воды мала, то зачастую данным процессом пренебрегают, описывая перенес ионов уравнением Нернста—Планка, включающим в себя диффузионные и дрейфовые потоки в отсутствии источника и стока. Таким образом получаются сильные градиенты концентрации ионов в приэлектродной области. При решении разностных уравнений второго порядка, к которым сводятся разностные схемы для задач в случае больших градиентов решения или значений коэффициентов уравнения, по формулам обычной прогонки и последующее

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23–29–00099).

использование численного дифференцирования для вычисления потока часто происходит значительная потеря точности, поэтому для решения таких задач используется потоковой вариант метода прогонки. Данный способ приводится в литературе [5] для уравнений теплопроводности без конвективного слагаемого. В данной работе продемонстрирована применимость модифицированного метода потоковой прогонки для решения уравнения при наличие дрейфового слагаемого. Приведенные примеры тестовых и модельных расчетов подтверждают эффективность использования потоковой прогонки для рассмотренного класса задач. В качестве модельной задачи рассмотрено математическое моделирование процессов выщелачивания цинковой руды. Результаты расчетов сравнивались с данными работы [6].

Литература

1. Solovey V. Development of high pressure membraneless alkaline electrolyzer / V. Solovey , A.A. Shevchenko , M.M. Zipunnikov, A.L. Kotenko, N.T Khiem , B.D. Tri , T.T. Hai // International Journal of Hydrogen Energy. — 2022. — vol. 47, № 11. — pp. 6975–6985

2. Swiegers G.F. Current status of membraneless water electrolysis cells / F.G. Swiegers, A.L. Hoang, A. Hodges, G. Tsekouras, Ch.Y. Lee, K. Wagner, G. Wallace // Current Opinion in Electrochemistry. — 2022. — Vol.32. — art. 100881

3. Мамяченков С.В. Обзор результатов исследования электролитического получения цинковых порошков из щелочных растворов / С.В. Мамяченков , С.А. Якорнов , О.С. Анисимова , Д.И. Блудова // Вестник Иркутского государственного технического университета — 2019. — Т.23., №2. — С. 367–394

4. Sourani F. Corrosion and tribocorrosion behavior of ZrO2–Al2O3 composite coatings developed by plasma electrolytic oxidation for load–bearing implants / F. Sourani, K. Raeissi, M.H. Enayati, M. Kharaziha, A. Hakimizad, G. Blugan, H.R. Salimijazi // Journal of Alloys and Compounds — 2022 — Vol.920 — art. 165856

5. Самарский А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев — М. : Наука,1978. — 592 с.

6. Zhang Y. The Electrowinning of Zinc from Sodium Hydroxide Solutions / Y. Zhang, J. Deng, J. Chen, P. Yu, X. Xing // Hydromettallurgy —2014 — Т.146. —С. 59–63

ЗАВИСИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ МОДЕЛИ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ОТ ВИДА СВЯЗИ[1]

А.А. Кащенко (Ярославль, ЯрГУ)
a.kashchenko@uniyar.ac.ru

В докладе изучается модель кольца из N связанных осцилляторов, представляющая собой систему N нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием:

$$\dot{u}_j + u_j = \lambda F(u_j(t-T)) + \gamma G(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}), \quad j = 1, \ldots, N \qquad (1)$$

с краевыми условиями $u_0 \equiv u_N$, $u_{N+1} \equiv u_1$. Здесь u_j $(j = 1, \ldots, N)$ — действительные функции, параметры λ и T положительные, γ — ненулевой параметр, F — финитная функция (т. е. $F(x) \equiv 0$ вне некоторого отрезка $x \in [-p, p]$), а функция G описывает связь между осцилляторами.

В докладе рассмотрены три различных вида связи между осцилляторами:

1. $G(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) = u_{j+1} - u_j$,
2. $G(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) = u_{j+1} + u_{j-1}$,
3. $G(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) = u_{j+1}$.

Для каждого вида связи изучалось поведение решений модели (1) на полуоси $t \in [0, +\infty)$ при условии $\lambda \gg 1$.

Найдена асимптотика решений модели (1) по большому параметру λ на полуоси $t \in [0, +\infty)$ с начальными условиями из широкого подмножества фазового пространства $C_{[-T,0]}(\mathbb{R}^N)$.

Показано, что при $\gamma > 0$ на некотором интервале изменения параметра γ (границы интервала зависят от функции G) с некоторого момента времени $t_0(\lambda, G)$ наблюдается синхронизация (т. е. совпадение главной части асимптотики) всех осцилляторов. Если же $\gamma < 0$, то на некотором интервале изменения параметра γ (границы интервала зависят от функции G) при четном количестве N осцилляторов с некоторого момента времени $t_0(\lambda, G)$ может наблюдаться двухкластерная синхронизация.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке совета по грантам Президента РФ (проект № МК–2510.2022.1.1).

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА НА ПЛОСКИХ НЕСПРЯМЛЯЕМЫХ КРИВЫХ[1]

Д.Б. Кац (Москва, Московский политехнический университет)
katzdavid89@gmail.com

Доклад посвящен группе результатов, связанных с исследованием краевой задачи Римана на неспрямляемых плоских кривых. Решение этой задачи для кусочно–гладких кривых — одно из общеизвестных достижений советской математики. Классические результаты в этой области получены Ф.Д. Гаховым, Н.И. Мусхелишвили и участниками созданных ими научных школ. Посвященные краевой задаче Римана монографии [1] и [2] неоднократно переиздавались и переведены на многие языки; в этих фундаментальных трудах подробно описана первоначальная история данного раздела анализа. Различные аспекты теории краевой задачи Римана и ее приложений отражены в книгах [3–6] и многих др. Новые работы в этой области появляются ежегодно. Приведем классическую постановку краевой задачи Римана. Пусть простая замкнутая кривая Γ на комплексной плоскости C разбивает эту плоскость на области D^+ и D^-, причем бесконечно удаленная точка лежит внутри второй из них. Мы ищем аналитические в $\overline{C}\setminus\Gamma$ функции $\Phi(z)$, которые имеют в точках $t\in\Gamma$ предельные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ при z стремящемся к t из областей D^+ и D^- соответственно, и эти предельные значения связаны краевым условием

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t)$$

при любом $t\in\Gamma$. Здесь $G(t)$ и $g(t)$ — заданные на Γ функции. Метод факторизации позволяет для решения краевой задачи Римана решать соответствующую задачу о скачке, когда $G\equiv 1$.

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t)$$

Одно из ее решений дается интегралом типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g(t)\,dt}{t-z}, \quad z\notin\Gamma$$

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–71–10094, https://rscf.ru/project/22-71-10094/

Хорошо известно, что если плотность $g(t)$ этого интеграла удовлетворяет условию Гёльдера

$$h_\nu(g;\Gamma) := \sup\left\{\frac{|g(t)-g(t')|}{|t-t'|^\nu} : t,t' \in \Gamma, t' \neq t\right\} < \infty$$

с показателем $\nu \in (0,1]$, то в точках гладкости кривой Γ и в ее угловых точках определяемая этим интегралом функция $\Phi(z)$ имеет предельные значения $\Phi^\pm$ с обеих сторон, и разность этих значений равна значению плотности g. Это доказывает существование решений задачи о скачке на кусочно–гладких кривых. В свою очередь единственность решения обеспечивается теоремой Пенлеве.

Важно отметить: теория граничных значений интеграла типа Коши, теоремы об устранении особенностей голоморфных функций и классический метод факторизации, сводящий краевую задачу Римана к задаче о скачке, подразумевают хотя бы кусочную гладкость кривой, на которой рассматривается задача. Вместе с тем, задача имеет право на существование без такого сильного ограничения. В связи с этим возникает потребность в обобщении техники интегрирования на неспрямляемые кривые и получения аналогов этих классических результатов.

Для спрямляемой замкнутой кривой Γ справедлива формула Грина

$$\int\limits_\Gamma Pdx + Qdy = \iint\limits_{D^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

где D^+ — ограниченная Γ конечная область комплексной плоскости, а $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — заданные в $\overline{D^+}$ непрерывные функции, имеющие внутри этой области частные производные первого порядка. Здесь предполагается, что эти производные интегрируемы в D^+. Допустим, что заданная на Γ функция $u(t)$ имеет продолжение $U(z)$ в область D^+, имеющее в ней интегрируемые частные производные первого порядка. Если кривая Γ кусочно–гладкая, то по формуле Грина

$$\int\limits_\Gamma udz = \int\limits_\Gamma udx + iudy = -\iint\limits_{D^+} \frac{\partial U}{\partial \overline{z}} dz\, d\overline{z}.$$

Если u имеет продолжение в D^- с аналогичными свойствами, то без ограничения общности можно считать носитель этого продолжения компактным, и те же преобразования дают

$$\int\limits_{\Gamma} udz = \iint\limits_{D^-} \frac{\partial U}{\partial \overline{z}} dz\, d\overline{z}.$$

Отсюда

$$\int\limits_{\Gamma} (U^+(z) - U^-(z))dz = -\iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\partial U}{\partial \overline{z}} dz\, d\overline{z},$$

где $U^+(z)$ и $U^-(z)$ — предельные значения U в точке z при приближении к ней из областей D^+ и D^- соответственно. Для существования левой части этого равенства необходима спрямляемость кривой Γ, но правая часть имеет смысл, если эта кривая имеет плоскую меру нуль, а производная $\frac{\partial U}{\partial \overline{z}}$ интегрируема. Это позволяет считать правую часть определением левой в случае, когда кривая Γ неспрямляема.

Введем гладкий аналог ядра Коши. При фиксированном $z \in C \setminus \Gamma$ обозначим через $ca(w, z)$ функцию класса $C_0^\infty(C)$ (по переменной w), совпадающую с $(2\pi i(w-z))^{-1}$ на дуге Γ и в ее окрестности, и равную нулю в окрестности z. Тогда интеграл типа Коши с плотностью u по неспрямляемой дуге Γ — это функция

$$\Phi(z) = \int\limits_{\Gamma} ca(w, z)u(w)\, dw,$$

то есть результат применения к ядру $ca(w, z)$ функционала $\int\limits_{\Gamma} \cdot u\, dw$.

При дополнительных условиях на интегрируемость эта функция голоморфна в $\overline{C} \setminus \Gamma$ и обращается в нуль в бесконечно удаленной точке. Простые преобразования дают

$$\Phi(z) = U(z) - \frac{1}{2\pi i} \iint\limits_{C} \frac{\partial U}{\partial \overline{w}} \frac{dw\, d\overline{w}}{w - z},$$

где U – полный интегратор u.

Граничные свойства обобщенного интеграла Коши по неспрямляемым путям задаются следующим результатом:

Теорема. Пусть Γ есть замкнутая кривая, и для любого $t \in \Gamma$ выполняется неравенство

$$nu > 1 - \frac{1}{2} m(\Gamma; t).$$

Тогда для любой заданной на Γ функции $u \in H_{nu}(\Gamma)$ существует полный интегратор $U(z)$ такой что обобщенный интеграл типа Коши определяет голоморфную в $C \setminus \Gamma$ функцию, исчезающую в бесконечно удаленной точке и имеющую в каждой точке $t \in \Gamma$ непрерывные предельные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ из областей D^+ и D^- соответственно, разность которых равна $u(t)$. Кроме того, в областях D^+ и D^- эта функция удовлетворяет условию Гёлдера с любым показателем, меньшим

$$\min\{t \in \Gamma : 1 - \frac{2(1-nu)}{m(\Gamma;t)}\},$$

Здесь m — показатель Марцинкевича кривой, метрическая характеристика кривой; подробнее о них см. в [7]. Коротко они определяются как

$$m^{\pm}(\Gamma;t) := \sup\{p : \lim_{r\to 0} I_p^{\pm}(t;r) < \infty\}.$$

Литература

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. — М. : Наука, 1977. — 640 с.

2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. — М. : Наука, 1968. — 513 с.

3. Гахов Ф.Д. Уравнения типа свертки / Ф.Д. Гахов, Ю.И. Черский. — М. : Наука, 1978. — 295 с.

4. Говоров Н.В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом / Н.В. Говоров. — М. : Наука, 1986. — 240 с.

5. Данилюк И.И. Нерегулярные граничные задачи на плоскости / И.И. Данилюк. — М. : Наука, 1975. — 295 с.

6. Jian–Ke Lu. Boundary Value Problems for Analytic Functions / Lu Jian–Ke. — Singapore : World Scientific, 1994. — 480 c.

7. Кац Д.Б. Показатели Марцинкевича и их приложения в краевых задачах / Д.Б. Кац // Известия ВУЗов. Математика. — 2014. — № 3.

ДВУХКОМПОНЕНТНАЯ ОКОННАЯ СИСТЕМА НА ОСНОВЕ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ И ТЕТА–ФУНКЦИЙ

Е.А. Киселев, Л.А. Минин, С.Н. Ушаков (Воронеж, ВГУ)
evg-kisel2006@yandex.ru, mininla@mail.ru, ushakowww@ya.ru

Системы функций вида

$$g_{k,m}(x) = \exp\left(-\frac{(x-\omega_1 k)^2}{2}\right)e^{i\omega_2 mx}, k, m \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где $\omega_1, \omega_2 > 0$ — некоторые фиксированные параметры, нашли широкое применение в различных областях математики и физики. В квантовой теории они носят название когерентные состояния, а при условии $\omega_1\omega_2 < 2\pi$ образуют фрейм, называемый также фреймом Габора [1, 2]. Одна из первых прикладных задач была связана с построением квантовой энтропии. Трудность состояла в получении ортонормированного базиса пространства $L_2(\mathbb{R})$ с равномерно ограниченной константой неопределённости из семейства функций (1) при условии $\omega_1\omega_2 = 2\pi$, что в силу теоремы Бальяна—Лоу оказывается невозможным [2]. Мы предлагаем обойти указанную проблему, используя многокомпонентные оконные системы, порожденные не одной, а несколькими функциями.

Рассмотрим семейство функций (1) при $\omega_1\omega_2 = 4\pi$. Из него можно получить ортонормированную систему с равномерно ограниченной константой неопределённости, которая, однако, не является полной в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ [3, 4]. Действительно, как следует из результатов статьи [3], набор функций

$$u_\alpha(x) = \exp\left(-(\alpha-1)\frac{x^2}{2}\right)\theta_3\left(-\frac{\pi\omega_2}{\omega_1}\left(\frac{\alpha x}{\omega_2} - \frac{i}{2}\right), q\right), \tag{2}$$

с параметрами

$$q = \exp\left(-\frac{\pi\omega_2}{\omega_1}\left(1 - \frac{2\pi}{S}\alpha\right)\right), 1 < \alpha < \frac{S}{2\pi}, S = \omega_1\omega_2 > 2\pi.$$

ортогонален всем $g_{k,m}(x)$, $k, m \in \mathbb{Z}$, если $\omega_1\omega_2 > 2\pi$. Здесь $\theta_3(x, q)$ — третья тета–функция Якоби [5]

$$\theta_3(x, q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} e^{2ikx}, |q| < 1.$$

Мы предлагаем рассмотреть неполную оконную систему (1) с параметрами $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 4\pi$, дополнив её с помощью (2) при $\alpha = 3/2$ с применением операции сдвига к самой функции $u_\alpha(x)$ и к её образу Фурье. В результате получается двухкомпонентная оконная система следующего вида

$$g_{k,m}(x) = \exp\left(-\frac{(x-k)^2}{2}\right)e^{i4\pi mx}, k, m \in \mathbb{Z},$$

$$u_{k,m}(x) = u(x-k)e^{i4\pi mx},$$

$$u(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)\theta_3\left(\frac{3\pi x}{2}, q\right)e^{i2\pi x}, q = \exp(-\pi^2).$$

Её подсемейства $g_{k,m}(x)$ и $u_{k,m}(x)$ взаимно ортогональны. Таким образом, для получения ортонормированной системы, достаточно ортогонализовать отдельно $g_{k,m}(x)$ и $u_{k,m}(x)$. Для $g_{k,m}(x)$ это было сделано ранее [4], а ортогонализация $u_{k,m}(x)$ численно выполнена в рамках данной работы. Вопрос о полноте построенной двухкомпонентной остается открытым.

Литература

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши; пер. с англ. Е. В. Мищенко; под ред. А. П. Петухова. — Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2004. — 464 с.

2. Christensen O. An introduction to frames and Riesz bases / O. Christensen. — Basel: Birkhäuser/Springer, 2016. — 704 p.

3. Jacobi Theta–Functions and Systems of Integral Shfts of Gaussian Functions / M. V. Zhuravlev, E. A. Kiselev, L. A. Minin, S. M. Sitnik // Journal of Mathematical Sciences. — 2011. — V. 173, No. 2. — P. 231–242.

4. Киселев Е. А. Вычисление констант Рисса и ортогонализация для неполных систем когерентных состояний с помощью тета–функций / Е. А. Киселев, Л. А. Минин, И. Я. Новиков // Математический сборник. — 2016. — Т. 207, № 8. — С. 101–116.

5. NIST handbook of mathematical functions / F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, C. W. Clark (Eds.). — Cambridge: Cambridge University Press, 2010. — 951 p.

ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО РОДА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В.А. Киричек (Самара, Самарский университет)
vitalya29@gnmail.com

В докладе рассматривается следующая задача: Найти в области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$ решение уравнения

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t) \qquad ,$$

удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0$$

и нелокальным условиям

$$\alpha(t)u(0,t) + \int_0^l K_1(x)u(x,t)dx = 0, \quad \beta(t)u(l,t) + \int_0^l K_2(x)u(x,t)dx = 0, \tag{1}$$

где $\alpha, \beta \in C^2[0,T]$, причем $\alpha(0) = \beta(T) = 0$.

Метод, разработанный в [1] для доказательства разрешимости задачи с нелокальными условиями вида (1) при условии, что $\alpha(t), \beta(t)$ не обращается в нуль ни в одной точке $[0,T]$, неприменим в данном случае.

В работе показаана эквивалентность интегральных условий (1) и динамических нелокальных условий, что позволило обосновать существование единственного решения поставленной задачи.

Отметим также, что для многомерного гиперболического уравнения случай одного интегрального условия, был рассмотрен в [2].

Литература

1. Кожанов А.И. О краевых задачах с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений / А.И. Кожанов, Л.С. Пулькина // Дифференц. уравнения — 2006. — Т. 42, № 9. — С. 1166 – 1179.

2. Pulkina L.S. Nonlocal problems for hyperbolic equations with degenerate integral conditions // Electronic journal of Differential Equations — Vol.2016. — № 193. — P. 1 – 12.

ОДНА ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ МОДЕЛИ ЛОРЕНЦА, ВОЗМУЩЕННОЙ БЕЛЫМ ШУМОМ

Ю.Ю. Клевцова
(Новосибирск, Институт систем информатики им. А. П. Ершова СО РАН, Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики)
yy_klevtsova@ngs.ru

В настоящей работе рассматривается квазисоленоидальная модель Лоренца бароклинной атмосферы с параметрами [1]. Правая часть системы возмущается белым шумом. Рассматривается стационарная мера для этой системы. В [2] были получены: существование и единственность стационарной меры, а также оценка скорости сходимости к этой мере распределений всех решений из некоторого класса при $t \to \infty$. Настоящая работа посвящена исследованию невязкого предела стационарных мер. Хорошо известно, что коэффициент кинематической вязкости на практике чрезвычайно мал. Приводится одна теорема о существовании невязкого предела стационарных мер и указываются ряд интегральных свойств предельной меры.

Литература

1. Lorenz E.N. The Mechanics of Vacillation / E.N. Lorenz // J. Atmos. Sci. — 1963. — V. 20. — P. 448–464.

2. Клевцова Ю.Ю. О скорости сходимости распределений решений к стационарной мере при $t \to +\infty$ для стохастической системы модели Лоренца бароклинной атмосферы / Ю.Ю. Клевцова // Матем. сб. — 2017. — Т. 208, № 7. — С. 19–67.

ФУНКЦИЯ ПОТРЕБЛЕНИЯ И КАПИТАЛА И ИХ МОНОТОННОСТЬ В МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

А.И. Козко, Л.М. Лужина, А.Ю. Попов, В.Г. Чирский (Москва, МГУ имени Ломоносова)
prozerpi@yahoo.co.uk, lluzhina@gmail.com, vgchirskii@yandex.ru

В модели Рамсея–Касса–Купманса (см. [1] – [6]), применяемой в теории экономического роста, определяющую роль играет система двух дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют функции $K(t)$ — капитал в момент времени t и $C(t)$ — потребление в момент времени t:

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = aK^{\alpha}(t) - bC(t) - x_3K(t), \\ \dot{C}(t) = \theta^{-1}\alpha a K^{\alpha-1}(t)C(t) - x_2C(t). \end{cases} \tag{1}$$

В систему входит набор констант $(a, b, \alpha, \theta, x_2, x_3)$, характеризующих рассматриваемую экономическую структуру. Нами получен ряд результатов о поведении функций $K(t)$ и $C(t)$. Сформулируем некоторые из них.

Введём величины λ и H по формулам $\lambda = \frac{\theta-1}{\theta} \cdot \frac{f(K_0)}{bC_0} - 1$, $H = \frac{\alpha}{\theta}\frac{f(K_0)}{x_2K_0}$. Положим $F(y) = \int\limits_1^y z^{-1}(\lambda z^{\theta} + z)^p dz$, где $p = \frac{1}{\alpha} - 1$, $R(y) = H(1+\lambda)^p + pF(y) - (\lambda y^{\theta} + y)^p$.

Лемма *При условиях $\theta > 1$, $H > 1$, $\lambda > 0$, $p \leqslant 1$, функция $R(y)$ имеет на луче $1 < y < +\infty$ единственный корень $y = y_0(\lambda, H, p, \theta)$, причём*

$$R(y) > 0 \text{ при } 1 \leqslant y < y_0(\lambda, H, p, \theta),$$
$$R(y) < 0 \text{ при } y_0(\lambda, H, p, \theta) < y < +\infty.$$

Теорема 1. *Пусть $\theta > 1$, $\lambda > 0$, $H > 1, \alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$. Положим $p = \frac{1}{\alpha} - 1$, $y(t) = \mathcal{F}\left(\left(\frac{H}{p}\right)(\lambda+1)^p\left(e^{px_2t} - 1\right)\right)$, $\hat{C}(y) = y\left(1 + \frac{pF(y)}{H(\lambda+1)^p}\right)^{-\frac{1}{p}}$, где функция $\mathcal{F}$ — обратная к F. Тогда вторая компонента $C(t)$ решения системы (1) с начальными условиями $K(0) = K_0$, $C(0) = C_0$ задаётся формулой $C(t) = C_0\hat{C}(y(t))$, $t \in [0, +\infty)$. Функция $\hat{C}(y)$ возрастает на отрезке $1 \leqslant y \leqslant y_0(\lambda, H, \frac{1}{\alpha} - 1, \theta)$ и убывает на луче $y_0(\lambda, H, \frac{1}{\alpha} - 1, \theta) \leqslant y < +\infty$ (величина y_0 определена в лемме). Функция $C(t)$ возрастает на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_0(\lambda, H, \alpha, \theta)$ и убывает на луче $t_0(\lambda, H, \alpha, \theta) \leqslant t < +\infty$, где*

$$t_0(\lambda, H, \alpha, \theta) = \frac{1}{px_2}\ln\left(1 + \frac{pF(y_0(\lambda, H, p, \theta))}{H(\lambda+1)^p}\right).$$

Литература

1. Барро Р.Дж. Экономический рост / Р.Дж. Барро, Х. Сала–и–Мартин // М. : БИНОМ. Лаборатория знаний. — 2010.

2. Козко А.И. Метод приближённого решения системы дифференциальных уравнений из модели Рамсея — Касса — Купманса, основанный на решении в квадратурах одного подкласса сходных

систем / А.И. Козко, Л.М. Лужина, А.Ю. Попов, В.Г. Чирский // Чебышевский сборник. — 2022. — Т. 23, вып. 4. — С. 115–125.

3. Козко А.И. Оптимальная экспонента в задаче Рамсея–Касса–Купманса с логарифмической функцией полезности / А.И. Козко, Л.М. Лужина, А.Ю. Попов, В.Г. Чирский // Чебышевский сборник. — 2019. — Т. 20, вып. 4. — С. 197–207.

4. Козко А.И. О задаче Рамсея–Касса–Купманса для потребительского выбора / А.И. Козко, Л.М. Лужина, А.Ю. Попов, В.Г. Чирский // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2020. — Т. 182. — С. 39–44.

5. Козко А.И. Оценка необходимого начального экономического ресурса в задаче Рамсея–Касса–Купманса / А.И. Козко, Л.М. Лужина, А.Ю. Попов, В.Г. Чирский // Чебышевский сборник. — 2019. — Т. 20, вып. 4. — С. 188–196.

6. Козко А.И. Функция потребления в модели экономического роста Рамсея–Касса–Купманса в случае стационарности функции сбережения / А.И. Козко, Л.М. Лужина, А.Ю. Попов, В.Г. Чирский // Чебышевский сборник. — 2022. — Т. 23, вып. 1. — С. 118–129.

СУПЕРОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ИТЕРАТИВНО РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ МЕТОДОВ ГАУССА–НЬЮТОНА[1]

М.М. Кокурин

(Йошкар–Ола, Марийский государственный университет)

kokurin@nextmail.ru

Изучаются нелинейные операторные уравнения вида $F(x) = 0_Y$ с оператором $F : X \to Y$ в гильбертовых пространствах X, Y. Существование и единственность решения $x^* \in X$ предполагаются. Кроме того, мы предполагаем, что оператор F непрерывно дифференцируем по Фреше, а его производная Фреше удовлетворяет условию Липшица. Рассматриваются итеративно регуляризованные методы Гаусса–Ньютона для решения таких уравнений. Эти методы имеют вид

$$x_{n+1} = \xi - \Theta(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n)F'^*(x_n)[F(x_n) - F'(x_n)(x_n - \xi)]. \quad (1)$$

Здесь $x_0, \xi \in X$ есть начальные приближения для искомого решения x^*, $\{\alpha_n\}$ — последовательность параметров регуляризации, удовле-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22–71–10070).

творяющая условиям

$$0 < \alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n, \quad \sup_{n=0,1,\ldots} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \equiv r < +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

Функция от оператора в (1) понимается в смысле исчисления самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. На порождающую функцию $\Theta(\lambda, \alpha)$ накладывается ряд условий, которым, в частности, удовлетворяют функции $\Theta(\lambda, \alpha) = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \left(\frac{\alpha}{\lambda+\alpha}\right)^m\right)$, $m \in \mathbb{N}$.

Известно, что для методов (1) при выполнении условия истокопредставимости $x^* - \xi = (F'^*(x^*)F'(x^*))^p w$, $p \in \left[\frac{1}{2}, p^*\right]$, $w \in X$ и при наложении дополнительных условий на начальное приближение x_0, параметры α_n и величину $\|w\|$ справедлива оценка

$$\|x_n - x^*\| \leqslant C\alpha_n^p, \quad n \in \mathbb{N}, \quad C = \mathrm{const}. \tag{2}$$

Таким образом, при увеличении показателя p в условии истокопредставимости скорость сходимости метода (1) растёт, но только пока этот показатель не достигнет значения насыщения p^*. Величина p^* различна у разных методов вида (1): например, для методов с порождающими функциями $\Theta(\lambda, \alpha) = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \left(\frac{\alpha}{\lambda+\alpha}\right)^m\right)$, $m \in \mathbb{N}$ справедливо $p^* = m$. Известна и обратная теорема о сходимости методов (1), устанавливающая необходимость условия истокопредставимости с любым показателем из промежутка $(0, p)$ для справедливости оценки (2), см. [1,гл.2].

В настоящей работе доказывается суперобратная теорема о сходимости методов (1), усиливающая обратную теорему. А именно, устанавливается, что оценка (2) с показателем p, превышающим показатель насыщения p^*, возможна лишь в случае, когда $x^* = \xi$.

Литература

1. Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю. Алгоритмический анализ нерегулярных операторных уравнений / А.Б. Бакушинский, М.Ю. Кокурин. // М. : ЛЕНАНД, — 2012. — 312 с.

О ВЫБОРЕ МНОЖЕСТВ ИСТОЧНИКОВ И ДЕТЕКТОРОВ ПРИ РЕШЕНИИ ТРЁХМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СКАЛЯРНОЙ АКУСТИКИ[1]

М.М. Кокурин[1], А.В. Гаврилова[1], В.В. Ключев[1], А.Б. Бакушинский[2], А.С. Леонов[3]

([12]Йошкар–Ола, Марийский государственный университет, [23]Москва, [2]Ин–т системного анализа ФИЦ ИУ РАН, [3]Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»)

kokurin@nextmail.ru

Рассмотрим обратную задачу акустического зондирования в следующей постановке. Акустическая неоднородность, локализованная в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$, зондируется волновыми полями, порождёнными точечными источниками, которые расположены в точках множества $Y \subset \mathbb{R}^3$, где $Y \cap D = \varnothing$. Акустическое поле $u(x,t) = u^{(y)}(x,t)$, возбуждаемое в момент $t = 0$ источником в точке $y \in Y$, определяется решением задачи Коши

$$\tfrac{1}{c^2(x)} u^{(y)}_{tt}(x,t) = \Delta u^{(y)}(x,t) - \delta(x-y)g(t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geqslant 0;$$
$$u^{(y)}(x,0) = 0, \quad u^{(y)}_t(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Величина $c(x) > 0$ есть скорость звука в точке $x \in \mathbb{R}^3$. Предполагается, что функция $c(x)$ кусочно–непрерывна и равна известной константе c_0 вне области D. На функцию g также накладывается ряд условий. Рассматриваемая обратная задача заключается в нахождении функции $c(x)$ при $x \in D$ по данным измерения рассеянного поля $u = u^{(y)}(z,t)$, $y \in Y$ при $t > 0$ в точках $z \in Z$, где $Z \subset \mathbb{R}^3$ — множество детекторов, причём $Z \cap D = \varnothing$.

Известно, что данная обратная задача приводится к уравнению Лаврентьева

$$\int\limits_D \frac{\xi(x)dx}{|x-y||x-z|} = f(y,z), \quad (y,z) \in Y \times Z$$

относительно функции $\xi(x) = \frac{1}{c^2(x)} - \frac{1}{c_0^2}$, $x \in D$. Мы доказываем единственность решения данного уравнения в случае, когда Z — замкнутая область, лежащая в плоскости, не пересекающей множество D,

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22–71–10070).

а Y — интервал, принадлежащий неограниченной компоненте $L\backslash\overline{D}$, где L — произвольная прямая. Ранее этот результат был известен только для случая, когда прямая L не пересекает D. Выполнены численные эксперименты с различными функциями $c(x)$, описывающими акустическую неоднородность, при разных положениях множества источников Y и множества детекторов Z. Кроме того, рассмотрен вопрос о единственности решения многомерного уравнения Лаврентьева.

Также рассматривается другая постановка обратной задачи акустического зондирования, в рамках которой источник колебаний имеет вид $f(x)e^{i\omega t}$, $f(x) = \sum\limits_{m} \delta(x - x_m)$, т.е. состоит из точечных δ–образных источников с координатами x_m и фиксированной частотой ω. Зондируемая область и множество детекторов в этой постановке задачи представляют собой плоские параллельные слои конечной толщины. Для решения данной задачи применяется разработанный авторами быстрый численный алгоритм, включающий решение специальных одномерных уравнений Фредгольма 1 рода, причём в случае неоднозначности решения последних ищутся их нормальные решения. Проводится систематическое численное исследование влияния различных параметров в схеме регистрации данных обратной задачи на точность приближённых решений, получаемых с помощью алгоритма. В частности, изучается зависимость этой точности от положения точечных и составных источников, вызывающих звуковые колебания, зависимость её от положения слоя детекторов, от числа плоскостей, в которых лежат детекторы. Показано, что приемлемую точность приближённых решений можно получить уже при двух таких слоях. Установлено, что для регуляризации некорректной обратной задачи решения интегральных уравнений предпочтительнее использовать метод Тихонова, чем известный метод TSVD. Кроме того, предложен подход к численному исследованию неоднозначности решения рассматриваемой обратной задачи. Подход ориентирован на сравнении нескольких нормальных решений, вычисляемых относительно различных элементов, для одномерных интегральных уравнений из задачи.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СТЕНКИ АРТЕРИИ ПО ДАННЫМ УЗИ И АРТЕРИАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ[1]

М.М. Кокурин, Д.А. Пахмутов
(Йошкар–Ола, Марийский государственный университет)
kokurin@nextmail.ru, dmitryaric@mail.ru

Целью работы является решение обратной задачи идентификации параметров стенки артерии по данным измерения артериального давления и данным видео УЗИ артерии. В этой задаче известными являются функция $p(t)$, описывающая артериальное давление в динамике, и функция $\eta(t)$, показывающая радиальное смещение артериальной стенки и получаемая нейросетевой обработкой видео УЗИ. Для описания тока крови по артерии используются линеаризованные уравнения Навье–Стокса, дополненные уравнениями колебания гибкой оболочки с учётом её анизотропной структуры, см. [1]. В рамках этой модели выводятся формулы, устанавливающие связь между коэффициентами разложения функций $p(t)$ и $\eta(t)$ в ряд Фурье. Эти формулы включают в себя ряд параметров, имеющих диагностическую ценность, в т.ч. модули Юнга и Пуассона, характеризующие упругие свойства стенки артерии. В число реконструируемых параметров можно включить и характеристики тока крови, такие как вязкость. Задача идентификации интересующих параметров приводится к системе уравнений вида

$$a_n(\pi) = a_n^*, \quad b_n(\pi) = b_n^*, \quad 1 \leqslant n \leqslant M$$

относительно вектора параметров $\pi \in \mathbb{R}^m$. Здесь a_n^*, b_n^* — коэффициенты ряда Фурье измеренной функции $\eta(t)$, а $a_n(\pi)$, $b_n(\pi)$ — те же коэффициенты, рассчитанные из математической модели по известной функции $p(t)$. Ввиду неточности измерений функций $p(t)$ и $\eta(t)$, данная система уравнений может не иметь решений. Поэтому мы заменяем её на задачу минимизации функции

$$f_M(\pi) = \sum_{n=1}^{M} (K|a_n(\pi) - a_n^*| + |b_n(\pi) - b_n^*|).$$

Число K играет весовую роль и определяется опытным путём. Ввиду того, что функция f_M не является гладкой, для её минимизации ис-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22–71–1–0070).

пользуется метод без использования производных — метод Нелдера-Мида.

Для тестирования предлагаемого метода решения обратной задачи вначале строятся модельные примеры с заранее известным решением π. Эти примеры мы получаем, решая соответствующую прямую задачу, т.е. задавая вектор параметров π и функцию $p(t)$, а затем рассчитывая соответствующую им функцию $\eta(t)$. Также моделируются погрешности во входных данных обратной задачи. Приводятся результаты численных экспериментов, показывающие эффективность предлагаемого метода.

Литература

1. Tsangaris S. Pulsating blood flow in an initially stressed, anisotropic elastic tube: linear approximation of pressure waves / S. Tsangaris, D. Drikakis // Medical & Biological Engineering & Computing. — 1989. — V. 27. — P. 82–88.

ОБ УСТОЙЧИВЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССАХ В СХЕМЕ КВАЗИРЕШЕНИЙ[1]

М.Ю. Кокурин (Йошкар–Ола, МарГУ)
kokurinm@yandex.ru

Рассматривается класс условно–корректных задач, для которых выполнена гельдерова оценка условной устойчивости на выпуклом компакте в гильбертовом пространстве. Оператор прямой задачи и правая часть уравнения заданы с погрешностями, близость производных точного и возмущенного оператора не предполагается. Исследуются свойства выпуклости и одноэкстремальности функционала невязки метода квазирешений. Для этого функционала устанавливается, что каждая его стационарная точка на множестве условной корректности, не слишком далекая от искомого решения исходной обратной задачи, лежит в малой окрестности решения. Даны оценки диаметра указанной окрестности в терминах погрешностей входных данных. Показано, что эта окрестность является аттрактором итераций метода проекции градиента и получены оценки скорости сходимости итераций к аттрактору [1, 2]. Приводятся результаты численных экспериментов.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 20–11–20085).

Литература

1. Kokurin M.Y. On the global minimization of discretized residual functionals of conditionally well–posed inverse problems // Journal of Global Optimization. — 2022. — V. 84. — P. 149–176.

2. Kokurin M.Y. On solution sets of nonlinear equations with nonsmooth operators in Hilbert space and the quasi–solution method // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2021. — V. 500. — P. 125–126.

ЭКСТРЕМАЛИ ФРЕДГОЛЬМОВА ФУНКЦИОНАЛА ВБЛИЗИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ МИНИМУМА С ОМБИЛИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

И.В. Колесникова (Воронеж, ВГУ)
kolinna@inbox.ru

К изучению поведения гладких функционалов вблизи угловых особых точек края банахова многообразия приходится обращаться как в пределах «чистой» теории особенностей гладких функционалов, так и в рамках задач прикладной направленности — теории управления, теории фазовых переходов, теории бифуркаций периодических волн и т.д. В этих теориях естественным образом возникают нелинейные вариационные задачи с полуограничениями

$$V(x) \longrightarrow \inf, \quad g_k(x) \geqslant 0, \quad x \in M,\ k = 1, 2, \dots, m,$$

в которых $V(x)$, $g_k(x)$ — гладкие функционалы на гладких банаховых многообразиях. Такие задачи приводят к вопросу о бифуркациях экстремалей из угловой точки края банахова многообразия.

Пусть гладкое семейство гладких функционалов $V(x, \lambda)$ задано при ограничениях на основной аргумент в виде двух неравенств, задающих неособо пересекающиеся гладкие поверхности и выделяющих $2-$гранный угол: $\mathcal{C} = \{x \in E|\ g_i(x) \geqslant 0,\ i = 1, 2\}$ (случай ограничения в виде одного неравенства дает так называемую краевую особенность).

Точка $a \in \mathcal{C}$ называется условно критической для $V(x, \lambda)$, если $\mathrm{grad}_H V(a, \lambda)$ ортогонален грани $\mathcal{C}$, содержащей a. Все критические точки a делятся на угловые ($g_1(a) = g_2(a) = 0$), краевые ($g_1(a)g_2(a) = 0,\ |g_1(a)| + |g_2(a)| \neq 0$) и внутренние ($g_1(x)g_2(x) \neq 0$). Множество всех угловых точек называется вершинной гранью угла или, более кратко, вершиной угла.

Анализ поведения $V(x,\lambda)$ можно провести, перейдя к функции $W(\xi) := \inf\limits_{x:g(x)=\xi} V(x)$ — по какой–либо схеме конечномерной редукции [1]. Здесь $g(x) = (g_1, g_2, \ldots, g_m)^\top$, $\{g_k\}$ — набор независимых гладких функционалов (ключевых параметров), включающий в себя пару ограничителей $\{g_1, g_2\}$, задающих угол.

Функционалы $g_i(x)$ подчинены, как правило, дополнительным "техническим" условиям: предполагается, что $\mathrm{grad}_H\ g_i(x) \in F \quad \forall x \in E$, предполагается, в каждом слое $g^{-1}(\xi)$ существует (вблизи нуля) единственная (морсовская) экстремаль $x = \varphi(\xi)$ и т.д. Подмногообразие $\mathcal{N}$, состоящее из точек $\varphi(\xi)$, называется редуцирующим. Ключевая функция представляет собой сужение функционала V на редуцирующее подмногообразие.

Таким образом, исследование V в угле $\mathcal{C}$ сводится к исследованию функции W в координатном угле $\xi_1 \geqslant 0, \xi_2 \geqslant 0$. Кратность $\widehat{\mu}$ угловой критической точки $x_0 \in \mathcal{C}$ определяется как размерность фактор–алгебры $Q(W,a) = \mathbb{R}[[\xi - \alpha]]/\widehat{\mathfrak{A}}(W,\alpha)$, где α — образ a в пространстве ключевых переменных, $\mathbb{R}[[\xi - \alpha]]$ — алгебра формальных степенных рядов от $\xi - \alpha$, а $\widehat{\mathfrak{A}}(W,\alpha)$ — угловой якобиев идеал в $\mathbb{R}[[\xi - \alpha]]$, порожденный следующим набором функций (точнее, тейлоровскими разложениями этих функций): $\xi_1 \frac{\partial W}{\partial \xi_1}$, $\xi_2 \frac{\partial W}{\partial \xi_2}$, $\frac{\partial W}{\partial \xi_3}$, $\ldots$, $\frac{\partial W}{\partial \xi_m}$. Кратность $\overline{\mu}$ краевой критической точки a, принадлежащей краю $g_1(a) = 0$, определяется как размерность фактор–алгебры $Q(W,a) = \mathbb{R}[[\xi - \alpha]]/\overline{\mathfrak{A}}(W,\alpha)$, где $\overline{\mathfrak{A}}(W,\alpha)$ — краевой якобиев идеал в $\mathbb{R}[[\xi - \alpha]]$, порожденный набором функций: $\xi_1 \frac{\partial W}{\partial \xi_1}$, $\frac{\partial W}{\partial \xi_2}, \ldots,$ $\frac{\partial W}{\partial \xi_m}$. Аналогично определяется кратность особой точки на крае $g_2(a) = 0$. Кратность внутренней точки a определяется обычном образом, как размерность фактор–алгебры $Q(W,a) = \mathbb{R}[[\xi - \alpha]]/\mathfrak{A}(W,\alpha)$, где $\mathfrak{A}(W,\alpha)$ — якобиев идеал в $\mathbb{R}[[\xi - \alpha]]$, порожденный набором первых производных: $\frac{\partial W}{\partial \xi_1}$, $\frac{\partial W}{\partial \xi_2}, \ldots,$ $\frac{\partial W}{\partial \xi_m}$.

Пусть $\hat{M} \in E \times R^q$ — многообразие катастроф: $\hat{M} = M_0 \cup M_1 \cup M_2$, где M_k определяется соотношениями $f(x,\lambda) = 0, \quad x \in \mathcal{C}_k, \quad \dim\ Ker \frac{\partial [f]_k}{\partial x}(x,\lambda) > 0$. Здесь $\mathcal{C}_0$ — вершинная грань угла, $\mathcal{C}_1$ — край угла, $\mathcal{C}_2$ — внутренность угла, а $[f]_k = \mathrm{grad}_H\ (V\Big|_{\mathcal{C}_k})$.

Каустика Σ функционала в угловой особой точке определяется как образ многообразия катастроф относительно канонической проекции $\pi : E \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$: $\Sigma = \pi(\hat{M})$.

Если заранее известна оценка сверху числом d значений индексов Морса всех бифурцирующих экстремалей, то каждый расклад бифурцирующих экстремалей (bif–расклад) описывается матрицей $L = (l_k^j)$, в которой элемент l_k^j совпадает с количеством критических точек на C_k.

В случае угловой особенности ее версальная развертка определяется как функция $W(x, \lambda)$, для которой совокупность ростков функций $\frac{\partial W}{\partial \lambda_j}(x, 0)$ (начальных скоростей деформации) дает систему линейных образующих в угловом кольце особенности $\hat{Q}_0(W)$. Если эта совокупность является базисом $\hat{Q}_0(W)$, то деформация называется миниверсальной. Если рассмотреть в кольце ростков гладких функций максимальный идеал и профакторизовать его по угловому якобиеву идеалу, то получим усеченное угловое локальное кольцо $\hat{Q}_0^*(W)$. Деформация $W(x, \lambda)$, для которой $W(x, 0) = 0$ и совокупность ростков функций $\frac{\partial W}{\partial \lambda_j}(x, 0)$ образует базис $\hat{Q}_0^*(W)$, называется ограниченной миниверсальной деформацией. Каустика такой деформации называется главной и обозначается Σ (чаще всего каустикой особенности называют главную каустику).

Остановимся на случае симметричной функции W двух переменных, ее главная часть U имеет следующий вид: $\sigma_1^3 + \varepsilon\, \sigma_1^2 + \delta\, \sigma_1 + p\, \sigma_1\sigma_2 + \gamma\, \sigma_2,\ \ \sigma_1 = x_1^2 + x_2^2,\ \sigma_2 = x_1^2 x_2^2.$

Если U — развертка min–особенности шестого порядка, то $p > -4$.

Через $\mathcal{L} = (l_0, l_1, l_2)$ обозначим bif–расклад W (количества минимумов, седел и максимумов).

Теорема.*Если $\mathcal{L}$ — bif–расклад для min–особенности шестого порядка, то на каждой из полуосей кооординат и на диагональных полуосях существует не более двух ненулевых критических точек. Если на одной из этих (восьми) полуосей имеется пара ненулевых критических точек, то эти точки разнотипны (с различными значениями индекса Морса). При этом $l_2 \leqslant 8$. В случае максимального расклада $l_0 \geqslant 5$ и $l_2 \geqslant 4$.*

Теорема. *Если $\mathcal{L}$ — максимальный bif–расклад, то вне диагональных и координатных осей находятся лишь седловые критические точки (8 точек).*

После замены $x_1^2 = y_1,\ x_2^2 = y_2$ получим омбилическую точку минимума в вершине угла $y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant o$. Максимальные bif–расклады особенности в нуле функции W исчерпываются раскладами $(9, 12, 4),\ (5, 12, 8)$.

В полярных координатах $x_1 = r\cos(\varphi)$, $x_2 = r\sin(\varphi)$ получим $\sigma_1 = r^2$, $\sigma_2 = \frac{r^4}{8}(1-\cos(4\varphi))$ и, следовательно,

$$W = r^6 + \varepsilon\, r^4 + \delta\, r^2 + \frac{r^4}{8}(p\, r^2(1-\cos(4\varphi)) + \gamma\,(1-\cos(4\varphi))).$$

Множество критических точек является пересечением кривых M_1 и M_2, определяемых уравнениями $\frac{\partial V}{\partial r} = 0$ (кривая радиально стацинарных точек) и $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ (кривая тангенциально стацинарных точек). Отсюда следует, что M_1 задается уравнением, после приведения подобных слагаемых и сокращения на множитель r, уравнением

$$(6 + \frac{3p}{4}(1-\cos(4\varphi)))r^4 + (4\varepsilon + 2\gamma\,(1-\cos(4\varphi)))r^2 + 2\delta = 0.$$

Кривая M_2 задается уравнением $(p\ r^2 + \gamma)\sin(4\varphi) = 0$. Из последнего уравнения видно, что кривая M_2 состоит из координатных и диагональных прямых линий и окружности $r^2 = -\frac{\gamma}{p}$.

Каждому типу пересечения $M_1 \cap M_1$ соответствует определенный тип строения линий уровня ключевой функции и схема взаимных примыканий критических точек.

Аналогичный анализ можно осуществить и в случае несимметричных ключевых функций.

Литература

1. Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов // Современная математика. Фундаментальные направления. М.: МАИ. — 2004. — Т.12. С. 3–140.

2. Белоглазов А.В. Об угловых особенностях гладких функций в нелинейных задачах математической физики // Труды воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна – 2006. Воронеж: ВорГУ. — 2006. — С. 21–36.

3. Колесникова И.В. Двухмодовые ветвления экстремалей гладких функционалов в точках минимума с однородными особенностями шестого порядка // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – Саратов: СГУ. — 2009. — Т. 9, Вып. 2. — С. 25–30.

4. Колесникова И.В. Даринский Б.М., Сапронов Ю.И. Ветвление фаз кристалла,определяемых термодинамическим потенциалом шестого порядка // Системы управления и информационные технологии. – Москва–Воронеж. — 2009. — № 1(35). — С. 72–76.

РАЗРЕШИМОСТЬ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ В КОНУСЕ

А.Н. Коненков (Рязань, РГУ)
a.konenkov@365.rsu.edu.ru

Пусть Q — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, а ее граница $\partial Q \in C^\infty$. В конусе

$$K = \{(tx,t)\,|\,x \in Q,\ 0 < t < T\}, \quad 0 < T < \infty, \tag{1}$$

с боковой границей $\Sigma = \{(tx,t)\,|\,x \in \partial Q,\ 0 < t \leqslant T\}$, рассматривается первая краевая задача

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u - \Delta u & = & f \text{ в } K, \\ u|_\Sigma & = & 0. \end{array} \right. \tag{2}$$

Краевые задачи для уравнения теплопроводности с одной пространственной переменной в областях, вырождающихся при $t = 0$, исследовались во многих работах, см. [1] и цитированную там литературу. В работах [2,3] для $n = 2$ рассматривалась первая краевая задача в круговом конусе. В [2] для однородного уравнения теплопроводности и ненулевой граничной функции установлено существование решения в весовых пространствах. Для задачи (2) в [3] получено существование и единственность решения в некотором гильбертовом пространстве функций, норма которого содержит u и $\partial_t u$.

Мы рассматриваем задачу (1) с правой частью f, которая локально принадлежит L_∞ и может расти определенным образом при приближении к вершине конуса.

Обозначим через $K_0 = \bar{K}\backslash\{0\}$ замкнутый конус без вершины, $K^\tau = K \cap \{t \leqslant \tau\}$, и для параметра a положим

$$\bar{f}_a(t) = \mathrm{vraisup}_{(x,\tau)\in K^t}\,|f(x,\tau)|e^{-a/\tau}.$$

Теорема. *Для конуса (1) существует число $\gamma > 0$ такое, что если правая часть f измерима и удовлетворяет неравенству*

$$|f(x,t)| \leqslant Me^{\gamma/t}, \quad (x,t) \in K,$$

то существует (обобщенное) решение $u \in C(K_0)$ первой краевой задачи (2), удовлетворяющее оценке

$$|u(x,t)| \leqslant Cte^{\gamma/t}\bar{f}_\gamma(t), \quad (x,t) \in K.$$

Это решение единственно в классе непрерывных в K_0 функций, удовлетворяющих условию

$$\lim_{\substack{(x,t)\to 0\\(x,t)\in K}} e^{-\gamma/t}u(x,t)=0.$$

Литература

1. Ramazanov M. On the Solvability of Heat Boundary Value Problems in Sobolev Spaces / Ramazanov M., Jenaliyev M., Gulmanov N. // Opuscula Math. — 2022. — V. 42, № 8. — P. 75–91.

2. Jenaliyev M.T. On the solution to a two–dimensional heat conduction problem in a degenerate domain / M.T. Jenaliyev, M.I. Ramazanov, M.T. Kosmakova, Zh.M. Tuleutaeva // Eurasian mathematical journal. — 2020. — V. 11, № 3. — P. 89–94.

3. Jenaliyev M.T. On the Solvability of Heat Boundary Value Problems in Sobolev Spaces / M.T. Jenaliyev, M.T. Kosmakova, Zh.M. Tuleutaeva // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — V. 43, № 8. — P. 2133–2144.

ВЕРОЯТНОСТНО–СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНО–ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЗАДАЧ

И.В. Коноплева, Н.С. Знаенко, Л.В. Миронова

(Ульяновск, УИГА)

konopleirina@gmail.com, znaenns@mail.ru, mironova5509@gmail.com

Приведены некоторые примеры использования вероятностно–статистических методов решения задач авиационной тематики. Цель такой методики — формирование у студентов компетенций, необходимых для их дальнейшей профессиональной деятельности.

В [1] приведены оптимальные траектории маршрута полета беспилотника (БПЛА). Авторы применяют результаты этой статьи для составления задач на геометрическую вероятность. Для нахождения вероятности определения места авиационного происшествия, если предполагаемый район имеет форму круга, квадрата или прямоугольника, определяются траектории облета, площадь обследованной БПЛА области и площадь всего района поиска.

При изучении алгебры событий рассматриваются типовые задачи:

Пример 1. Самолет может встретиться с птицами во время взлета (посадки) и во время горизонтального полета. Горизонтальный полет составляет 80% процентов от всего времени полета, а взлет (посадка) — 20%. Вероятность не столкнуться с птицами во время горизонтального полета равна 0,9, а во время взлета (посадки) — 0,6. Найти вероятность того, что воздушное судно не столкнется с птицами. Найти вероятность того, что столкновение с птицами произошло во время взлета (посадки).

Методы, изложенные в [2], используются для расчета надежности технических систем (n последовательно соединенных фильтров разных типов или технических средств обеспечения авиационной безопасности). Определяется структура системы, вероятность и время ее безотказной работы. Применение методов математического программирования позволяет найти оптимальное количество резервных элементов каждого типа при заданной надежности всей системы и ограничениях по стоимости. Такие задания можно составлять как типовой расчет, состоящий из продолжающихся подзадач разной степени сложности и варьировать их в зависимости от количества часов, предназначенных для изучения темы.

Регрессионно–корреляционный анализ применяется для статистического анализа расхода авиатоплива, качества авиационного масла в зависимости от времени, причин авиапроисшествий:

Пример 2. По данным наблюдений за авиационными происшествиями в n аэропортах изучить зависимость времени проведения аварийно–спасательных работ y (мин) от времени эвакуации пассажиров из самолета x_1 (мин) и времени приезда аварийно–спасательного расчета x_2 (мин) (или времени сообщения на пульт службы спасения). Построить двухфакторную линейную регрессионную модель. Определить силу воздействия факторов на результат, тесноту связи между факторными признаками и результативным. С помощью F–критерия Фишера при заданном уровне значимости оценить статистическую надежность уравнения регрессии.

Непросто найти данные для составления задач профессиональной направленности, т.к. информация о работе авиапредприятий отсутствует в открытом доступе. Они собираются студентами в ходе выполнения проектов. Такие исследования вызывают большой интерес даже на 1 и 2 курсах. Умение найти, обработать данные, проанализировать результаты, сделать выводы, позволяет получить навыки исследовательской работы.

Решение прикладных задач мотивирует студентов глубже изучать математические методы, использовать их при написании курсовых работ по специальным дисциплинам и ВКР.

Создание банка данных профессионально–ориентированных задач и использование их в учебном процессе — один из эффективных методических приемов повышения качества математического образования. Результативность такой методики подтверждена многолетними наблюдениями.

Литература

1. Мельников А.В. Построение оптимальной траектории полета беспилотного лететельного аппарата при выполнении задачи поиска / А.В. Мельников, В.А. Гайдай, Е.А. Рогозин // Вестник Воронежского института МВД России. — 2017. — № 1. — С. 51–62.

2. Половко А.М. Основы теории надежности / А.М. Половко, С.В. Гуров. // БХВ — Санкт–Петербург, 2006. — 702 с.

О СХОДИМОСТИ ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ МЕТОДА ФУРЬЕ В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С РЕГУЛЯРНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

В.В. Корнев (Саратов, СГУ)
KornevVV@sgu.ru

Рассмотрим смешанную задачу

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t < \infty; \tag{1}$$

$$\begin{gathered} u_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = 0, \\ u_x(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) = 0; \end{gathered} \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \tag{3}$$

где функции, входящие в (1)–(3), комплекснозначные и $f(x,t) \in$ $\in L(Q_T)$, $Q_T = [0,1] \times [0,T]$, при любом $T > 0$.

Формальное решение этой задачи по методу Фурье представимо (см. [1]) в виде ряда

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right) \times \left[\int\limits_0^t R_\lambda(f(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\right] d\lambda, \tag{4}$$

где $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L:

$$Ly = -y''(x), \quad y'(0) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = y'(1) + \alpha_2 y(0) + \beta_2 y(1) = 0,$$

E — единичный оператор, $\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \geqslant 0$, γ_n —замкнутый контур в λ–плоскости вокруг n–го собственного значения оператора L, $r > 0$ достаточно велико и фиксировано, n_0 — такой номер, что при $n \geqslant n_0$ внутри γ_n находится по одному собственному значению и все γ_n при $n \geqslant n_0$ находятся вне контура $|\lambda| = r$.

Отметим, что ряд (4) имеет смысл для любой локально суммируемой функции $f(x,t)$.

Пусть $\varphi(x) \in L[0,1]$. Определим ее продолжение $\tilde\varphi(x)$ с $[0,1]$ на все $x \in \mathbb{R}$ по следующему правилу:

$$(\tilde\varphi(-x), \tilde\varphi(1+x))^T = (\tilde\varphi(x), \tilde\varphi(1-x))^T +$$

$$+2M \int\limits_0^x e^{M(x-t)} (\tilde\varphi(t), \tilde\varphi(1-t))^T dt, \quad x \geqslant 0, \tag{5}$$

где $\tilde\varphi(x) = \varphi(x)$ при $x \in [0,1]$, T — знак транспонирования,

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\alpha_2 & -\beta_2 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем через $\tilde f(x,t)$ обозначается функция $f(x,t)$, продолженная при каждом фиксированном $t \geqslant 0$ по правилу (5) с $x \in [0,1]$ на все $x \in \mathbb{R}$.

Отметим, что $\tilde f(x,t)$ локально суммируема в $\mathbb{R} \times [0,\infty)$.

Определим функцию

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde f(\eta,\tau)\, d\eta, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t < \infty.$$

Отметим, что $u_0(x,t)$ — непрерывная функция.

Теорема. *При любом фиксированном* $t \geqslant 0$ *ряд* (4) *сходится к* $u_0(x,t)$ *равномерно по* $x \in [a,b]$ *на любом* $[a,b] \subset (0,1)$.

Замечание. Утверждение теоремы остается в силе и для других краевых условий (2) при надлежащем определении функции $\tilde f(x,t)$ при условии, что краевые условия соответсвующего оператора L являются регулярными.

Литература

1. Хромов А.П. Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения / А.П. Хромов, В.В. Корнев // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2021. — Т. 27, № 4. — С. 215–238.

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ИРРЕГУЛЯРНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РОСТА

М.В. Коровина (Москва, МГУ)
betelgeuser@yandex.ru

Задача о построении равномерных асимптотик решений дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами в окрестности иррегулярных особых точек, в том числе бесконечности является классической задачей аналитической теории дифференциальных уравнений и в общем виде была сформулирована Пуанкаре в работах [1], [2]. В данной работе мы построим общий вид этих асимптотик в пространстве функций экспоненциального роста. Без ограничения общности будем считать, что особой точкой уравнения является ноль.

Рассмотрим уравнение

$$\begin{gathered} a_n(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^n u(x) + a_{n-1}(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} u(x) + ... \\ + a_i(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^i u(x) + ... + a_0(x)\, u(x) = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $a_n(x)$ — функции голоморфные в некоторой окрестности нуля.

Целью нашего исследования является построение асимптотик решений уравнения (1) при $x \to 0$, в предположении, что $x = 0$ является иррегулярной особой точкой. Общий вид асимптотик в окрестности регулярных особых точек хорошо известен.

Как показано в работе [3] уравнение (1) с иррегулярной особенностью в нуле может быть записано в виде

$$\begin{gathered} \hat{H}u(x) = \\ = \left(-\frac{1}{k}x^{k+1}\frac{d}{dx}\right)^n u(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^0(x)\left(-\frac{1}{k}x^{k+1}\frac{d}{dx}\right)^i u(x) = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

где $k \in N$, $a_i^0(x)$ — функции голоморфные в окрестности нуля. В работе [3] найдено минимальное натуральное k.

Определение. *Символом дифференциального оператора $\hat{H}$ называется функция $H(r,p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^0(r)\, p^i$,*

Основным символом Оператора $\hat{H}$ называется полином

$$H_0(p) = H(0,p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^0(0)\, p^i.$$

Вопрос о виде равномерной асимптотики в окрестности иррегулярной особой точки проще всего решается в случае, когда корни основного символа $H_0(p)$ являются простыми. В работах [4], [5] доказано, что асимптотики в этом случае имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n} e^{P_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{\sigma_i} \sum_{k=0}^{\infty} A_i^k x^k,$$

где $P_i(y) = \lambda_i y^k + \alpha_i^{k-1} y^{k-1} + ... + \alpha_i^1 y$, σ_i — комплексное число, $\sum_{k=0}^{\infty} A_i^k x^k$ — асимптотический ряд. Простому j–му корню полинома $H_0(p)$ будет соответствовать асимптотический член вида $e^{P_j\left(\frac{1}{x}\right)} x^{\sigma_j} \sum_{k=0}^{\infty} A_j^k x^k, j = 1, ..., n$.

В случае кратных корней задача построения асимптотик значительно сложнее. В работах [6], [7] построены асимптотики решений в окрестности бесконечности в пространствах функций экспоненциального роста для уравнения (1) в случае, когда $a_n(x) = 1$. Заметим, что бесконечность вообще говоря является иррегулярной особой точкой. В общем случае на вопрос о виде асимптотик в окрестности произвольной иррегулярной особой точки отвечает

Теорема. *Любая асимптотика соответствующая нулевому корню основного символа уравнения (2) в пространстве функций экспоненциального роста представима в виде суммы асимптотических членов вида*

$$u_i(x) \approx \exp\left(P_i\left(x^{-\frac{1}{l_i}}\right)\right) x^{\sigma_i} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^i x^{\frac{k}{l_i}}, i = 1, \ldots, n,$$

где $l_i \in N$, σ_i — комплексные числа, $P_i(x)$ является полиномом степень которого не превышает $2l_i$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^i x^i$ — асимптотический ряд.

Заметим, что корень основного символа $p_i \neq 0$ сдвигается в ноль с помощью экспоненциальной подстановки $u(x) = \exp\left(\frac{p_i}{x^k}\right) u_i(x)$.

Теорема доказана с помощью применения методов ресургентного анализа и метода повторного квантования, основой которого является интегральное представление Лапласа Бореля [8].

Литература

1. Poincaré H. Sur les intégrales irrégulieres des équations linéaires / H. Poincaré // Acta Math. — 1886. — V. 8 — P. 295–344.

2. Poincare H. Analysis of the mathematical and natural works of Henri Poincare. In Selected Works in Three Volumes. Volume 3. Mathematics. Theoretical Physics / H. Poincare. // «Nauka» Publishing House: Moscow. — 1974.

3. Kats D.S. Computation of the asymptotics of solutions for equations with polynomial degeneration of the coefficients / D.S. Kats // Differ. Equ. — 2015. — V. 51, No. 12. — P. 1589–1594.

4. Korovina M.V. Differential equations with degeneration and resurgent analysis / M.V. Korovina, V.E. Shatalov // Differential Equations. — 2010. — V. 46, No. 9. — P. 1267–1286

5. Korovina M.V. Asymptotics of solutions of equations with higher degenerations / M.V. Korovina // Differential Equations. — 2012. — V. 48, No. 5. — P. 717–729

6. Korovina M. Asymptotics of solutions of linear differential equations with holomorphic coefficients in the neighborhood of an infinitely distant point / M. Korovina // Mathematics. — 2020. — V. 8, No. 12. — 2249 p.

7. Korovina M.V. Uniform Asymptotics of Solutions to Linear Differential Equations with Holomorphic Coefficients in the Neighborhood of an Infinitely / M.V. Korovina // Loachevskii J. of Math. — 2023. — V. 44, No. 7.

8. Sternin B. Borel–Laplace Transform and Asymptotic Theory. Introduction to Resurgent Analysis / B. Sternin, V. Shatalov. // CRC Press. — 1995. — 288 p.

ДРОБНО–НАГРУЖЕННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В СЛУЧАЕ ИЗОТРОПНОСТИ ПО УГЛОВОЙ КООРДИНАТЕ[1]

М.Т. Космакова, А.Н. Хамзеева
(Караганда, КарУ им. Е.А. Букетова)
svetlanamir578@gmail.com, aiymkhamzeyeva@gmail.com

В сельскохозяйственном секторе экономики любой страны проблемой является заболачивание и засоление поливных земель в связи с подъемом грунтовых вод при орошении. Известно, что задачи регулирования уровня грунтовых вод при орошении [1] приводят к необходимости исследования краевых задач для нагруженных параболических уравнений. Неустановившееся плоскопараллельное движение грунтовых вод со слабоизменяющейся свободной поверхностью и с непроницаемым горизонтальным водоупором описывается уравнением Буссинеска, которое линеаризацией тоже сводится к нагруженному параболическому уравнению [2].

В работе исследуется двумерная краевая задача по пространственным переменным в области, вырождающейся в начальный момент времени

$$G = \left\{(x;y,t):\ x^2+y^2<t^2,\ t>0\right\}$$

для дробно–нагруженного уравнения

$$\frac{\partial u(x,\,y,\,t)}{\partial t} = a^2\triangle u(x,\,y,\,t)+\lambda\left\{{}_{RL}D^{\beta}_{0t}u(x,y,t)\right\}\Big|_{\sqrt{x^2+y^2}=t/2}+\Phi(x,y,t), \tag{1}$$

с условием ограниченности решения

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} u(x,y,t)=0, \tag{2}$$

и с условием на боковой поверхности конуса

$$u(x,y,t)\Big|_{\sqrt{x^2+y^2}=t} = g(t),\ \ t>0, \tag{3}$$

где $g(t)$ — заданная функция,

$$ {}_{RL}D^{\beta}_{0t}u(x,y,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{u(x,y,\tau)}{(t-\tau)^{\beta}}d\tau \tag{4}$$

---

[1] Это исследование финансируется Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (Grant № AP09259780, 2021–2023).

— производная в смысле Римана–Лиувилля порядка β, $0 < \beta < 1$.

Задача (1)–(3) исследуется в случае осевой симметрии. После введения полярных координат получим следующую задачу.

В области $\Omega_\infty = \{(r,t) : \, r > 0, \, t > 0\}$ найти решение уравнения

$$\frac{\partial \omega(r,\,t)}{\partial t} = a^2 \frac{a^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega(r,\,t)}{\partial r} \right) + \lambda \left\{ {}_{RL}D_{0t}^{\beta} \omega(r,\,t) \right\} \Big|_{r=t/2} + F(r,t) \quad (5)$$

с условием ограниченности решения

$$\lim_{r\to\infty} \omega(r,\,t) = 0, \quad (6)$$

и с начальным условием

$$\omega(r,\,t)\Big|_{t=0} = g(0). \quad (7)$$

Здесь: $\omega(r,\,t) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi, t)$, $F(r,\,t) = \Phi(r\cos\varphi, r\sin\varphi, t)$ в случае изотропности по угловой координате.

Используя [3], выпишем представление решения задачи (5)–(7)

$$\omega(r,t) = \int_0^\infty G(r,\xi,t)\, g(0)\, d\xi + \lambda \int_0^t \int_0^\infty \mu(\tau)\, G(r,\xi,t-\tau)\, d\xi d\tau + f(r,t), \quad (8)$$

где

$$\mu\,(t) = \left\{ {}_{RL}D_{0t}^{\beta} \omega(r,\,t) \right\} \Big|_{r=t/2},$$

$$f(r,t) = \int_0^t \int_0^\infty G\left(r,\xi,t-\tau\right) F\left(\xi,\tau\right)\, d\xi d\tau, \quad (9)$$

$$G(r,\,\xi,\,t) = \frac{\xi}{2\,a^2\,t} \exp\left(-\frac{r^2+\xi^2}{4\,a^2\,t} \right) I_0 \left(\frac{r\xi}{2\,a^2\,t} \right).$$

Здесь: $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя.

Поскольку

$$\int_0^\infty G(r,\xi,t)\, d\xi = 1,$$

то представление (8) примет вид:

$$\omega(r,t) = g(0) + \lambda \int_0^t \int_0^\infty \mu(\tau)\, d\tau + f(r,t). \quad (10)$$

Применив к (10) оператор дробного дифференцирования по формуле (4), подставив $r = t/2$ и учитывая обозначение (9), получим интегральное уравнение

$$\mu(t) - \frac{\lambda}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau = f_1(t) + \frac{g(0)}{\Gamma(1-\beta)} t^{-\beta}, \qquad (11)$$

где функция $f_1(t)$ определяется формулой

$$f_1(t) = \left\{ {}_{RL}D_{0t}^{\beta} f(r,\, t) \right\}\Big|_{r=t/2}. \qquad (12)$$

Решение уравнения (11), полученное с помощью преобразования Лапласа, имеет вид:

$$\mu(t) = g(0)\, t^{-\beta}\, E_{1-\beta,1-\beta}\left(\lambda t^{1-\beta}\right) + f_1(t) + \lambda f_1(t) * t^{-\beta}\, E_{1-\beta,1-\beta}\left(\lambda t^{1-\beta}\right),$$

где $E_{a,b}(z)$ — функция Миттаг–Леффлера, $\star$ — операция свертки.

Тогда, с учетом представления (8), получим решение задачи (5) – (7)

$$\omega(r,t) = g(0)\, E_{1-\beta}\left(\lambda t^{1-\beta}\right) + \lambda f_1(t) * E_{1-\beta}\left(\lambda t^{1-\beta}\right) + f(r,t),$$

здесь $E_{a,1}(z) = E_a(z)$, и функции $f_1(t)$ и $f(r,t)$ определяются соответственно формулами (12) и (9).

Поскольку рассматривается случай изотропности по угловой координате, то $\omega(r,\, t) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi, t) = u(x,\, y,\, t)$ — решение исходной задачи (1)–(3), $F(r,\, t) = \Phi(r\cos\varphi, r\sin\varphi, t) = \Phi(x,\, y,\, t)$ — правая часть в уравнении (1).

Литература

1. Кочина Н.Н. Вопросы регулирования уровня грунтовых вод при поливах / Н.Н. Кочина // Докл. АН СССР. — 1973. — Т. 213, № 1. — С. 51–54.

2. Нахушев А.М., Борисов В.Н. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод / А.М. Нахушев, В.Н. Борисов // Дифференц. уравнения. — 1977. — Т. 13, № 1. — С. 105–110.

3. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А.Д. Полянин. — М. : Физматлит, 2001. — 528 с.

СЛАБАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ СИСТЕМЫ НАВЬЕ–СТОКСА НА ПОЛУОСИ[1]

Е.И. Костенко (Воронеж, ВГУ)
ekaterinalarshina@mail.ru

В $Q = (-\infty, T] \times \Omega$, где $T \geqslant 0$, а $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \subset C^2$ рассматривается задача

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu \triangle v + \nabla p = f(t, x), \qquad (t, x) \in Q_T; \tag{1}$$

$$\operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T; \tag{2}$$

$$v \mid_{(-\infty, T] \times \partial\Omega} = 0. \tag{3}$$

Здесь $v(t, x)$ и $p(t, x)$ искомые скорость и давление рассматриваемой среды, $f(t, x)$ — плотность внешних сил, $\mu > 0$.

Разрешимость рассматриваемой задачи доказывается с помощью метода, основанного на аппроксимации этой задачи более простой задачей и использовании теории степени отображений векторных полей.

Введём функциональное пространство, в котором будет доказана слабая разрешимость рассматриваемой задачи:

$$W = \{v : v \in L_2(-\infty, T; V), v' \in L_1(-\infty, T; V^{-1})\},$$

где V — гильбертово пространство соленоидальных вектор–функций: $V = \{v \in W_2^1(\Omega) : v \mid_\Gamma = 0, \operatorname{div} v(t, x) = 0\}$, V^{-1} — пространство, сопряженное к V.

Определение 1 *Пусть $f \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$. Слабым решением задачи (1)–(3) называется функция $v \in W$, удовлетворяющая при любой $\varphi \in V$ и п.в. $t \in (-\infty, T)$ тождеству*

$$\langle v', \varphi \rangle - \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{n} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \mu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi \, dx = \langle f, \varphi \rangle.$$

Теорема 1 *Пусть $f \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$. Тогда задача (1)–(3) имеет по крайней мере одно слабое решение $v \in W$.*

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22–11–00103).

Литература

1. Звягин В. Г. Аппроксимационно–топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье–Стокса. / В.Г. Звягин, В.Т. Дмитриенко. // М. : Едиториал УРСС. — 2004. — 112 с.

2. Zvyagin V.G. Weak solvability of fractional Voigt model of viscoelasticity // Discrete and Continuous Dynamical Systems — Series A. — 2018. — V. 38. .12. — P. 6327–6350.

УСТОЙЧИВЫЕ РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННО–РАСПРЕДЕЛЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ[1]

Д.С. Костерин (Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова)
kosterin.dim@mail.ru

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{du}{dt} = (A_0 + \varepsilon A_1)u + F_2(u,u) + F_3(u,u,u) + \varepsilon D_0 \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(t,x)dx \quad (1)$$

с периодическим краевым условием

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \quad (2)$$

Здесь $u = u(t,x)$, $t \geqslant 0$, $x \in [0, 2\pi]$, A_0, A_1, D_0 — $n \times n$–матрицы, $F_2(*,*)$, $F_3(*,*,*)$ — линейные по каждому аргументу функции. Считаем, что матрица A_0 имеет пару чисто мнимых собственных значений, все остальные собственные значения имеют отрицательную вещественную часть.

Решение краевой задачи будем искать в виде

$$u(t,x,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}(a\xi(\tau,x)\exp(i\omega t) + \overline{a}\overline{\xi}(\tau,x)\exp(-i\omega t)) + \varepsilon(u_{20}|\xi(\tau,x)|^2 + \\ + u_{21}\xi^2(\tau,x)\exp(2i\omega t) + \overline{u}_{21}\overline{\xi}^2(\tau,x)\exp(-2i\omega t)) + \ldots, \quad \tau = \varepsilon t.$$

Подставив его в уравнение (1) и приравняв коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, получим краевую задачу

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = (1 + i\lambda_0)\xi + (-1 + i\sigma_0)\xi|\xi|^2 + \frac{\gamma}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \xi(\tau,x)dx, \quad (3)$$

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–11–00209, https://rscf.ru/project/22-11-00209/

с периодическим краевым условием

$$\xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x), \tag{4}$$

которую будем называть квазинормальной формой.

Решения квазинормальной формы определяют динамику решений исходной краевой задачи в некоторой достаточно малой и не зависящей от ε окрестности нулевого решения. В настоящей работе исследуется поведение решений квазинормальной формы. Справедлив следующий результат.

Теорема 1. *Краевая задача (3), (4) при $\gamma > -1$ имеет однородное по x и периодическое по t решение вида*

$$\xi(\tau, x) = \pm\sqrt{1+\gamma}\exp((\lambda_0 + \sigma_0(1+\gamma))i\tau).$$

Данное решение является орбитально асимптотически устойчивым.

Рассмотрим вопрос о существовании кусочно–постоянных по x решений. Представим решение задачи (3), (4) в виде

$$\xi(\tau, x) = \begin{cases} \rho_1, & 0 \leqslant x < \alpha, \\ \rho_2 e^{i\varphi}, & \alpha \leqslant x < 2\pi. \end{cases} \tag{5}$$

Подставив его в уравнение (3), получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} \rho_1 - \rho_1^3 = -\frac{\gamma}{2\pi}[\alpha\rho_1 + (2\pi - \alpha)\rho_2\cos\varphi], \\ -\omega\rho_1 + \lambda_0\rho_1 + \sigma_0\rho_1^3 = -\frac{\gamma}{2\pi}(2\pi - \alpha)\rho_2\sin\varphi, \\ \rho_2 - \rho_2^3 = -\frac{\gamma}{2\pi}[\alpha\rho_1\cos\varphi + (2\pi - \alpha)\rho_2], \\ -\omega\rho_2 + \lambda_0\rho_2 + \sigma_0\rho_2^3 = \frac{\gamma}{2\pi}\alpha\rho_1\sin\varphi, \end{gathered}$$

Численно показано наличие решений этой системы. Следовательно, существуют кусочно–постоянные решения квазинормальной формы вида (5). Численно показано, что некоторые из решений квазинормальной формы являются устойчивыми.

Литература

1. Григорьева Е.В., Кащенко С.А. Медленные и быстрые колебания в модели оптико–электронного осциллятора с запаздыванием // Доклады Академии наук.— 2019. — Т. 484, № 1. — С. 21–25.

2. Глызин С.Д., КолесовА.Ю. Периодические режимы двухкластерной синхронизации в полносвязных сетях нелинейных осцилляторов // ТМФ. — 2022. — Т. 212, № 2. — С. 213–233.

3. Глызин С.Д., Колесов А.Ю. Бегущие волны в полносвязных сетях нелинейных осцилляторов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2022. — Т. 62, № 1.— С. 71–89.

ОДНА ИЕРАРХИЧЕСКАЯ ИГРА ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ[1]

К.Н. Кудрявцев (Челябинск, ЮУрГУ (НИУ))
kudrkn@gmail.com

Рассматривается иерархическая игра двух лиц при неопределенности Г, которая ассоциируется с кортежем

$$\langle \{1,2\}, \{\mathrm{X}_i\}_{i=1,2}, \mathrm{Y}, \{f_i(x,y)\}_{i=1,2} \rangle, \tag{1}$$

где $\{1,2\}$ — порядковые номера игроков, $\mathrm{X}_i \subseteq \mathbf{R}^{n_i}$ — множество чистых стратегий i–го игрока ($i = 1,2$); $\mathrm{Y} \subseteq \mathbf{R}^m$ — множество интервальных неопределенностей y. Пары выбранных игроками стратегий образуют ситуации $x = (x_1, x_2)$, множество всех ситуаций $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2 \subseteq \mathbf{R}^{n_1+n_2}$. На множестве всех пар $(x,y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ определены скалярные функции выигрыша игроков $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$.

В игре Г предполагается следующая схема информационного взаимодействия:

на первом шаге игры, игрок 1, являющийся лидером, передает игроку 2 информацию о множестве своих чистых стратегий X_1. На основе этой информации, игрок 2 формирует свою стратегию $x_2(x_1,y)$ как функцию $x_2 : \mathrm{X}_1 \times \mathrm{Y} \to \mathrm{X}_2$ такую, что

$$f_2(x_1, x_2(x_1,y), y) \;=\; \max_{x_2 \in \mathrm{X}_2} f_2(x_1, x_2, y) \quad \forall\, x_1 \in \mathrm{X}_1,\ y \in \mathrm{Y}.$$

На втором шаге, игрок 2 передает первому игроку информацию о выбранной им стратегии $x_2(x_1,y)$. После чего игрок 1 выбирает свою стратегию $x_1^* \in \mathrm{X}_1$ из условия

$$f_1(x_1^*, x_2(x_1^*,y), y) \;=\; \max_{x_1 \in \mathrm{X}_1} f_1(x_1, x_2(x_1,y), y).$$

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23–21–00539, `https://rscf.ru/project/23-21-00539/`.

При этом, в процессе принятия решения, игроки вынуждены рассчитывать на возможность реализации любой неопределенности $y \in \mathrm{Y}$, о которой они не имеют никакой стохастической информации.

Используя идеологию, названную в [1] «аналогом седловой точки», формализуем для игры Γ следующее понятие решения.

Определение. *Ситуацию* $x^{st} = (x_1^{st}, x_2^{st}) \in \mathrm{X}$ *будем называть гарантированным по Парето равновесием по Штакельбергу в иерархической игре* Γ*, если существуют неопределенность* $y_p \in \mathrm{Y}$ *и функция* $x_2 : \mathrm{X}_1 \times \mathrm{Y} \to \mathrm{X}_2$ *такие, что:*
во–первых,

$$f_2(x_1, x_2(x_1, y_p), y_p) \ = \ \max_{x_2 \in \mathrm{X}_2} f_2(x_1, x_2, y_p) \quad \forall\, x_1 \in \mathrm{X}_1;$$

во–вторых

$$f_1(x_1^{st}, x_2^{st}, y_p) \ = \ f_1(x_1^{st}, x_2(x_1^{st}, y_p), y_p) \ = \ \max_{x_1 \in \mathrm{X}_1} f_1(x_1, x_2(x_1, y_p), y_p);$$

в–третьих, y_p *— минимальная по Парето альтернатива* [2] *в двухкритериальной задаче*

$$\langle \mathrm{Y}, \{f_i(x^{st}, y)\}_{i=1,2} \rangle,$$

полученной из (1) *при фиксированной ситуации* $x = x^{st}$*.*

При этом, гарантированные по Парето равновесные по Штакельбергу выигрыши определяются вектором

$$f^{st} = (f_1^{st}, f_2^{st}) = (f_1(x_1^{st}, x_2^{st}, y_p), f_2(x_1^{st}, x_2^{st}, y_p).$$

При «обычных» для теории игр ограничениях, получены достаточные условия существования предложенного равновесия. В качестве модельного примера, рассмотрена модель цепи поставок при учете импорта, для которой построено гарантированное по Парето равновесие по Штакельбергу.

Литература

1. Жуковский В.И. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. I. Аналог седловой точки / В.И. Жуковский, К.Н. Кудрявцев // Математическая теория игр и ее приложения. — 2013. — Т. 5, № 1. — С. 27–44.

2. Подиновский В.В. Парето–оптимальные решения многокритериальных задач / В.В. Подиновский, В.Д. Ногин. — М. : Наука, 1982. — 256 с.

НЕПОЛНОТА СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МОНОМОВ С ПОЧТИ ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

А.Ф. Кужаев (Уфа, УУНиТ, УГНТУ)
arsenkuzh@outlook.com

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k. Считаем, что $|\lambda_k| < |\lambda_{k+1}|$ и $\lambda_k \to \infty, k \to \infty$.

Обозначим $\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^l e^{\lambda_k z}\}_{k=1,l=0}^{\infty,n_k-1}$. Это система функций называется системой экспонент (в ряде источников — системой экспоненциальных мономов), которая соответствует последовательности Λ.

Введём ряд геометрических характеристик последовательности Λ. Символом $n(r,\Lambda)$ обозначим число точек λ_k (с учетом их кратностей n_k), попавших в открытый круг $B(0,r)$, и пусть

$$\bar{n}(\Lambda) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{n(r,\Lambda)}{r}.$$

Величина $\bar{n}(\Lambda)$ называется верхней плотностью последовательности Λ.

Следуя работе [1], будем говорить, что последовательность Λ является *почти вещественной*, если $\mathrm{Re}\lambda_k > 0$ $(k \geqslant 1)$, $\mathrm{Im}\lambda_k/\mathrm{Re}\lambda_k \to 0$, $k \to \infty$.

Положим еще

$$m(\Lambda) = \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{n_k}{|\lambda_k|},$$

$$\sigma_\Lambda(r) = \max\left\{ \sum_{\substack{|\lambda_k|<r,\\ \mathrm{Re}\lambda_k>0}} \mathrm{Re}\frac{n_k}{\lambda_k}, \sum_{\substack{|\lambda_k|<r,\\ \mathrm{Re}\lambda_k<0}} \mathrm{Re}\frac{n_k}{\lambda_k} \right\}.$$

Помимо указанных выше характеристик, широкое применение в ряде вопросов, связанных с (не)полнотой системы экспонент или представления рядами, находит своё применение индекс конденсации S_Λ последовательности Λ, введенный в работе [2]:

$$S_\Lambda = \lim_{\delta\to 0+} \underline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{\lambda_m} \ln \left| \prod_{\lambda_k \in B(\lambda_m, \delta\lambda_m), k\neq m} \left(\frac{z-\lambda_k}{3\delta\lambda_k}\right)^{n_k} \right|.$$

Свойства индекса S_Λ и ряд примеров на его вычисление имеется в работе [3].

Теперь введём в рассмотрение функциональное пространство. Пусть $\rho > 0$. Символом $\Omega_{\Lambda,\rho}$ обозначим множество неотрицательных выпуклых функций на оси $\mathbb{R}$ таких, что $\omega(0) = 0$, $\omega(t) \leqslant \rho|t|, t \leqslant 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \omega(t)/t = +\infty$, и, кроме того, выполнено неравенство

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\omega(2\sigma_\Lambda(t))}{t^2} dt < +\infty$$

Рассматривается также весовое пространство комплекснозначных непрерывных функций на вещественной прямой

$$C^\omega := \{f : \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)e^{-\omega(t)}| < +\infty\}.$$

Символом $W^0(\Lambda, \omega)$ обозначим замыкание линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в пространстве C^ω.

Теорема 1. *Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ является почти вещественной и такой, что $S_\Lambda > -\infty$, $m(\Lambda) < \infty$, $\bar{n}(\Lambda) < \infty$, $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$. Тогда система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве C^ω.*

Данный результат является обобщением соответствующего результата в работе [4].

Литература

1. Кривошеева О.А. Представление функций из инвариантного подпространства с почти вещественным спектром / О.А Кривошеева, А.С. Кривошеев // Алгебра и анализ. — 2017. — Т. 29, № 4. — С. 82—139.

2. Кривошеев А.С. Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях / А.С. Кривошеев // Известия РАН. Серия математическая. — 2004. — Т. 68, № 2. — С. 71–136.

3. Кривошеева О.А. Особые точки суммы ряда экспоненциальных мономов на границе области сходимости / О.А Кривошеева // Алгебра и анализ. — 2011. — Т. 23, № 2. — С. 162–205.

4. Krivosheev A.S., The Representation by Series of Exponential Monomials of Functions from Weight Subspaces on a Line / A.S. Krivosheev, O.A. Krivosheeva, A.F. Kuzhaev // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2021. — V. 42, No. 6. — P. 1183–1200.

КОНЦЕПЦИЯ ИНФОРМАЦИИ В СИСТЕМЕ КОМПЕТЕНЦИЙ ЦИФРОВОЙ КУЛЬТУРЫ

О.А. Кузенков (Нижний Новгород, ННГУ)
kuzenkov_o@mail.ru

Потребности современной цифровой экономики диктуют новые задачи для системы образования. Важнейшей из этих задач является формирования компетенций цифровой культуры. Особенно актуальна она для подготовки специалистов в области информационных и телекоммуникационных технологий. В системе цифровых компетенций базовым, системообразующим понятием является понятие информации. Вместе с тем в программах и учебниках по информатике фундаментальное понятие информации и ее сущности зачастую раскрывается некорректно. Отчасти объясняется это тем, что в настоящее время отсутствует научный консенсус относительно строгого определения информации. В то же время создается явная методическая проблема в обучении. Изучение цифровых технологий требует формальной строгости, логической последовательности и обоснованности, но при этом само обучение начинается с размытых, внутренне противоречивых, интуитивных понятий. Эта проблема вполне осознается разработчиками учебных программ, предпринимаются новые попытки дать более эффективное разъяснение концепции информации.

Цель настоящего исследования состоит в выработке подхода к корректному пониманию термина «информация» при подготовке специалистов в области информационных технологий.

Предлагается понимание информации как результата отображения, при котором выделение подмножества из одного множества приводит к выделению соответствующего подмножества в другом множестве. Как следует из такого подхода, ключевым моментом в понимании информации является процедура выделения подмножества – сокращения числа возможных альтернатив, уменьшение количества допустимых состояний. Это дает возможность содержательного понимания информации, в отличие от ее количественного измерения, которое рассматривается в классической теории информации. Выделение подмножества является частным случаем процессов отбора, для описания которых существует известный математический аппарат. Выделяемое подмножество можно формально математически определить с помощью показателя присутствия элемента во множестве. Он равен нулю, если элемент не входит в выделяемое множество, и строго положителен в противном случае. В качестве такого показателя можно использовать вероятность реализации той или иной альтернативы. Вторым принципиальным моментом в предлагаемом подходе к пониманию информации является процесс отображения. Отображение является формальной основой для кодирования, передачи и сжатия информации.

Предлагаемое объяснение информации позволяет сделать это понятие достаточно строгим, что дает возможность решить методические затруднения при формировании цифровых компетенций. Подобный подход к пониманию информации был использован при модернизации учебной дисциплины «Теория информации» (изучаемой на втором курсе бакалавриата по направлению «Фундаментальная информатика и информационные технологии»).

Литература

1. Кузенков О.А. Компетенции цифровой культуры в математическом образовании и их формирование. / О.А. Кузенков, И.В. Захарова. // Современные информационные технологии и ИТ–образование. 2021. — Т. 17.№ 2 — С. 379–391.

2. Morozov A. Towards the construction of a mathematical rigorous framework for the modeling of evolutionary fitness. / Morozov A., Kuzenkov O. // Bulletin of Mathematical Biology. 2019. — Т. 81. № 11. — С. 4675–4700.

3. Кузенков О.А. Компьютерная поддержка учебно–исследовательских проектов в области математического моделирования процессов отбора / Кузенков О.А., Кузенкова Г.В., Киселева Т.П. // Образовательные технологии и общество. 2019. — Т. 22. № 1. — С. 152–163.

4. Кузенков О.А. Использование электронных средств обучения при модернизации курса «Математическое моделирование процессов отбора / Кузенков О.А., Кузенкова Г.В., Киселева Т.П.// Образовательные технологии и общество. —2018. — Т. 21. № 1. — С. 435–448.

5. Kuzenkov O.A. Mathematical programs modernization based on Russian and international standards / Kuzenkov O.A., Zakharova I.V. // Современные информационные технологии и ИТ–образование. — 2018. — Т. 14. № 1. — С. 233–244.

О ПРОЕКТОРНОМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ДИСКРЕТНЫХ НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С МАЛЫМ ШАГОМ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ[1]

Г.А. Курина, Н.Т. Хоай
(Воронеж, ВГУ, Москва, ФИЦ «Информатика и управление» РАН; Ханой, Университет науки, ВНУ)
kurina@math.vsu.ru, nguyenthihoai@hus.edu.vn

Рассматривается следующая дискретная задача с малым шагом

$$x(t+\varepsilon^2,\varepsilon)=B(t)x(t,\varepsilon)+\varepsilon f(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \tag{1}$$

$$x=x(t,\varepsilon)\in X,\quad \dim X=m,\quad t=0,\varepsilon^2,2\varepsilon^2,...(t\leqslant T),$$

$$x(0,\varepsilon)=x^0. \tag{2}$$

Здесь и далее $\varepsilon\geqslant 0$ означает малый параметр, $m\times m$–матрица $B(t)$ и m–мерная вектор–функция $f(x,t,\varepsilon)$ предполагаются достаточно гладкими по своим аргументам.

Предполагается, что для каждого $t\in[0,T]$ собственные значения $\lambda_1(t),\lambda_2(t),...,\lambda_m(t)$ матрицы $B(t)$ удовлетворяют условиям: $\lambda_j(t)\equiv 1$ для $j=1,...,k$, $k<m$, k собственных векторов, соответствующие этому собственному значению, линейно независимы и $|\lambda_j(t)|<1$ для $j=k+1,...,m$.

Для рассматриваемой задачи в [1] был предложен алгоритм построения асимптотического разложения решения, содержащего пограничные функции двух типов, при этом был представлен явный вид задач только для нахождения асимптотического решения первого порядка. В настоящей работе асимптотическое решение задачи (1), (2) строится с помощью ортогональных проекторов. Этот новый подход полезен для понимания алгоритма построения асимптотики. Он позволяет, в отличие от [1], получить задачи для нахождения членов асимптотики любого порядка в явном виде, что очень удобно для исследователей, применяющих асимптотические методы для решения практических задач. Более того, благодаря явным формулам, можно написать компьютерную программу для нахождения асимптотического решения любого порядка.

Асимптотическое решение задачи (1), (2) ищется в виде

$$x(t,\varepsilon)=\overline{x}(t,\varepsilon)+\sum_{i=1}^{2}\Pi_i x(\tau_i,\varepsilon), \tag{3}$$

[1] Работа первого автора поддержана РНФ (проект № 21–11–00202).

где $\overline{x}(t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \overline{x}_j(t)$, $\Pi_i x(\tau_i,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \Pi_{ij} x(\tau_i)$, $\tau_i = t/\varepsilon^i$, $i = 1,2$ и $\Pi_{ij}x(\tau_i) \to 0$ при $\tau_i \to +\infty$.

Обычным в теории сингулярных возмущений образом, подставляя разложение (3) в (1) и раскладывая полученные соотношения по неотрицательным целым степеням ε, после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε, отдельно зависящих от t и τ_i, $i = 1,2$, находятся уравнения для коэффициентов разложения (3). Аналогично после подстановки (3) в (2) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε получаются равенства для начальных условий членов разложения (3).

Положим $A(t) = B(t) - I$ и разложим пространство X в ортогональные суммы

$$X = \ker A(t) \oplus \operatorname{im} A(t)' = \ker A(t)' \oplus \operatorname{im} A(t).$$

Здесь штрих означает транспонирование. Ортогональные проекторы пространства X на подпространства $\ker A(t)$ и $\ker A(t)'$ обозначим через $P(t)$ и $Q(t)$ соответственно.

Используя проекторы $P(t)$ и $Q(t)$, при некоторых дополнительных условиях доказывается

Теорема 1. *При помощи ортогональных проекторов $P(t)$ на $kerA(t)$ и $Q(t)$ на $kerA(t)'$ можно найти в явной форме выражения задач для определения асимптотического решения задачи (1), (2) вида (3) любого порядка. Последовательность нахождения членов j–го порядка следующая: $(I - P(t))\overline{x}_j(t)$, $(I - P(0))\Pi_{1j}x(\tau_1)$, $(I - P(0))\Pi_{2j}x(\tau_2)$, $P(0)\Pi_{2j}x(\tau_2)$, $P(t)\overline{x}_j(t)$, и $P(0)\Pi_{1j}x(\tau_1)$, $j \geqslant 0$.*

Хотя исходная задача (1), (2) дискретная, только члены асимптотики $\Pi_2 x$ находятся из дискретных уравнений.

Литература

1. Бутузов В.Ф. Об одной задаче теории сингулярных возмущений / В.Ф. Бутузов, Н.Н. Нефедов // Дифференц. Уравн. —1976. — Т. 12, № 10. —С. 1736–1747.

МЕТОД ШТУРМА ДЛЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА ГРАФЕ[1]

Р.Ч. Кулаев, А.А. Уртаева (Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)
kulaevrch@mail.ru; urtaeva-96@mail.ru

В докладе обсуждаются свойства собственных значений и соответствующих собственных функций спектральной краевой задачи четвертого порядка на графе Г:

$$L_\lambda u \equiv \frac{d^2}{d\Gamma^2}\left(p(x)\frac{d^2u}{d\Gamma^2}\right) = \lambda\rho(x)u, \qquad u|_{\partial\Gamma} = (\beta u'' - \vartheta u')\,|_{\partial\Gamma} = 0, \tag{1}$$

где $\partial\Gamma$ – множество граничных вершин Г. При этом, под дифференциальным уравнением в (1) мы подразумеваем набор обыкновенных дифференциальных уравнений на ребрах графа

$$(p_i(x)u_i'')'' = \lambda\rho_i(x)u_i, \quad x\in\gamma_i\subset E(\Gamma), \tag{2}$$

и набор условий согласования в каждой внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$

$$u_i(a) = u(a), \quad \beta_i(a)u_i''(a) - \vartheta_i(a)u_{i\nu}'(a) = 0, \quad i\in I(a), \tag{3}$$

$$\sum_{i\in I(a)} (p_iu_i'')_\nu'(a) = \lambda\rho(a)u(a), \quad a\in J(\Gamma). \tag{4}$$

Задача (1), порожденная соотношениями (2)–(4) моделирует малые деформации стержневой системы с условиями упруго–шарнирного соединения (см.[1]). В этом случае равенства (2)–(4) можно трактовать следующим образом: $u(x)$ обозначает смещение балки при выходе из состояния равновесия; условия (3) описывают классические локальные условия в узлах графа – перемещения всех стержней системы являются непрерывными и имеется упруго–шарнирное сочленение в узловой вершине a (см. [2, § 5.18]). Последнее условие – это условие динамического равновесия.

Всюду далее мы используем терминологию и обозначения работ [1, 3]. На протяжении всей статьи $\Gamma\subset\mathbb{R}^N$ обозначает связный и конечный *геометрический граф* без петель, с множеством вершин $V(\Gamma)$

[1] Работа выполнена при финансовой Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075–02–2023–939)

и множеством точек ребер графа $E(\Gamma)$. *Ребро* графа – это интервал конечной длины, а *вершина* графа – это концевая точка одного или нескольких ребер. Ребра графа обозначаются γ_i, вершины обозначаются a, b и т.д. Для любой $a \in V(\Gamma)$ через $I(a)$ обозначим множество индексов ребер, инцидентных вершине a, и через $|I(a)|$ обозначим количество элементов множества $I(a)$. Элементы множеств $J(\Gamma) = \{a \in V(\Gamma) \,:\, |I(a)| \geqslant 2\}$ и $\partial\Gamma = \{a \in V(\Gamma) \,:\, |I(a)| = 1\}$ называются *внутренними* и *граничными* вершинами соответственно. Мы предполагаем, что $\Gamma = E(\Gamma) \cup J(\Gamma)$ и $\partial\Gamma \neq \varnothing$. Обратим внимание, что граничные вершины не включены в граф. *Подграфом* графа Γ называется любое связное подмножество Γ.

Производная функции $u : \Gamma \to \mathbb{R}$ (или $u : E(\Gamma) \to \mathbb{R}$) определяется в точках ребер $E(\Gamma)$, как производная по направлению ребра.

Введем функциональные пространства: $C^n[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$) — пространство функций $u : \Gamma \to \mathbb{R}$ (или $u : E(\Gamma) \to \mathbb{R}$) равномерно непрерывных вместе с производными на каждом ребре $\gamma_i \subset E(\Gamma)$; $C(\Gamma)$ — пространство функций из $C[\Gamma]$ напрерывных на всем графе; $C^n(\Gamma) = C(\Gamma) \cap C^n[\Gamma]$.

Далее считаем, что выполнены условия плюс–регулярности (см. [1]), обеспечивающие невырожденность дифференциального оператора L_λ при $\lambda = 0$:

- $p \in C^2[E(\Gamma)]$, $\inf\limits_{x \in E(\Gamma)} p(x) > 0$ и $r \in C[\Gamma]$, $r(x) > 0$ on Γ;
- $\beta_i(a) \geqslant 0$, $\vartheta_i(a) \geqslant 0$ и $\beta_i(a) + \vartheta_i(a) > 0$ для всех $a \in V(\Gamma)$, $i \in I(a)$;
- для любого ребра $\gamma_i = (a, b)$ положительна по крайней мере одна из величин $\max\limits_{x \in \gamma_i} |q_(x)|$, $\vartheta_i(a)$, $\vartheta_i(b)$.

Дифференциальный оператор L_λ, краевой задачи (1), является самосопряженным [4]. Нас интересуют осцилляционные свойства собственных значений и собственных функций задачи (1). Основным инструментом исследования является метод Штурма накачивания нулей. Этот метод позволяет отследить эволюцию нулей у семейства решений, зависящего от спектрального параметра (решения Вейля) и отождествить собственные значения как моменты вхождения очередного нуля через граничную вершину графа.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $L_\lambda u(x) = 0$, $x \in \Gamma$, порожденное условиями (2)–(4). Обозначим через m количество ребер Γ. Для каждого ребра $\gamma_i \subset E(\Gamma)$ дифференциальное уравнение (2) имеет четыре линейно независимых решения $y_{ij}(x, \lambda)$, $1 \leqslant j \leqslant 4$. Продолжим каждую функцию $y_{ij}(x, \lambda)$ на $E(\Gamma)$ тождественно нулем. Получаем фундаментальную систему решений $\{\psi^{[i]}(x,\lambda)\}_{i=1}^{4m}$ однородного дифференциального уравнения (2) на (Г).

Обозначим через $\{l_j(\cdot)\}_{j=1}^{4m}$ набор линейных функционалов, определяющие полный набор условий согласования (2) и граничных условий из (1).

Зафиксируем произвольную вершину $a_0 \in \partial\Gamma$ и обозначим через γ_{a_0} соответствующее граничное ребро. Без ограничения общности можно считать, что функционалы $\{l_j\}_{i=1}^{4m}$ занумерованы так, что

$$l_1(u) = u(a_0), \quad l_2(u) = \beta(a_0)u''(a_0) - \vartheta(a_0)u'_\nu(a_0).$$

Рассмотрим функцию (*решение Вейля*)

$$w_\lambda(x) = \begin{vmatrix} \psi^{[1]}(x,\lambda) & \psi^{[2]}(x,\lambda) & \dots & \psi^{[4m]}(x,\lambda) \\ l_2(\psi^{[1]}(\cdot,\lambda)) & l_2(\psi^{[2]}(\cdot,\lambda)) & \dots & l_2(\psi^{[4m]}(\cdot,\lambda)) \\ l_3(\psi^{[1]}(\cdot,\lambda)) & l_3(\psi^{[2]}(\cdot,\lambda)) & \dots & l_3(\psi^{[4m]}(\cdot,\lambda)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{4m}(\psi^{[1]}(\cdot,\lambda)) & l_{4m}(\psi^{[2]}(\cdot,\lambda)) & \dots & l_{4m}(\psi^{[4m]}(\cdot,\lambda)) \end{vmatrix}$$

Обсуждается эволюция нулей решения Вейля при изменении спектрального параметра λ. Показывается, что при увеличении λ нули функции $w_\lambda(x)$ входят в граф Г через граничную вершину a_0. Значения λ, при которых $w_\lambda(x)$ будет удовлетворять правым краевым условиям, являются собственными значениями для исходной задачи, а функции $w_\lambda(x)$, соответствующие этим λ, – собственными функциями. Кроме того, при $\lambda \to +\infty$ количество нулей увеличивается и стремится к $+\infty$. Этот принцип отслеживания нулей функции $w_\lambda(x)$ называется *методом Штурма.* Для реализации схемы Штурма показывается, что расположенные внутри Г нули функции $w_\lambda(x)$ монотонно зависят от λ, сдвигаясь от вершины a_0 внутрь графа при увеличении λ. При этом нули $w_\lambda(x)$ не слипаются и не раздваиваются при изменении λ. Также доказывается, что нули решения $w_\lambda(x)$ не могут покинуть граф Г через граничные вершины, отличные от $a_0 \in \partial\Gamma$.

Пусть $J_{3+}(\Gamma) = \{a \in J(\Gamma) : |I(a)| \geqslant 3\}$. Предположим, что граф Г является деревом. Для любой вершины $a \in J_{3+}(\Gamma)$ обозначим через $\Gamma_i(a)$ ветвь Г, содержащую ребро γ_i, $i \in I(a)$. Через $\Lambda_i(a)$ мы обозначаем спектр краевой задачи

$$L_\lambda u = 0, \quad x \in \Gamma_i(a),$$
$$u|_{\partial\Gamma_i(a)} = (\beta u'' - \vartheta u')|_{\partial\Gamma_i(a)\setminus a} = 0, \quad \beta_i(a)u''_i(a) - \vartheta_i(a)u'_{i\nu}(a) = 0.$$

Далее предполагается, что Γ является деревом и для любой вершины $a \in J_{3+}(\Gamma)$ спектры $\Lambda_i(a)$, $i \in I(a)$ попарно не пересекаются.

Через $Z(\lambda)$ обозначаем число нулей w_λ в Γ.

Теорема 1. *Следующие свойства эвивалентны:*

(i) $Z(\lambda) < \infty$;

(ii) w_λ не имеет нулей в $J_{3+}(\Gamma)$;

(iii) $\lambda \notin \bigcup\limits_{a \in J_{3+}(\Gamma)} \bigcup\limits_{\substack{i \in I(a) \\ a_0 \notin \partial\Gamma_i(a)}} \Lambda_i(a)$.

Теорема 2. *Если* $\lambda^* \in \Lambda$, *то существует* $\varepsilon > 0$, *такое что* $Z(\lambda) = Z(\lambda^*) + 1$ *для всех* $\lambda \in (\lambda^*, \lambda^* + \varepsilon)$ *и* $Z(\lambda) = Z(\lambda^*)$ *для всех* $\lambda \in (\lambda^* - \varepsilon, \lambda^*]$.

Теорема 3. *Пусть* $\lambda^*, \lambda^{**} \in \Lambda$ *и* $\lambda^* < \lambda^{**}$. *Если* $(\lambda_k, \lambda_{k+1}) \cap \Lambda = \varnothing$, *то* $Z(\lambda) = Z(\lambda_k) + 1$ *для всех* $\lambda \in (\lambda_k, \lambda_{k+1}] \setminus \Lambda_0$.

Литература

1. Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев, А.В. Боровских, К.П. Лазарев, С.А. Шабров. —М.: Физматлит, 2007. — 272 с.

2. Timoshenko S.P. Vibration Problems in Engineering / S.P. Timoshenko, D.H. Young, W. Weaver Jr. — Wiley, 1990 — 672 p.

3. Kulaev R.Ch. The qualitative theory of fourth–order differential equations on a graph / R.Ch. Kulaev. // Mediterr. J. Math. — 2022. V. 19:73.

4. Кулаев Р.Ч. О кратности собственных значений дифференциального оператора четвёртого порядка на графе / Р.Ч. Кулаев, А.А. Уртаева. // Дифференц. уравнения. —2022. — Т. 58, №7. — С. 882–889.

ВЛИЯНИЕ УЧЕТА ЗАПАЗДЫВАНИЯ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФАКТОРОВ НА ДИНАМИКУ РЕШЕНИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ МАКРОЭКОНОМИКИ[1]

А.Н. Куликов, Д.А. Куликов, Д.Г. Фролов
(Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова)
kulikov_d_a@mail.ru

Одной из основополагающих математических моделей макроэкономики принято считать модель «спрос–предложение» (модель рынка одного товара). Она может быть записана в виде [1–3]

$$\dot{p} = D(p) - S(p), \tag{1}$$

где $p = p(t) \geqslant 0$ – цена в момент времени t, $D(p)$ – функция спроса на товар, $S(p)$ – предложение. Функции $D(p), S(p)$ определены и достаточно гладко зависят от p, если $p \in (0, \infty)$ ($p \in [0, \infty)$). При этом $D(p)$ – убывающая функция аргумента p, т.е. цены, $S(p)$ – возрастающая функция p. Наконец, $\lim\limits_{p\to+0} D(p) = \infty$ или достаточно большой постоянной, $\lim\limits_{p\to\infty} D(p) = 0$, $\lim\limits_{p\to+0} S(p) = 0$, $\lim\limits_{p\to\infty} S(p) = \infty$ или достаточно большой постоянной. При таких предположениях дифференциальное уравнение (1) имеет единственное положительное состояние равновесия $p = p_0 > 0$, которое в макроэкономике называют состоянием экономического равновесия. Подчеркнем, что состояние равновесия $p = p_0$ уравнения (1) всегда асимптотически устойчиво и это уравнение не может иметь периодических решений, что противоречит экономической практике, для которой характерна цикличность.

Эту ситуацию можно исправить, если модифицировать модель (1) и учесть эффекты запаздывания и влияния пространственных факторов на развитие экономической динамики. Вместо уравнения (1) будем изучать уравнение с частными производными, дополненное условиями непроницаемости

$$p_t(t,x) = D(g(t,x)) - S(g(t,x)) + d\varepsilon p_{xx}(t,x), \tag{2}$$

$$p_x(t,0) = p_x(t,\pi) = 0. \tag{3}$$

[1] Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно–образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ. (проект №075–02–2023–948).

Краевая задача (КЗ) (2), (3) приведена в нормированном виде, $d > 0, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), 0 < \varepsilon_0 << 1$. Наконец, $g(t,x) = p(t-h,x)$, $h \in \mathbb{R}_+$.

Анализ нелинейной КЗ (2), (3) показал, что:

1) существует такая постоянная $h_* > 0$, что при $h > h_*$ состояние равновесия $p = p_0$ теряет устойчивость;

2) при достаточно малых ε и $h = h_*(1+\nu\varepsilon)$, $\nu = \pm 1$ у КЗ (2), (3) могут появиться пространственно однородные периодические решения, а также пространственно неоднородные циклы (периодические по t решения, которые зависят от пространственной переменной).

Обоснование результатов предполагает использование методов теории бесконечномерных динамических систем и в том числе метода интегральных (инвариантных) многообразий. На этом пути анализ структуры окрестности состояния равновесия $p(t,x) = p_0$ был сведен к изучению КЗ для известного в нелинейной физике уравнения Гинзбурга–Ландау.

В нашем случае имеем следующий вариант этого уравнения

$$z_s = (\alpha + i\beta)z + (l_1 + il_2)z|z|^2 + (b_1 + ib_2)z_{xx},$$

$$\alpha = \frac{2a\pi\nu}{4+\pi^2},\ \beta = \frac{4a\nu}{4+\pi^2},\ b_1 = \frac{4d}{4+\pi^2},\ b_2 = -\frac{2\pi d}{4+\pi^2},$$

$$l_1 = \frac{2}{5a(4+\pi^2)}\Big(2a_2^2(4-11\pi) - 15\pi a a_3\Big),$$

$$l_2 = -\frac{4}{5a(4+\pi^2)}\Big(15 a a_3 + 2a_2^2(11+\pi)\Big),$$

где $a = -F'(p_0), a_2 = F''(p_0)/2, a_3 = F'''(p_0)/6, F(p) = D(p) - S(p)$.

Литература

1. Zhang W.B. Synergetic economics. Time and change in nonlinear economics / W.B. Zhang. — Berlin. : Springer–Verlag, 1991. — 246 с.

2. Куликов А.Н. Математическая модель рынка и эффект запаздывания / А.Н. Куликов, Д.А. Куликов // Математика в Ярославском университете: сборник обзорных статей к 40–летию математического факультета. — 2016. — С. 132–151.

3. Куликов Д.А. Эффект запаздывания и экономические циклы / Д.А. Куликов // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2023. — Т. 217. — С. 132–151.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВНЕШНИМИ НАГРУЗКАМИ В ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ СОСТАВНОГО ТЕЛА, КОНТАКТИРУЮЩЕГО ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ С ОСТРОЙ КРОМКОЙ[1]

Н.П. Лазарев, Е.С. Ефимова (Якутск, СВФУ)
nyurgun@ngs.ru

Рассмотрена неклассическая трехмерная математическая модель равновесия, описывающая возможный механический контакт составного тела с жестким включением [1]. Нелинейность модели обусловлена условиями непроникания типа неравенств. Предполагается, что составное тело в исходном состоянии касается неподвижного препятствия клиновидной формы в единственной точке контакта. Тело состоит из упругой матрицы и жёсткого включения. В этом случае перемещения на множестве, соответствующем жёсткому включению, имеют заданную структуру, описывающую возможные параллельные переносы и повороты включения. Жёсткое включение расположено на внешней границе и имеет геометрическую форму конуса. На основе этой модели рассматривается индуцированное семейство вариационных задач, зависящих от различных функций внешних нагрузок. При этом множества допустимых перемещений могут быть невыпуклыми. Для заданного множества функций, описывающих допустимые внешние нагрузки, формулируется задача оптимального управления, где управлением служат функции внешних нагрузок. Функционал качества задается с помощью произвольного слабо полунепрерывного сверху функционала, определенного на пространстве Соболева допустимых решений. Доказана разрешимость задачи оптимального управления. Кроме того, для последовательности решений, соответствующей максимизирующей последовательности, доказана сильная сходимость в пространстве искомых решений.

Литература

1. Лазарев Н.П. Трёхмерная задача типа Синьорини для композитных тел, контактирующих острыми гранями жёстких включений / Н.П. Лазарев, Е.Д. Федотов // Челяб. физ.-матем. журн. — 2022. — Т. 7, — № 4. — С. 412–423.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (соглашение от 16.02.2023, проект № 075-02-2023-947).

К ВОПРОСУ АНАЛИТИЧЕСКОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ МОЩНОСТИ F–КРИТЕРИЯ ОДНОФАКТОРНОГО ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА

Личак Е. М. (Москва, Финансовый университет)
lichakegor@yandex.ru

Однофакторный дисперсионный анализ служит для проверки статистической значимости разности генеральных средних произвольного количества выборок из нормальных совокупностей. В книге [1] было замечено, что «вычисление мощности статистического критерия является главным техническим приёмом, предложенным статистической теорией для определения нужного числа наблюдений». Цель настоящей работы состоит в выводе явной формулы мощности критерия, которая используется в дальнейшем для исследования свойств критерия на несмещенность и состоятельность.

Справедлива теорема.

Теорема. *Аналитическое выражение мощности F–критерия однофакторного дисперсионного анализа задается в виде следующей формулы*

$$W = 1 - F\left(f_\alpha(k-1, n-k)\right), \tag{1}$$

где n – количество элементов в объединенной выборке, k – количество выборок, α – уровень значимости, $f_\alpha(k-1, n-k)$ – процентная точка распределения Фишера с $k-1$ и $n-k$ степенями свободы, а F – функция ***нецентрального*** *распределения Фишера с теми же степенями свободы и параметром нецентральности*

$$\lambda = \frac{\sum_{j=1}^{k}(\mu_j - \mu_w)^2 n_j}{\sigma^2}. \tag{2}$$

В формуле (2) $\mu_w = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j\mu_j$ обозначает *несмещенную оценку математического ожидания* объединенной выборки, σ — общую для каждого ряда наблюдений *дисперсию* и $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$.

Доказательство формулы (1) использует теорему Фишера для распределения суммы квадратов *зависимых* нормальных распределений и основано на свойстве, описанном следующей леммой.

Лемма. *Сумма квадратов отклонений* ***внутри*** *групп наблюдений SSE/σ^2 при условии справедливости альтернативной гипотезы имеет χ^2– распределение с $n-k$ степенями свободы, а сумма* *квадратов* ***между*** *группами наблюдений* $SSTR/\sigma^2$ *–* ***нецентральное*** χ^2*–распределение с* $k-1$ *степенями свободы и параметром нецентральности* (2).

Статистический критерий однофакторного дисперсионного анализа реализован в виде программного модуля с использованием инструментария *Jupyter Notebook*. Отличительной особенностью предложенного программного модуля, кроме стандартного вывода таблицы *ANOVA*, является имплементация формулы мощности критерия (1). Формула (1) согласуется с примерами, которые рассмотрены в [1], [2], [3]. Для исследования свойств критерия предложен графический интерфейс, позволяющий наглядно иллюстрировать такие свойства критерия, как его несмещенность и состоятельность.

Литература

1. Кендалл М.. Статистические выводы и связи / Кендалл М., Стьюарт А. // Теория распределений — М.: Наука, 1973. — Т. 2. — 896 с.

2. Шеффе Г. Дисперсионный анализ / Г. Шеффе. // М.: Наука. — 1980. — 512 с.

3. Douglas C. Montgomery. Applied Statistics and Probability for Engineers / Douglas C. Montgomery, George C. Runger. // New York, NY: John Wiley & Sons, Inc. — 2002. — 706 p.

ВЫПУКЛАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧАМ С ДВУМЕРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Л.В. Локуциевский

(Москва, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН)

lion@mi–ras.ru

На докладе я расскажу о новом удобном методе описания двумерных выпуклых компактных множествах и их полярах. Этот метод обобщает классические тригонометрические функции cos и sin и применим в широкому кругу задач. Я покажу, каким образом этот метод может быть использован, чтобы по множеству Ω определить две пары функций $\cos_\Omega$, $\sin_\Omega$ и $\cos^\circ_\Omega$, $\sin^\circ_\Omega$, которые наследуют множество свойств классических тригонометрических функций в случае единичного крута.

Этот подход оказался очень полезным в задачах управления и неклассических изопериметрических неравенствах связанных с каким–либо плоским выпуклым двумерным множеством. Например, этот метод позволил найти изопериметрическое неравенство на Финслеровой плоскости Лобачевского, получить явные формулы для геодезических в серии суб–Финслеровых задач на более чем 10 группах Ли и решить некоторые другие другие классические задачи с двумерным управлением.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ОТРЕЗКЕ

И.С. Ломов (Москва, МГУ)
lomov@cs.msu.ru

Исследована первая краевая задача для дифференциального оператора второго порядка с сингулярным коэффициентом на отрезке с условиями сопряжения во внутренней точке отрезка. Получены асимптотические формулы для собственных функций и собственных значений как прямого, так и сопряженного операторов. Установлены полнота и безусловная базисность систем собственных функций этих операторов в пространстве суммируемых с квадратом функций на отрезке. Применен метод Ильина и условия Ильина для установления справедливости неравенства Бесселя.

Рассмотрена следующая модельная задача:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, 1/2) \cup (1/2, 1),$$

$$y(0) = y(1) = 0, \quad y[1/2] = 0, \quad y'[1/2] = y'(0),$$

на множестве функций $y(x)$, абсолютно непрерывных вместе с первой производной на каждом компакте из интервалов $(0, 1/2)$ и $(1/2, 1)$, и принадлежащих классу $\mathcal{L}^2(G)$, $G = (0, 1)$, — функций, интегрируемых с квадратом на множестве G.

Здесь $y[1/2] = y(1/2 + 0) - y(1/2 - 0)$ — скачок функции $y(x)$ в точке $x = 1/2$, $q(x)$ — комплекснозначная функция из весового класса $\mathcal{L}^1_{1-\varepsilon}(G) = \left\{ f(x) : \int\limits_0^1 x^{1-\varepsilon} |f(x)|\, dx < \infty \right\}$ для некоторого числа $\varepsilon \in (0, 1]$.

Литература

1. Белянцев О.В., Ломов И.С. О свойстве базисности корневых функций одного сингулярного дифференциального оператора второго порядка // Дифференц. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 8. — С. 1187–1189.

2. Жорницкая Л.А., Серов В.С. Об одной теореме единственности для оператора Штурма–Лиувилля на отрезке с потенциалом, имеющим неинтегрируемую особенность // Дифференц. уравнения. — 1993. — Т. 29, № 12. — С. 2125–2134.

РЕШЕНИЕ ДВУХСКОРОСТНОГО МОДЕЛЬНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НОВЫМ «МЕТОДОМ НЕЯВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК»

Ф.Е. Ломовцев (Минск, БГУ)
lomovcev@bsu.by

Решено одномерное двухскоростное модельное волновое уравнение в верхней полуплоскости $\dot{G} = R\times]0, +\infty[$, $R =] - \infty, +\infty[$,

$$u_{tt}(x,t) + (a_1 - a_2)u_{tx}(x,t) - a_1 a_2 u_{xx}(x,t) -$$

$$-a_2^{-1}(a_2)_t u_t(x,t) - a_1(a_2)_x u_x(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in \dot{G}, \qquad (1)$$

где $f,\ a_1,\ a_2$ – заданные вещественные функции переменных x и t. Число нижних индексов функций – порядки частных производных.

Пусть $C^k(\Omega)$ – множество k раз ограниченно и непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве $\Omega \subset R^2$ и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Уравнению (1) соответствуют характеристические уравнения

$$dx = (-1)^i a_{3-i}(x,t)dt,\ i = 1,\ 2, \qquad (2)$$

которые имеют неявные общие интегралы $g_i(x,t) = C_i$, $C_i \in R$, $i = 1, 2$. Если в уравнении (1) коэффициенты a_{3-i} строго положительны, т. е. $a_{3-i}x,t) \geqslant a_{3-i}^{(0)} > 0$, $(x,t) \in G$, то в силу (2) переменная t на характеристиках $g_1(x,t) = C_1$, $C_1 \in R$, строго убывает, на характеристиках $g_2(x,t) = C_2,\ C_2 \in R$, строго возрастает вместе с ростом переменной x. Поэтому неявные функции $y_i = g_i(x,t) = C_i$, $x \in R$, $t \geqslant 0$, обладают строго монотонными неявными обратными функциями $x = h_i\{y_i, t\}$, $t \geqslant 0$, и $t = h^{(i)}[x, y_i]$, $x \in R$, $i = 1, 2$. По определению обратных отображений на верхней полуплоскости G они удовлетворяют следующим тождествам обращения из [1]:

$$g_i(h_i\{y_i,t\},t) = y_i,\ t \geqslant 0;\ h_i\{g_i(x,t),t\} = x,\ x \in R,\ i = 1, 2, \qquad (3)$$

$$g_i(x,\ h^{(i)}[x,y_i]) = y_i,\ x \in R; h^{(i)}[x,\ g_i(x,\ t)] = t,\ t \geqslant 0,\ i = 1, 2, \qquad (4)$$

$$h_i\{y_i, h^{(i)}[x,y_i]\} = x,\ x \in R;\ h^{(i)}[h_i\{y_i,t\}, y_i] = t,\ t \geqslant 0,\ i = 1, 2. \qquad (5)$$

Если коэффициенты $a_{3-i}(x,t) \geqslant a_{3-i}^{(0)} > 0$, $(x,t) \in G$, $a_{3-i} \in C^2(G)$, то неявные функции g_i, h_i, $h^{(i)}$ дважды непрерывно и ограниченно дифференцируемы по x, t, y_i, $i = 1, 2$, на полуплоскости G [1].

Определение 1. *Классическими решениями* уравнения (1) называются функции $u \in C^2(G)$, удовлетворяющие уравнению (1) в каждой внутренней точке $(x,t) \in \dot{G}$ верхней полуплоскости G.

Из определения 1 следует необходимость правой части $f \in C(G)$.

Теорема 1. *Пусть* $a_{3-i}(x,t) \geqslant a_{3-i}^{(0)} > 0$, $(x,t) \in G =]-\infty, +\infty[\times \times[0, +\infty[$, $a_{3-i} \in C^2(G)$, $i = 1, 2$. *Тогда общим интегралом уравнения (1) в верхней полуплоскости G с критерием гладкости*

$$f \in C(G), \int_0^t f(h_i\{g_i(x,t), \tau\}, \tau)\, d\tau \in C^1(G), \, i = 1, 2, \tag{6}$$

классических решений $u \in C^2(G)$ *являются функции*

$$u(x,t) = \tilde{f}_1(g_1(x,t)) + \tilde{f}_2(g_2(x,t)) + F(x,t), \, (x,t) \in G, \tag{7}$$

$$F(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x,t),\, \tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\, \tau\}} \frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau) + a_2(\delta,\tau)} \times$$

$$\times \exp\left\{ \int_{g_1(\delta,\tau)}^{g_1(x,t)} \frac{a_2^2\,(a_1/a_2)_{\tilde{\delta}} - a_2\,(a_1/a_2)_{\tilde{\tau}}}{\left[a_1(\tilde{\delta},\tilde{\tau}) + a_2(\tilde{\delta},\tilde{\tau})\right]^2 \left(g_1(\tilde{\delta},\tilde{\tau})\right)_{\tilde{\delta}}} ds \right\} d\delta, \tag{8}$$

где любые функции $\tilde{f}_1 \in C^2(R)$, $\tilde{f}_2 \in C^2(R)$ *от* ξ *и* η *имеют вид*

$$\tilde{f}_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(g_2(0,0)), \; \tilde{f}_2(\eta) = f_2(\eta) - f_2(g_2(0,0)).$$

На основе (3)–(5) «методом неявных характеристик» из [1] находим и подстановкой в (1) и его канонический вид проверяем (8).

Следствие 1. *Если правая часть f уравнения (1) зависит только от x или t и непрерывна по t или x, то теорема 1 верна без интегральных требований гладкости на f из (6).*

Следствие 2. *В (6) принадлежность интегралов множеству $C^1(G)$ эквивалентна их принадлежности множеству $C^{(1,0)}(G)$ или $C^{(0,1)}(G)$, где $C^{(1,0)}(G)$ или $C^{(0,1)}(G)$ – множества непрерывно дифференцируемых по x или t, непрерывных по t или x функций на G.*

Замечание. Общий интеграл (7), (8) односкоростного модельного уравнения (1) при $a_1(x,t) = a_2(x,t) = a(x,t)$ имеется в [1].

Работа по ГПНИ № 11, «Конвергенция–2025», НИР 1.2.02.3.

Литература

1. Ломовцев Ф.Е. Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой. / Ф.Е. Ломовцев // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. — 2021. — № 1. — С. 18–38.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГОМЕОСТАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УГЛЕВОДНОГО ОБМЕНА

Ю.П. Луговскова (Оренбург, ОГУ)
ulia–lugovskova@inbox.ru

В работе на основе современных физиологических представлений о системе регуляции углеводного обмена выполнено построение математической модели изменения уровня гликемии и управления ее экзогенными источниками у больных сахарным диабетом первого типа с целью стабилизации уровня глюкозы в крови в пределах показателей нормы.

Для изучения закономерностей гомеостатической системы углеводного обмена в организме человека рассмотрена математическая модель переменных состояний – глюкозы $G = G(t)$; естественного $I = I(t)$ и искуственновведенного $K = K(t)$ инсулина на временном отрезке $[t^0, T]$ в единственном кровеносном компартменте, представленная негладкой системой нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, записанных в нормальной форме Коши:

$$\frac{dI}{dt} = \alpha(G - G_0)\theta(G - G_0) - \beta GI$$

$$\frac{dG}{dt} = \gamma(G_0 - G)\theta(G_0 - G) - \sigma GI - \sigma_1 GK(t - \tau) - \\ - \mu(G - G_{cr})\theta(G - G_{cr}) + S(t)$$

$$\frac{dK}{dt} = (1 - \alpha)u\theta(G - G_0) - \beta_1 GK \tag{1}$$

с начальными условиями

$$t \in [-\tau, t^0] \quad I(t^0) = I^0, \ G(t^0) = G^0, \ K(t^0) = K^0 \tag{2}$$

и фазовыми ограничениями

$$I(t) \geqslant 0,\ G(t) \geqslant 0,\ K(t) \geqslant 0\ t \in [t^0, T]. \tag{3}$$

Функция $u = u(t)$ описывает поступление искусственного инсулина извне и удовлетворяет ограничению, учитывающему физиологически допустимую дозу вводимого инсулина

$$0 \leqslant u(t) \leqslant B\ t \in [t^0, T]. \tag{4}$$

В моделе (1) параметр $1 - \alpha$ — скорость введения искусственного инсулина, где α в данном случае — весовой коэффициент, определяющий степень влияния естественного и искусственного инсулина; τ — временная задержка начала действия инсулина с момента введения, определяющая тип вводимого инсулина; $\theta(x)$ — функция Хевисайда, определяющая негладкость системы дифференциальных уравнений; $S(t)$ — экзогенный источник поступления глюкозы за счет приема пищи.

Систему уравнений (1) с начальными условиями (2) и ограничениями (3), (4) назовем математической моделью влияния инсулинотерапии на динамику гликемического профиля у больных сахарным диабетом первого типа. Гликемический профиль определяется динамикой концентрации глюкозы $G = G(t)$ в крови человека. В связи с этим в рамках данной работы выберем в качестве цели управления обеспечение близости данной характеристики к опорному решению, которое соответствует поддержанию нормального уровня глюкозы G_0.

$$I = \int_{t^0}^{T} (G - G_0)^2 dt \to \min. \tag{5}$$

Проведенное математическое моделирование углеводного обмена при сахарном диабете, основанное на необходимом условии принципа максимума Понтрягина для решения задач оптимального управления (1)–(5) с негладкой правой частью и запаздывающим аргументом, позволило подобрать схемы введения инсулина с целью улучшения компенсации заболевания. Математический анализ различных методов управления динамикой инсулин–глюкоза, показал эффективность всех полученных схем введения искусственного инсулина на стабилизацию углеводного обмена, а следовательно на их применимость к предложенной в работе задаче оптимального управления сахарным диабетом первого типа.

Литература

1. Андреева Е.А. Математическое моделирование : учеб. пособие для вузов / Е.А. Андреева, В.М. Цирулева. // Тверь : Тверской гос. ун–та. — 2004. — 502 с.

2. Широкова Н.А. Математическое моделирование баланса инсулин–глюкоза в крови и системы регуляции гликемии у пациентов с сахарным диабетом / Н.А. Широкова // Математические структуры и моделирование. — 2002. — вып. 10. — С. 106–115.

3. Широкова Н.А. Математическое моделирование источников глюкозы и инсулинов в модели баланса «инсулин–глюкоза» / Н.А. Широкова // Математические структуры и моделирование. — 2004. — вып. 14. — С. 47–52.

АНАЛОГ ФОРМУЛЫ ПУАССОНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА–ДАРБУ С ОПЕРАТОРАМИ БЕССЕЛЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов

(Воронеж, ВГУ; Елец, ЕГУ им.И.А. Бунина)

levnlya@mail.ru , *y.bulatov@bk.ru*

Пусть $-\gamma<0$ и $\gamma=2\mu+1$. Одно из линейно независимых решений сингулярного уравнения Бесселя $B_{-\gamma}u+\lambda^2u=0$ имеет вид

$$\mathbb{J}_\mu(\lambda x)=\Gamma(1+\mu)2^\mu(\lambda x)^\mu\, J_\mu(\lambda x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\ \Gamma(1+\mu)}{m!\ \Gamma(m+1+\mu)}\ \frac{(\lambda x)^{2(m+\mu)}}{2^{2m}}.$$

Поскольку $\mathbb{J}_\mu(\lambda x)=O(x^{2\mu}),\ x\to 0$, то присутствие константы $\Gamma(1+\mu)2^\mu$ не обязательно и связано только с удобством определения $\mathbb{T}$–псевдосдвига:

$$\mathbb{T}^y f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right)}\int\limits_0^\pi \frac{(x\,y)^{\gamma+1}f\left(x\overset{\alpha}{\to}y\right)}{(x\overset{\alpha}{\to}y\,)^{\gamma+1}}\sin^{\gamma+1}\alpha\,d\alpha.$$

где $(x\overset{\alpha}{\to}y\,)=\sqrt{x^2+y^2-2xy\,\cos\alpha}$. В [1] получена следующая *теорема сложения* $\mathbb{T}_x^y\mathbb{J}_\mu(\lambda x)=\mathbb{J}_\mu(\lambda x)\mathbb{J}_\mu(\lambda y)$.

Функции $\mathbb{J}_\mu$ образуют систему ортогональных с весом $x^{-\gamma}$ функций $\{\mathbb{J}_\mu(\lambda_n x)\}_{n=1}^\infty$, т.е. $\int\limits_0^1\mathbb{J}_\mu(\lambda_m x)\ \mathbb{J}_\mu(\lambda_k x)\ x^{-\gamma}dx=0,\quad m\neq k.$

Теорема 1. *Если дважды непрерывно дифференцируемая четная функция $f(x)$ представлена равномерно сходящимся рядом Фурье—Бесселя, то* $B_{-\gamma,x}\mathbb{T}^y f(x) = B_{-\gamma,y}\mathbb{T}^y f(x)$.

Оператор $\overset{*}{\mathbb{T}}{}_x^y\, f(x) = x^{-2\mu}\mathbb{T}_x^y f(x)$. будем называть $\overset{*}{\mathbb{T}}$–сдвигом.

Теорема 2. *Операторы $\mathbb{T}$–псевдосдвига и $\overset{*}{\mathbb{T}}$–сдвига коммутируют с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя $B_{-\gamma}$.*

Из этой теоремы вытекает $B_{-\gamma,x}\, \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y\, f(x) = B_{-\gamma,y}\, \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y\, f(x)$.

Задача Коши для уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу с операторами Бесселя с параметрами $-\gamma < 0$ имеет вид

$$B_{-\gamma,t}u(x,t) = B_{-\gamma,x}u(x,t).\ u(x,0) = f(x)\ ,\ u_t(x,0) = 0. \qquad (1)$$

Теорема 3. *Пусть $f(x)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая четная по Киприянову функция. Тогда решение задачи Коши (1) определено следующей формулой Пуассона*

$$u(x,t) = \overset{*}{\mathbb{T}}{}^t\, f(x) = \frac{\Gamma\left(\mu+1\right)x^{2\mu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^{\pi} \frac{f\left(t \overset{\alpha}{\to} x\right)}{\left(t \overset{\alpha}{\to} x\right)^{2\mu}} \sin^{2\mu}\alpha d\alpha. \qquad (2)$$

Решение, определяемое формулой (2), единственно.

Формально решение (2) совпадает с формулой Пуассона решения задачи Коши для ЭПД–уравнения в [2] на основе оператора обобщенного сдвига Пуассона.

Доказательство теоремы вытекает из теоремы 1 и теоремы сложения, где надо воспользовались обозначением $\overset{*}{\mathbb{T}}{}^t = t^{-2\mu}\ \mathbb{T}^t$. Без труда проверяется выполнение условия (2):

$$u(x,0) = \overset{*}{\mathbb{T}}{}^t\ f(x)\Big|_{t=0} = f(x).$$

Единственность решения ЭПД–уравнения в виде формулы Пуассона (3) очевидна, поскольку разность предполагаемых решений (3) должна удовлетворят задаче Коши (2) с $f(x) = 0$. Но тогда из (3) вытекает, что эта разность равна нулю.

Отметим, что функция $v(x,t) = \mathbb{T}^t f(x)$, где $f = f(x)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая четная (по Киприянову) функция тоже удовлетворяет уравнению (1), но она не может удовлетворять начальному условию (2) при произвольной функции f, т.к. $v(x,0) \equiv 0$

Литература

1. Ляхов Л. Н. Псевдосдвиг и фундаментальное решение оператора Δ_B Киприянова / Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов, С.А. Рощупкин, Е.Л. Санина // Дифференциальные уравнения — 2022. — Т. 58, № 12. — С. 1654–1665.

2. Левитан Б.М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя / Б.М. Левитан // УМН. — 1951. —Т. 6, № 2. — С. 102–143.

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ, ДВОЙСТВЕННОМ К ПРЕОБРАЗОВАНИЮ РАДОНА–КИПРИЯНОВА

Л.Н. Ляхов, В.А. Калитвин, М.Г. Лапшина

(Воронеж, ВГУ; Липецк, ЛГПУ им. П.П. Семенова–Тян–Шанского; Липецк, ЛГПУ им. П.П. Семенова–Тян–Шанского)

levnlya@mail.ru; kalitvin@gmail.com; marina.lapsh@yandex.ru

Описание преобразования Радона можно найти в [1], [2] и [3]. В работе И.А. Киприянова и Л.Н. Ляхова [4] было введено «специальное» преобразования Радона, которое в дальнейшем получило название *преобразование Радона–Киприянова* (K_γ –преобразование). В данной работе дадим определение преобразования, двойственного (сопряженного) к K_γ–преобразованию.

Пусть $\mathbb{R}_2^+$ евклидово полупространство точек $x = (x_1,\, x_2)$, $x_1{>}0$.

Через $\delta(P)$ обозначим обобщенную δ–функцию, сосредоточенную на $(n-1)$–мерной поверхности $P(x) = 0$ в $\mathbb{R}_2$. *Преобразованием Радона–Киприянова* функции f, следуя [5], будем называть следующее выражение

$$K_\gamma[f](\xi;p) = \int_{\mathbb{R}_2^+} f(x)\, \Pi_{x_1}^\gamma\, \delta(p - \langle x, \xi\rangle)\, x_1^\gamma\, dx_1\, dx_2\,, \qquad (1)$$

где символ $\Pi_{x_1}^\gamma$ обозначает действие оператора Пуассона по x_1.

По координате x_1 аргумента функции $f{=}f(x)$, $x{\in}\mathbb{R}_2^+$ построим функцию от вращения $\widetilde{f}(z){=}\widetilde{f}(z_1,z_2,x_2){=}f\left(\sqrt{z_1^2{+}z_2^2},\, x_2\right)$ пространства $\mathbb{R}_2^+$ на угол π. В полученном евклидовом пространстве точек $z{=}(z_1,z_2,x_2){\in}\mathbb{R}_3^+$ рассмотрим полуплоскость $\{\langle z,\widetilde{\xi}\rangle{=}p\}^+$, $z_2{>}0$, где $\widetilde{\xi}{=}(\xi_1,0,\xi_2)$ — единичный вектор нормали, а $|p|$ — расстояние от плоскости до начала координат. В этих обозначениях преобразование K_γ

(1) примет вид

$$K_\gamma[f](\widetilde{\xi},p)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_{\{\langle z,\widetilde{\xi}\rangle=p\}^+}\widetilde{f}(z)\,z_2^{\gamma-1}d\Gamma\,, \tag{2}$$

где $d\Gamma$ — соответствующий элемент плоскости.

Важно отметить, что равенством (2) преобразование $K_\gamma[f]$ сведено к специальному весовому преобразованию Радона в $\mathbb{R}_3^+$, порожденному интегрированием по плоскости, параллельной координатной оси Oz_2.

Формулу (2), следуя [3], запишем в виде интеграла по одной из плоскостей касательного расслоения над сферой в $\mathbb{R}_3$, определяющую плоскость, перпендикулярную вектору $\widetilde{\xi}$:

$$K_\gamma[f](\widetilde{\xi},p)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_{\widetilde{\xi}^\perp}\widetilde{f}(\widetilde{\xi}\,p+y)\,z_2^{\gamma-1}dy\,, \tag{3}$$

где dy — элемент указанной плоскости.

Теорема. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$, $x\in\mathbb{R}_2$ принадлежат подпространству пространства Л. Шварца, состоящему из функций, четных по переменной x_1. Имеет место следующее равенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_1^+}K_\gamma[f](\widetilde{\xi},p)\,g(p)\,dp=\int\limits_{\mathbb{R}_2^+}f(x)\,K_\gamma^{\#}[g](x,\xi)x_1^\gamma\,dx\,, \tag{4}$$

где двойственный оператор $K_\gamma^{\#}$ имеет вид

$$K_\gamma^{\#}[g](x,\xi)=\Pi_{x_1}^\gamma\,g(\langle x,\,\xi\rangle)\,.$$

Кроме того, справедлива следующее утверждение.

Следствие. Имеет место равенство

$$\int\limits_{S_1(2)}\int\limits_{\mathbb{R}_1^+}K_\gamma[f](\widetilde{\xi},p)\,g(p)\,dp=\int\limits_{\mathbb{R}_2^+}f(x)\int\limits_{S_1(2)}K_\gamma^{\#}g(\xi,p)dS\;x_1^\gamma dx\,.$$

Литература

1. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными / Ф. Йон. – М.: ИЛ, 1958. — 156 с.

2. Гельфанд И.М. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений / И.М. Гельфанд, М.И. Граев, Н.Я. Виленкин. – М.: ГИФМЛ, 1962. — 656 с.

3. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии / Ф. Наттерер. – М.: Мир, 1990. — 279 с.

4. Киприянов, И.А. О преобразованиях Фурье, Фурье–Бесселя и Радона / И.А. Киприянов, Л.Н. Ляхов // ДАН. — 1998. — Т. 360. N 2. — С. 157–160.

5. Ляхов Л.Н. Преобразование Киприянова–Радона / Л.Н. Ляхов // Труды МИАН. — 2005. — Т. 248. — С. 153–163.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ $\mathbb{T}$–СДВИГА В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Л.Н. Ляхов, С.А. Рощупкин

(Воронеж, ВГУ; Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина)

levnlya@mail.ru, roshupkinsa@mail.ru

Б.М. Левитан в ряде работ середины 20–го века ввел понятие «оператора обобщенного сдвига», согласно которому такой оператор должен удовлетворять 4–м условиям (см. книгу [1], с. 17–18). Сдвиг, порожденный сферической симметрией, следующего вида

$$T^\tau \varphi(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int\limits_0^\pi \varphi\left(\sqrt{t^2+\tau^2-2t\tau\,\cos\alpha}\right)\,\sin^{\gamma-1}\alpha\,d\alpha\,,\quad \gamma>0$$

открыт в работах А. Вейнштейна и Ж. Дельсарта и названный ими *обобщенный сдвиг*, удовлетворяет условиям Б.М. Левитана при $\gamma > 0$. Он оказался весьма востребован в теории сингулярных линейных дифференциальных уравнений, содержащих операторы Бесселя с положительными параметрами (например, см. книгу [2]).

В работе [3] для работы с сингулярными дифференциальными операторами, содержащих операторы Бесселя отрицательного порядка использован *псевдосдвиг*

$$\mathbb{T}_x^y f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+3}{2}\right)(xy)^{\gamma+1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_i+2}{2}\right)} \int\limits_0^\pi \frac{f\left(x_i \overset{\alpha_i}{\to} y_i\right)}{(x_i \overset{\alpha_i}{\to} y_i\,)^{\gamma+1}} \sin^{\gamma+1}\alpha_i\,d\alpha_i, \qquad (1)$$

$$x \overset{\alpha_i}{\to} y = \sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha},$$

который не принадлежит классу обобщенных сдвигов Б.М. Левитана, но обладает важным для приложений свойством — он коммутирует с оператором Бесселя с отрицательным индексом.

Оператор (1) не удовлетворяет условиям 2^o и 4^o из этой книги , поэтому называется (как и в [3]) $\mathbb{T}$–псевдосдвигом. Но этот оператор симметричен: $\mathbb{T}_x^y = \mathbb{T}_y^x$, что важно при исследовании сверток В.А. Какичева на основе $\mathbb{T}$–псевдосдвига (см. [4], [5]).

Основным свойством $\mathbb{T}$–псевдосдвига, используемым в этой работе, является равенство $B_{-\gamma_i}\mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x) = \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} B_{-\gamma_i} f(x)$.

Более востребованным в теории сингулярных дифференциальных уравнений оказался оператор

$$\overset{*}{\mathbb{T}}{}^{y} = x^{\gamma+1}\ \mathbb{T}^y \quad \left(\text{где} \quad x^{\gamma+1} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\gamma_i+1}, \quad \gamma_i + 1 > 1\right),$$

определенный равенством

$$\overset{*}{\mathbb{T}}{}_{x_i}^{y_i} f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_i+2}{2}\right)} \int_0^{\pi} \frac{y_i^{\gamma_i+1} f\left(x_i \overset{\alpha_i}{\to} y_i\right)}{(x_i \overset{\alpha_i}{\to} y_i)^{\gamma+1}} \sin^{\gamma+1}\alpha_i \, d\alpha_i. \qquad (2)$$

Оператор $\overset{*}{\mathbb{T}}$ не симметричен, но удовлетворяет условию 2^o, где роль «единичного» элемента играет точка $x_i = 0$, т.е. именно для этой точки выполнено равенство $\overset{*}{\mathbb{T}}{}^{y}\ f(0) = f(y)$. Доказательство достаточно просто следует из определения (2).

Условие Б.М. Левитана 4^o, в определении оператора $\overset{*}{\mathbb{T}}$ в нашей работе заменено более простым в доказательстве условием ограниченности интегрируемой функции: если $f(x_i, x^i) \in C(x_i \in [0, \infty)$ и если $\max_{x_i \in [0,\infty)} f(x) = M, \quad$ то $\quad \max_{x \in [0,\infty)} \overset{*}{\mathbb{T}}{}^{y}\ f(x) = M$.

Отметим, что в более ранних работах Б.М. Левитана 4^o–м условием было именно условие «ограниченности в лебеговых классах функций» (см., например, работу [8]).

Литература

1. Левитан Б.М. Теория операторов обобщенного сдвига / Б.М. Левитан. — М. : Наука, 1973.

Приведем эти два условия. Условие 2^0: $f \in C$ и существует «единичный элемент s_0» такой, что $T^{s_0} f(t) = f(t)$. Условие 4^o: функция $f \in C$, тогда $F(s,t) = T^s f(t)$ непрерывна по совокупности точек (s,t).

Для обобщенных сдвигов, определяемых формулой Пуассона [6], это свойство доказано в книге [2] (формула (1.8.5)) и в общем случае в работе [7].

2. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И.А. Киприянов. — М. : Наука. Физматлит, 1997. — 208 с.

3. Ляхов Л.Н. Псевдосдвиг и фундаментальное решение Δ_B–оператора Киприянова / Л. Н. Ляхов, Ю. Н. Булатов, С. А. Рощупкин, Е. Л. Санина // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58, № 12. — С. 1654–1665. — DOI 10.31857/S037406412212007X.

4. Какичев В.А. О свертках для интегральных преобразований / В.А. Какичев. — Изв. АН БССР. Сер. физ–мат. наук. — 1967. — № 2. — С. 48–57.

5. Бритвина Л.Е. Полисвертки преобразования Ханкеля и дифференциальные операторы / Л.Е. Бритвина // Доклады Академии наук. — 2002. — Т. 382, № 3. — С. 298–300.

6. Ляхов Л.Н. Оператор Киприянова—Бельтрами с отрицательной размерностью оператора Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B-гармонического уравнения / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т. 56, № 12. — С. 1610–1520.

7. Левитан Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье / Б.М. Левитан // УМН. — 1951. — Т. VI, вып. 2 (42). — С. 102–143.

8. Левитан Б.М. Применение операторов обобщённого сдвига к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка / Б.М. Левитан // УМН. — 1949. — 4:1(29). — С. 3–112.

ОБ АНАЛОГЕ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО–ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

З.С. Мадрахимова, Д.Э. Исхакова (Ташкент, НУУз)
zilolaxonmadrahimova@gmail.com; dilyaisxakova98@gmail.com

В данной работе изучается краевая задача типа задачи Трикоми для уравнения параболо–эллиптического типа с вырождением типа и порядка внутри области.

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} xu_{xx} + \alpha_1 u_x - u_y, \;\; x > 0, \;\; y > 0, \\ -xu_{xx} + (-x)^n u_{yy} + \alpha_2 u_x, \;\; x < 0, \;\; y > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$0 < \alpha_1 < 1, n > 1, \frac{1-n}{2} < \alpha_2 < 1. \tag{2}$$

Пусть D — область ограниченная при $x<0$, $y>0$ нормальной кривой $\sigma:\ \left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4}{(n+1)^2}\left(-x\right)^{n+1}=\frac{1}{4}$ с концами в точках $O\left(0,0\right)$ и $A\left(0,1\right)$, а при $x>0,\ \ y>0$ прямыми $y=0$, $x=1$, $y=1$.

Введем обозначения: $D_1=D\cap\left(x>0,\ y>0\right)$,

$D_2=D\cap\left(x<0,\ y>0\right)$,

$I=\left\{(x,y):x=0,\ \ 0<y<1\right\}$.

В области D для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача $T_{1\alpha}$. Найти функцию $u\left(x,y\right)$, обладающую следующими свойствами:

$$1)u\left(x,y\right)\in C\left(\bar{D}\right);$$

2) $u\left(x,y\right)\in C^{2,1}_{x,y}\left(D_1\right)\cap C^{2,2}_{x,y}\left(D_2\right)$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях $D_j(j=1,2)$;

3) $\left(-x\right)^{\alpha_1}u_x\in C\left(D_1\cup I\right)$,$\left(-x\right)^{\alpha_2}u_x\in C\left(D_2\cup I\right)$ и на интервале I выполняется условие склеивания

$$\lim_{x\to+0}\left(-x\right)^{\alpha_1}u_x\left(x,y\right)=\lim_{x\to-0}\left(-x\right)^{\alpha_2}u_x\left(x,y\right);$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)\big|_{y=0}=\varphi_1(x),0\leqslant x\leqslant 1,\, u(x,y)\big|_{x=1}=\varphi_2(y),0\leqslant y\leqslant 1,$$

$$u(x,y)\big|_{\sigma}=\psi(x,y),(x,y)\in\bar{\sigma},$$

где $\varphi_1(x)$,$\varphi_2(y)$,$\psi(x,y)$ — заданные функции, причем

$\varphi_1(1)=\varphi_2(0)$,$\varphi_1(0)=\psi(0,0)$

$$\varphi_1(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1), \tag{3}$$

$$\varphi_2(y)\in C\left(\bar{I}\right)\cap C^1(I), \tag{4}$$

$$\psi\left(x,y\right)\in\left(-x\right)^{\varepsilon+1}\tilde{\psi}(x,y),\tilde{\psi}\left(x,y\right)\in C\left(\bar{\sigma}\right),\varepsilon>0. \tag{5}$$

Теорема. *Если выполнены условия (2)–(5), то в области D существует единственное решение задачи $T_{1\alpha}$.*

Единственность решения задачи $T_{1\alpha}$ доказывается с помощью принципа экстремума [1], а существование — методом интегральных уравнений.

Литература

1. Смирнов М.М. Уравнение смешанного типа / М.М. Смирнов // М. : Высшая школа. — 1985. — 304 с.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО–ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ВНУТРИ ОБЛАСТИ

З.С. Мадрахимова, Н.Х. Турсунова (Ташкент, НУУз)
zilolaxonmadrahimova@gmail.com; nafisatursunova41@gmail.com

В данной работе изучается одна нелокальная задача для уравнения смешанного типа, в случае, когда гиперболическая часть имеет вырождение.

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y, \ \ x > 0, \ \ y > 0, \\ x u_{xx} + (-x)^n u_{yy} + \alpha u_x, \ \ x < 0, \ \ y > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$n > 1, \frac{1-n}{2} < \alpha < 1. \tag{2}$$

Пусть D_1 — область ограниченная отрезками AB, BB_0, B_0A_0, A_0A прямых $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $x = 0$, соответственно, а D_2 — характеристический треугольник, ограниченный отрезком AA_0 на оси Oy и двумя характеристиками уравнения (1)

$$AC: \, y - \frac{2}{n+1} (-x)^{\frac{n+1}{2}} = 0, A_0C: \, y + \frac{2}{n+1} (-x)^{\frac{n+1}{2}} = 1$$

при $x < 0$, $y > 0$, выходящими из точек A, A_0 и пересекающимися в точке $C\left(-\left(\frac{n+1}{4}\right)^{\frac{2}{n+1}}, \frac{1}{2}\right)$.

Введем обозначения:

$$I = \{(x, y) : \, x = 0, \, 0 < y < 1\}, \quad D = D_1 \cup D_2 \cup I.$$

В области D для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача $T_{1\alpha}$**.** Требуется найти функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

$$1) u(x, y) \in C\left(\bar{D}\right);$$

2) $u(x, y) \in C^{2,1}_{x,y}(D_1) \cap C^{2,2}_{x,y}(D_2)$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях $D_j (j = 1, 2)$;

3) $u_x \in C\left(D_1 \cup I\right)$, $(-x)^\alpha u_x \in C\left(D_2 \cup I\right)$ и на интервале I выполняется условие склеивания

$$\lim_{x \to +0} u_x\left(x, y\right) = \lim_{x \to -0} \left(-x\right)^\alpha u_x\left(x, y\right)$$

4) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{AB} = \varphi_1(x), 0 \leqslant x \leqslant 1; \; u(x,y)|_{BB_0} = \varphi_2(y), 0 \leqslant y \leqslant 1;$$

$$a(y) D_{oy}^{1-\beta} u\left[\theta_0\left(y\right)\right] = b\left(y\right) D_{y1}^{1-\beta} u\left[\theta_1\left(y\right)\right] + c\left(y\right), (0, y) \in I,$$

здесь $2\beta = \frac{n-1+2\alpha}{n-1}$, причем $0 < \beta < \frac{1}{2}$,

$$\theta_0(y) = \left(-\left(\frac{n+1}{4} y\right)^{\frac{2}{n+1}}, \frac{y}{2} \right),$$

$$\theta_1(y) = \left(-\left(\frac{n+1}{4}\left(1-y\right)\right)^{\frac{2}{n+1}}, \frac{y+1}{2} \right), (0, y) \in I,$$

— точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(0, y)$, с характеристиками AC и A_0C, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$,$a(y)$,$b(y)$, $c\left(y\right)$ – заданные функции, причем $\varphi_1(1) = \varphi_2(0)$,

$$\varphi_1(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1), \tag{3}$$

$$\varphi_2(y) \in C\left(\bar{I}\right) \cap C^1(I), \tag{4}$$

$$a(y), b(y), c\left(y\right) \in C\left(\bar{I}\right) \cap C^2\left(I\right). \tag{5}$$

а $D_{ax}^l\left[\cdot\right]$ – интегро–дифференциальный оператор дробного порядка [1].

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Если выполнены (2), (3)–(5), то в области D существует единственное решение задачи $T_{1\alpha}$.*

Литература

1. Смирнов М.М. Уравнение смешанного типа / М.М. Смирнов // М. : Высшая школа. — 1985. — 304 с.

ПЕРВОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕНЛЕВЕ[1]

К.Г. Малютин, М.В. Кабанко (Курск, КГУ)
malyutinkg@gmail.com, kabankom@gmail.com

Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, через $C(a,r)$ обозначим открытый круг с центром в точке a конечного радиуса r. Рассматривается первое уравнение П. Пенлеве [1]

$$w'' = 6w^2 + z\,, \tag{1}$$

где w — функция комплексного переменного z. В работе [2] исследуются свойства решений первого уравнения Пенлеве на отрицательной вещественной оси. В нашей работе доказывается несколько утверждений, касательно комплексных решений.

Лемма 1. *Пусть w — голоморфное решение уравнения (1), первоначально определённое в области G комплексной плоскости $\mathbb{C}$, и пусть точка z_0 принадлежит области G. Тогда, если функция w не продолжается до мероморфного решения во всей плоскости $\mathbb{C}$, то существует круг $C(z_0,R)$ с центром в точке z_0 конечного радиуса R, в который функция w продолжается как мероморфная. На окружности $L=\{z : |z-z_0|=R\}$ есть особая точка ζ_0 функции w, которая не является полюсом.*

Лемма 2. *Пусть функция w, точка z_0, круг $C(z_0,R)$ и точка ζ_0 такие как в Лемме 1. Тогда*

$$\lim_{\substack{z\to\zeta_0\\ z\in C(z_0,R)}} (|w(z)| + |w'(z)|) = \infty\,.$$

Лемма 3. *Пусть функция w, точка z_0, круг $C(z_0,R)$ и точка ζ_0 такие как в Лемме 1 и пусть γ — интервал (открытый отрезок), лежащий в круге $C(z_0,R)$, одним из концов которого является точка ζ_0. Тогда*

$$\varlimsup_{\substack{z\to\zeta_0\\ z\in\gamma}} |w(z)| = \infty\,.$$

Введём обозначение. Пусть $S(\zeta_0,\alpha)$ — открытый угол с вершиной в точке ζ_0, биссектрисой (z_0,ζ_0), раствора 2α, $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ (см. Рис.1)

---

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №22-21-00012, https://rscf.ru/project/22-21-00012/).

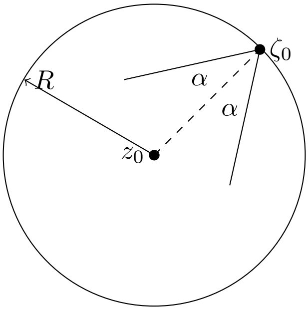


Рис. 1. $S(\zeta_0, \alpha)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Для любого* $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\lim_{\substack{z \to \zeta_0 \\ z \in S(\zeta_0, \alpha) \cap C(z_0, R)}} w(z) = \infty \, .$$

Литература

1. Painlevé P. Mémoire sur les équations différentielles dont l′intégrale générale est uniforme / P. Painlevé // Bull. Soc. Math. France. — 1900. — V. 28. — P. 201–261.

2.Long W.–G. Real Solutions of the First Painlevé Equation with Large Initial Data. / W.–G. Long, Y.–T. Li, S.–Y. Liu, Y.–Q. Zhao // Studies in Applied Mathematics. — 2017. — V. 139. — P. 505–532. https://doi.org/10.1111/sapm.12171

О ЗАДАЧЕ РИКЬЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А.Н. Марковский (Краснодар, КубГУ)

mrkvsk@yandex.ru

1. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ ограниченная область с достаточно гладкой границей $S = \partial Q$ (например, с ляпуновской $S \in C^{1+\alpha}$). Обозначим

$$e_m(Q) = \left\{ E_{m,n}(x - y) \mid x \in Q, y \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{Q} \right\}, \ m \geqslant 1$$

множество сдвигов фундаментального решения m-гармонического уравнения в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ [1, стр. 520] и $G_m(Q)$ замыкание линейной оболочки $\operatorname{span}\{e_m(Q)\}$ в норме $L_2(Q)$. Полученное $G_m(Q)$ будем называть полигармоническим подпространством.

2. Рассмотрим разложение $L_2(Q) = G_1(Q) \oplus N_1(Q)$. Обозначим $\Delta : L_2(Q) \to N_1(Q)$ соответствующее расширение оператора Лапласа, а $\Delta^{-1} : N_1(Q) \to L_2(Q)$ соответственно обратный оператор.

Теорема 1. *Если $f \in G_m(Q)$, $(m \geqslant 1)$ то существуют гармонические из $G_1(Q)$ функции g_0, g_1, ..., g_{m-1}, такие что*

$$f = g_0 + \Delta^{-1} g_1 + ... + \Delta^{-(m-1)} g_{m-1}, \tag{1}$$

и такое представление единственно.

В работе [2] получен частный случай разложения (1) для полианалитических функций в единичном круге. Представление (1) является глобальным представлением полианалитической функции в области Q в отличие от разложения Альманси [1, 3] которое, как известно, является локальным представлением. Более того, в отличии от разложения Альманси, разложение (1) является ортогональным.

3. Зафиксируем натуральное число $m > 1$ и рассмотрим *задачу Рикье* в следующей постановке (классическую постановку см., например, в [3, стр. 30]) требуется: найти полигармоническую функцию $u \in G_m(Q)$, такую, что $\Delta^k u \in L_2(Q)$ для $k = 1, ..., m-1$ и

$$\Delta^k u(x)\big|_S = f_k(x), \; k = 0, 1, ..., m-1. \tag{3}$$

где $f_k \in L_2(S)$.

Согласно теореме 1, решение представляется в виде

$$u = g_0 + \Delta^{-1} g_1 + ... + \Delta^{-(m-1)} g_{m-1}. \tag{4}$$

Применим оператор Δ^{m-1} к выражению (4), получим $\Delta^{m-1} u = g_{m-1}$; используя (3) при $k = m-1$ имеем граничное условие:

$$g_{m-1}(x)|_S = f_{m-1}(x), \tag{5}$$

и таким образом g_{m-1} определяется однозначно как решение краевой задачи для уравнения Лапласа с граничным условием (5). Аналогично, имеем граничное условие для функций g_k:

$$g_k(x)|_S = f_k(x) - \sum_{i=1}^{m-k-1} \Delta^{-i} g_{k+i}(x)\big|_S, \; k < m-1. \tag{6}$$

Следовательно, гармонические функции g_k образующие решение (4) последовательно при $k = m-1, ..., 0$, однозначно определяются решением граничных задач для уравнения Лапласа с условием Дирихле (6).

Таким образом, из теоремы 1, для задачи Рикье, вытекает существование и единственность не только классического решения с непрерывными на S следами итерированных лапласианов $\Delta^k u$, $k = 1, ..., m-1$, но и обобщенного решения из $G_m(Q)$. Обобщенная постановка для бигармонического случая рассматривалась, например, в [4, стр. 290, п. 27б].

Можно показать, справедливость аналогичного результата для задачи Рикье-Неймана; существование и единственность которой в классической постановке доказанны в работе [5].

Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул / С.Л. Соболев. // М. : Наука. — 1974. — 808 с.

2. Рамазанов А. К. Представление пространства полианалитических функций в виде прямой суммы ортогональных подпространств. Приложение к рациональным аппроксимациям / А.К. Рамазанов // Матем. заметки. — 1999. — Т. 66, № 5. — С. 741—759

3. Карачик В.В. Метод нормированных систем функций / В.В. Карачик. // Челябинск : Изд. центр ЮУрГУ. — 2014. — 451 с.

4. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В.П. Михайлов. // М. : Наука. — 1983. — 424 с.

5. Карачик В.В. Задача Рикье-Неймана для полигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Дифференц. ур. — 2018. — Т. 54, № 5. — С. 653–662

О ВЫЧИСЛЕНИИ НА ЧАСТИ ГРАНИЦЫ ВТОРОГО ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

А.Н. Марковский, Д.Ю. Гамаюнова (Краснодар, КубГУ)

mrkvsk@yandex.ru

1. Обозначим Q ограниченную односвязную область с кусочно гладкой границей $S = \partial Q$ которая состоит из двух частей S_1 и S_2, так что $S = S_1 \cup S_2$ и рассмотрим следующую задачу

$$\Delta^2 u(x) = 0, \ x \in Q, \tag{1}$$

$$u(x)|_{S_1 \cup S_2} = 0, \ \left.\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u(x)\right|_{S_2} = \varphi(x), \tag{2}$$

на границе S_1 требуется определить функцию

$$f(x) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u(x)\Big|_{S_1} \tag{3}$$

такую что

$$\|\Delta u(x)\|_{L_2(Q)} = \left[\iint_Q |\Delta u(x)|^2\right]^{1/2} \to \inf, \tag{4}$$

где *infimum* берется по всем функциям из $L_2(Q)$ удовлетворяющих условиям (1) и (2). Задачу (1)—(4) будем называть *биармонической вариационной задачей*, данная задач рассматривалась в коротной работе [1].

2. Рассмотрим соболевское пространство $\overset{\circ}{H}{}^2(Q)$ функций $v(x)$ с обобщенными производными из $L_2(Q)$ до второго порядка включительно, обращающихся в нуль на S, с нормой $\|v\|_{\overset{\circ}{H}_2(Q)} = \|\Delta v\|_{L_2(Q)}$.

Рассмотрим подмножество в $\overset{\circ}{H}{}^2(Q)$

$$B(\varphi) = \left\{ v(x):\ \Delta^2 v(x) = 0,\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u(x)\Big|_{S_2} = \varphi(x) \right\},$$

и на нем соответствующую вариационную задачу.

Задача $V(\varphi)$**.** *Найти*

$$\mu(\varphi) = \inf_{v \in B(\varphi)} \|v\|_{\overset{\circ}{H}_2(Q)}$$

и минимизирующую функцию v_0*, такую что* $\mu(\varphi) = \|v_0\|_{\overset{\circ}{H}_2(Q)}$.

Доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. *Для всякой функции* φ *из* $L_2(S_2)$ *решение вариационной задачи* $V(\varphi)$ *существует и единственно.*

Таким образом, если v_0 решение вариационной задачи $V(\varphi)$, то решение рассматриваемой бигармонической задачи (1)—(4) есть $f(x) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} v_0(x)\big|_{S_1}$.

3. Также в работе будет рассмотрен алгоритм решения вариационной бигармонической задачи (1)—(4), то есть алгоритм определения функции v_0 и соответственно, функции f методом базисных потенциалов (фундаментальных решений) [1—3]. Алгоритм решения стандартной бигармонической задачи рассмотрен в [4]. Полнота сдвигов фундаментальных решений в бигармоническом пространстве доказана в [5].

Литература

1. Алексидзе М. А. Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач / М.А. Алексидзе. // М. : Наука. — 1991. — 352 с.

2. Лежнев А.В. Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики / А.В. Лежнев, В.Г. Лежнев. // Краснодар : КубГУ — 1991. — 111 с.

3. Bogomolny A. Fundamental solutions method for elliptic boundary value problems / A.Bogomolny // J. Num. Anal. — 1985. — V. 22, Iss.4. —P. 644–669.

4. Лежнев В.Г. Метод базисных потенциалов для неоднородного бигармонического уравнения / В.Г. Лежнев, А.Н. Марковский // Вест. Самарского госун. — Естест. науч. сер. — 2008. — Т. 8/1(67) — С. 127–139.

5. Марковский А. Н. Замкнутость бигармонической системы базисных потенциалов / А.Н. Марковский // Экологич. вест. НЦ ЧЭС — 2020. — Т. 17, № 1, Ч.2. —С. 20–26.

МЕТОДЫ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В ЗАДАЧАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ БЕЗОПАСНОСТИ И АНАЛИЗА ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

И.В. Машечкин, М.И. Петровский (Москва, МГУ)

mash@cs.msu.ru,michael@cs.msu.ru

На сегодняшний день актуальным является исследование и разработка технологий искусственного интеллекта для решения прикладных задач. Использование математических и эвристических методов позволяет обнаруживать полезные закономерности в данных путем построения описательных и прогнозных моделей машинного обучения. Одними из основных направлений прикладных исследований кафедры Интеллектуальных информационных технологий факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова является разработка интеллектуальных методов и средств обеспечения компьютерной безопасности, а также создание «цифровых двойников» технологических процессов.

В области информационной безопасности решается задача анализа и моделирования поведения пользователей и процессов компьютерных систем для раннего обнаружения внутренних вторжений и предотвращения утечек конфиденциальной информации. Входными данными являются контекстные (потоки событий в системных и прикладных журналах) и контентные (потоки электронных документов) данные об активности пользователей и процессов. Суть подхода заключается в построении моделей машинного обучения для распознавания типичного поведения пользователей и процессов с целью распознавания отклонений от сценариев нормального поведения как потенциально опасной активности. Одной из важных технических задач является разработка формальных моделей представления потоков разнородных сложно–структурированных данных. Для этого были предложены новые подходы на основе классического латентно–семантического анализа, матричных разложений и современных нейросетевых моделей, позволяющие единообразно отображать сложно–структурированные и текстовые данные в пространство скрытых тематик и представлять потоки таких данных как многомерные временные ряды весов скрытых тематик [1, 2]. Далее для решения задач выявления и распознавания типовых сценариев поведения пользователей и процессов применяются как традиционные методы на основе классических ARIMA подходов, методов опорных векторов, ближайших соседей так и собственные уникальные методы на основе нейросетей глубокого обучения и комбинированных методов, использующих нечеткие множества и ядерные функции.

Также в рамках данного направления участниками коллектива разрабатываются методы поведенческой биометрии для интеллектуальной аутентификации и непрерывной идентификации пользователей компьютерных систем и мобильных устройств. Входными данными для таких методов являются также высокочастотные потоки событий, содержащие характеристики работы пользователя с устройствами ввода–вывода: динамика клавиатурного ввода (время нажатий и удержания клавиш клавиатуры), динамика работы с компьютерной мышью либо тачскрином (координаты курсора и события нажатия клавиш во времени), данные с сенсоров мобильных устройств (например, акселерометра) и т.д. Задачей исследования является построение модели преобразование фрагментов потоков событий в векторы признаков (статистики нажатий клавиш клавиатуры, характеристики траектории движения курсора, коэффициенты вейвлет–преобразования для данных датчиков и т.д.) и разработка одноклассовых (в случае если множество пользователей «открыто», т.е. потенциально компьютером или устройством может воспользоваться кто угодно) и многоклассовых (если множество пользователей физически ограничено, например, сотрудниками организации, имеющими доступ к оборудованию) методов машинного обучения. Сотрудниками кафедры были предложены собственные эффективные подходы формирования признаковых пространств, а также собственные методы распознавания на основе нечетких множеств, ядерных функций, опорных векторов и нейросетей для решения задач двухфакторной и беспарольной аутентификации, а также непрерывной фоновой идентификации пользователей по данным их работы с устройствами ввода–вывода компьютерных систем и мобильных устройств [2, 3].

Следующей задачей, решаемой коллективом в рамках направления информационной безопасности, является исследование и разработка методов поиска и мониторинга источников криминальной или экстремистской информации в сети Интернет. Были реализованы и экспериментально апробированы соответствующие методы машинного обучения [4], ключевыми характеристиками которых являются: статистические языково–независимые методы извлечения ключевых слов и аннотаций из документа–образца (примера криминальной или экстремисткой информации); формирование с их помощью поисковых запросов с использованием стандартных поисковых интерфейсов в социальных сетях или поисковых системах; "обогащение" найденных документов и сообщений за счет раскрытия и аннотирования информации из их ссылок и хэштегов; ранжирование и фильтрация найденных документов на основе семантической близости к документу–образцу с использованием собственных алгоритмов и методов на основе матричных разложений.

Под «цифровыми двойниками» технологических процессов понимается комплекс моделей искусственного интеллекта, позволяющих: определять качественные и количественные зависимости между параметрами процесса; прогнозировать значения контролируемых и наблюдаемых параметров в динамике в зависимости от предыдущих состояний процесса и управляющих воздействий; выявлять скрытые зависимости, состояния и факторы, влияющих на технологический процесс; реализовывать выбор оптимальных управляющих воздействий в зависимости от целей и ограничений. Входной информацией для таких моделей являются многомерные временные ряды показаний датчиков производственной системы, осуществляющей технологический процесс. Также важным элементов цифровизации технологических процессов является построение «виртуальных датчиков». Суть проблемы заключается в том, что ряд ключевых характеристик технологических процессов, особенно связанных с качеством, может быть измерен редко и ресурсозатратно, например, с использованием лабораторных исследований, а для оптимального управления процессом крайне желательно знать значения этих характеристик непрерывно во времени. Для этого используются методы машинного обучения, позволяющие прогнозировать данные «виртуальных» датчиков (лабораторных исследований) как функции от показаний других сенсоров, поступающих непрерывно. Коллективом кафедры были разработаны и внедрены интеллектуальные технологии, позволившие создать адекватный «цифровой двойник» процесса крекинга нефти [5]. Ключевыми компонентами разработанных технологий являются: комплексные методы статистического анализа, визуализации и предобработки данных, включая решения задач выбора периодов стабильной работы установки, выявления артефактов, выбросов и сбоев работы датчиков; извлечение признаков путем применения традиционных методов статистического анализа, а также методов машинного обучения на основе градиентного бустинга; построение дифференцируемых авторегрессионных моделей на основе традиционных нейростей прямого распространения и современных рекуррентных нейростей для прогноза значений «виртуальных датчиков» и контролируемых параметров в зависимости от текущего состояния и управления; применение дифференцируемых нейросетевых авторегрессионных моделей в качестве ограничений, целевой функции и уравнения состояния для решения задачи оптимального управления с использованием подходов обучения с подкреплением и классического метода пристрелки (shooting method).

Литература

1. Korolev V.Y. Applying Time Series for Background User Identification Based on Their Text Data Analysis / V.Y. Korolev, A.Y. Korchagin, I.V. Mashechkin et al. // Program Comput Soft — 2018. — V. 44. — P. 353–362.

2. Kazachuk M. Novelty Detection Using Elliptical Fuzzy Clustering in a Reproducing Kernel Hilbert Space / M. Kazachuk, M. Petrovskiy, I. Mashechkin, O. Gorohov // Lecture Notes in Computer Science — 2018. — V. 11315. — P. 221–232.

3. Mashechkin I.V. Software System for Users Continuous Identification Based on Behavioral Information About the Work with Standard Input Devices / I.V. Mashechkin, M.I. Petrovskiy, I.S. Popov // Lobachevskii J Math — 2019. — V. 40. — P. 1809–1816.

4. Mashechkin I. Machine Learning Methods for Detecting and Monitoring Extremist Information on the Internet / I. Mashechkin,

M. Petrovskiy, D. Tsarev, M. Chikunov // Program Comput Soft — 2019. — V. 45 — P. 99–115.

5. Lazukhin I.S. Investigation and Development of Recursive Neural Networks for the Analysis of Industrial Processes / I.S Lazukhin, M.I. Petrovskii, I.V. Mashechkin // Comput Math Model — 2022. — V. 33 — P. 53–71.

ЗАДАЧА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ НА ГРУППЕ ДВИЖЕНИЙ ПЛОСКОСТИ С УПРАВЛЕНИЕМ В КРУГОВОМ СЕКТОРЕ[1]

А.П. Маштаков, Ю.Л. Сачков (Переславль–Залесский, ИПС имени А.К. Айламазяна РАН)

alexey.mashtakov@gmail.com, yusachkov@gmail.com

Рассматривается задача наискорейшего перемещения модели мобильного робота (машины) на плоскости, который может двигаться вперед и поворачивать с заданным минимальным радиусом поворота. Состояние системы задается положением центральной точки оси колесной пары и углом ориентации оси на плоскости. Управляя линейной и угловой скоростью, требуется перевести систему из заданного начального в заданное конечное состояние.

Задача формулируется как задача оптимального управления на группе Ли $\mathrm{SE}_2 \ni (x, y, \theta)$ собственных евклидовых движений плоскости, где $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ задает центральную точку, а угол $\theta \in S^1$ — ориентацию машины на плоскости. Управления $(u_1, u_2) \in U$ суть линейная и угловая скорости машины. Множество значений допустимых управлений U есть круговой сектор.

Для произвольного угла $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$ раствора сектора U рассматривается следующая управляемая система:

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos\theta, & (x, y, \theta) = q \in \mathrm{SE}_2, \\ \dot{y} = u_1 \sin\theta, & u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1, \\ \dot{\theta} = u_2, & |u_2| \leqslant u_1 \operatorname{tg}\alpha. \end{cases} \tag{1}$$

Для заданных граничных условий q_0, $q_1 \in \mathrm{SE}_2$ требуется найти управления $u_1(t)$, $u_2(t) \in L^\infty([0, T], \mathbb{R})$, такие, что соответствующая траектория $\gamma : [0, T] \to \mathrm{SE}_2$ переводит систему из начального состояния q_0 в конечное состояние q_1 за минимальное время:

$$\gamma(0) = q_0, \quad \gamma(T) = q_1, \qquad T \to \min. \tag{2}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22–11–00140).

В работе обобщается частный случай управления в полукруге [1] на сектор с углом раствора не больше 180 градусов. Задача имеет приложение в обработке изображений [2], траектории системы используются для поиска выделяющихся кривых.

Теорема 1. *В задаче быстродействия (1), (2) всегда существует оптимальная траектория, переводящая систему из произвольно заданной начальной конфигурации q_0 в произвольно заданную конечную конфигурацию q_1.*

К задаче применен принцип максимума Понтрягина. Получено описание различных типов экстремальных траекторий системы. Показано, что для почти всех траекторий существуют моменты времени, когда динамика системы переключается между двумя возможными видами: движение по окружности и движение вдоль субримановой геодезической [3]. Найден явный вид экстремальных управлений и получена параметризация экстремальных траекторий. Частично исследован вопрос оптимальности экстремалей.

Литература

1. Маштаков А.П. Задача быстродействия на группе движений плоскости с управлением в полукруге / А.П. Маштаков // Математический сборник. — 2022. Т. — 213. № 4. — С. 100–122.

2. Duits R. Optimal Paths for Variants of the 2D and 3D Reeds–Shepp Car with Applications in Image Analysi / R. Duits, S.P.L. Meesters, J.-M. Mirebeau, J.M. Portegies // Journal of Mathematical Imaging and Vision. — 2018. — № 60. — pp. 816–848.

3. Sachkov Y. L. Cut locus and optimal synthesis in the sub–Riemannian problem on the group of motions of a plane / Y. L. Sachkov // ESAIM: COCV. — 2011. — vol. — 17. № 2. — pp. 293–321.

ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛИ ЯЗЫКОВОЙ ДИНАМИКИ АБРАМСА–СТРОГАТТИ НА СЛУЧАЙ НЕСКОЛЬКИХ ЯЗЫКОВ

А.В. Медведев, О.А. Кузенков (Нижний Новгород, ННГУ)
a.medvedev.unn@gmail.com, kuzenkov_ o@mail.ru

Методы математического моделирования широко применяются для изучения языковой динамики, исследованиям которой посвящено много работ [1–7]. Исследование языковой динамики и прогнозирование её результатов становятся всё более актуальными в связи с развитием цифровых и телекоммуникационных технологий, глобальной сети Internet [8]. Центральной задачей является выявление тенденции, когда один язык вытесняет остальные, т.е. становится доминирующим, и тем самым оказывает влияние на все сферы социальной жизни.

Цель настоящей работы заключается в построении и исследовании обобщённой математической модели Абрамса—Строгатти (AS) для описания динамики нескольких сосуществующих языков.

Рассматриваемая модель имеет вид:

$$\dot{x}_i = \Bigg(\sum_{j\neq i}^{N} x_j\Bigg) c s_i x_i^{\alpha} - x_i c\Bigg(\sum_{j\neq i}^{N} s_j x_j^{\alpha}\Bigg), \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{N} s_i = 1, \quad \alpha > 1. \tag{1}$$

Фазовыми переменными $x_i, i = \overline{1, N}$, являются доли носителей разных языков в сообществе. Параметр s_i имеет смысл престижности i–го языка, постоянная величина α имеет смысл волатильности в соответствии с гипотезами Абрамса—Строгатти [9]. Здесь c — некоторая постоянная величина. Фазовым пространством для (1) является стандартный симплекс [10]. Аналитическое исследование проводилось на основе математического аппарата, разработанного для систем дифференциальных уравнений на стандартном симплексе [10–14], который использовался для моделирования процессов передачи генетически незакреплённой информации. В результате проведённого исследования была построена функция конкурентоспособности языка [15, 16] в виде:

$$J_i = c s_i x_i^{\alpha-1}(0).$$

Доминирующим является тот язык, для которого фукция конкурентоспособности имеет наибольшее значение. Стоит отметить, что на конкурентоспособность влияет начальное распределение носителей по языкам.

В работе была проанализирована десятилетняя статистика использования восьми самых популярных языков в сети Internet: английский, русский, немецкий, испанский, китайский, японский, французский и турецкий [8]. На основе этого были идентифицированны параметры модели методом наименьших квадратов. Было показано, что при неизменных условиях английский язык будет вытеснять из глобальной сети Internet остальные языки с течением времени.

Литература

1. Castelly X., Eguнluz, V., San Miguel M. Ordering Dynamics with Two Non–Excluding Options: Bilingualism in Language Competition / New Journal of Physics, — 2006, — №8̃. — P. 308. https://doi.org/10.1088/1367-2630/8/12/308

2. Mira J., Paredes A. Interlinguistic Similarity and Language Death Dynamics. / EPL (Europhysics Letters) — 2005. — №6̃9. — P. 1031. https://doi.org/10.1209/epl/i2004-10438-4

3. Baggs I., Freedman H. A mathematical model for the dynamics of interactions between a unilingual and a bilingual population: persistence versus extinction. / J. Math. Sociol. 1990. — 16(1):51–75. https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0022250X.1990.9990078

4. Wyburn J., Hayward J. The future of bilingualism: an application of the Baggs and Freedman model. / J. Math. Sociol. 2008, — 32(4):267–284. https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00222500802352634

5. Diaz M. A mathematical model of language preservation. / M. Diaz, J. Switkes // 2021. https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC8170493

6. Alexandrova N. The disappearance of languages, natural bilingualism and nonlinear dynamics. / In: 8th International Conference on Cognitive Science, — pp. 35–37, — Svetlogorsk, Russia, — 2018. Abstracts.

7. Alexandrova N. Bilingualism as an Unstable State / N. Alexandrova, V. Antonets, J. Kuzenkov, I. Nuidel, V. Shemagina, V. Yakhno // 2021. https://link.springer.com

8. World Wide Web Technology Surveys. / Most popular content languages for the period 2013–2023 years. https://w3techs.com

9. Abrams D. Modelling the Dynamics of Language Death. / D. Abrams, S. Strogatz // 2003, — Nature, — 424, — 900. https://doi.org/10.1038/424900a

10. Kuzenkov O. Optimal control of a hyperbolic system on a simplex / O. Kuzenkov, E. Ryabova// https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13436426

11. Kuzenkov O. The investigation of the population dynamics control problems based on the generalized Kolmogorov model / O. Kuzenkov // https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15304000

12. Kuzenkov O. Optimal control for a system on a unit simplex in infinite time / O. Kuzenkov, E. Ryabova // https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13492582

13. Кузенков О. Математическое моделирование процессов отбора. / О. Кузенков, Е. Рябова // Н.Новгород: Изд–во ННГУ, — 2007.

14. Kuzenkov O. Variational Principle for Self–replicating Systems / O. Kuzenkov, E. Ryabova // Math. Model. Nat. Phenom. — 2015. — V.10 (2) P. — 115–129.

15. Kuzenkov O. Construction of the fitness function depending on a set of competing strat–egies based on the analysis of population dynamics. / O. Kuzenkov // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics, — 2022, — vol. 30, — iss. 3, — pp. – 276–298. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2022-30-3-276-298

16. Kuzenkov O. Towards the construction of a mathem atically rigorous framework for the modelling of evolutionary fitness / O. Kuzenkov, A. Morozov // Bulletin of Mathematical Biology. — 2019. — Vol. 81, — no. 11. P. — 4675–4700. https://doi.org/10.1007/s11538-019-00602-3

УЧЕТ СИММЕТРИИ В МЕТОДЕ РИТЦА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА В КРИСТАЛЛАХ С БАЗИСОМ[1]

Мельников Н.Б., Резер Б.И.

(Москва, МГУ; Екатеринбург, ИФМ УрО РАН)

melnikov@cs.msu.ru, reser@imp.uran.ru

Электронные состояния в кристаллах получаются из уравнения Шрёдингера

$$\Delta\psi + (\varepsilon - V)\psi = 0\,, \tag{1}$$

где $\varepsilon = \varepsilon_n(\mathbf{k})$ и $\psi = \psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ — собственное значение и собственная функция (n — индекс энергетической зоны, $\mathbf{k}$ — волновой вектор), а V — кристаллический потенциал. Используя периодичность потенциала и теорему Блоха, можно ограничить задачу на ячейку Вигнера–Зейтца Ω_{WS}, наложив следующие граничные условия:

$$\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}_\sigma) = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\mathbf{k}\mathbf{R}_\mathbf{r}}\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})\,, \qquad \frac{\partial\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}_\sigma)}{\partial\mathbf{n}} = -\mathrm{e}^{\mathbf{i}\mathbf{k}\mathbf{R}_\mathbf{r}}\frac{\partial\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{n}}\,, \tag{2}$$

[1] Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема «Электрон», номер госрегистрации 122021000039–4).

где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_\sigma$ — сопряжённые точки на границе ячейки Вигнера–Зейтца, $\mathbf{R_r}$ — вектор между этими точками, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к границе ячейки.

Задача на собственные значения (1) и (2) сводится к вариационной задаче минимизации интегрального функционала

$$J[\psi] = \int\limits_{\Omega_{\mathrm{WS}}} \psi^*(\mathcal{H} - \varepsilon)\psi \,\mathrm{d}\mathbf{r}\,, \qquad \mathcal{H} = -\Delta + V\,, \tag{3}$$

при дополнительном ограничении

$$\int\limits_{\Omega_{\mathrm{WS}}} |\psi|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{r} = 1 \tag{4}$$

в классе функций, удовлетворяющих граничным условиям (2).

Наиболее распространённым методом получения приближённого решения вариационной задачи (3) и (4) является метод Ритца. Искомая функция ψ аппроксимируется линейной комбинацией $\psi^{(N)} = \sum\limits_\mu c_\mu \chi_\mu$ некоторых координатных функций χ_μ. Коэффициенты в этом разложении c_ν находятся из системы уравнений

$$\sum_\nu (H_{\mu\nu} - \varepsilon S_{\mu\nu})c_\nu = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, N), \tag{5}$$

где

$$H_{\mu\nu} = \int\limits_{\Omega_{\mathrm{WS}}} \chi_\mu^* \mathcal{H} \chi_\nu \,\mathrm{d}\mathbf{r}\,, \qquad S_{\mu\nu} = \int\limits_{\Omega_{\mathrm{WS}}} \chi_\mu^* \chi_\nu \,\mathrm{d}\mathbf{r}\,. \tag{6}$$

Соответствующие величины ε находятся из обобщённой задачи на собственные значения

$$\det(H - \varepsilon S) = 0. \tag{7}$$

Метод Ритца (5)–(7), использующий в качестве координатных функций χ_μ линейные комбинации атомных орбиталей, называется методом сильной связи (см., напр., [1, 2]). Параметры метода могут быть определены с помощью расчётов в точках высокой симметрии в зоне Бриллюэна.

В докладе представлен общий теоретико–групповой подход, который даёт матричные компоненты гамильтониана в методе сильной связи, используя пространственную симметрию задачи, симметрию обращения времени и эрмитовость гамильтониана. Для кристаллов с двумя атомами в элементарной ячейке соответствующая математическая теория была разработана в работе [3] (см. также [1, 2] и ссылки там). В нашей работе [4] построено обобщение для кристаллов с несколькими атомами в элементарной ячейке.

Литература

1. Hergert W. Group Theory in Solid State Physics and Photonics: Problem Solving with Mathematica / W. Hergert, R.M. Geilhufe. // New York : Wiley. — 2018.

2. Melnikov N.B. Space Group Representations: Theory, Tables and Applications / N.B. Melnikov, B.I. Reser. // Berlin : Springer. — 2023.

3. Egorov R.F. Consistent treatment of symmetry in the tight binding approximation / R.F. Egorov, B.I. Reser, V.P. Shirokovskii // Phys. Stat. Sol. — 1968. — Vol. 26 — P. 391–408.

4. Melnikov N.B. Treatment of symmetry in the tight–binding method for crystals with several atoms per unit cell / N.B. Melnikov, B.I. Reser // Phys. Scr. — 2023 (in press).

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ[1]

М.В. Мулюков (Пермь, ПГНИУ)
mulykoff@gmail.com

Непрерывно–дискретной (гибридной) системой функционально–дифференциальных уравнений называется система уравнений, содержащая как непрерывные, так и дискретные компоненты.

Исследование устойчивости гибридных систем — актуальное направление современной теории устойчивости [1], [2].

Рассчитывать на получение необходимых и достаточных признаков устойчивости можно для сравнительно узкого класса линейных автономных гибридных систем функционально–дифференциальных уравнений.

Если подсистема с непрерывным временем имеет форму системы обыкновенных дифференциальных уравнений, то задача устойчивости сводится к вопросу об устойчивости системы разностных уравнений [3].

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + Ax(t) = Bx\big([t]\big) + Cy\big([t]\big), \\ y\big([t]+1\big) + Dy\big([t]\big) = Ex\big([t]\big), \end{cases} \qquad t \geqslant 0 \tag{1}$$

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–21–00517

где $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $C \in \mathbb{R}^{k\times m}$, $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $E \in \mathbb{R}^{m\times k}$, символом $[.]$ обозначена целая часть числа, $k, m \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Система (1) рассмотрена на сетке шагом 1. Масштабированием оси времени можно добиться того, чтобы сетка имела произвольный положительный шаг $h > 0$.

Система (1) называется *асимптотически устойчивой*, если для любых начальных данных $\lim_{t\to\infty}\big\|x(t)\big\| = \lim_{n\to\infty}\big\|y(n)\big\| = 0$.

Рассмотрим блочную матрицу

$$M = \left[\begin{array}{c|c} -e^{-A} - SB & -SC \\ \hline -E & D \end{array}\right], \quad \text{где} \quad S = \int_0^1 e^{-As} ds.$$

Теорема 1. *Система* (1) *асимптотически устойчива в том и только том случае, если собственные числа матрицы M лежат внутри единичного круга.*

В качестве примера рассмотрим уравнение второго порядка

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = bq\big([t] - 1\big), \quad t \geqslant 0. \tag{2}$$

где $b, \omega \in \mathbb{R}$.

Имеем

$$M = \begin{bmatrix} -\cos\omega & -\frac{\sin\omega}{\omega} & -\frac{1-\cos\omega}{\omega^2} b \\ \omega\sin\omega & -\cos\omega & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Уравнение (2) асимптотически устойчиво в том и только том случае, если $b \neq 0$ и $\cos\omega \notin \{-1, 1/2, 1\}$ и

$$\begin{cases} 0 < b < \omega^2 \dfrac{1+\cos\omega}{1-\cos\omega}, & \text{если} \quad \cos\omega < 0, \\ 0 < b < \omega^2 \dfrac{1-2\cos\omega}{1-\cos\omega}, & \text{если} \quad \cos\omega \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right), \\ \omega^2 \dfrac{1-2\cos\omega}{1-\cos\omega} < b < 0, & \text{если} \quad \cos\omega \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right). \end{cases}$$

Если непрерывная часть гибридной системы является системой дифференциальных уравнений с запаздыванием, то исследование устойчивости в ряде случаев может быть сведено к изучению спектра оператора Грина вспомогательной краевой задачи [4].

Литература

1. Симонов П. М. К вопросу об устойчивости системы двух линейных гибридных функционально–дифференциальных систем с последействием / П. М. Симонов // Современные методы теории краевых задач: Материалы Международной конференции Воронежская

весенняя математическая школа ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ — XXXI. Посвящается памяти Юлия Витальевича Покорного (80–летию со дня рождения). — Воронеж: Издательский дом ВГУ. — 2020. — С. 199–200.

2. Bravyi E. I. Some Economic Dynamics Problems for Hybrid Models with Aftereffect / E. I. Bravyi, V. P. Maksimov, P. M. Simonov // Mathematics. — 2020. — No. 8(10).

3. Marchenko V. M. On the Stability of Hybrid Difference–Differential Systems / V. M. Marchenko, J.–J. Loiseau // Differential Equations. — 2009. — No. 45(5). — P. 743–756.

4. Mulyukov M.V. Necessary Conditions of the Stability of One Hybrid System / M. V. Mulyukov // Mem. Differential Equations Math. Phys. — 2022. — No. 87. — Pp. 111–118.

ЗАДАЧА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.М. Мухсинов (г.Худжанд, ТГУПБП, РТ)
yodgor.mukhsinov@gmail.com

В сепарабельном и рефлексивном банаховом пространстве X рассматривается разрешимость задачи преследования [1] для линейной дифференциальной игры, описываемая системой

$$\begin{cases} \dot{x}\left(t\right) = k\dot{x}\left(t-1\right) + y\left(t\right) + \overline{v}\left(t\right) \\ \dot{y}\left(t\right) = -\overline{u}\left(t\right) \end{cases}, \tag{1}$$

где $\|\overline{u}\| \leqslant \alpha$, $\|\overline{v}\| \leqslant \beta$, $k \geqslant 0$, $x\left(t\right)$, $y\left(t\right) \in X$, $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \|x\| \leqslant l \right\}$. Если $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{u} \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} \overline{v} \\ 0 \end{pmatrix}$, то игра (1) записывается в виде $\dot{z}\left(t\right) = C\dot{z}\left(t-1\right) + Az\left(t\right) - u + v$.

Фундаментальное решение $\Phi\left(t\right)$, для которого $\dot{\Phi}\left(t\right) = C\dot{\Phi}\left(t-1\right) + A\Phi\left(t\right)$, $\Phi\left(0\right) = I$ и $\Phi\left(s\right) = 0$ при $s < 0$ имеет вид:

$$\Phi\left(t\right) = \begin{pmatrix} I & t + \sum_{i=1}^{n-1}\left(n-i\right)k^{i} + \left(t-n\right)\sum_{i=1}^{n}k^{i} \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$n \leqslant t \leqslant n+1, \quad n = 0, 1, \ldots \ .$$

Пусть

$$\left\|\left(1-k\right)x_0+\left[T+\sum_{i=1}^{n-1}\left(n-i\right)k^i+\left(T-n\right)\sum_{i=1}^{n}k^i\right]y_0\right\|\leqslant R\left(T\right), \quad (2)$$

где

$$R\left(T\right)=\alpha\left(\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{n}k^i\right)T^2+\left[\alpha\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(n-i\right)k^i-n\sum_{i=1}^{n}k^i\right)-\beta\right]T+l.$$

Теорема.

1. Если

$$d=\left[\alpha\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(n-i\right)k^i-n\sum_{i=1}^{n}k^i\right)-\beta\right]^2-4\left(\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{n}k^i\right)\alpha l\leqslant 0,$$

то из любой точки $z_0=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ *возможно завершение преследования за оптимальное время*

$$T_0=\min\left\{T\geqslant 0:\ \text{для которых выполняется неравенство (2)}\right\}.$$

2. Если $d>0$, *то из любой точки* $z_0\in P$, *где*

$$P=\bigcup_{c\in[0,\quad l)}P_c,$$

$$P_c=\left\{\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}:\ y_0=\frac{cp-\left(1-k\right)x_0}{T_c+\sum_{i=1}^{n-1}\left(n-i\right)k^i+\left(T_c-n\right)\sum_{i=1}^{n}k^i}\right\}$$

где $\|x_0\|\geqslant l,\quad \|p\|=1,$

$$T_c\left(1+2\left(\sum_{i=1}^{n}k^i\right)\right)\alpha=\alpha\left(n\sum_{i=1}^{n}k^i-\sum_{i=1}^{n-1}\left(n-i\right)k^i\right)+\beta-$$

$$-\sqrt{d+\left(2+4\sum_{i=1}^{n}k^i\right)\alpha c},$$

возможно завершение преследования за оптимальное время T_c.

Когда $X = R^n$ и $k = 0$ получим соответствующий конечномерный результат Л.С. Понтрягина [2], где игра задается системой

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) + \overline{v}(t) \\ \dot{y}(t) = -\overline{u}(t) \end{cases}.$$

Если $d = \beta^2 - 2\alpha l \leqslant 0$, то из любой точки $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ возможно завершение преследования. Когда $d > 0$ и $c = 0$ множество P_0 совпадает с множеством, которое указано в работе Н. Сатимова [3].

Литература

1. Мухсинов Е.М. Разрешимость задачи преследования для одной дифференциальной игры в банаховом пространстве / Е.М. Мухсинов // Дифференц. уравнения. — 2023. – Т. 59, — № 1. — С. 142–146.

2. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования / Л.С. Понтрягин // Мат. сб. — 1980. — Т. 112, — №154. — С. 307–331.

3. Сатимов Н.Ю. О задачах избежания взаимных столкновений / Н.Ю. Сатимов // ДАН Уз.ССР. — 1981, — № 2. — С. 3–5.

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КВАЗИОДНОРОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ [1]

А.Н. Наимов, М.В. Быстрецкий (Вологда, ВоГУ)
naimovan@vogu35.ru, pmbmv@bk.ru

Рассмотрим периодическую задачу следующего вида:

$$x'(t) = P(x(t)) + f(t, x(t)), \quad x(t) \in \mathrm{R}^n, \quad t \in (0, \omega), \tag{1}$$

$$x(0) = x(\omega). \tag{2}$$

Здесь $n \geqslant 2$, $\omega > 0$, $P = (P_1, \ldots, P_n) : \mathrm{R}^n \mapsto \mathrm{R}^n$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее условию квазиоднородности

$$P_i(\lambda^{\alpha_1} y_1, \ldots, \lambda^{\alpha_n} y_n) \equiv \lambda^{\alpha_i + \nu} P_i(y_1, \ldots, y_n) \quad \forall \lambda > 0, \quad i = \overline{1, n},$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 23–21–00032).

где числа $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1,n}$ и $\nu > 0$ фиксированы. Отображение $f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathrm{R}^{1+n} \mapsto \mathrm{R}^n$ непрерывно, ω — периодично по t и удовлетворяет условию

$$\lim_{\rho \to +\infty} \rho^{-(\alpha_i+\nu)} \max_{\substack{0 \leqslant t \leqslant \omega, \\ |y| \leqslant 1}} |f_i(t, \rho^{\alpha_1} y_1, \ldots, \rho^{\alpha_n} y_n)| = 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Множество таких отображений f обозначим через $\mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha, \nu)$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Отображение P называем главной нелинейной частью, а f называем возмущением.

Решением периодической задачи (1), (2) называем вектор–функцию $x \in C^1([0, \omega]; \mathrm{R}^n)$, которая удовлетворяет системе уравнений (1) и условию периодичности (2). Такое решение ω — периодично и гладко продолжимо на $\mathrm{R}^1 = (-\infty, +\infty)$.

Разрешимость задачи (1), (2) исследуем в следующей постановке: каким условиям должно удовлетворять отображение P, чтобы при любом $f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha, \nu)$ существовало хотя бы одно решение задачи (1), (2).

В работах [1, 2] задача (1), (2) исследована в случае положительно однородного отображения P, т.е. $\alpha_i = 1$, $i = \overline{1,n}$, применяя методы априорной оценки и методы вычисления вращения векторных полей. Рассмотрение квазиоднородного отображения P позволяет уточнить и обобщить результаты указанных работ следующим образом. Если для положительно однородного отображения P ни при всех возмущениях f имеет место априорная оценка решений задачи (1), (2), то класс возмущений можно сужать так, что главная нелинейная часть системы уравнений (1) окажется квазиднородным отображением. Кроме того, к системе уравнений вида (1) с квазиоднородной нелинейностью P приводятся многие системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с производными высоких порядков. Рассмотрение таких систем представляет интерес при исследовании нелинейных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с применением схемы Фаэдо–Галеркина [3].

Справедлива следуюшая теорема, обобщающая результат работы [2].

Теорема. *Пусть для заданного непрерывного и квазиоднородного (с показателями α и ν) отображения $P : \mathrm{R}^n \mapsto \mathrm{R}^n$ система уравнений*

$$z'(t) = P(z(t)), \quad z(t) \in \mathrm{R}^n, \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

не имеет ненулевых ограниченных решений. Тогда для разрешимости задачи (1), (2) при любом $f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha, \nu)$ необходимо и достаточно, чтобы не обращалось в ноль вращение $\gamma(P)$ векторного поля $P : \mathrm{R}^n \mapsto \mathrm{R}^n$ на единичной сфере $|y| = 1$.

Литература

1. Мухамадиев Э. К теории периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. Мухамадиев. // Докл. АН СССР. — 1970. — Т. 194, № 3. — С. 510–513.

2. Мухамадиев Э., Наимов А.Н. О разрешимости периодической задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с главной положительно однородной нелинейностью / Э. Мухамадиев, А.Н. Наимов // Дифференц. урав. — 2023. — Т. 59, № 2. — С. 280–282.

3. Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.Л. Лионс. // М. : Мир, 1972. — 588 с.

СУЩЕСТВОВАНИЕ, АСИМПТОТИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ТИХОНОВСКОГО ТИПА[1]

Н.Н. Нефедов (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
nefedov@phys.msu.ru

Рассматривается сингулярно возмущенная задача вида:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) - g(u, v, x, t, \varepsilon) = 0,\\
&\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} - f(u, v, x, t, \varepsilon) = 0,\ x \in (0,1),\ t \in R,\\
&\frac{\partial u}{\partial x}(0, t, \varepsilon) = u^0(t),\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, t, \varepsilon) = u^1(t),\ t \in R,\\
&v(0, t, \varepsilon) = v^0(t),\ v(1, t, \varepsilon) = v^1(t),\ t \in R,\\
&u(x, t, \varepsilon) = u(x, t + T),\ v(x, t, \varepsilon) = v(x, t + T, \varepsilon),
\end{aligned}
$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Такие системы естественным образом возникают при моделировании быстрых бимолекулярных реакций в случае, когда один из источников (реакция, нелинейный источник,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23–11–00069).

взаимодействие) интенсивный (порядка $1/\varepsilon^2$), а второй порядка единицы. Задача рассматривается при достаточно малых ε и выполнения условия

Условие 1. Функции $g(u,v,x,t,\varepsilon),\ f(u,v,x,t,\varepsilon),\ u^0(t),\ u^1(t),$ $v^0(t),\ v^1(t)$ являются достаточно гладкими в своих областях определения.

Для вырожденной системы (дифференциально–алгебраическай)

$$\begin{aligned}
&g(u,v,x,t,0)=0,\\
&\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial t}-f(u,v,x,t,0)=0,\ x\in(0,1),\ t\in R
\end{aligned}$$

потребуем условия разрешимости

Условие 2. Пусть вырожденное уравнение $g(u,v,x,t,0)=0$ имеет решение $u=\varphi(v,x,t)$ такое, что $g_u(\varphi(v,x,t),v,x,t,0)>0$, а задача

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial t}-f(u,v,x,t,\varepsilon)=0,\ x\in(0,1),\ t\in R,\\
&v(0,t,\varepsilon)=v^0(t),\ v(1,t,\varepsilon)=v^1(t),\ t\in R,\\
&v(x,t,\varepsilon)=v(x,t+T)
\end{aligned}$$

имеет решение $v=\bar v(x,t)$. Определим $\bar u(x,t)=\varphi(\bar v(x,t),x,t)$.

Определим функцию $\bar g_u(x,t)=g_u(\bar u(x,t),\bar u(x,t),x,t,0)$. Аналогичные обозначения будем использовать и для других производных функций g и f, вычисленных в точке $(\bar u(x,t),\bar v(x,t),x,t,0)$. Обозначим также $\bar\varphi_v(x,t)=\varphi_v(\bar v(x,t),x,t)$.

Определим функцию $k(x,t)\equiv\bar f_v(x,t)-\bar\varphi_v(x,t)\bar g_u(x,t)$. Потребуем выполнения условия

Условие 3. Пусть выполнено неравенство

$$k_1(x)>-\pi^2,\ x\in[0,1],\ \text{где}\ k_1(x)=\min_{t\in[0,T]}k(x,t),$$

или

$$\int_0^T k_2(t)dt>0,\ \text{где}\ k_2(t)=\min_{x\in[0,1]}k(x,t).$$

Условие 3 обеспечит разрешимость задач для построения асимптотического приближения решения рассматриваемой задачи, а также построение верхних и нижних решений задачи путем модификации построенной асимптотики.

Основным результатом работы является теорема о существовании и асимптотической устойчивости по Ляпунову периодического решения задачи как решения соответствующей начально–краевой задачи для параболической системы. Показано, что главным членом в приближении этого решения является решение вырожденной системы, определенной в **Условии 2**. Рассмотрен случай, когда вектор функция (g, f) удовлетворяет условию квази–монотонности:

Условие 4. Вектор–функция (g, f) является квази–монотонно невозрастающей по (u, v) при $x \in (0, 1),\ t \in R$ и ε достаточно малых.

При перечисленных выше условиях построены асимптотические приближения решения $U_n(x, \varepsilon), V_n(x, \varepsilon)$. Доказана теорема:

Теорема 1. *Пусть выполняются* ***Условие 1—Условие 4****. Тогда при достаточно малом ε, существует решение $u(x, \varepsilon), v(x, \varepsilon)$ задачи с пограничным слоем, для которого функции $U_n(x, \varepsilon)$, $V_n(x, \varepsilon)$ являются равномерным асимптотическим приближением с точностью ε^{n+1}. Это решение локально единственно как решение периодической параболической краевой задачи и асимптотически устойчиво по Ляпунову как периодическое решение соответствующей начально–краевой задачи в некоторой ε–окрестности решения вырожденной системы, определенной в* ***Условии 2****.*

Литература

1. Нефедов Н.Н. Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакция–диффузия–адвеция: теория и применение / Н.Н. Нефедов // Ж. Вычисл. матем. и матем. физ. — 2021. — Т. 61, № 12. — С. 2074–2094.

ОБ ОДНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВЯЗКОУПРУГОСТИ[1]

В.П. Орлов (Воронеж, ВГУ)
orlov_vp@mail.ru

Пусть ограниченная область $\Omega \in R^N$, $N = 2, 3$, получается удалением из ограниченной области Ω_0 попарно непересекающихся областей $\overline{\Omega}_i$, $i = 1, ..., K$, где области $\Omega_i \subset \Omega_0$. Таким образом $\Omega = \Omega_0 \setminus (\cup_{i=1}^K \overline{\Omega}_i)$. При этом гладкая граница $\Gamma = \cup_{i=0}^K \Gamma_i$ области Ω такова, что поверхность Γ_0 ограничивает область Ω извне, а остальные связные компоненты Γ_i, $i = 1, ..., K$, ее границы $(\Gamma_i = \partial\Omega_i)$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (грант № 22–11–00103)

заключены внутри этой поверхности. В $Q_T = [0,T] \times \Omega$ рассматривается задача (задача A) о движении вязкоупругой жидкости олдройдовского типа:

$$\partial u/\partial t + \sum_{i=1}^{N} u_i \partial u/\partial x_i - \mu_0 \Delta u + \operatorname{grad} p -$$

$$\mu_1 \mathrm{Div} \int_{\tau_u(t,x)}^{t} \exp((s-t)\lambda)\, \mathcal{E}(u)(s, z(s;t,x))\, ds = f,$$

$$\operatorname{div} u(t,x) = 0, \ (t,x) \in Q_T; \int_{\Omega} p(t,x)\, dx = 0; \ t \in [0,T];$$

$$u(0,x) = u^0(x), \ x \in \Omega, u(t,x)|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \ t \in [0,T].$$

Здесь $u(t,x) = (u_1(t,x), \ldots, u_N(t,x))$ и $p(t,x)$ искомые скорость движения и давление жидкости, матрица $\mathcal{E}(u) = \{\mathcal{E}_{ij}(u)\}_{i,j=1}^{N}$, $\mathcal{E}_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$ — тензор скоростей деформаций. Дивергенция $\mathrm{Div}\, \mathcal{E}(u)$ матрицы определяется как вектор с компонентами — дивергенциями строк, константы $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$, u^0 и φ заданные начальное и граничное значения функции u. Вектор–функция $z(\tau; t, x)$ определяется как регулярный лагранжев поток (РЛП), порожденный задачей Коши (или, что то же, функцией u)

$$z(\tau; t, x) = x + \int_{t}^{\tau} u(s, z(s;t,x))\, ds, \quad \tau, t \in [0,T], \quad x \in \Omega.$$

Функция $z(\tau; t, x)$ определяет траекторию движения частицы жидкости, которая в момент времени t находится в точке $x \in \Omega$.

Функция $\tau_u(t,x) = \inf\{\tau : z(s;t,x) \in \Omega, s \in (\tau, t]\}$ означает момент вхождения в Ω частицы жидкости, которая в момент времени t находится в точке $x \in \Omega$.

Предполагается, что граничная функция $\varphi(x)$ удовлетворяет необходимому условию

$$\int_{\partial\Omega} \varphi(x) \cdot n(x)\, dx = \sum_{i=0}^{K} \int_{\Gamma_i} \varphi(x) \cdot n(x)\, dx$$

($n(x)$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$), и является следом на $\partial\Omega$ непрерывно дифференцируемой на Ω_0 соленоидальной функции $a(x)$. Представим функцию u в виде $u = v + a$.

Пусть $W_1 = \{v : \ v \in L_2(0,T;V), \ v' \in L_1(0,T;V^{-1})$ (определение пространств H и V на Ω см. в [1]). Пусть $b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} u_i \partial v_j / \partial x_i w_j\, dx$, где $u, v, w \in V$.

Пусть $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $v^0 \in H$. Слабым решением задачи A называется функция $v \in W_1$, удовлетворяющая условию $v(0) = u^0 - a$ и тождеству

$$d(v,\varphi)/dt - \sum_{i=1}^{N}(v_i v, \partial\varphi/\partial x_i) + \mu_0(\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(\varphi)) +$$

$$\mu_1(\int_{\tau_{v+a}(t,x)}^{t} \exp((s-t)\lambda)\mathcal{E}(v+a)(\tau, z(s;t,x))\, d\tau\,, \mathcal{E}(\varphi)) =$$

$$\langle f, \varphi\rangle - b(v,a,\varphi) - b(a,v,\varphi) - b(a,a,\varphi) - \mu_0(\mathcal{E}(a), \mathcal{E}(\varphi))$$

при любой $\varphi \in V$ и п.в. $t \in [0,T]$.

При некоторых ограничениях на граничную функцию φ устанавливается существование слабого решения задачи A.

Результат получен совместно с В.Г. Звягиным.

Литература

1. Темам Р. Уравнение Навье–Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. — М. : Мир, 1987. — 408 с.

2. Коробков М.В. Задача протекания для уравнений Навье–Стокса / М.В. Коробков, К. Пилецкас, В.В. Пухначёв, Р. Руссо // УМН. — 2014. — Т. 69, вып. 6(420). — С. 115–176.

3. Звягин В.Г. Об априорных оценках слабых решений одной неоднородной задачи динамики вязкоупругой сплошной среды с памятью / В.Г. Звягин, В.П. Орлов // Известия вузов. Математика. — 2021. — № 5. — С. 43–54.

РАЗЛОЖЕНИЕ ПЕРВОЙ КОМПОНЕНТЫ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОГО КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

М.С. Пастухов, В.С. Рыхлов (Саратов, СГУ)

ritson67@outlook.com, RykhlovVS@yandex.ru

Рассмотрим в пространстве $L_2[0,1]$ квадратичный пучок $L(\lambda)$ обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка:

$$l(y,\lambda) := y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y, \quad y(0) = y'(1) = 0 \quad (p_1, p_2 \in \mathbb{R}). \qquad (1)$$

Обозначим через ω_1, ω_2 корни характеристического уравнения $\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$ пучка (1) и пусть выполняется условие $\omega_1 < 0 < \omega_2$.

Исследуется сходимость разложения первой компоненты в ряд по собственным функциям пучка (1). Ряд для второй компоненты может и расходится.

Далее используем определения и факты из [1], не оговаривая этого особо. Для собственных значений (с.з.) пучка (1) справедлива формула

$$\lambda_k = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \ln \frac{|\omega_1|}{\omega_2} + \frac{(2k+1)\pi i}{\omega_2 - \omega_1}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Линеаризуем задачу (1) так, как это сделано в [2]. Пусть $z_1 = y$, $z_2 = \lambda z_1$, тогда получим краевую задачу $\mathcal{L}Z = \lambda Z$ уже для линейного оператора $\mathcal{L}$, в пространстве вектор–функций $Z = (z_1, z_2)^T$:

$$AZ := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{p_2}\frac{d^2}{dx^2} & -\frac{p_1}{p_2}\frac{d}{dx} \end{pmatrix} Z,$$

$$D_{\mathcal{L}} = \{Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} : \ z_1'', z_2' \in L_1[0,1], \ z_1(0) = z_1'(1) = 0\}.$$

Найдем резольвенту $\mathcal{R}_\lambda = (\mathcal{R} - \lambda\mathcal{E})^{-1}$. Для этого решим задачу $\mathcal{L}Z - \lambda Z = F$, где $F = (f_1, f_2)^T$. Первая компонента $Z = \mathcal{R}_\lambda F$ является решением следующей краевой задачи:

$$z_1'' + \lambda p_1 z_1' + \lambda^2 p_2 z_1 = f_\lambda, \quad z(0) = z'(1) = 0, \tag{4}$$

где $f_\lambda := -p_2 f_2 - p_1 f_1' - \lambda p_2 f_2$.

Для функция Грина задачи (4) справедлива формула

$$G(x,\xi,\lambda) = \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)\Delta(\lambda)} \Big(\omega_2 e^{\lambda(\omega_1 x + \omega_2(1-\xi))} -$$

$$-\omega_1 e^{\lambda\omega_1(x+1-\xi)} + \omega_1 e^{\lambda(\omega_2 x + \omega_1(1-\xi))} - \omega_1 e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2(x-\xi))} \Big) -$$

$$-\frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} e^{\lambda\omega_1(x-\xi)} \chi(x-\xi) - \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} e^{\lambda\omega_2(x-\xi)} \chi(\xi - x) \tag{5}$$

где $\Delta(\lambda) = \omega_2 e^{\lambda\omega_2} - \omega_1 e^{\lambda\omega_1}$, а $\chi(x)$ есть функция Хевисайда.

Обозначим

$$I_n(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \int_0^1 G(x,\xi,\lambda) f_\lambda(\xi) d\xi d\lambda,$$

где Γ_n $(n \in \mathbb{N})$ есть кусочно–круговые контуры, отстоящие от с.з. λ_k на фиксированное досаточно малое $\delta > 0$, между соседними контурами лежит ровно одно с.з. и имеют место оценки $C_1 n <$ дл. $\Gamma_n < C_2 n$ $(0 < C_1 < C_2 < +\infty)$. В силу (3) такие контуры существуют.

С использованием формулы (5) аналогично [2] методом контурного интеграла Коши–Римана доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если* $f_1 \in W_p^1[0,1]$, $f_2 \in L_p[0,1]$, $f_1(0) = f_1'(1) = 0$ $(p > 1)$, *то* $I_n(x) = f_1(x) + o_n(1)$, *где* $o_n(1) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, *равномерно по* $x \in [0,1]$.

Как и в [3], теорема 1 используется при доказательстве теоремы существования и единственности классического решения соответствующей начально–граничной задачи для волнового уравнения.

Литература

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 528 с.

2. Рыхлов В.С. Разложение по собственным функциям квадратичных сильно нерегулярных пучков дифференциальных операторов второго порядка / В.С. Рыхлов // Изв. Сарат. ун–та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, № 1, Ч. 1. — С. 21–26.

3. Рыхлов В.С. Решение начально–граничной задачи в полуполосе для гиперболического уравнения со смешанной производной / В.С. Рыхлов // Математика. Механика: сб. науч. тр. Вып. 24. — Саратов: Изд–во Сарат. ун–та, 2022. — С. 53–58.

О КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЙ АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА АТОМА ВОДОРОДА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ ВБЛИЗИ НИЖНИХ ГРАНИЦ СПЕКТРАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ[1]

А.В. Перескоков (Москва, НИУ ВШЭ, НИУ МЭИ)

pereskokov62@mail.ru

Рассмотрим нерелятивистский гамильтониан атома водорода в однородном электромагнитном поле

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 + \varepsilon \mathbb{M}_3 + \varepsilon e_1 x_1 + \varepsilon^2 \mathbb{W}, \tag{1}$$

где

$$\mathbb{H}_0 = -\Delta - |x|^{-1}, \qquad \mathbb{M}_3 = i x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - i x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad \mathbb{W} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{4}.$$

[1] Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF–2023–0012).

Здесь через $x = (x_1, x_2, x_3)$ обозначены декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$, Δ — оператор Лапласа, магнитное поле направлено вдоль оси x_3, а электрическое поле — вдоль оси x_1. Число $e_1 > 0$ — напряженность электрического поля и $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Наличие в гамильтониане одновременно электрического и магнитного полей, ортогональных друг другу, приводит к образованию резонансных спектральных кластеров около собственных значений невозмущенного атома водорода [1].

В данной работе рассмотрены собственные значения вблизи нижних границ спектральных кластеров. Доказано [2], что вблизи нижних границ имеется серия собственных значений оператора (1) с асимптотикой

$$\mathcal{E}_k = -\frac{1}{4n^2} + \varepsilon m\sqrt{9n^2e_1^2 + 1} + \frac{\varepsilon^2 n^4 e_1^2}{2}(-17n^2 + 3m^2) +$$

$$+\frac{\varepsilon^2 n^2}{2}(-10n^2e_1^2 + \frac{7}{3}n^2 + m^2 + (n^2 - m^2)b_k) + O(\varepsilon^2 n^3) + O(\varepsilon^3 n^{10}), \quad (2)$$

при $\varepsilon \to +0$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, числа $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют условиям $1 \ll n \ll \varepsilon^{-1/6}$, $1 \ll |m| < n$. Чтобы определить числа $b = b_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, в (2), рассмотрим новое модельное уравнение

$$\overline{z}^2 \frac{d^2 Y_0}{d\overline{z}^2} - \beta(\overline{z} + \frac{1}{\overline{z}} + b)Y_0 = 0, \qquad z \in \mathbb{C}. \quad (3)$$

Здесь константа $\beta > 0$ имеет вид

$$\beta = \frac{a-1}{36ae_1^2},$$

а

$$a = \frac{n^2}{|m|^2} > 1.$$

Числа $b = b_k$ определяются как упорядоченные по возрастанию значения параметра b, при которых уравнение (3) имеет решения с асимптотиками

$$Y_0(\overline{z}) = \overline{z}^{1/4} e^{-2\sqrt{\beta}\sqrt{\overline{z}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\overline{z}}}\right)\right), \quad |\overline{z}| \to \infty,$$

$$Y_0(\overline{z}) = \lambda \overline{z}^{3/4} e^{-2\sqrt{\beta}/\sqrt{\overline{z}}} \left(1 + O\left(\sqrt{\overline{z}}\right)\right), \quad |\overline{z}| \to 0.$$

Здесь $\lambda = \lambda_k$ — некоторые константы.

Формула (2) описывает расщепление спектра (т.е. эффект Зеемана — Штарка) для атома водорода в ортогональных электрическом и магнитном поле. Поскольку гамильтониан (1) содержит параметр e_1, возникает однопараметрическое семейство уравнений Гойна, к которым сводится усредненная задача в неприводимом представлении алгебры $\mathcal{F}_{quant}$ Карасева — Новиковой с квадратичными коммутационными соотношениями [1], [2]. Асимптотика решений уравнений Гойна строится с помощью комплексного метода ВКБ и метода согласования асимптотических разложений.

Литература

1. Карасев М.В. Алгебра с полиномиальными коммутационными соотношениями для эффекта Зеемана — Штарка в атоме водорода / М.В. Карасев, Е.М. Новикова // Теор. мат. физ. — 2005. — Т. 142, — № 3. — С. 530–555.

2. Pereskokov A.V. Semiclassical asymptotics of the spectrum of the hydrogen atom in an electromagnetic field near the lower boundaries of spectral clusters / A.V. Pereskokov // J. Math. Sci. — 2021. — V. 259, — № 2. — P. 244–263.

ТЕХНОЛОГИЯ АВТОМАТИЗИРОВАНОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СИЛЬНЫХ ШКВАЛОВ И СМЕРЧЕЙ, А ТАКЖЕ СИЛЬНЫХ И ОПАСНЫХ ОСАДКОВ НА ТЕРРИТОРИИ РОССИИ В ТЕЧЕНИЕ АНОМАЛЬНО ТЕПЛЫХ ЛЕТНИХ СЕЗОНОВ 2020–2022ГГ И ЕГО РЕЗУЛЬТАТЫ

Э.В. Переходцева (Москва, РТУ МИРЭА)

elvperekhod@mail.ru

Летние сезоны 2020–2022гг, как известно, на европейской части России были в среднем аномально теплыми. Положительные аномалии средней суточной температуры составляли иногда 5–7 градусов и более, что связано с общим потеплением климата. При этом антициклоны, обеспечивающие очень теплую погоду сменялись надвигающимися из Европы южными циклонами, приносящими достаточно теплый влажный воздух. Порой они приносили очень сильные осадки, которых также было достаточно много, как и в центральной Европе. При этом температура в российском регионе понижалась весьма незначительно, в среднем сохранялась ее положительная аномалия. Эти факторы наряду с изменением и некоторых других параметров атмосферы, предложенных Переходцевой Э.В. для прогноза сильных шквалов и смерчей, и включенных в гидродинамико–статистическую модель прогноза, привели к тому, что область возможного возникновения очень сильных шквалов со скоростью 25м/с (90км/ч) и даже смерчей протянулась на север до 65–ого градуса северной широты. Ранее такие явления наблюдались там крайне редко (в 2020–2021гг году были отмечены). Большинство этих явлений, несмотря на необычную географию их возникновения, были успешно предупреждены с заблаговременностью 12, 24 и даже 36ч в оперативном режиме на основе нашей гидродинамико–статистической модели прогноза и технологии представления цветных карт автоматизированного прогноза сильных и опасных явлений максимального летнего ветра и сильных и опасных дневных и ночных осадков. Карты на основе модели гидроднамико–статистического прогноза разрисовываются с выделением цветных областей прогноза явлений сильного ветра и сильных осадков разной интенсивности в графическом пакете «Изограф» (автор–Алферов Ю.В.) в оперативной системе АСООИ Гидрометцентра России. Карты прогноза с заблаговременностью 12, 24, 36 и 48ч выкладываются два раза в сутки на сайт Главного Вычислитеьного Центра Госкомидромета, откуда их могут брать синоптики для использования в оперативной практике, т.к методы были рекомендованы как вспомогательные после прохождения оперативных испытаний. Кроме того, синоптикам некоторых региональных Управлений по гидрометслужбе Европейской территории России прогностические карты опасных явлений ежедневно пересылаются по электронной почте. В 2021 году были предупреждены сильные шквалы скоростью 25м/с и выше даже на севере республики Коми, на севере Кировской и Архангельской областей на уровне 63–65 градуса северной широты, на севере Урала, где ранее такие сильные шквалы и тем более смерчи не наблюдались. В более южных районах они тоже, конечно, наблюдались. Даже под Москвой в Шереметьево наблюдались порывы ветра скоростью 26м/с и 28м/с, которые были успешно предупреждены оперативным прогнозом. Не обошли стороной эти опасные явления территорию Поволжья и Северного Кавказа, где их повторяемость несколько выше. Всего таких явлений по донесениям со станций было насчитано в 2021 году около 54, несколько больше, чем в предыдущие годы (смерчи над Черным морем не учитывались). В 2022 году таких явлений было существенно меньше. Неожиданным было возникновение достаточно сильного смерча в сентябре 2022 года в Льговском районе Курской области.

Гидроднамико–статистический прогноз на этот день 9.09.2022г давал возникновение опасного ветра скоростью 25м/с и более. Ни синоптики, ни одна гидродинамическая модель такого прогноза не давала. Разрушения оказались очень значительными, скорость ветра по шкале Ботфорта составила 26–28м/с. При этом ни одна из близлежащих метеостанций не отметила скорости ветра выше 14м/с. Летом 2022 года гораздо больше было отмечено сильных, очень сильных и даже опасных осадков, в частности, ливневых осадков. В июне даже на европейской части были отмечены очень сильные осадки. В Саратовской области в г. Ершове 6.06.2023г были отмечены осадки количеством 44–46мм, 7.08.22 в г.Черкассы Самарской области–42мм, 22.06.2023г — в Воронежской области — 44мм, а в пос. Каменная степь за 10ч выпало 70мм осадков, а 24.06.2023г. — 33мм в той же Воронежской области. Такое количество осадков гидродинамические модели не прогнозируют, синоптики также в прогнозе давали ливневые осадки и просто сильный дождь. Эти и многие другие примеры прогнозов очень сильных шквалов и очень сильных осадков в течение летних сезонов 2020–2022г будут приведены в докладе. Оперативный прогноз этих явлений основывался на статистической модели распознавания метеорологических ситуаций с такими явлениями. В самой статистической модели распознавания и прогноза использовались отобранные ранее по авторскому алгоритму наиболее информативные и слабо–зависимые параметры атмосферы отдельно для сильных шквалов и отдельно для сильных осадков. С целью полной автоматизации прогноза использовались выходные прогностические поля оперативной региональной модели Гидрометцентра России. которые безусловно содержат систематические и случайные ошибки, что ведет в некоторой степени к понижению результатов успешности прогнозов. Теперь в рамках новой технологической линии прогноза такие карты выкладываются на сайт и для территории Сибири, и для территории Дальнего Востока, Прогнозы, особенно очень сильных осадков, также достаточно успешные. По официальной оценке лаборатории испытаний успешность прогноза очень сильных шквалов и смерчей со скоростью ветра V>=25м/с на ЕТР по критерию успешности Пирси–Обухова оказалась достаточно высокой, превышающей оценки успешности прогноза этих явлений по всем гидродинамическим моделям, включая и мезомасштабную модель Гидрометцентра. По данным 2021 года предупрежденность альтернативного прогноза явлений со скоростью 25м/с составила 63Синоптики используют наши цветные карты прогноза в оперативной практике и просят увеличить максимальную заблаговременность прогноза с двух суток до трех суток (72ч) с целью заблаговременного предупреждения населения о возможном опасном явлении. Такая возможность теперь имеется в связи с работой в оперативном режиме усовершенствованной полулагранжевой глобальной модели среднесрочного прогноза (автор–Толстых М.А.), прогностические поля которой можно было бы использовать в качестве входных параметров в нашей статистической модели.

ГРУППОВОЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЕ В РЕКУРРЕНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ[1]

Н.Н. Петров (Ижевск, УдГУ)
kma3@list.ru

В пространстве $R^k (k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n,m)$ $n{+}m$ лиц: n преследователей $P_1,\ldots,P_n$ и m убегающих $E_1,\ldots,E_m$, описываемая системой вида

$$\dot z_{ij} = A(t)z_{ij} + u_i - v_j,\ u_i, v_j \in V,\ z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0,$$

где $z_{ij}, u_i, v_j \in R^k$, V — строго выпуклый компакт R^k, $A(t)$ — непрерывная на $[t_0,\infty)$ матричная функция порядка k. Здесь и далее $i \in I = \{1,\ldots,n\}$, $j \in J = \{1,\ldots,m\}$. Считаем, что $z_{ij}^0 \notin M_{ij}$, где M_{ij} — заданные выпуклые компакты.

Введем следующие обозначения. $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot\omega(t) = A(t)\omega(t)$, $\omega(t_0) = E$, $\mathrm{Int}X$, $\mathrm{co}X$ — соответственно внутренность, выпуклая оболочка множества X,

$$\lambda(h_{ij}, v) = \sup\{\lambda \geqslant 0 : -\lambda(h_{ij} - M_{ij}) \cap (V - v) \neq \varnothing\},$$
$$\Omega_K(l) = \{(i_1,\ldots,i_l) : i_p \in K, p = 1,\ldots,l \text{ и попарно различны}\},$$

где K — конечное подмножество множества натуральных чисел.

Определение 1. В игре $\Gamma(n,m)$ происходит r–кратная поимка убегающего E_β, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется момент $T > t_0$, что для любого допустимого управления $v_\beta(t)$, $t \in [t_0,\infty)$ убегающего E_β найдутся допустимые управления $u_i(t, z_{ij}^0, v_j(t), t \in [t_0,\infty))$ преследователей P_i множество $\Lambda \in \Omega_I(r)$, моменты времени $\tau_l \in [t_0, T], l \in \Lambda$, что $z_{l\beta}(\tau_l) \in M_{l\beta} + D_\varepsilon(0)$ для всех $l \in \Lambda$, где $D_\varepsilon(0) = \{z : \|z\| < \varepsilon\}$.

[1] Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-01483-23-00, проект FEWS–2020–0010.

Предположение 1. Фундаментальная матрица Φ является рекуррентной по Зубову функцией [1], а ее производная равномерно ограничена на $[t_0, \infty)$.

Теорема 1. *Пусть выполнено предположение 1 и*

$$\min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(z^0_{\alpha 1}, v) > 0.$$

Тогда в игре $\Gamma(n, 1)$ происходит r–кратная поимка.

Теорема 2. *Пусть выполнено предположение 1, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей и для каждого $s \in \{0, \ldots, q-1\}$ выполнено следующее условие: для любого множества $N \subset I$, $|N| = n - sr$ найдется множество $M \subset J$, $|M| = q - s$, что*

$$0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega_N(n-r+1)} \operatorname{Intco}\{z^0_{\alpha\beta} - M_{\alpha\beta}, \alpha \in \Lambda\} \text{ для всех } \beta \in M. \tag{1}$$

Тогда в игре $\Gamma(n, m)$ происходит r–кратная поимка не менее q убегающих.

Следствие 1. *Пусть $A(t) = 0$ для всех $t \geqslant t_0$, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей и выполнено условие (1).*

Тогда в игре $\Gamma(n, m)$ происходит r–кратная поимка не менее q убегающих.

Определение 2. В игре $\Gamma(n, 2)$ происходит *поимка*, если существуют момент $T_0 = T(z^0)$, квазистратегии $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$, такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [0, T_0]$ найдутся номера $l, m \in I$, $(m \neq l)$, $j \in \{1, 2\}$, моменты $\tau_1, \tau_2 \in [0, T_0]$ такие, что $z_{lj}(\tau_1) = 0$, $z_{mj}(\tau_2) = 0$;

Теорема 3. *Пусть выполнено предположение 1, $m = 2$, $M_{ij} = \{0\}$ для всех i, j, убегающие используют одно и тоже управление и существует $I_0 \subset I$, $|I_0| = n - 2$ такое, что для каждого $l \in I_0$*

$$0 \in \operatorname{Intco}\{z^0_{ij}, j \in \{1, 2\}, i \in I_0 \setminus \{l\}\}. \tag{2}$$

Тогда в игре $\Gamma(n, 2)$ происходит поимка.

Следствие 2. *Пусть $A(t) = 0$ для всех $t \geqslant t_0$, $m = 2$, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей, убегающие используют одно и тоже управление и выполнено условие (2).*

Тогда в игре $\Gamma(n, 2)$ происходит поимка.

Литература

1. Зубов В. И. К теории рекуррентных функция / В.И. Зубов // Сибирский мат. журнал. — 1962. — Т. 3, № 4. — С. 532–560.

ОСКОЛОЧНО КОМПАКТНЫЕ И УЗКИЕ ОПЕРАТОРЫ[1]

М.А. Плиев (Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)
plimarat@yandex.ru

Линейные узкие операторы в пространствах Кете представляют собой хорошо разработанную область функционального анализа [1]. Существенную часть теории узких операторов удалось продолжить для нелинейных ортогонально аддитивных операторов в векторных решетках [2]. Теория пространств Кете–Бохнера сильно измеримых вектор–функций изложена в [3]. Все необходимые сведения об ортогонально аддитивных операторах в пространствах Кете–Бохнера можно найти в [4].

Пусть $E(X)$ — пространство Кете–Бохнера и Y — векторное пространство. Отображение $T\colon E(X) \to Y$ называется *ортогонально аддитивным оператором*, если

$$T(f+g) = Tf + Tg \text{ для любых дизъюнктных } f, g \in E(X).$$

Множество всех осколков элемента $f \in E(X)$ обозначается $\mathfrak{F}_f$.

Пусть Y — нормированное пространство. Ортогонально аддитивный оператор $T\colon E(X) \to Y$ называется *осколочно компактным*, если множество $\mathcal{T}(\mathfrak{F}_f)$ относительно компактно в Y для любого $f \in E(X)$.

Сформулируем теперь основной результат, доказанный в работе [4].

Теорема 1. *Пусть (A, Σ, μ) — пространство с конечной безатомной мерой, $E(X)$ — пространство Кете–Бохнера и Y банахово пространство. Тогда каждый латерально–по–норме непрерывный C–компактный ортогонально аддитивный оператор $T\colon E(X) \to Y$ является узким.*

Литература

1. M. Popov, B. Randrianantoanina. Narrow operators on function spaces and vector lattices/ M. Popov, B. Randrianantoanina. // De Gruyter. — 2013. — 356 p.

2. M. Pliev. Narrow orthogonally additive operators / M. Pliev, M. Popov // Positivity. — 2014. — № 4. — Pp. 641–667.

3. P. K. Lin. Köthe–Bochner function spaces / P. K. Lin. — Birkhäuser. : 2004. — 352 p.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10–01–00000).

4. M. A. Pliev. Narrow orthogonally additive operators / M. A. Pliev, F. Polat, M. R. Weber // Results Math. — 2019. — № 4. — 19 p.

ЛОКАЛЬНАЯ ДИНАМИКА УРАВНЕНИЯ КАНА–ХИЛЛАРДА

С.П. Плышевская (Симферополь, КФУ)
splyshevskaya@mail.ru

Рассматривается уравнение, которое является модификацией (расширением) широко известной модели Кана–Хилларда,

$$u_t = (-\alpha u_{xx} - u + bu^2 + u^3)_{xx},$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, \quad u_{xxx}(0,t) = 0, \quad u_{xxx}(1,t) = 0 \qquad (1)$$

. Такого вида краевые задачи изучались в [1].

Для изучения решений из малой окрестности состояния равновесия $u_0(t,x) \equiv c$ в (1) произведём замену $u = c + v$ и перейдем к краевой задаче

$$v_t = (-\alpha v_{xx} - \beta v + \gamma v^2 + v^3)_{xx},$$

$$v_x(0,t) = 0, \quad v_x(1,t) = 0, \quad v_{xxx}(0,t) = 0, \quad v_{xxx}(1,t) = 0,$$

$$\beta = 1 - 2bc - 3c^2, \qquad \gamma = b + 3c, \qquad M(v) = \int_0^1 v(x)dx = 0. \qquad (2)$$

При условии

$$3c_0^2 + 2bc_0 - 1 + \pi^2\alpha = 0 \qquad (3)$$

для некоторого c_0 в задаче об устойчивости краевой задачи (2) возникает критический случай.

Рассматривается вопрос о локальной динамике краевой задачи (2) при условии $c = c_0 + \varepsilon c_1$, где c_0 является корнем уравнения (3), $c_1 \neq 0$ — как–то фиксировано, а ε — малый положительный параметр, $0 < \varepsilon \ll 1$.

Введём в рассмотрение стандартный для метода нормальных форм ряд:

$$v(t,x,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\xi(\tau)\cos(\pi x) + \varepsilon v_2(\tau,x) + \varepsilon^{3/2}v_3(\tau,x) + \ldots, \quad \tau = \varepsilon t. \quad (4)$$

Подставим (4) в (2) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε. На третьем шаге, собирая коэффициенты при

$\varepsilon^{3/2}$, получим уравнение для $v_3(\tau, x)$. Из условия его разрешимости в указанном классе функций получаем равенство

$$\dot{\xi} = \delta\xi + \sigma\xi^3, \tag{5}$$

где

$$\delta = 2\pi^2(b + 3c_0^2)c_1, \quad \sigma = -\frac{3}{4}\pi^2 - \gamma^2(6\alpha)^{-1}.$$

Теорема. *При условиях $\delta \neq 0$, $\sigma \neq 0$ и при всех достаточно малых ε поведение решений (2) из некоторой достаточно малой и независящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия определяется уравнением (5):*

1^0. *При $\delta > 0$, $\sigma > 0$ в этой окрестности не существует аттрактора;*

2^0. *При $\delta > 0$, $\sigma < 0$ нулевое решение неустойчиво и существует два устойчивых состояния равновесия $v_\pm(x, \varepsilon)$;*

3^0. *При $\delta < 0$, $\sigma > 0$ нулевое решение устойчиво, а $v_\pm(x, \varepsilon)$ — неустойчивы;*

4^0. *При $\delta < 0$, $\sigma < 0$ все решения из рассматриваемой окрестности стремятся к нулю при $t \to \infty$.*

Литература

1. Кащенко С.А. Бифуркации в уравнении Курамото — Сивашинского / С.А. Кащенко // Теоретическая и математическая физика. — 2017. — Том. 192, №. 1. — С. 23–40.

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ В МОДЕЛИ АВТОМОБИЛЬНОГО ТРАФИКА[1]

М.А. Погребняк (Ярославль, ЯрГУ)
pogrebnyakmaksim@mail.ru

Работа посвящена оценке параметров в математической модели следования за лидером, которая описывает движение автомобилей. Она является улучшенной версией модели, предложенной в [1], и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = R_1\left[a_1\left(v_{max,1} - \dot{x}_1(t)\right)\right] + (1 - R_1)\left[H_1\dot{x}_1(t)\right], \\ \ddot{x}_n(t) = R_n\left[a_n\left(P_n - \dot{x}_n(t)\right)\right] + (1 - R_n)\left[H_n\dot{x}_n(t)\right], \\ \quad x_n(t) = \lambda_n, \quad \dot{x}_n(t) = v_n, \quad \text{при } t \in [-\tau, 0], \end{cases} \tag{1}$$

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21–71–30011.

где τ — время реакции водителя; $\Delta x_n(t,\tau) = x_{n-1}(t-\tau) - x_n(t)$ — расстояние между соседними автомобилями ($x_0(t-\tau) = L$, где L — любое расстояние); $a_n > 0$ — коэффициент чувствительности; P_n — логистическая функция вида: $P_n = (v_{max,n} - V_n)/(1+\exp[k_n(-\Delta x_n + S_n)]) + V_n$; $v_{max,n} > 0$ — максимальная желаемая скорость; V_n — функция вида: $V_n = \min\left(\dot{x}_{n-1}(t-\tau), v_{max,n}\right)$ при $n > 1$, $V_1 = 0$; $k_n > 0$ — скорость логистического роста; S_n — параметр логистической кривой вида: $S_n = (\tau + t_b)\dot{x}_n(t) + \dot{x}_n^2(t)/2\mu g + 2\exp[1/\sqrt{k_n}] + l_n$; H_n — функция Хевисайда вида:

$$H_n = \begin{cases} q_n \dfrac{V_n - \dot{x}_n(t)}{\Delta x_n - l_n}, & \text{если } q_n \dfrac{V_n - \dot{x}_n(t)}{\Delta x_n - l_n} > -\mu g, \\ -\mu g, & \text{если } q_n \dfrac{V_n - \dot{x}_n(t)}{\Delta x_n - l_n} \leqslant -\mu g, \end{cases}$$

которая описывает торможение автомобиля, коэффициент $q_n > 0$ при этом показывает интенсивность торможения; l_n — сумма безопасного расстояния между двумя соседними автомобилями и длины впереди идущей машины $l_n = l_{safe} + l_{veh,n-1}$ ($l_{veh,0} = 0$); t_b — время срабатывания тормозной системы; λ_n — начальное положение автомобиля; v_n — начальная скорость автомобиля, μ — коэффициент трения скольжения, g — ускорение свободного падения, а R_n — релейная функция вида:

$$R_n = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta x_n(t,\tau) > (\tau + t_b)\dot{x}_n(t) + \dot{x}_n^2(t)/2\mu g + l_n, \\ 0, & \text{если } \Delta x_n(t,\tau) \leqslant (\tau + t_b)\dot{x}_n(t) + \dot{x}_n^2(t)/2\mu g + l_n, \end{cases}$$

которая описывает переключение «разгон–торможение».

Опишем для примера определение диапазона значений параметра a_n. Для его определения достаточно рассмотреть разгон только одного транспортного средства модели (1) , так как он не зависит от количества автомобилей и расположения их в потоке.

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = a\left(v_{max} - \dot{x}(t)\right) \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Для моделирования разгона автомобиля была написана компьютерная программа, которая, решает уравнение (2) при разных значениях коэффициента a и замеряет время разгона автомобиля до скорости $v_{max} = 100$ км/ч. В среднем время разгона легкового автомобиля до такой скорости находится в промежутке от 5 до 15 секунд [2]. Значения коэффициента a при этом находится в следующем диапазоне

$a \in [0.31, 0.92]$, что видно на рисунке 1. Другие параметры определяются аналогично.

Литература

1. Погребняк М.А. Моделирование движения транспортного потока / М.А. Погребняк // Математическое моделирование. — 2022. — Т. 34, № 10. — С. 95–109.

2. Пожидаев С.П. Оценка времени разгона автомобилей / С.П. Пожидаев // Известия Оренбургского государственного аграрного университета. — 2014. — № 5(49). — С. 74–76.

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЛОРЕНЦЕВА ЗАДАЧА НА ГРУППЕ $\widetilde{\mathrm{SU}_{1,1}}$[1]

А.В. Подобряев

(Переславль–Залесский, ИПС им. А. К. Айламазяна РАН)

alex@alex.botik.ru

Рассматривается серия левоинвариантных лоренцевых задач на универсальной накрывающей $G = \widetilde{\mathrm{SU}_{1,1}}$ группы

$$\mathrm{SU}_{1,1} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \,\middle|\, |z|^2 - |w|^2 = 1 \right\} \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}),$$

$$\widetilde{\mathrm{SU}_{1,1}} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{C} \ni (c, w) \mapsto \begin{pmatrix} e^{ic}\sqrt{1+|w|^2} & w \\ \bar{w} & e^{-ic}\sqrt{1+|w|^2} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}_{1,1}.$$

В касательном пространстве к группе G задана невырожденная квадратичная форма сигнатуры $(1, 2)$, инвариантная относительно действия группы SO_2. Ставится задача поиска длиннейших кривых в смысле этой квадратичной формы. На группе $\mathrm{SU}_{1,1}$ существуют замкнутые времениподобные кривые, поэтому задачу поиска длиннейших естественно ставить на универсальной накрывающей этой группы. Описаны лоренцевы длиннейшие. В частности, найдены лоренцевы геодезические, множество достижимости, доказано существование длиннейших на множестве достижимости, описано множество и время разреза.

Пусть e_1, e_2, e_3 есть базис алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}_{1,1}$, согласованный с разложением Картана $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{k} = \mathrm{span}\{e_1\}$, а $\mathfrak{p} = \mathrm{span}\{e_2, e_3\}$.

[1] Исследование выполнено в Институте программных систем им. А. К. Айламазяна Российской академии наук за счет гранта Российского научного фонда, (№ 22–11–00140 `https://rscf.ru/en/project/22-11-00140/`).

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления со свободным временем t_1:

$$\begin{array}{ll} g \in \mathrm{Lip}([0,t_1],G), & u = (u_1,u_2,u_3) \in L^\infty([0,t_1],U), \\ g(0) = \mathrm{id},\ g(t_1) = g_1, & \dot g = L_{g*}(u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3), \end{array}$$

$$\int\limits_0^{t_1} \sqrt{I_1u_1^2 - I_2u_2^2 - I_3u_3^2}\,dt \to \max,$$

где множество управлений $U = \{u \in \mathbb{R}^3 \,|\, I_1u_1^2 \geqslant I_2u_2^2 + I_3u_3^2,\ u_1 \geqslant 0\}$, id есть единица группы, а L_g есть левый сдвиг на элемент $g \in G$.

Мы рассматриваем осесимметричный случай $I_2 = I_3$. Введем обозначение $\eta = \frac{I_3}{I_1} - 1$.

Теорема 1. (1) *Лоренцевы геодезические являются орбитами однопараметрических подгрупп группы изометрий $G \times \mathrm{SO}_2$, а именно геодезическая с начальным ковектором $h = h_1\varepsilon_1 + h_2\varepsilon_2 + h_3\varepsilon_3 \in \mathfrak{g}^*$ имеет вид*:

$$g(t) = \exp\left(-\frac{t}{I_3}(h_1e_1 + h_2e_2 + h_3e_3)\right) \cdot \exp\left(-\frac{t\eta h_1 e_3}{I_3}\right),$$

где $\varepsilon_i = \langle e_i, \cdot\rangle \in \mathfrak{g}^*$, $i = 1,2,3$. В частности, геодезический поток интегрируется в тригонометрических и гиперболических функциях.

(2) *Если точка $g_1 \in G$ достижима из точки* id*, то существует лоренцева длиннейшая, соединяющая эти точки.*

(3) *Множество разреза имеет вид $\{(c,0) \,|\, \pi(\eta-1) < c\}$ при $-1 < \eta < 0$, $\{(-\pi,0)\}$ при $\eta = 0$ и $\{(c,0) \,|\, \pi(\eta-1) < c < \pi(\sqrt{\eta}\sqrt{\eta+1} - 1)\}$ при $\eta > 0$, а время разреза геодезической с начальным ковектором $h \in \mathfrak{g}^*$ равно $\frac{2\pi I_3}{\sqrt{|\mathrm{Kil}(h)|}}$ при $\mathrm{Kil}(h) < 0$ и равно $+\infty$ при $\mathrm{Kil}(h) \geqslant 0$, где* Kil *есть форма Киллинга.*

Заметим, что при $\eta \to -1$ геодезические, множество и время разреза сходятся к соответствующим объектам в субримановой задаче, исследованной в работах [1,2,3]. При $\eta = 0$ (т.е. $I_1 = I_2 = I_3$) лоренцева структура задается формой Киллинга, а группа G изометрична пространству анти–де Ситтера. Такая лоренцева структура рассматривалась в работе [3].

Литература

1. Boscain U. Invariant Carnot–Carathéodory metrics on S3, SO(3), SL(2), and lens spaces / U. Boscain, F. Rossi // SIAM J. Control Optim. — 2008. — V. 47, № 4. — P. 1851–1878.

2. Берестовский В.Н. Геодезические и кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли SL(2) / В.Н. Берестовский, И.А. Зубарева // Сиб. матем. журн. — Т. 57, №. 3. — С. 527–542. С. 70–71.

3. Grong E. Sub–Riemannian and sub–Lorentzian geometry on SU(1,1) and on its universal cover / E. Grong, A. Vasil'ev // J. Geom. Mech. — 2011. — V. 3, №. 2. — P. 225–260.

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОНЕЧНЫМИ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

И.Е. Полосков (Пермь, ПГНИУ)
polosk@psu.ru

Динамические системы с наличием *запаздывания* (последействия, лага, задержки, ретардации) широко представлены в технике, природе и обществе. Они встречаются в самых разнообразных физических, химических, инженерных, экономических и биологических системах и т.д. Можно привести много примеров, когда запаздывание играет важную роль [1, 2].

Наряду с детерминированными системами в последнее время активно развиваются качественные и количественные методы анализа систем с запаздываем с учетом влияния случайных возмущений, а как следствие, обращение к *стохастическим дифференциальным уравнениям* с различными формами последействия [3, 4].

Рассматривается линейная система стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) Ито с конечными сосредоточенными и распределенными запаздываниями следующего вида:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \Big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{F}}\,\boldsymbol{X}(t-\tau) + \int\limits_{t-\tau}^{t} \boldsymbol{\mathcal{T}}(\theta)\,\boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta + \boldsymbol{c}(t)\Big]\,dt +$$

$$+\boldsymbol{\mathcal{H}}(t)\,d\boldsymbol{W}(t), \quad t > t_1 = t_0 + \tau, \tag{1}$$

где t – время ($t_0 < t \leqslant T < \infty$); $\boldsymbol{X} = \big(X_1, X_2, ..., X_n\big)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $\boldsymbol{W} = \big(W_1, W_2, ..., W_m\big)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^m$ – вектор независимых случайных стандартных винеровских процессов; $0 < \tau < \infty$

– запаздывание; $n, m \in \mathbb{N}$; T – символ транспонирования векторов и матриц. При этом предполагается, что на полуинтервале $(t_0, t_1]$ случайный вектор состояния $\boldsymbol{X}(t)$ удовлетворяет системе уравнений Ито без запаздывания:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}_0(t)\big]\,dt + \boldsymbol{\mathcal{H}}_0(t)\,d\boldsymbol{W}(t), \quad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0, \quad (2)$$

причем в системах уравнений (1) и (2) $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)$, $\mathcal{F}(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{T}}(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}_0(t)$ и $\boldsymbol{c}(t)$, $\boldsymbol{c}_0(t)$ – известные непрерывные матричные и векторные функции. Кроме того, считается, что известны все необходимые числовые характеристики случайного вектора $\boldsymbol{X}^0$, частности, в начальный момент времени t_0 для вектора $\boldsymbol{X}(t)$ заданы вектор математических ожиданий $\boldsymbol{m}_X^0$ и матрица ковариаций $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0$.

Для анализа рассматриваемой системы используется модификация общей схемы [5], предназначенной для анализа систем с запаздываниями и основанной на сочетании расширения пространства состояний и идеологии классического метода шагов. В модификацию общей схемы, как и в других случаях [6], кроме распространения на новый класс моделей, определения последовательности пространств состояний увеличивающейся размерности и соответствующих векторов состояния, входит соответствующая модели процедура построения объединенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для первых моментных функций стохастического вектора состояния $\boldsymbol{X}(t)$ без запаздывания, которая включает ОДУ для компонент последовательности векторов функций математического ожидания $\boldsymbol{m}_X(t)$, матриц функций ковариации $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(t)$ и матриц ковариационных функций $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t, s)$ расширенных векторов состояния $(t_0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T)$.

Литература

1. Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л.Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин. — М. : Наука, 1971. — 296 с.

2. Lakshmanan M. Dynamics of nonlinear time–delay systems / M. Lakshmanan., D.V. Senthilkumar. // Berlin, Heidelberg: Springer, 2010. — XVII. — 313 p.

3. Рубаник В.П. Колебания сложных квази-линейных систем с запаздыванием / В.П. Рубаник. // Мн.: Изд–во «Университетское». — 1985. — 143 с.

4. Mao X. Stochastic differential equations and applications / X. Mao. — 2nd ed. — Cambridge, UK: Woodhead Publishing. — 2011. — XVIII. — 422 p.

5. Полосков И.Е. Расширение фазового пространства в задачах анализа дифференциально–разностных систем со случайным входом / И.Е. Полосков // Автоматика и телемеханика. — 2002. — № 9. — С. 58–73.

6. Poloskov I.E. New scheme for estimation of the first and senior moment functions for the response of linear delay differential system excited by additive and multiplicative noises / I.E. Poloskov. // Journal of Mathematical Sciences. — 2020. — V. 246. — № 4. — P. 525–539.

ОБ ОБРАЗЕ ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Д.А. Полякова

(Ростов–на–Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)

forsites1@mail.ru

Пусть ω — весовая функция, $\varphi^*_\omega(y) := \{xy - \omega(e^x) : x \geqslant 0\}$, $y \in (0, \infty)$. Пространством ультрадифференцируемых функций (УДФ) Берлинга нормального типа $p \in (0, \infty)$, задаваемым весом ω, называется пространство

$$\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R}) := \Big\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall r \in (0, p), \quad \forall l \in (0, \infty) \\ |f|_{\omega,r,l} := \sup_{j \in \mathbb{N}_0} \sup_{|x| \leqslant l} \frac{|f^{(j)}(x)|}{\exp r\varphi^*_\omega(j/r)} < \infty \Big\}.$$

В $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ будем рассматривать операторы свертки T_μ. Символами операторов T_μ служат целые функции μ, удовлетворяющие условию:

$$\forall \varepsilon \in (0, \infty) \ \exists l \in (0, \infty) \ : \ \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|}{\exp\{\varepsilon\omega(z) + l|\mathrm{Im}\, z|\}} < \infty \,.$$

В качестве частных случаев операторы T_μ включают в себя дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, дифференциально–разностные и интегро–дифференцальные уравнения.

Ранее в [1] были установлены необходимые и достаточные условия на символ μ, при которых T_μ сюръективен, т. е. при которых выполняется равенство $T_\mu\big(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) = \mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$. В настоящей работе для несюръективного оператора T_μ исследуется задача о том, при каких условиях имеет место вложение $T_\mu\big(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^q_{(\sigma)}(\mathbb{R})$, где σ — некоторая другая весовая функция, $q \in (0, \infty)$.

Центральными результатами работы являются две следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть ω, σ — весовые функции; $p, q \in (0,\infty)$; $p\omega \leqslant q\sigma$; T_μ — оператор свертки с символом μ, действующий в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$. Для того чтобы имело место вложение $T_\mu\big(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^q_{(\sigma)}(\mathbb{R})$, необходимо, чтобы выполнялось условие*

$$(A)\quad \forall r \in (0,p)\ \ \forall \delta \in (0,\infty)\ \ \exists s \in (0,q)\ \ \exists R_0 > 0 \,|\, \forall x \in \mathbb{R} \text{ с } |x| \geqslant R_0$$
$$\exists w \in \mathbb{C} : |w - x| \leqslant \delta\sigma(x) \ \text{ и } \ |\mu(w)| \geqslant \exp\big\{r\omega(w) - s\sigma(w)\big\}.$$

Теорема 2. *Пусть ω, σ — весовые функции; $p, q \in (0,\infty)$; $p\omega \leqslant q\sigma$; T_μ — оператор свертки с символом μ, действующий в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$. Если для целой функции μ выполнено условие*
(B) $\forall r \in (0,p)$ $\exists s \in (0,q)$ $|$ $\forall \delta \in (0,\infty)$ $\exists R_0 > 0$: каждую точку $z = x + iy \in \mathbb{C}$ с $|z| \geqslant R_0$ и $|y| \leqslant \delta\sigma(x)$ можно погрузить внутрь окружности S_z с $\operatorname{diam} S_z \leqslant \delta\sigma(x)$, для всех точек ζ которой справедлива оценка

$$|\mu(\zeta)| \geqslant \exp\big\{r\omega(\zeta) - s\sigma(\zeta)\big\},$$

то имеет место вложение $T_\mu\big(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^q_{(\sigma)}(\mathbb{R})$.

Нетрудно видеть, что в случае $\sigma = \omega$, $p = q$ условия (A) и (B) теорем 1 и 2 совпадают с соответствующими условиями критерия сюръективности оператора T_μ из [1] и, значит, эквивалентны.

Следует заметить также, что результаты, установленные в теоремах 1 и 2 для операторов свертки в пространствах УДФ нормального типа, коренным образом отличаются от полученных в [2] аналогичных результатов для пространств $\mathcal{E}^\infty_{(\omega)}(\mathbb{R})$ УДФ Берлинга максимального типа. Именно, в [2] было показано, что вложение $T_\mu\big(\mathcal{E}^\infty_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^\infty_{(\sigma)}(\mathbb{R})$ имеет место тогда и только тогда, когда оператор T_μ сюръективен на $\mathcal{E}^\infty_{(\sigma)}(\mathbb{R})$. В настоящей работе строится пример весов ω и σ, чисел p и q и целой функции $\mu(z)$ таких, что вложение $T_\mu\big(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^q_{(\sigma)}(\mathbb{R})$ выполнено, но оператор T_μ не является сюръективным на $\mathcal{E}^q_{(\sigma)}(\mathbb{R})$.

Получены также некоторые приложения к операторам свертки в пространствах Румье УДФ нормального типа.

Литература

1. Абанин А.В. Теорема деления в некоторых весовых пространствах целых функций / А.В. Абанин, Д.А. Абанина // Владикавказ. мат. ж. — 2010. — Т. 12, № 3. — С. 3–21.

2. Bonet H. The range of non–surjective convolution operators on Beurling spaces / H. Bonet, A. Galbis // Glasgow Math. J. — 1996. — V. 38. — P. 125–135.

l–ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ СОСТОЯНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

С.С. Постнов (Москва, ИПУ РАН)
postnov.sergey@inbox.ru

В настоящей работе рассматриваются многомерные динамические системы дробного порядка, поведение которых описывается уравнением следующего вида:

$$ {}_0D_t^{\alpha_i} q_i(t) = a_{ij}(t)q_j(t) + b_{ij}(t)u_j(t) + f_i(t), i = 1, \ldots, N, \qquad (1)$$

где ${}_0D_t^{\alpha_i}$ — оператор дробного дифференцирования порядка $\alpha_i \in (0, 1)$, $q_i(t)$ — компоненты вектора состояния системы, $u_i(t)$ — компоненты вектора управления, $f_i(t)$ — компоненты вектора возмущения, $a_{ij}(t)$ и $b_{ij}(t)$ — коэффициенты, в общем случае зависящие от времени. По повторяющимся индексам в формуле (1) подразумевается суммирование. Оператор дробного дифференцирования в формуле (1) понимается либо в смысле Римана–Лиувилля, либо в смысле Капуто. Соответственно, начальные условия для системы (1) ставятся либо в нелокальном виде,

$$\lim_{t\to 0+} \left[{}_0I_t^{1-\alpha_i} q_i(t) \right] = s_i^0, i = 1, \ldots, N,$$

либо в локальном виде,

$$q_i(0) = q_i^0, i = 1, \ldots, N,$$

где $I^{1-\alpha_i}$ — оператор дробного интегрирования в смысле Римана–Лиувилля.

Для системы (1) рассматривается задача оптимального управления и задача оптимального оценивания состояния системы по наблюдениям в условиях наличия возмущений. Обе задачи, при определённых условиях, сводятся к конечномерной l–проблеме моментов, для которой выводятся условия разрешимости и строятся аналитические решения. Ранее подобные задачи были рассмотрены для одномерной системы типа (1) с постоянными коэффициентами a_{ij} и b_{ij} и для некоторых двумерных и многомерных систем частного вида [1–3]. В настоящей работе аналогичное исследование проводится для более общего случая системы (1) произвольной конечной размерности с коэффициентами, зависящими от времени.

Литература

1. Кубышкин В.А. Задача оптимального управления линейной стационарной системой дробного порядка в форме проблемы моментов: постановка и исследование / В.А. Кубышкин, С.С. Постнов // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 5. — С. 3–17.

2. Постнов С.С. Задачи оптимального управления для некоторых линейных систем дробного порядка, заданных уравнениями с производной Хильфера / С.С. Постнов // Проблемы управления. — 2018. — № 5. — С. 14–25.

3. Постнов С.С. Об использовании метода моментов для оптимального оценивания состояния систем дробного порядка с возмущением импульсного типа / С.С. Постнов // Проблемы математического анализа. — 2023. — Вып. 121. — С. 93–102.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЧАСТИЦ ВНУТРИ ФУЛЛЕРЕНА[1]

В.А. Потеряева, А.М. Бубенчиков,
М.А. Бубенчиков (Томск, НИ ТГУ)
valentina.poteryaeva@gmail.com

Структура молекулы фуллерена способна накапливать внутри атомы и даже небольшие молекулы (например гелий, водород или молекулы воды)[1,2]. Разрабатываются способы создания таких структур, а также исследуются их свойства. В данной работе представлена технология нахождения областей локализации частиц, характеризующихся числами n, m и k_n, внутри молекулы фуллерена C_{60}.

Вероятность нахождения частицы в заданной точке находится как квадрат модуля волновой функции ψ, которая находится из решения уравнения Шредингера в сферических координатах:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right)+k^2\psi=0, \quad (1)$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 19–71–10049).

где $k^2 = \frac{2\mu}{h^2}(\omega h - U(r))$, h — постоянная Планка, μ — масса частицы,ω — частота колебаний функции ψ и $U(r)$ — потенциал силового поля. Энергия взаимодействия фуллерена с рассматриваемыми частицами $U(r)$ моделируется распределенной равномерно по сфере соответствующего молекуле размера.

Уравнение (1) решается методом разделения переменных. Представим $\psi = R(r) \cdot G(\theta, \varphi)$.

Решение для функции $G(\theta, \varphi)$ выглядит следующим образом:

$$G(\theta, \varphi) = P_n^m(cos(\theta)) \cdot e^{im\varphi}, \quad 0 \leqslant m \leqslant n, \tag{2}$$

где $P_n^m(x)$ — присоединенные функции Лежандра, $n = 0, 1, 2...$ и $m = 0, 1, 2...$ — параметры, возникающие из условия ограниченности и непрерывности решения[3].

Функция $R(r)$:

$$R(r) = \frac{1}{\sqrt{kr}} \cdot J_{n+\frac{1}{2}}(kr), k(r) = \sqrt{k_0^2 + \frac{2\mu}{h^2}(U(a) - U(r))} \tag{3}$$

где $J_{n+\frac{1}{2}}(\rho)$ — функция Бесселя с полуцелым индексом, k_0 — корень функции Бесселя, a — радиус молекулы фуллерена.

Тогда вероятность нахождения частицы в состоянии, определяемом числами n, m, k_n является квадратом модуля функции ψ:

$$|\psi|^2 = \frac{J^2_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{kr} \cdot \left(P_n^m(cos\theta)\right)^2, 0 < \theta < \pi. \tag{4}$$

Таким образом, задаются три числа: n, m, k_n, которые характеризуют состояния квантовой системы. С помощью формулы (4) можно найти области, в которых будут находиться частицы с определенной вероятностью.

Литература

1. Poteryaeva V.A. State of the Helium Atom Inside a Fullerene / V.A. Poteryaeva, M.A. Bubenchikov, A.M. Bubenchikov, A.I. Potekaev, D.S. Kaparulin // Russian Physics Journal. — 2022. — V. 65. — P. 169–178.

2. Mamone S. Theory and spectroscopy of an incarcerated quantum rotor: The infrared spectroscopy, inelastic neutron scattering and nuclear magnetic resonance of $H_2@C_{60}$ at cryogenic temperature / J.Y.–C. Chen, R. Bhattacharyya, M.H. Levitt, R.G. Lawler, A.J. Horsewill, T. Room, Z. Bacic, N.J. Turro // Coordination Chemistry Reviews. — 2011. — V. 255, No. 7–8. — P. 938–948.

3. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, Эрдейи А. // М.: НАУКА, — 1973. — 205 с.

ОБ ОДНОЙ ТАНГЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ НА ПЛОСКОСТИ[1]

Л.В. Провоторова (Москва, НИУ МЭИ)
prolubov2000@yandex.ru

В данной работе рассматривается нелокальная краевая задача

$$-\Delta u(x) = h(x), x \in G, \tag{1}$$

$$\int_\Gamma (u|_\Gamma, \tau)\, d\gamma \ = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = \alpha\tau(\gamma), \gamma \in \Gamma, \tag{3}$$

где $G \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с липшицевой границей Γ, $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ — касательный вектор к границе Γ. В этой задаче $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$ и $\alpha \in \mathbb{R}^1$ — искомые величины, $h(x)$ — заданная вектор–функция.

Требуется найти слабое решение поставленной задачи, то есть вектор–функцию $u(x)$ и константу α, удовлетворяющие интегральному тождеству, эквивалентному задаче (1) — (3). С этой целью проверим, что поставленная задача эквивалентна интегральному тождеству

$$\int_G (\nabla u, \nabla v)\, dx \ - \alpha \int_\Gamma (\tau, v|_\Gamma)\, d\gamma \ = \int_G (h, v)\, dx, \tag{4}$$

где $u \in W_2^1(G)$ удовлетворяет условию $\int_\Gamma (u|_\Gamma, \tau)\, d\gamma \ = 0$, а пробные функции $v \in W_2^1(G)$ произвольны.

Введем пространство функций $u \in W_2^1(G)$, удовлетворяющих условию $\int_\Gamma (u|_\Gamma, \tau)\, d\gamma \ = 0$:

$$W^1_{2,L_2-norm}(G) = \left\{ u \in W_2^1(G) | \int_\Gamma (u|_\Gamma, \tau)\, d\gamma \ = 0 \right\}.$$

Сформулируем определение слабого решения поставленной задачи.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 19–11–00033 `https://rscf.ru/project/19-11-00033/`).

Определение. *Функция* $u \in W^1_{2,L_2-norm}(G)$ *и константа* $\alpha \in \mathbb{R}^1$ *называются слабым решением задачи (1) — (3), если для любой* $v \in W^1_2(G)$ *выполняется интегральное тождество*

$$\int_G (\nabla u, \nabla v)\, dx \ - \alpha \int_\Gamma (\tau, v|_\Gamma)\, d\gamma \ = \int_G (h, v)\, dx.$$

Основным результатом работы является теорема о существовании и единственности слабого решения.

Теорема 1. *Для любой* $h(x) \in L_2(G)$ *такой, что* $\int_G h(x)\, dx \ = 0$, *существует единственное слабое решение* $(u(x), \alpha)$, $u(x) \in W^1_{2,L_2-norm}(G)$, $\int_G u(x)\, dx \ = 0$, α *— число, задачи (1) — (3). При этом справедлива оценка*

$$\|u\|_{W^1_2(G)} + |\alpha| \leqslant M \|h\|_{L_2(G)},$$

$M > 0$ *– постоянная, не зависящая от* $u(x)$.

Доказательство теоремы проводится в несколько этапов.

На первом шаге определяется последовательность приближенных решений методом Галеркина. На втором шаге производится предельный переход. На третьем шаге определяется число α и доказывается единственность слабого решения.

Литература

1. Дубинский Ю.А. О ядрах операторов следа и краевых задачах теории поля // Проблемы математического анализа : Выпуск 106. — 2020. — С. 73–89

2. Дубинский Ю.А. О ядрах функционалов следа и граничных задачах теории поля на плоскости / Ю.А. Дубинский // Труды Матем. института им. В.А. Стеклова — 2021. — № 312. — С. 158–169.

3. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа. / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин // М. :Наука, Главная редакция физико–математической литературы. — 1976. — 542 с.

АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ТИПА КОЛМОГОРОВА–ЧЕПМЕНА С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ ФОККЕРА–ПЛАНКА, НЕНУЛЕВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ СНОСА

Д.Б. Прокопьева, Т.А. Жук, Н.И. Головко
(Владивосток, ТОВВМУ, Дальрыбвтуз, ДВФУ)
prokopievad@yandex.ru, Tatyana_ zhukdv@mail.ru, golovko.ni@dvfu.ru

Моделирование информационных сетей и их элементов является актуальной технической и научной проблемой на стадиях проектирования и эксплуатации сети. Системы массового обслуживания (СМО) являются аналитическими моделями информационных сетей. Статистический анализ потоков заявок, поступающих на web–серверы глобальных компьютерных сетей, показывает диффузионную интенсивность входного пуассоновского потока.

Для СМО с диффузионной интенсивностью входного потока с нулевым и ненулевым коэффициентом сноса в [1, 2] представлен вывод уравнений типа Колмогорова–Чепмена с оператором Фоккера–Планка относительно вероятностных характеристик числа заявок. В [3, 4] доказано необходимое условие существования стационарного режима системы массового обслуживания с диффузионной интенсивностью входного потока и нулевым коэффициентом сноса, неотрицательность характеристик числа заявок.

В данной работе приводится анализ необходимого условия существования стационарного режима для СМО, в которой интенсивность числа заявок является случайным диффузионным процессом с ненулевым коэффициентом сноса.

Рассматривается система массового обслуживания с бесконечным накопителем, одним обслуживающим прибором и экспоненциальным обслуживанием с интенсивностью μ. На вход СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток, интенсивность которого $\lambda(t)$ изменяется на промежутке $[\alpha, \beta]$ и представляет собой диффузионный процесс с ненулевым коэффициентом сноса $a \neq 0$, коэффициентом диффузии b и упругими границами α, β.

Обозначим в стационарном режиме: число заявок через $\hat{\nu}$, интенсивность входного потока через $\hat{\lambda}$. Пусть $q_k(x)dx = \mathsf{P}\{\hat{\nu} = k, x \leqslant \hat{\lambda} < x+dx\}$, где $\hat{\nu}$ — число заявок в СМО в стационарном режиме, $q_k(x)$ — стационарные характеристики числа заявок, $k \geqslant 0$; $f(x)dx = \mathsf{P}\{x \leqslant$

$\hat{\lambda} < x+dx\}$, $f(x)$ — стационарная плотность интенсивности входного потока, $x \in [\alpha, \beta]$. Интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} q_k(x)dx = p_k$, $k \geqslant 0$, представляет собой стационарное распределение числа заявок. $f(x)$, $q_k(x) \in C^2[\alpha, \beta]$.

Стационарные характеристики $q_k(x), k \geqslant 0$, удовлетворяют следующим уравнениям:

1) во внутренних точках $x \in (\alpha, \beta)$ стационарным уравнениям типа Колмогорова–Чепмена с дифференциальным оператором Фоккера–Планка

$$-xq_0(x) + \mu q_1(x) - aq_0'(x) + \frac{b}{2}q_0''(x) = 0, \tag{1}$$

$$xq_{k-1}(x) - (x+\mu)q_k(x) + \mu q_{k+1}(x) - aq_k'(x) + \frac{b}{2}q_k''(x) = 0, k \geqslant 1, \tag{2}$$

2) в граничных точках α, β краевым условиям

$$\frac{b}{2}q_k'(\alpha) - aq_k(\alpha) = 0,\ \frac{b}{2}q_k'(\beta) - aq_k(\beta) = 0,\ k \geqslant 0, \tag{3}$$

3) условию нормировки

$$\sum_{k \geqslant 0} q_k(x) = f(x). \tag{4}$$

Систему дифференциальных уравнений (1)—(2) во внутренних точках $x \in (\alpha, \beta)$ вместе с краевыми условиями (3) и условием нормировки (4) назовем первой моделью стационарной СМО.

Плотность распределения $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = \frac{2a}{b}\frac{e^{\frac{2a}{b}x}}{e^{\frac{2a}{b}\beta} - e^{\frac{2a}{b}\alpha}}.$$

Введем производящую функцию $R(x,z) = \sum\limits_{k \geqslant 0} q_k(x)z^k$, с областью определения $D_{xz} = \{(x,z) : x \in [\alpha, \beta],\ |z| \leqslant 1,\ z \in \mathbb{C}\}$.

Теорема 1. *Производящая функция $R(x,z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$R(x,z)\left[xz^2 - (x+\mu)z + \mu\right] - azR_x'(x,z) + \tfrac{b}{2}zR_{xx}''(x,z) = (1-z)\mu q_0(x)$$

с краевыми условиями

$$\frac{b}{2}R_x'(\alpha, z) - aR(\alpha, z) = 0,\ \frac{b}{2}R_x'(\beta, z) - aR(\beta, z) = 0.$$

Заметим, что с учетом условия нормировки (4) выполняется равенство

$$R(x,1) = \sum_{k\geqslant 0} q_k(x) = f(x).$$

Обозначим $\bar{\lambda} = \int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx$ — среднее значение интенсивности входного потока в стационарном режиме.

Теорема 2. *Необходимое условие существования решения первой модели стационарной СМО с диффузионной интенсивностью входного потока с ненулевым коэффициентом сноса $a \neq 0$ и неотрицательности характеристик $q_k(x), k \geqslant 0$, имеет вид*

$$\bar{\lambda} < \mu,$$

причем вероятность простоя p_0 СМО удовлетворяет условию

$$0 < p_0 = \int_{\alpha}^{\beta} q_0(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} (1 - x/\mu) f(x)\, dx < 1.$$

Литература

1. Прокопьева, Д.Б. Вывод уравнений для систем массового обслуживания с диффузионной интенсивностью входного потока и нулевым коэффициентом сноса / Д.Б. Прокопьева, Т.А. Жук, Н.И. Головко // Известия КГТУ. — 2017. — № 46. — С. 184–192.

2. Прокопьева, Д.Б. Вывод уравнений типа Колмогорова–Чепмена с оператором Фоккера–Планка / Д.Б. Прокопьева, Т.А. Жук, Н.И. Головко // Дальневосточный математический журнал. — 2020. — Т. 20, — № 1. — С. 90–107.

3. Прокопьева, Д.Б. Необходимое условие существования стационарного режима системы массового обслуживания с диффузионной интенсивностью входного потока / Д.Б. Прокопьева, Р.П. Шепелева, Н.И. Головко // Современные проблемы в науке и технике. Теория и практика : материалы международной открытой конференции. — Воронеж: Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова. 2022. — С. 277–280.

4. Прокопьева, Д.Б. Моменты числа заявок в СМО с диффузионной интенсивностью входного потока / Д.Б. Прокопьева, Т.А. Жук, Н.И. Головко // Вестник ВГУ. Сер.: Физика. Математика. — 2022. — № 1. — С. 75–86.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ С ПРОИЗВОДНОЙ ЛИУВИЛЛЯ

А.В. Псху (Нальчик, ИПМА КБНЦ РАН)
pskhu@list.ru

Рассматривается уравнение дробной диффузии

$$\left(\frac{\partial^\sigma}{\partial y^\sigma} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x,y) = 0. \qquad (1)$$

с производной $\frac{\partial^\sigma}{\partial y^\sigma}$ дробного порядка по временной переменной, $\sigma \in (0,1)$. Дробное дифференцирование задается с помощью производной Лиувилля, определенной на бесконечном интервале и имеющей начало в точке $y = -\infty$ [1]:

$$\frac{\partial^\sigma}{\partial y^\sigma} u(x,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{y} u(x,t)(y-t)^{-\sigma} dt.$$

Как известно [2, 3], операторы дробного дифференцирования с началом в бесконечно удаленной точке порождают задачи, в которых роль начальных условий выполняет задаваемое асимптотическое поведение искомого решения (в данном случае при $y \to -\infty$). В докладе изучается особенности постановок, вопросы разрешимости, а также свойства решений краевых задач для рассматриваемого уравнения.

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение / А.М. Нахушев. // М. : Физматлит, 2003. — 272 с.

2. Kilbas A.A. On the solution of fractional evolution equations / A.A. Kilbas, T. Pierantozzi, J.J. Trujillo, L. Vázquez // J. Phys. A: Math. Gen. — 2004. — V.37. — P. 3271–3283.

3. Pskhu A.V. Fractional diffusion–wave equation with application in electrodynamics / A.V. Pskhu, S.Sh. Rekhviashvili // Mathematics. — 2020. — V.8, №11. — P. 2086.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Е.В. Раецкая (Воронеж, ВГЛТУ)
raetskaya@inbox.ru

Рассматривается полностью управляемая система в частных производных

$$\frac{\partial x_0(t,s)}{\partial t} = B_0 \frac{\partial x_0(t,s)}{\partial s} + D_0 \frac{\partial u_0(t,s)}{\partial s} \tag{1}$$

с условиями

$$x_0(0,s) = a_0(s), \qquad x_0(T,s) = b_0(s), \tag{2}$$

где $t \in [0,T]$, $s \in [0,S]$; $x_0(t,s) \in R^n$; $u_0(t,s) \in R^m$; B, D — матрицы соответствующих размеров. Решается задача построения в аналитическом виде функций управления $u_0(t,s)$ и, удовлетворяющей условиям (2), функции состояния в виде

$$x_0(t,s) = \sum_{k=1}^{r} \varphi_{0k}(s) \cdot \psi_{0k}(t). \tag{3}$$

Применяется метод каскадной декомпозиции (КД), базирующийся на свойствах прямоугольной матрицы D_0 ([1] – [6]). Расщепления пространств R^m и R^n в прямые суммы подпространств обуславливают расщепления функции состояния на компоненты из подпространств на каждом шаге декомпозиции

$$x_{i-1}(t,s) = x_i(t,s) + u_i(t,s), i = \overline{1,p}. \tag{4}$$

Первым этапом алгоритма КД является поэтапный p – шаговый переход от системы (1) с условиями (2), к редуцированной системе

$$\frac{\partial x_p(t,s)}{\partial t} = B_p \frac{\partial x_p(t,s)}{\partial s} + D_p \frac{\partial u_p(t,s)}{\partial s} \tag{5}$$

с условиями

$$\frac{\partial^j x_p(t,s)}{\partial t^j}|_{t=0} = a_{pj}(s), \quad \frac{\partial^j x_p(t,s)}{\partial t^j}|_{t=T} = b_{pj}(s), \quad j = \overline{0,p}. \tag{6}$$

Устанавливаются необходимые и достаточные условия существования базисной функции вида

$$x_p(t,s) = \sum_{k=1}^{2(p+1)} \varphi_{pk}(s) \cdot \psi_{pk}(t), \tag{7}$$

удовлетворяющей всем условиям (6) и определяющей форму функций состояния и управления системы (1). В результате реализации обратного хода декомпозиции восстанавливается функция состояния $x_0(t,s)$ вида (3) и соответствующая функция управления $u_0(t,s)$, $j = \overline{0,p}$.

Установлено минимальное количество линейно независимых функций в выражении (3) — точное значение r, которое равно $2(p+1)$, p — количество шагов декомпозиции, D_p — сюръективная матрица. Приводятся формулы для нахождения коэффициентов $\varphi_{0k}(s)$, $k = \overline{1, 2(p+1)}$.

Литература

1. Zubova S.P. Construction of Controls Providing the Desired Output of the Linear Dynamic System / S.P. Zubova, E.V. Raetskaya // Automation and Remote Control. —2018. — V. 79, № 5 — P. 774–791.

2. Zubova S.P. Solution of the multi–point control problem for a dynamic system in partial derivatives / S.P. Zubova, E.V. Raetskaya // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — New York :AIMS Press, 2021. — V. 44, № 15 — P. 11998–12009.

3. Раецкая Е.В. Алгоритм построения управления динамической системой в частных производных / Е.В. Раецкая // Моделирование систем и процессов. — 2022. — Т. 15, № 4. — С. 116–127.

4. Раецкая Е.В. Исследование сингулярно возмущенной системы управления / Е.В. Раецкая // Вестник Тамбовского университета. Сер. :Естественные и технические науки. — 2018. — Т. 23, № 122. — С. 303–307.

5. Зубова С.П. Решение полуграничной задачи для вырожденного уравнения в частных производных / С.П. Зубова, Е.В. Раецкая // Дифференциальные уравнения. —2022. — Т. 58, № 9. — С. 1193–1204.

6. Zubova S.P. Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition /S.P. Zubova, E.V. Raetskaya // Automation and Remote Control. — 2017. — V. 78, № 7. — P. 1189–1202.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Ж.М. Ражабов (Ташкент, НУУз)
jahongirrajabov19970507@gmail.com

В данной работе изучается краевая задача для вырождающегося уравнения эллиптического типа со спектральным параметром.

Рассмотрим уравнение

$$yu_{yy} + y^n u_{xx} + \alpha u_y - \lambda^2 u = 0, \;\; x > 0, \;\; y > 0 \tag{1}$$

где

$$n > 1, \frac{1-n}{2} < \alpha < 1, \lambda \in (-\infty, +\infty) \tag{2}$$

Пусть Ω — область ограниченная при $x > 0$, $y > 0$ нормальной кривой $\sigma: \;\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{(n+1)^2} y^{n+1} = \frac{1}{4}$ с концами в точках $O\,(0,0)$и $A\,(1,0)$, а при $y = 0$ отрезкомOA.

В области Ω для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача. Требуется найти функцию $u\,(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

$$1)u\,(x,y) \in C\left(\bar{\Omega}\right);$$

2) $u\,(x,y) \in C^{2,2}_{x,y}\,(\Omega)$и удовлетворяет уравнению (1) в области Ω;

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{\sigma} = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \bar{\sigma},$$

$$a\,(x)\,u_y(x,0) + b\,(x)\,u(x,0) = c\,(x)\,, a^2(x) + b^2(x) \neq 0, \;\; \forall x \in [0,1]\,,$$

здесь $\varphi(x,y)$, $a(x)$,$b(x)$, $c(x)$ – заданные функции, причем

$$\varphi(x,y) = y^{\varepsilon+1}\varphi_1(x,y), \quad \varphi_1(x,y) \in C(\bar{\sigma}), \;\; \varepsilon > 0, \tag{3}$$

$$a(x), b(x), c\,(x) \in C\left(\overline{OA}\right) \cap C^2\,(OA)\,. \tag{4}$$

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Если выполнены условия (2)–(4), то в области Ω существует единственное решение поставленной задачи.*

Доказательство теоремы основаны на методике работ [1–2].

Литература

1. Салахитдинов М.С. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами / М. С. Салахитдинов, М. Мирсабуров // Ташкент, : «Universitet», 2005. — 224 с.

2. Смирнов М.М. Уравнение смешанного типа / М. М. Смирнов // М.: Высшая школа. 1985. — 304 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С КОНТРОЛЬНЫМИ ТОЧКАМИ И УСЛОВИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЕ

К.А. Раецкий (Воронеж, ВГУ)

kraetsky@mail.ru

Для траекторий $x(t) \in R^n$ динамической системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(t), \tag{1}$$

где $A : n \times n, \quad B : n \times m, \quad f(t) \in R^n; \quad t \in [t_0, t_k]$ заданы многоточечные условия

$$x(t_i) = x_i, \quad i = 0, 1, ..., k. \tag{2}$$

От управления $u(t)$ также требуется выполнение условий

$$u(t_i) = u_i, \quad i = 0, 1, ..., k, \tag{3}$$

например, это могут быть условия на скорость прохождения системы через контрольные точки.

Требуется выявить множество траекторий, удовлетворяющих заданным условиям для предъявления их «заказчику».

Одним из методов решения поставленной задачи является метод неопределенных коэффициентов, разрабатываемый в работах [1–4]. Метод состоит в формировании $x(t)$ и $u(t)$ в виде линейных комбинаций линейно независимых скалярных функций с векторными коэффициентами, и определении коэффициентов каким–либо способом. Академик Н.Н. Красовский [5] предложил вектор–функцию $u(t)$ искать в виде

$$u(t) = \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot t_i, \quad c_i \in R^m, \tag{4}$$

а вектор-функцию $x(t)$ строить по формуле

$$x(t) = e^{tA}x_0 + e^{tA}\int_0^t e^{-sA}B(\sum_{i=1}^{r} c_i \cdot s_i)ds. \tag{5}$$

Однако, такое решение возможно лишь для двухточечной задачи $(k = 1)$.

Полиномиальные вектор–функции импользовали и другие авторы для некоторых задач управления. Недостатком этих функций является их рост по норме с ростом t. В некоторых работах при решении задач управления применяются дробно–рациональные вектор–функции, то есть линейные комбинации скалярных дробно–рациональных функций с векторными коэффициентами.

Ранее было предложено формирование $x(t)$ и $u(t)$ в виде

$$x(t) = \sum_{j=1}^{r} a_j \cdot \cos jt + b_j \cdot \sin jt, \quad u(t) = \sum_{j=1}^{r} c_j \cdot \cos jt + d_j \cdot \sin jt \tag{6}$$

для построения периодических траекторий.

Однако, решение практических задач показывает, что наиболее «удачные» траектории получаются, если $x(t)$ и $u(t)$ формируются в виде линейных комбинаций функций их разных классов. Например, если часть слагаемых – дробно-рациональные функции с векторными коэффициентами, а часть – экспоненциальные.

Доклад посвящается рассмотрению различных вариантов видов $x(t)$ и $u(t)$.

Литература

1. Zubova С.П. Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition / S.P. Zubova, K.A. Raetskiy // Mathematical Biosciences and Engineering. — 2021. — Vol. 18, № 6, — P. 7861–7876.

2. Раецкий К.А. Построение модели движения линейной динамической системы с многоточечными условиями / К.А. Раецкий //Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — Т. 1, № 50, — С. 65–80.

3. Раецкий К.А. Моделирование стабилизированной траектории линейной динамической системы методом неопределенных коэффициентов / К.А. Раецкий // Фундаментальные основы механики. — 2022. — № 10, — С. 34–37.

4. Раецкий К.А. Моделирование движения динамической системы в частных производных / К.А. Раецкий // Современные пробле-

мы в науке и технике. Теория и практика : материалы международной открытой конференции. — Воронеж. 2022. — С. 281–283.

5. Красовский Н.Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский. — М. : Наука, 1968. — 476 с.

ЗАДАЧА ТИПА ДИРИХЛЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА С СИЛЬНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В МЛАДШЕМ КОЭФФИЦИЕНТЕ

А.Б. Расулов (Москва, НИУ МЭИ)
rasulzoda55@gmail.com

В настоящей работе алгоритм метода регуляризации С.А. Ломова [1] применяется для решения сингулярно возмущенного уравнения Лапласа с младшим коэффициентом с сильной особенностью в начале координат, которое используется для исследования краевой задачи типа Дирихле. Постановка задачи аналогична работам И.С. Ломова [2] и В.И. Качалова, где впервые приводятся необходимые и достаточные условия существования аналитических решений для сингулярно возмущенных уравнений. Уравнения в частных производных с малым параметром при производных рассматривались и другими авторами (В.Ф.Бутузовым, Нефедовым В.Ф.Сафоновым, А.А.Бободжановым) [3]. Однако они разрабатывали в основном алгоритмы построения асимптотических решений . Вопросы построения сходящихся в обычном смысле приближенных решений в них не затрагивались. В настоящей работе эти вопросы, в том числе задача типа Дирихле, впервые ставятся и решаются с помощью метода регуляризации С.А. Ломова для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения с сильной особенностью в младшим коэффициенте. Для наглядного и компактного изложения исследование проводится в области $D = \{z : |z| \leqslant R\}$ с границей $\Gamma = \{z : |z| = R\}$ и в дальнейшем $D_0 = D \setminus 0$.

Более точно, в стандартных обозначениях $2\partial_{\bar z} = \partial_x + i\partial_y$, $2\partial_z = \partial_x - i\partial_y$, $4\partial_{\bar z z} = \Delta$ с учетом того, что $u = u_1 + iu_2$ в области D_0 рассмотрим следующее сингулярно возмущенное уравнение Лапласа с младшим коэффициентом с сильной особенностью в начале координат:

$$\varepsilon z|z|^{n-1}\left(u_{z\bar z} - bu_{\bar z}\right) - au_z + abu = 0, \tag{1}$$

где $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр, $n > 1$, a – действительная положительная постоянная, т.е. $a \in \mathbb{R}^+$, и функция $b(z) \in C(\overline{D})$ и аналитична в области D.

Задача D (Задача типа Дирихле): *найти решение* $u(z,\varepsilon) \in C(\overline{D}) \cap C^\infty(D_0)$ *уравнения (1), удовлетворяющее на контуре* Γ *граничному условию*

$$\begin{cases} \mathrm{Re} u(t) = g_0(t), \ t \in \Gamma, \\ \mathrm{Re}[(\partial_z - b)\, u](t) = e^{-\frac{c^2}{\varepsilon^2}} g(t), \ t \in \Gamma, \\ u(z_j) = 0, \ u_{\bar{z}}(z_1) = 0, \, j = 0, 1, \end{cases} \tag{2}$$

где $g_0(t), \ g(t) \in C(\Gamma)$ *— заданные функции, c— положительная постоянная,* $z_0, \ z_1$ *— произвольные фиксированные точки области* D.

В настоящей работе единственное решение краевой задачи **D**, т.е.задачи (2) найдено с помощью метода регуляризации С.А. Ломова для сингулярно возмущенного уравнения Лапласа (1) с сильной особенностью в младшем коэффициенте.

Литература

1.Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С.А. Ломов. — М. : Наука, 1981.

2. Ломов С.А. Основы математической теории пограничного слоя / С.А. Ломов, И.С. Ломов. // М. : Издательство Московского университета. — 2011.

3. Сафонов В.Ф. Курс высшей математики. Сингулярно возмущенные задачи и метод регуляризации: учебное пособие. / В.Ф. Сафонов, А.А. Бободжанов. // М. : Издательский дом МЭИ. — 2012. — 414 с.

ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОШИ–РИМАНА С МЛАДШИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ИМЕЮЩИМ ОСОБЕННОСТЬ НА ОКРУЖНОСТИ

А.Б. Расулов, Ю.С. Федоров, А.М. Сергеева

(Москва, НИУ МЭИ)

rasulzoda55@gmail.com,fedorovUS@mpei.ru,HmelevsAM@mpei.ru

Пусть область D содержит точку $z = 0$, окружность $l = \{z : |z| = R\}$, ограничена простым ляпуновским контуром Γ, ориентированным против часовой стрелки, и $D_0 = D \setminus \{l\}$. Кроме того, для связных компонент открытого множества D_0 используем обозначения $D_1 = \{z : |z| < R\}$, $D_2 = D \cap \{|z| > R\}$.

В открытом множестве $D_0 = D \setminus (\{0\} \cup l)$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + \frac{z a_0(z)}{|z|(|z| - R)} u + \frac{b_0(z)}{|z|^m} \overline{u} = f(z), \tag{1}$$

(1) где функции a_0, b_0 непрерывны и ограничены в D_0 и $0 < m < 1$.

Относительно правой части f предполагаем, что она принадлежит классу $L^p(G_0)$, $p > 2$, в каждой подобласти $G_0 \subseteq D_0$, лежащей вне некоторой окрестности границы ∂D_0. Здесь и всюду ниже используются стандартные обозначения $2\partial_{\overline{z}}=\partial_x + i\partial_y$.

В настоящей работе для обобщенной системы типа Коши–Римана (1), коэффициент которой при u допускают особенность первого порядка на окружности l, исследуем краевую задачу, объединяющую элементы задач Римана–Гильберта на Γ и линейного сопряжения на l [2],[3].

Рассмотрим уравнения (1) с $b_0 = 0$, с коэффициентом

$$A(z) = \frac{a_* z}{|z|(|z| - R)} + A_0(z), \quad a_* = \mathrm{const} \in \mathbb{C}, \quad A_0(z) \in L^p(D),\, p > 2.$$

При построении общего решения уравнения (1) и его описания существенную роль играет интегральный оператор И.Н. Векуа [1]:

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(\zeta) d_2\zeta}{\zeta - z},$$

с плотностью $f \in L^p(D)$, $p > 2$. Здесь и ниже $d_2\zeta$ означает элемент площади.

Следующий результат, описывает одно из таких решений уравнения $\Omega_{\bar{z}} = A$, на основе которого построится решения уравнения (1).

Лемма 1. *При $a_0 \in C(\overline{D})$ и $b_0 = 0$ одним из решений уравнения $\Omega_{\bar{z}} = A$ в множестве D_0 служит функция*

$$\Omega(z) = 2a_* \ln ||z| - R| + (TA_0)(z), \quad z \in D_0. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть функция $\Omega(z)$ имеет вид (2) и $e^{-\Omega} f \in L^p(D)$. Тогда общее решение уравнения (1) с $b_0 = 0$, в классе $C(\overline{D} \setminus l)$ дается формулой*

$$u = e^{\Omega}[\varphi + T(e^{-\Omega} f)],$$

где $\varphi \in C(\overline{D}\backslash l)$ — произвольная аналитическая функция в открытом множестве $D\backslash\{l\}$).

Задача R. *Найти регулярное решение и уравнения (1) с коэффициентом $b_0 = 0$ в классе*

$$e^{-\Omega}u \in H(\overline{D_j}), \quad j = 1, 2,$$

по краевым условиям

$$\operatorname{Re} G(t)u\Big|_{\Gamma} = g(t), \quad t \in \Gamma; \tag{A}$$

$$(e^{-\Omega}u)^{+}(t) - G_1(t)(e^{-\Omega}u)^{-}(t) = g_1(t), \quad t \in l, \tag{B}$$

где знаки + и − указывают на граничные значения со стороны D_1 и D_2.

Эту задачу рассматриваем при следующих требованиях на ее данные:

1) $e^{-\Omega}f \in L^p(D)$;

2) коэффициенты $G(t) \in H(\Gamma)$, $G_1(t) \in H(l)$ и всюду отличны от нуля, причем $\ln G_1 \in H(l)$;

3) правые части краевых условий $g(t) \in H(\Gamma)$, $g_1(t) \in H(l)$.

В работе получено явное решения сформулированной задачи.

Литература

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. / И.Н. Векуа // М. : Наука. — 1988. — 510 с.

2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили // М. : Наука. — 1968. — 511 с.

3. Солдатов А.П. Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. / А.П. Солдатов // М. : Изд–во Высшая школа. — 1991. — 206 с.

ЗАДАЧА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОШИ–РИМАНА С СИЛЬНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ В МЛАДШИХ КОЭФФИЦИЕНТАХ В ОБЛАСТИ С КУСОЧНО–ГЛАДКИМИ ГРАНИЦАМИ

А.Б. Расулов, Н.В. Якивчик (Москва, НИУ МЭИ)
rasulzoda55@gmail.com, YakivchikNV@mpei.ru

Целью настоящей работы является построение общего решения уравнения Коши–Римана с сильными особенностями в младших коэффициентах в области с кусочно–гладкими границами, которое используется для правильной постановки и исследования краевых задач Римана–Гильберта и задачи линейного сопряжения в областях с кусочно–гладкими границами.

Пусть односвязная область D ограничена простым кусочно–гладким ляпуновским контуром Γ, составленным из гладких дуг $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ и ориентированным против часовой стрелки. Множество концов этих дуг, которое состоит из m различных точек τ_j, $j = \overline{1, m}$, обозначим через F. При достаточно малом $r > 0$ пересечение $S_\tau = D \cap \{|z - \tau| < r\}$ представляет собой криволинейный сектор раствора $\pi\alpha_\tau$, $0 \leqslant \alpha_\tau \leqslant 2$ с вершиной $\tau \in F$ и боковыми сторонами, которые обозначим $\Gamma_{\tau\pm 0}$. Знаки здесь выбираются так, что относительно ориентации, определяемой контуром Γ, дуга $\Gamma_{\tau+0}$ выходит из точки τ, а дуга $\Gamma_{\tau-0}$ входит в нее.

Пусть функция $G \in C(\Gamma \setminus F)$ кусочно–непрерывна на Γ, т. е. существуют односторонние пределы $G(\tau \pm 0)$ функции $G(t)$ при $t \to \tau$, $t \in \Gamma_{\tau\pm 0}$ в точках $\tau \in F$. Предполагается, что эта функция всюду отлична от нуля, включая ее предельные значения $G(\tau \pm 0)$.

Классическая задача Римана–Гильберта [1] состоит в отыскании аналитической в D функции $\varphi \in C(\overline{D} \setminus F)$ по краевому условию

$$\operatorname{Re} G\varphi^+ = f, \tag{1}$$

где φ^+ означает граничное значение φ на Γ.

Для заданного множества угловых точек $\tau \in F$ это решение подчиняется поведению

$$\varphi(z) = O(1) \quad \text{при } z \to \tau. \tag{2}$$

Задача (1) хорошо изучена в монографии Н.И. Мусхелишвили ([1], с. 133, 260) как в пространствах Гёльдера, так и в весовых гёльдеровых пространствах функций, ограниченных в окрестности точек $\tau \in F$ или допускающих в них особенности порядка меньше единицы.

Классическая задача Римана–Гильберта (1) и задача линейного сопряжения в односвязной области, ограниченной кусочно–гладким контуром, во всей шкале весовых пространств Гёльдера изучена в работе А.П. Солдатова и Е.С. Мещеряковой [2]. Классическая задача линейного сопряжения (см. [1], с. 146–163) для аналитических функций на кусочно–гладкой кривой во всей шкале весовых пространств Гёльдера исследована в работах А.П. Солдатова и Г.Н. Аверьянова (см., например, [3]), а также получена явная степенно–логарифмическая асимптотика решения этой задачи в угловых точках кривой в предположении, что аналогичную асимптотику допускает правая часть задачи.

Рассмотрим в области $\overline{D} \setminus \{0, F\}$ обобщенное уравнение Коши–Римана

$$\partial_{\bar{z}} u - a(z)\, u = f(z) \tag{3}$$

с коэффициентами

$$a(z) = a_0(z) + \frac{A_0\, z}{|z|^{n+1}}, \tag{4}$$

где $a_0 \in L^p(G)$, $p > 2$, $A_0 \in \mathbb{C}$, $n > 1$, а функция f принадлежит классу $L^p_{loc}(D, 0)$, т. е. $L^p(D_\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$, где $D_\varepsilon = D \cap \{|z| > \varepsilon$, $|z - \tau_j| > \varepsilon$, $j = \overline{1, m}\}$.

В настоящей работе найдено интегральное представление решения уравнения (3) в вышеуказанной области D с кусочно–гладкими границами и исследована задача типа Римана–Гильберта (1) в классе функций, удовлетворяющих условию ограниченности (2) при $z \to \tau \in F$.

Литература

1. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. — М. : Наука, 1968. — 511 с.

2. Мещерякова Е.С. Задача Римана–Гильберта в семействе весовых пространств Гёльдера / Е.С. Мещерякова, А.П. Солдатов // Дифф. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 4. — С. 518—527.

3. Аверьянов Г.Н. Асимптотика решений задачи линейного сопряжения в угловых точках кривой // Г.Н. Аверьянов, А.П. Солдатов // Дифф. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 9. — С. 1150–1159.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ПОЛУГРУПП[1]

Н.А. Раутиан

(Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова,
Московский Центр фундаментальной и прикладной математики)

nrautian@mail.ru

Работа посвящена исследованию вольтерровых интегро–дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах. Главная часть рассматриваемых уравнений представляет собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Указанные интегро—дифференциальные уравнения могут быть реализованы, как интегро–дифференциальные уравнения в частных производных, возникающие в теории вязкоупругости, теории распространения тепла в средах с память и имеющие ряд других важных приложений.

Для широкого класса ядер интегральных операторов установлены результаты о существовании и единственности классических решений указанных уравнений, полученные на основе подхода, связанного с применением теории полугрупп операторов. Проводится спектральный анализ генераторов полугрупп операторов, порождаемых указанными интегро–дифференциальными уравнениями. На основе полученных ранее результатов, устанавливается связь между спектрами оператор–функций, являющихся символами указанных интегро–дифференциальных уравнений и спектрами генераторов полугрупп операторов. На основе спектрального анализа генераторов полугрупп операторов и соответствующих оператор–функций получены представления решений рассматриваемых интегро–дифференциальных уравнений (см. [1]–[4]).

Литература

1. Власов В.В. Применение теории полугрупп к исследованию вольтерровых интегро–дифференциальных уравнений / В.В. Власов, Н.А. Раутиан // Дифференциальные уравнения. — 2022 — Т. 58, № 4. — С. 568–572.

2. Раутиан Н.А. Экспоненциальная устойчивость полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро–дифференциальными уравне-

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики

ниями / Н.А. Раутиан // Уфимский математический журнал. — 2021. — Т. 13, № 4. — С. 65–81.

3. Rautian N.A. On the properties of semigroups generated by Volterra integro–differential equations with kernels representable by Stieltjes integrals / N.A. Rautian // Differential Equations. — 2021. — V. 57, No. 9. — P. 1231–1248.

4. Раутиан Н.А. Полугруппы, порождаемые вольтерровыми интегро–дифференциальными уравнениями / Н.А. Раутиан // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т. 56, № 9. — С. 1226–1244.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ЯДЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

О.И. Рейнов (Санкт–Петербург, СПбГУ)
orein51@mail.ru

Показывается, как некоторые новые результаты в теории детерминантов и следов могут быть применены для получения новых теорем о распределении собственных чисел ядерных операторов в банаховых пространствах и о совпадении спектральных и ядерных следов таких операторов. В качестве примеров рассматриваются новые классы операторов — обобщенные ядерные операторы Лапресте (Laprest? e).

1. Мы будем рассматривать банаховы пространства X, Y и обозначать через 1 тождественный оператор на банаховом пространстве. Для конечномерного оператора T в X через trace T обозначается след оператора T, а через $\det(1-T)$ — детерминант оператора $1-T$: $\det(1-T) = \prod_j (1-\mu_j)$, где (μ_j) — полный набор собственных чисел оператора T. В этом случае, естественно, имеем trace–формулу trace $T = \sum_j \mu_j$.

2. Детерминант и след.

Предложение 1. *Пусть A — квази–нормированный операторный идеал, X — банахово пространство, для которого множество конечномерных операторов плотно в пространстве $A(X)$.*

1). Предположим, что стандартный функционал trace *ограничен (по квази–норме из $A(X)$) на подпространстве всех конечномерных операторов из $A(X)$ (и, таким образом, может быть продолжен до непрерывного следа на все пространство $A(X)$). Тогда соответствующий детерминант равномерно непрерывен (по A–квази–норме) на некотором A–шаре подпространства всех конечномерных операторов из $A(X)$. Более того, существуют такие посто-*

янные $r \in (0,1)$ *и* $c > 0$, *что для конечномерных* $T, U \in A(X)$, *если* $||T||_A \leqslant r$ *и* $||U||_A \leqslant r$, *то* $|\det(1-T) - \det(1-U) \leqslant c\,||T-U||_A$.

2). Предположим, что стандартный функционал $\det(1+u)$ *допускает непрерывное продолжение с подпространства всех конечномерных операторов из* $A(X)$ *на все* $A(X)$ *(по квази–норме из* $A(X)$*). Тогда соответствующий функционал* trace *ограничен (по* A*–квази–норме) на подпространстве всех конечномерных операторов из* $A(X)$ *и, таким образом, продолжается по непрерывности (единственным способом) на все* $A(X)$.

3. Спектральный тип и формула следа. Пусть α — квазинорма на семействе всех проективных тензорных произведений $X\widehat{\otimes}Y$, для которой допускаются значения $+\infty$, и такая, что для всех банаховых пространств X, Y подпространства $X\widehat{\otimes}_\alpha Y$ элементов конечной квазинормы α пространств $X\widehat{\otimes}Y$ полны по квазинорме α, причем $\overline{(X \otimes Y)}^\alpha = X\widehat{\otimes}_\alpha Y$ и тождественное вложение $X\widehat{\otimes}_\alpha Y \to X\widehat{\otimes}Y$ непрерывно. Потребуем также, чтобы возникающий ниже объкт N_α был квазинормированым операторным идеалом. Мы говорим, что X обладает свойством (аппроксимации) AP_α, если для любого Y естественное отображение $j_\alpha : Y^*\widehat{\otimes}_\alpha X \to L(Y, X)$ взаимно однозначно.

Для произвольных банаховых пространств X, Y обозначим через $N_\alpha(X, Y)$ образ отображения j_α в $L(X, Y)$, т.е. $N_\alpha(X, Y) = j_\alpha(X^*\widehat{\otimes}_\alpha Y) \subset L(X, Y)$. Операторы из $N_\alpha(X, Y)$ будем называть α–*ядерными.* Пространство $N_\alpha(X, Y)$, снабженное естественной квазинормой при факторотображении j_α, является квазибанаховым пространством. Иными словами, N_α есть квазибанахов операторный идеал. В случае, когда пространство Y обладает свостводом AP_α, мы отождествляем $N_\alpha(X, Y)$ с тензорным произведением $X^*\widehat{\otimes}_\alpha Y$.

В качестве примера введем в рассмотрение новый класс ядерных операторов.

Определение 1. Оператор $T : X \to Y$ называется $((r,s),p,q)$–*ядерным оператором* (или обобщенным оператором Ляпресте), если он представим в виде $T(x) = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k x'_k(x) y_k$ для $x \in X$, где $0 < r, s \leqslant 1, 1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $(\lambda_k) \in l_{r,s}$ (пространство Лоренца), $(y_k) \in l_{p'}^{weak}(Y)$, т.е. для всякого $y' \in Y^*$ ряд $\sum |y'(y_k)|^{p'}$ сходится и $(x'_k) \in l_q^{weak}(X^*)$. Пространство $N_{(r,s),p,q}(X, Y)$, снабженное естественной квазинормой (соответствующий инфимум), является квазибанаховым. Соответствующие тензорные произведения вводятся по аналогии (как линейные подпространства в проективных тензорных произведениях).

Ниже мы рассмотрим лишь случай, когда $q = \infty$, и обозначим $N_{(r,s),p,\infty}$ через $N_{(r,s),p}$. Общий случай появится в подробной статье.

Теорема 1. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, α *— как выше;* $\mathcal{F}$ *— некоторое семейство банаховых пространств, замкнутое относительно взятия счетных* l_p*–сумм. Если для любого пространства* $X \in \mathcal{F}$ *пространство* $N_\alpha(X)$ *имеет спектральный тип* $l_{t,u}$, *где* $t, u > 0$, *то существует такая постоянная* $C > 0$, *что для всякого* $X \in \mathcal{F}$ *и для любого оператора* $T \in N_\alpha(X)$ $||\{\mu_k(T)\}||_{l_{t,u}} \leqslant C||T||_{N_\alpha}$ *(здесь* $\{\mu_k(T)\}$ *— полный набор собственных значений оператора* T*). В частности, если* $t = u = 1$ *и каждое из пространств* $X \in \mathcal{F}$ *обладает свойством* AP_α, *то то для всякого* $X \in \mathcal{F}$ *и для любого оператора* $T \in N_\alpha(X)$ *его ядерный след* trace T *вполне определен и совпадает с его спектральным следом, т.е.* trace $T = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(T)$.

4. Примеры применения.

Предложение 3. *Если* $1 \leqslant p \leqslant 2, 1/r = 1/p + 1/2$, *то всякое банахово пространство обладает свойством* $AP_{(r,1),p}$. *Если, кроме того,* $0 < s \leqslant 1$, *то идеал* $N_{(r,s),p}$ *имеет спектральный тип* $l_{(1,s)}$.

Остается переписать утверждение теоремы 1 для этой ситуации:

Теорема 2. *Пусть* $0 < r \leqslant 1, 1/r = 1/p + 1/2$ *и* $0 < s \leqslant 1$. *Существует такая постоянная* $C > 0$, *что для всякого банахова пространства* X *и для любого оператора* $T \in N_{(r,s),p}(X)$ $||\{\mu_k(T)\}||_{l_{(1,s)}} \leqslant C||T||_{N_{(r,s),p}}$ *(здесь* $\{\mu_k(T)\}$ *— полный набор собственных значений оператора* T*). В частности, полный набор собственных значений оператора* T *абсолютно суммируем, его ядерный след* trace T *вполне определен и совпадает с его спектральным следом.*

Частные случаи теоремы для $N_{(r,s),p}$ (для формулы следа):

a) $r = 1, s = 1, p = 2$: В.Б. Лидский (1959), A. Piesch (1980).

b) $r = 2/3, s = 2/3, p = 1$: A. Grothendieck (1955).

c) $r = 2/3, s = 1, p = 1$: A. Hinrichs & A. Pietsch (2010) и, независимо, O. Reinov (2016).

d) $0 \leqslant r \leqslant 1, s = r, 1/r = 1/2 + 1/p$: O. Reinov & Q. Latif (2013).

Теорема 2 соединяет в одной шкале $N_{(r,1),p}$ операторов частные случаи c) и a).

Все результаты, приведенные до теоремы 2 об $N_{(r,s),p}$, точны. Теорема 2 точна для случаев, когда $r = s$. Для $r \neq s$ проблема возникает уже в частном случае $N_{(2/3,1),1}$. Вот проблема из статьи A. Hinrichs & A. Pietsch (2010) в нашей формулировке: верно ли что в шкале пространств Лоренца $l_{r,s}$ результат «*любое банахово пространство обладает свойством* $AP_{(2/3,1),1}$» есть наилучший результат?

КВАНТОВАЯ ЯМА С ЗАРЯДАМИ НА СТЕНКАХ

С.Ш. Рехвиашвили, А.В. Псху
(Нальчик, ИПМА КБНЦ РАН)
rsergo@mail.ru, pskhu@list.ru

Доклад посвящен решению задачи об электроне в одномерной квантовой яме с непроницаемыми стенками, на которых сосредоточены неподвижные положительные заряды. Рассматривается следующая спектральная задача

$$\frac{d^2\psi(y)}{dy^2} + \left[k^2 + \frac{p^2}{y(1-y)}\right]\psi(y) = 0, \quad \psi(0) = \psi(1) = 0, \qquad (1)$$

$$k^2 = \frac{2mEa^2}{\hbar^2}, \quad p^2 = \frac{2a}{a_B},$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, a_B — боровский радиус, a — ширина квантовой ямы, $\psi = \psi(y)$ — волновая функция, y — безразмерная (отнесенная к a) координата электрона, E — энергия электрона.

Найдены волновые функции и спектр энергии электрона задачи (1). Показано, что энергия может иметь и отрицательные, и положительные значения в зависимости от ширины квантовой ямы, которая контролирует режимы слабого и сильного конфайнмента. В режиме слабого конфайнмента ($a > a_B$) энергия электрона отрицательна, что аналогично атому водорода или экситону Ванье–Мотта и означает связанное состояние зарядов. В режиме сильного конфайнмента ($a < a_B$) возрастает неопределенность импульса электрона, что приводит к возрастанию его кинетической энергии. Поэтому энергия электрона приобретает положительный знак.

Энергия электрона равна нулю, если $a_n = a_B T_n$, где $T_n = 1, 3, 6...$ — треугольные числа. Это указывает на возможность существования сверхпроводимости в квантовых ямах с зарядами, что косвенно подтверждается барической зависимостью температуры сверхпроводящего перехода в гидридах со сложной структурой [1].

Литература

1. Drozdov A.P. Conventional superconductivity at 203 kelvin at high pressures in the sulfur hydride system / A.P. Drozdov, M.I. Eremets, I.A. Troyan, V. Ksenofontov, S.I. Shylin // Nature. — 2015. — V. 525. — P. 73–76.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПЛОСКИХ КЛАССОВ ПРИВАЛОВА

Е.Г. Родикова (Брянск, БГУ имени акад. И.Г. Петровского)
evheny@yandex.ru

Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, D — единичный круг на $\mathbb{C}$, $H(D)$ — множество всех функций, аналитических в D, Z_f — множество всех корней нетривиальной функции $f \in H(D)$. Для любого $\beta > -1$ обозначим $\pi_{\beta,k}(z, \alpha_k)$ бесконечное произведение М. М. Джрбашяна с нулями $\{\alpha_k\} \subset D$ без k–го фактора (см. [1]).

При всех $0 < q < +\infty$ введем в рассмотрение класс

$$\tilde{\Pi}_q = \left\{ f \in H(D) : \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\theta})|\right)^q d\theta dr < +\infty \right\}.$$

Будем называть его плоским классом И.И. Привалова. Класс $\tilde{\Pi}_q$ является обобщением хорошо известного плоского класса Р. Неванлинны и при $q = 1$ совпадает с ним (см. [2]). Отметим, что пространства $\tilde{\Pi}_q$ возникают естественным образом при исследовании вопросов дифференцирования в классах И.И. Привалова (см. [5]).

В работе исследуются интерполяционные последовательности классов $\tilde{\Pi}_q$ при всех $0 < q < 1$. Сформулируем задачу интерполяции на множестве простых узлов в классе $\tilde{\Pi}_q$: пусть $\{\alpha_k\}_1^\infty \subset D$ и $\{w_k\}_1^\infty \subset \mathbb{C}$; при каких условиях на $\{\alpha_k\}$ и $\{w_k\}$ можно построить в явном виде функцию $f \in \tilde{\Pi}_q$, такую что

$$f(\alpha_k) = w_k,\ k = 1, 2, \ldots? \tag{1}$$

Справедливы следующие утверждения

Теорема 1. [3] *Пусть* $\{\alpha_k\} \subset D$, $n(r) = card\{\alpha_k : |\alpha_k| < r\}$, $0 < q < 1$. *Если* $\{\alpha_k\} = Z_f$ *для некоторой* $f \in \tilde{\Pi}_q$, *то*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |\alpha_k|)^{2/q} < +\infty.$$

Обратно, если точки последовательности $\{\alpha_k\}$ *расположены в конечном числе углов Штольца и* $\int_0^1 n^q(r)dr < +\infty$, *то найдётся функция* $f \in \tilde{\Pi}_q$, *такая что* $Z_f = \{\alpha_k\}$.

Теорема 2. *Пусть* $0 < q < 1$, $\{\alpha_k\} \subset D$ *находится в конечном числе углов Штольца. Если*

1. $\int\limits_0^1 (1-r)n^q(r)dr < +\infty$;

2. $|\pi_{\beta,k}(\alpha_k, \alpha_j)| \geqslant \exp \frac{-\mu(k)}{(1-|\alpha_k|)^{\frac{2}{q}}}$,

где $\beta > \frac{2}{q} - 2$, $\mu(k) > 0$, $\mu(k) = o(1)$, $k \to +\infty$, *то для любой последовательности* $\{w_k\}$, *такой что*

$$\ln^+ |w_k| = o\left((1-|\alpha_k|)^{-2/q}\right),\ k \to +\infty,$$

можно построить функцию $f \in \tilde{\Pi}_q$, *являющуюся решением задачи (1).*

Отметим, что задача интерполяции на множествах Карлесона в плоских классах Привалова решалась в работе автора [4].

Литература

1. Джрбашян М.М. К проблеме представимости аналитических функций / М. М. Джрбашян // Сообщ. Института матем. и механики АН Арм. ССР. — 1948. — Т. 2. — С. 3–40.

2. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции / Р. Неванлинна — М.–Л.: ГИТТЛ, 1941. — 388 с.

3. Родикова Е.Г. О свойствах корневых множеств функций из плоских классов И.И. Привалова / Е.Г. Родикова // Уфимская осенняя математическая школа – 2021: мат. междунар. научн. конф.. — Уфа, 2021. — С. 158–160.

4. Родикова Е.Г. Об интерполяции на множествах Карлесона в плоских классах И.И. Привалова в круге / Е.Г. Родикова // Ученые записки Брянского государственного университета. — 2022. — № 4 (28). — С. 13–15.

5. Rodikova E.G., Shamoyan F.A. On the differentiation in the Privalov classes // Журн. Сиб. фед. ун–та. Серия матем. и физ. — 2020. — Т. 13(5). — С. 622–630.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ СПИРАЛИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ДВУМЕРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

М.И. Ронжина, Л.А. Манита (Москва, РГУНГ; Москва, ВШЭ)
ronzhina.m@gubkin.ru, lmanita@hse.ru

Гамильтонова система принципа максимума Понтрягина

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \tag{1}$$

для задач оптимального управления, аффинных по двумерному управлению $u = (u_1, u_2)$, имеет гамильтониан вида

$$H(q,p) = H_0(q,p) + H_1(q,p)u_1^0 + H_2(q,p)u_2^0, \tag{2}$$

где $q(t) \in \mathbb{R}^n$, $p(t) \in (\mathbb{R}^n)^*$. Управление выбирается из условия максимума на ограничивающем множестве управлений U

$$u^0 = \arg\max_{u \in U} \left(H_1(q,p)u_1 + H_2(q,p)u_2\right). \tag{3}$$

Для системы (1)–(3) характерно наличие особых точек второго порядка и сложное поведение решений в окрестности таких точек [1]–[7]. Обозначим $(\mathrm{ad}H_i)H_j$ как скобку Пуассона функций H_i и H_j.

Точку $(q_s, p_s) \in \mathbb{R}^{2n}$ будем называть *особой точкой второго порядка* системы (1)–(3), если выполнены условия:
1. Функции

$$H_i,\ (\mathrm{ad}H_k)H_i,\ (\mathrm{ad}H_l)(\mathrm{ad}H_k)H_i,\ (\mathrm{ad}H_j)(\mathrm{ad}H_l)(\mathrm{ad}H_k)H_i,$$

$i = 1, 2$, $j, k, l = \overline{0, 2}$, обращаются в нуль в точке (q_s, p_s). Набор их дифференциалов в точке (q_s, p_s) имеет постоянный ранг.
2. Билинейная форма

$$B_{ij} = \mathrm{ad}H_i(\mathrm{ad}H_0)^3 H_j\big|_{(q_s,p_s)},\ i, j = 1, 2$$

имеет ранг 2, симметрическая и отрицательно определенная.
3. Остальные (независимые от перечисленных) скобки пятого порядка от функций H_j, $j = \overline{0, 2}$ обращаются в нуль в точке (q_s, p_s).

Для систем (1)–(3) размерности не ниже 32 ($n \geqslant 16$) и для ограничивающего множества U в виде круга доказано [3], что в окрестности особой точки второго порядка существует семейство решений в форме логарифмических спиралей, которые попадают в особую точку за конечное время, при этом управление совершает счетное число оборотов по границе круга.

В случае, когда размерность гамильтоновой системы меньше 32, решения в виде логарифмических спиралей найдены только для некоторых конкретных задач оптимального управления [1], [4]–[6].

В докладе будут рассмотрены достаточные условия существования экстремалей в форме логарифмических спиралей для задач оптимального управления размерности $n = 4$ с гамильтонианом вида (2) и управлением из круга.

Литература

1. Zelikin M.I. Theory of chattering control with applications to astronautics, robotics, economics and engineering / M.I. Zelikin, V.F. Borisov — Boston : Birkhäuser. — 1994. — 244 p.

2. Зеликин М.И. Типичность фрактально–хаотической структуры интегральных воронок в гамильтоновых системах с разрывной правой частью / М.И. Зеликин, Л.В. Локуциевский, Р. Хильдебранд // Совр. математика. Фунд. напр. — 2015. — Т. 56. — С. 5–128.

3. Ронжина М.И. Окрестность особого режима второго порядка в задачах с управлением из круга / М.И. Ронжина, Л.А. Манита, Л.В. Локуциевский // Труды МИАН. — 2021. — Т. 315. — С. 222–236.

4. Manita L. A. Optimal spiral–like solutions near a singular extremal in a two–input control problem / L.A. Manita, M.I. Ronzhina // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. — 2022. — V. 27, No. 6. — P. 3325–3343.

5. Ronzhina M.I. Spiral–like extremals near a singular surface in a rocket control problem / M.I. Ronzhina, L.A. Manita // Regular and Chaotic Dynamics. — 2023. — V. 28, No. 2. — P. 148–161.

6. Ronzhina M. Singularity of optimal control for a Timoshenko beam / M. Ronzhina, L. Manita // J. Phys.: Conf. Ser. — 2021. — V. 1740, Pap. 012068.

7. Zhu J. Minimum time control of the rocket attitude reorientation associated with orbit dynamics / J. Zhu, E. Trélat, M. Cerf // SIAM J. Control Optim. — 2016. — V. 54, No. 1. — P. 391–422.

ОБОБЩЁННОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО–ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И НЕНУЛЕВЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

В.С. Рыхлов (Саратов, СГУ)
RykhlovVS@yandex.ru

1. Рассмотрим обобщённую неоднородную начально–граничную задачу для волнового уравнения со смешанной производной простейшего вида

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = f(x,t), \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0, \tag{3}$$

где $(x,t) \in Q = [0,1] \times [0,+\infty)$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$; $\varphi(x) \in L_1[0,1]$, $f(x,t)$ является функцией класса Q и обе эти функции являются комплекснозначными. Здесь и далее считаем, что функция $f(x,t)$ переменных $(x,t) \in Q$ есть функция класса Q, если $f(x,t) \in L_1(Q_T)$ при любом $T > 0$, где $Q_T = [0,1] \times [0,T]$.

Для волнового уравнения выполняется условие $p_1^2 - 4p_2 > 0$, то есть корни ω_1, ω_2 характеристического многочлена вещественны. Предположим

$$\omega_1 < 0 < \omega_2. \tag{4}$$

Обобщённое решение задачи (1)–(3) определяется аналогично тому, как это сделано в [1–2]. В этих же работах дается история вопроса.

С использованием метода, предложенного в [1–2] к простейшей смешанной задаче для уравнения колебания струны, который основан на резольвентном и аксиоматическом (аксиомы расходящихся рядов) подходах, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если $\varphi(x) \in L_1[0,1]$, $f(x,t)$ есть функция класса Q и выполняется условие (4), то для обобщённого решения $u(x,t)$ начально–граничной задачи (1)–(3) справедлива формула*

$$u(x,t) = u_1(x,t) + \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta\left(\alpha(x,t-\tau)\right)}^{\eta\left(\beta(x,t-\tau)\right)} f(\xi,\tau)\, d\xi, \tag{5}$$

где

$$u_1(x,t) = \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\Big(\widehat{\varphi}\big(\{\alpha(x,t)\}\big) - \widehat{\varphi}\big(\{\beta(x,t)\}\big)\Big),$$

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} \omega_2\varphi\Big(\dfrac{\xi}{a}\Big), & \text{если } \xi\in[0,a); \\ \omega_1\varphi\Big(\dfrac{1-\xi}{1-a}\Big), & \text{если } \xi\in[a,1]. \end{cases}$$

$$\eta(s) = \frac{\{s\}}{a}\chi\big(a-\{s\}\big) + \frac{1-\{s\}}{1-a}\chi\big(\{s\}-a\big),$$

$$\alpha(x,t) := \frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}, \qquad \beta(x,t) := \frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1},$$

$a = \dfrac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}$, *$\chi(x)$ есть функция Хевисайда, $\{x\}$ обозначает дробную часть числа $x\in(-\infty,+\infty)$.*

Приложением этой теоремы является случай задачи с ненулевым потенциалом в дифференциальном уравнении.

2. Рассмотрим следующую однородную обобщённую начально–граничную задачу с ненулевым потенциалом

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = q(x)u(x,t), \tag{6}$$

$$u(0,t)=0, \quad u(1,t)=0, \tag{7}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=0, \tag{8}$$

где комплекснозначные функции $\varphi(x)\in L_1[0,1]$, $q(x)\in L_1[0,1]$ и $q(x)u(x,t)$ класса Q.

Применим к решению этой задачи метод, предложенный в статьях [1–2]. Так же, как и в [1–2], в задаче (6)–(8) будем рассматривать правую часть $q(x)u(x,t)$ в уравнении (6) как неоднородность в задаче (1)–(3). Тогда на основании формулы (5) от задачи (6)–(8) приходим к интегральному уравнению

$$u(x,t) = u_1(x,t) + \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta\left(\alpha(x,t-\tau)\right)}^{\eta\left(\beta(x,t-\tau)\right)} q(\xi)u(\xi,\tau)\,d\xi. \tag{9}$$

Естественно назвать *обобщённым решением* начально–граничной задачи (6)–(8) решение интегрального уравнения (9).

Уравнение (9) решается методом последовательных подстановок. Введем оператор, действующий из $C(Q_T)$ в $C(Q_T)$,

$$Bf = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta\left(\alpha(x,t-\tau)\right)}^{\eta\left(\beta(x,t-\tau)\right)} q(\xi) f(\xi,\tau)\, d\xi.$$

Лемма 1. *Функция $a_1(x,t) = (Bu_1)(x,t)$ является функцией из пространства $C(Q_T)$ и справедлива оценка*

$$\|a_1(x,t)\|_{C(Q_T)} \leqslant C_T \|q(x)\|_{L_1[0,1]} \|\varphi\|_{L_1[0,1]},$$

где постоянная C_T не зависит от $q(x)$ и $\varphi(x)$.

Лемма 2. *Оператор B является линейным ограниченным оператором из $C(Q_T)$ в $C(Q_T)$ и при $n \geqslant 1$ имеет место оценка*

$$\|B^n f\|_{C(Q_T)} \leqslant \|f(x,t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{T\|q\|_{L_1[0,1]}}{2\min\{|\omega_1|, \omega_2\}} \right)^n \frac{1}{n!}.$$

Образуем ряд

$$A(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B^n a_1)(x,t).$$

Теорема 2. *Если $\varphi(x) \in L_1[0,1]$, $q(x) \in L_1[0,1]$ и выполняется условие (4), то задача (6)–(8) имеет единственное обобщённое решение $u(x,t)$ и для него справедлива формула*

$$u(x,t) = u_1(x,t) + A(x,t),$$

причем ряд $A(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T не медленнее экспоненциального ряда.

Литература

1. Хромов А.П. Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача для волнового уравнения / А.П. Хромов // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21–й междун. Саратовской зимней школы. — Саратов: Саратовский университет, 2022. — С. 319–324.

2. Хромов А.П. Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача для волнового уравнения простейшего вида / А.П. Хромов // Изв. Сарат. ун–та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. — 2022. — Т. 22, № 3. — С. 322–331.

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

К.Б. Сабитов (Уфа,
Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН)
sabitov_fmf@mail.ru

В связи с изучением краевых задач для уравнений смешанного типа, в частности, задачи Трикоми, возник интерес к изучению эллиптических, параболических и гиперболических уравнений, вырождающихся на части границы области задания таких уравнений. Статья М.В. Келдыша [1], опубликованная в 1951 году, положила начало целого направления изучения краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка и выше. В монографиях [2], [3] приведен достаточно полный обзор работ, посвященных изучению граничных задач (Дирихле, Неймана и др.) для дифференциальных уравнений с частными производными с неотрицательной характеристической формой, задачи Коши для вырождающихся гиперболических и параболических уравнений. В работах [3, с. 16], [4] отмечены и нерешенные проблемы. Одной из них является изучение начально-граничных задач для вырождающихся параболических уравнений, в частности, для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим уравнение теплопроводности с переменными коэффициентами

$$t^n u_{xx} - x^m u_t = 0,$$

где n и m — вещественные постоянные и одновременно в нуль не обращаются. Добавим к этому уравнению возмущающее слагаемое $bx^m t^n u$, здесь b — произвольная постоянная, и приравняем к функции $x^m F(x,t)$, т.е. будем изучать следующее параболическое уравнение:

$$\mathcal{L}u = t^n u_{xx} - x^m u_t - bx^m t^n u = x^m F(x,t) \tag{1}$$

в области $D = \{(x,t) | 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$, где $l > 0$, $T > 0$ — заданные вещественные постоянные, и поставим следующие начально-граничные задачи в зависимости от значений параметров n и m.

Задача 1. Пусть $n > -1$, $m > -2$. Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C_{x,t}^{2,1}(D), \quad u_{xx}, u_t \in L[0,l]; \tag{2}$$

$$\mathcal{L}u \equiv x^m F(x,t),\ (x,t) \in D; \tag{3}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{4}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{5}$$

где $F(x,t)$ и $\varphi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

Запись $u_{xx},\ u_t \in L[0,l]$ означает, что производные u_{xx} и u_t интегрируемы по x на $[0,l]$ при любом $t \in (0,T)$.

Задача 2. Пусть $n > -1$, $m \leqslant -2$. Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую (2), (3), (5) и

$$u(l,t) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Отметим, что в постановке задачи 2 граница $x = 0$ области D освобождается от граничного условия $u(0,t) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T$, как в работе [1].

В дальнейшем при $n > -1$ и $m > -2$ ставятся следующие задачи.

Задача 3. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям (2) – (4) и

$$u(x,0) - u(x,T) = \psi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{6}$$

где $F(x,t)$ и $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

Задача 4. Найти пару функций $u(x,t)$ и $\varphi(x)$, удовлетворяющих условиям (2) – (6), где $F(x,t)$ и $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции.

В этой обратной задаче условие (6) является дополнительным для нахождения функции $\varphi(x)$.

Задача 5. Пусть $F(x,t) = f(x)g(t)$. Требуется найти пару функций $u(x,t)$ и $g(t)$, удовлетворяющих условиям (2) – (5), кроме того,

$$g(t) \in C[0,T],$$

$$u(x_0,t) = h(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{7}$$

где $f(x)$, $\varphi(x)$ и $h(t)$ — заданные достаточно гладкие функции, x_0 — заданная точка из интервала $(0,l)$, $\varphi(x_0) = h(0)$.

Здесь условие (7) является дополнительным условием для определения функции $g(t)$.

Задача 6. Пусть $F(x,t) = f(x)g(t)$. Требуется найти пару функций $u(x,t)$ и $f(x)$, удовлетворяющих условиям (2) – (5),

$$f(x) \in C(0,l) \cap L(0,l);$$

$$u(x, t_0) = \varphi_0(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{8}$$

где $g(t)$, $\varphi(x)$ и $\varphi_0(x)$ — заданные достаточно гладкие функции.

В этой задаче условие (8) является дополнительным для нахождения функции $f(x)$.

Отметим, что в работе [5] изучены обратные задачи по определению правой части вырождающегося по переменной x параболического уравнения.

В работе решения поставленных задач 1 – 6 построены в явной форме и приведены доказательства теорем единственности и существования решений.

Литература

1. Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа / М.В. Келдыш // ДАН. — 1951. — Т. 77, № 2. — С. 181–183.

2. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения / М.М. Смирнов. // М. : Наука, 1966. — 292 с.

3. Олейник О.А. Уравнения с неотрицательной характеристической формой / О.А.Олейник, Е.В. Радкевич. // М. : МГУ, 2010. — 360 с.

4. Kohn J.J. Degenerate elliptic–parabolic equations of second order / J.J. Kohn, L. Nirenberg // Comm. Pure Appl. Math. — 1967. — V. 20. — P. 797–872.

5. Камынин В.Л. О корректности разрешимости обратной задачи определения правой части в вырождающемся параболическом уравнении с условием интегрального наблюдения / В.Л. Камынин // Матем. заметки. — 2015. — Т. 98, Вып. 5. — С. 710–724.

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ СЛЕДЫ И НЕКОММУТАТИВНЫЕ ВЫЧЕТЫ ДЛЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В $\mathbb{R}^n$

А.Ю. Савин (Москва, РУДН)

a.yu.savin@gmail.com

Рассматривается алгебра $\mathcal{A}$ операторов вида конечной суммы (см. [1])

$$D = \sum R_g T_w A,$$

действующих в пространстве Шварца в $\mathbb{R}^n$, где операторы A — классические псевдодифференциальные операторы целого порядка в $\mathbb{R}^n$, операторы T_w, $w \in \mathbb{C}^n$ равны

$$T_w u(x) = e^{ikx-iak/2}u(x-a), \quad w = a - ik,$$

наконец, операторы R_g, $g \in U(n)$ — поднятия унитарных операторов на $\mathbb{C}^n \simeq T^*\mathbb{R}^n$ до элементов комплексной метаплектической группы $L^2(\mathbb{R}^n)$. Здесь используется отождествление $T^*\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ вида $(x,p) \mapsto p - ix$.

Фиксируется вспомогательный эллиптический оператор H положительного порядка (например, гармонический осциллятор $H_0 = \frac{1}{2}(|x|^2 - \Delta)$), для которого резольвента $(H-\lambda)^{-1}$ существует для больших λ в секторе, содержащем отрицательную вещественную ось. Для оператора $D = R_g T_w A$ как выше оператор $D(H-\lambda)^{-K}$ будет иметь след при больших K. Более того, этот след будет голоморфной функцией переменной λ. Мы показываем, что при $\lambda \to \infty$ в секторе имеет место асимптотической разложение

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(R_g T_w A(H-\lambda)^{-K}) \quad \sim \quad & \sum_{j=0}^{\infty} c_j(-\lambda)^{(2m+\operatorname{ord}A-j)/\operatorname{ord}H-K} + \\ & + \sum_{j=0}^{\infty}(c'_j \ln(-\lambda) + c''_j)(-\lambda)^{-j-K}\end{aligned}$$

с некоторыми коэффициентами c_j, c'_j, c''_j, $j = 0, 1, \ldots$. Здесь $\operatorname{ord}A$ и $\operatorname{ord}H$ — порядки операторов A и H, соответственно, а m — комплексная размерность множества неподвижных точек отображения g.

В этом разложении c_j c'_j являются локальными в том смысле, что они определяются конечным числом членов асимптотического разложения символов операторов D и H соответственно. Следовательно, они могут быть вычислены явно, по крайней мере в принципе, в то время как c''_j являются «глобальными»; так как не определяются конечным числом компонент символа.

Из этого результата мы также получаем асимптотики ζ–функций операторов и следов теплопроводности. Также мы показываем, что коэффициент c'_0 играет замечательную роль. А именно, после умножения на порядок $\operatorname{ord}H$ он становится независящим от оператора H и, более того, позволяет определить аналог знаменитого некоммутативного вычета Водзицкого [2] для нашей алгебры. При сужении на подалгебру псевдодифференциальных операторов Шубина наш некоммутативный вычет переходит в вычет, введённый в работе [3].

Результаты получены в совместной работе с Эльмаром Шроэ и были анонсированы в работе [4]. Работа проводилась в рамках проекта РФФИ 21–51–12006.

Литература

1.A. Savin. Elmar Local index formulae on noncommutative orbifolds and equivariant zeta functions for the affine metaplectic group / A. Savin, E. Schrohe. // Adv. Math. — 2022. — V. 409, part A. — Paper № 108624. — 37 p.

2. Wodzicki M. Noncommutative residue. I. Fundamentals. / M. Wodzicki. // Lecture Notes in Math. — 1987. — V. 1289. — P. 320–399.

3. Boggiatto P. Non–commutative residues for anisotropic pseudo–differential operators in $\mathbb{R}^n$ / P. Boggiatto, F. Nicola. // J. Funct. Anal. — 2003. — V. 203(2). — P. 305–320.

4. Savin A. Trace expansions and equivariant traces on an algebra of Fourier integral operators on $\mathbb{R}^n$ / A. Savin, E. Schrohe. // Proc. Symp. Pure Math. — 2023. — V. 105. — P. 457–476.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

А.М. Савчук, И.В. Садовничая (Москва, МГУ)
savchuk@cosmos.msu.ru, ivsad@yandex.ru

Пусть

$$\mathcal{L}\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{y}' + P(x)\mathbf{y},$$

$$\text{где}\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},\ P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix},\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

$x \in [0, \pi]$, $\mathbb{H} = (L_2[0, \pi])^2$, краевые условия U регулярны по Биркгофу. Оператор Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$ определен на области

$$\mathfrak{D}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{y} \in W_1^1[0, \pi] : \mathcal{L}\mathbf{y} \in \mathbb{H},\ U\mathbf{y} = 0\}.$$

Функция $P(x)$ комплексная и суммируемая, т. е. $p_j \in L_1[0, \pi]$. Рассматривается динамическое уравнение

$$\mathrm{i} \cdot \mathbf{u}_t = \mathbf{B}\mathbf{u} + P(x)\mathbf{u}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{u}(x, 0) = \begin{pmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \end{pmatrix}.$$

Иными словами, рассматривается вопрос о построении и оценках сильно непрерывной операторной группы

$$T(t) = \exp\{it\mathcal{L}_{P,U}\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Доказано, что эта группа определена в пространстве $\mathbb{H} = (L_2[0, \pi])^2$, в пространствах $\mathbb{H}_U^\theta$, $\theta \in [0,\, 1]$, построенных по оператору $\mathcal{L}$. В частности, $\mathbb{H}_U^\theta$ совпадает с классическим пространством бесселевых потенциалов $\mathbb{H}^\theta$ при $\theta \in [0, 1/2)$. Пространство $\mathbb{H}_U^1$ — это классическое пространство Соболева $\left(W_2^1[0, \pi]\right)^2$, суженное на краевые условия $U\mathbf{y} = 0$. Аналогичные результаты получены и в пространствах $\left(L_\mu[0, \pi]\right)^2$, $\mu \in (1, \infty)$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — регулярный оператор Дирака с суммируемым внедиагональным потенциалом. Тогда оператор $i\mathcal{L}_{P,U}$ является генератором сильно непрерывной операторной группы $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$ в пространстве $\mathbb{H}_U^\theta$) для любого $\theta \in [0, 1]$. Кроме того,*

$$\|T(t)\|_{\mathbb{H}_U^\theta} \leqslant C(1 + |t|^p)e^{\beta|t|},$$

где

$$\beta = \sup_{\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_{P,U})} |Im\, \lambda|,$$

а оценки неулучшаемы.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — регулярный оператор Дирака с суммируемым внедиагональным потенциалом. Тогда оператор $i\mathcal{L}_{P,U}$ является генератором сильно непрерывной операторной группы $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$ в $(L_p[0, \pi])^2$ для любого $p \in (1, \infty)$. При этом справедливы оценки вида*

$$\|T(t)\| \leqslant C \exp(\beta t)\|T_0(t)\|,$$

T_0 — группа, порожденная оператором с нулевым потенциалом. Числа β и C зависят только от $\|P\|_{L_1}$ и ограничены на каждом шаре $\|P\|_{L_1} \leqslant R$.

Вопрос о существовании группы в пространствах L_1 и L_∞ остается пока открытым.

Обозначим через $\omega_p(\delta; f)$ интегральный модуль непрерывности функции f порядка $p \in (1, \infty)$. Определим классические пространства Бесова $B_{p,q}^\theta[0, \pi]$, потребовав выполнение оценки

$$\|f\|_B = \|f\|_{L_p} + \left(\int_0^\pi \omega_p(\delta; f)^q \frac{d\delta}{\delta^{1+q\theta}}\right)^{1/q} < \infty.$$

Через $B_{p,q,U}^{\theta}$ обозначим пространства Бесова, учитывающие краевые условия.

Теорема 3. *Теорема 2 полностью сохраняется при замене пространства* $(L_p[0,\pi])^2$ *на* $(B_{p,q,U}^{\theta}[0,\pi])^2$ *для любых* p, $q \in (1,\infty)$, $\theta \in [0,1]$.

Теорема 1 и теорема 2 в случае периодических краевых условий были получены авторами ранее в работе [1].

Литература

1. Савчук А.М. О существовании операторной группы, порожденной одномерным оператором Дирака /А.М. Савчук, И.В. Садовничая // Труды моск. мат. общ–ва. — 2019. — Т. 80, № 2. — С. 275–294.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Т.В. Сальникова, Е.И. Кугушев (Москва, МГУ)

tatiana.salnikova@gmail.com

Классификация финальных движений задачи трех тел Дж. Шази имела симметрию в прошлом и в будущем. Численные примеры, появившиеся позже у ряда авторов, утверждали возможность обмена и захвата в асимметричном случае. Наконец, В.М.Алексеев качественными методами доказал, что существует открытое множество начальных условий положительной меры, приводящее к обмену для систем как с положительной, так и с отрицательной полной энергией: гиперболо–эллиптические движения имеют разные тела, удаляющиеся на бесконечность в прошлом и в будущем. Впервые к проблеме финальных движений В.М.Алексеев обратился в 1954 г., когда Андрей Николаевич Колмогоров предложил ему в качестве темы курсовой работы рассмотреть вопрос об обмене в задаче трех тел. О ненулевой вероятности обмена в общем случае следует говорить отдельно в конкретных реальных ситуациях.

В настоящем исследования рассмотрена краевая задача трех тел, исследована возможность существования решения этой задачи и получены условия финальной гиперболо–эллиптичности движения. С помощью принципа наименьшего действия в форме Гамильтона для регулярного случая — гладкой ограниченной функции потенциальной энергии, и в форме Якоби для сингулярных потенциалов, доказано существование движения, при котором точки системы из любого заданного начального положения перейдут при соответствующем выборе начальной скорости в любое заданное конечное положение. Для финальной гиперболо–эллиптичности в задаче трех тел получены достаточные условия устойчивости финальной конфигурации — если в некоторый момент времени абсолютные величины изменения оскулирующих параметров орбиты наименьшего тела, которое изначально двигалось по эллиптической орбите вокруг первого тела, удовлетворяют приведенным условиям, то оно останется на эллиптической орбите относительно второго тела. При этом первое тело удаляется от второго по гиперболической траектории.

В качестве приложения рассмотрена возможность захвата и дальнейшего движения космических объектов в околопланетном пространстве, а также предложена математическая модель формирования неправильных (типа Фобоса) спутников планет.

Литература

1. Алексеев В.М. Лекции по небесной механике / В.М. Алексеев. — Ижевск. // Ижевская республиканская типография. — 1999. — 160 с.

2. Маршал К. Задача трех тел / К. Маршал. — Москва–Ижевск. // Институт компьютерных исследований. — 2004. — 640 с.

СУБРИМАНОВЫ СФЕРЫ ЭНГЕЛЯ И КАРТАНА[1]

Ю.Л. Сачков

(Переславль–Залесский, ИПС им. А.К.Айламазяна РАН)

yusachkov@gmail.com

Описана структура пересечения субримановых сфер на группе Энгеля и на группе Картана с инвариантным многообразием основных симметрий коразмерности 2.

Алгебра Картана — это свободная нильпотентная алгебра $\mathfrak{g}$ с 2–мя образующими глубины 3. В ней существует базис $X_1, \dots, X_5$, в котором ненулевые скобки имеют вид

$$[X_1, X_2] = X_3, \qquad [X_1, X_3] = X_4, \qquad [X_2, X_3] = X_5.$$

Алгебра Картана имеет градуировку

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \mathfrak{g}^{(2)} \oplus \mathfrak{g}^{(3)},$$
$$\mathfrak{g}^{(1)} = \operatorname{span}(X_1, X_2), \qquad \mathfrak{g}^{(2)} = \mathbb{R}X_3, \qquad \mathfrak{g}^{(3)} = \operatorname{span}(X_4, X_5),$$
$$[\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(i)}] = \mathfrak{g}^{(i+1)}, \qquad \mathfrak{g}^{(4)} = \{0\},$$

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–11–00140, `https://rscf.ru/project/22-11-00140/`.

поэтому она является алгеброй Карно. Соответствующая связная односвязная группа Ли G называется группой Картана.

На пространстве $\mathbb{R}^5_{x,y,z,v,w}$ можно ввести закон умножения, превращающий это пространство в группу Картана: $G \cong \mathbb{R}^5_{x,y,z,v,w}$, так, чтобы левоинвариантные поля, порождающие алгебру Картана, имели вид

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{x^2+y^2}{2}\frac{\partial}{\partial w}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2+y^2}{2}\frac{\partial}{\partial v}.$$

Кратчайшие для субримановой структуры с ортонормированным репером (X_1, X_2) суть решения задачи оптимального управления

$$\begin{aligned}
&\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \quad q = (x, y, z, v, w) \in G = \mathbb{R}^5,\\
&q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,\\
&l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt \to \min .
\end{aligned}$$

В силу инвариантности этой задачи относительно левых сдвигов на группе G можно считать, что $q_0 = \mathrm{Id} = (0, \dots, 0)$.

Для этой задачи ранее получены следующие результаты.

- Анормальные траектории (соответствующие анормальному случаю $\nu = 0$ принципа максимума Понтрягина):
  - однопараметрические подгруппы $e^{\pm t(u_1 X_1 + u_2 X_2)}$, $u_i \equiv \mathrm{const}$,
  - проецируются на плоскость (x, y) в прямые,
  - поэтому оптимальны,
  - нестрого анормальны, то есть одновременно являются нормальными.
- Нормальные экстремали удовлетворяют гамильтоновой системе принципа максимума Понтрягина с гамильтонианом $H(\lambda) = (\langle \lambda, X_1\rangle^2 + \langle \lambda, X_2\rangle^2)/2$:

$$\dot{\theta} = c, \qquad \dot{c} = -\alpha \sin(\theta + \beta), \qquad \dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0, \tag{1}$$

$$\dot{q} = \cos\theta\, X_1 + \sin\theta\, X_2.$$

- В фазовом цилиндре уравнения маятника (1) введены координаты (φ, k), в которых это уравнение выпрямляется:

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\alpha}, \qquad \dot{k} = 0.$$

- Получена параметризация геодезических экспоненциальным отображением:

$$\begin{aligned}&\operatorname{Exp} \,:\, C \times \mathbb{R}_+ \to G, \qquad \operatorname{Exp}(\lambda, t) = \pi \circ e^{t\vec{H}}(\lambda) = q(t),\\ &C = \mathfrak{g}^* \cap H^{-1}(1/2).\end{aligned}$$

- Описана группа симметрий экспоненциального отображения

$$\operatorname{Sym} = \operatorname{SO}(2) \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,$$

$$\operatorname{SO}(2) = \{e^{tX_0} \mid t \in \mathbb{R}\}, \qquad X_0 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - w\frac{\partial}{\partial v} + v\frac{\partial}{\partial w},$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{\varepsilon^i \mid i = 1, \dots, 4\},$$

дискретная подгруппа $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ порождена отражениями ε^1, ε^2 маятника в осях θ, c:

$$\begin{aligned}\varepsilon^1 \,&:\, (x, y, z, v, w) \mapsto (x, y, -z, v - xz, w - yz),\\ \varepsilon^2 \,&:\, (x, y, z, v, w) \mapsto (x, -y, z, -v + xz, w - yz).\end{aligned}$$

- Явно описано время разреза $t_{\text{cut}} \,:\, C \to (0, +\infty]$.

Субриманово расстояние (метрика Карно–Каратеодори) есть

$$d(q_0, q_1) = \inf \left\{ \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt \mid \right.$$
$$\left. \text{управление } (u_1, u_2)(t) \text{ переводит } q_0 \text{ в } q_1 \right\}.$$

Субриманова сфера радиуса R с центром q_0 есть

$$S_R(q_0) = \{q \in G \mid d(q_0, q) = R\}.$$

В силу инвариантности метрики относительно левых сдвигов на группе Картана $L_q \,:\, q' \mapsto qq'$,

$$\begin{aligned}&d(qq_0, qq_1) = d(q_0, q_1),\\ &L_q(S_R(q_0)) = S_R(qq_0).\end{aligned}$$

В силу того, что группа Картана есть группа Карно, левоинвариантная субриманова структура согласована с дилатациями:

$$\begin{aligned}&\delta_\beta \,:\, (x, y, z, v, w) \mapsto (\beta x, \beta y, \beta^2 z, \beta^3 v, \beta^3 w), \qquad \beta > 0,\\ &d(\operatorname{Id}, \delta_\beta(q)) = \beta d(\operatorname{Id}, q),\\ &\delta_\beta(S_R(\operatorname{Id})) = S_{\beta R}(\operatorname{Id}).\end{aligned}$$

Поэтому достаточно исследовать единичную сферу

$$S = S_1(\mathrm{Id}) = \{q \in G \mid d(q, \mathrm{Id}) = 1\}.$$

Единичная сфера S параметризуется экспоненциальным отображением:

$$S = \{\mathrm{Exp}(\lambda, 1) \mid \lambda \in C,\ t_{\mathrm{cut}}(\lambda) \geqslant 1\}.$$

Субриманова структура и сфера инвариантны относительно группы симметрий $\mathrm{Sym} = \mathrm{SO}(2) \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$:

$$g(S) = S, \qquad g \in \mathrm{Sym}.$$

В докладе будет описано сечение сферы трехмерным инвариантным многообразием основных симметрий ε^1, ε^2:

$$\begin{aligned} &\widetilde{S} = \{q \in S \mid \varepsilon^1(q) = \varepsilon^2(q) = q\} = S \cap \{z = V = 0\}, \\ &V(q) = xv + yw - z(x^2 + y^2)/2, \end{aligned}$$

а также его фактор по группе вращений

$$\widehat{S} = \widetilde{S}/\mathrm{SO}(2).$$

Будут представлены следующие результаты:

- Описание сопряженных точек, анормальных точек, и точек Максвелла на $\widehat{S}$,
- Кратность точек фактора $\widehat{S}$,
- Регулярность $\widehat{S}$ и $\widetilde{S}$,
- Аналитические свойства фактора $\widehat{S}$,
- Принадлежность фактора $\widehat{S}$ exp–log категории,
- Стратификация Уитни фактора $\widehat{S}$.

Аналогичные результаты будут представлены для субримановой сферы на группе Энгеля (4–мерной нильпотентной группе Ли).

Литература

1. Agrachev A. A Comprehensive Introduction to sub–Riemannian Geometry from Hamiltonian viewpoint / A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain. // Cambridge Univ. Press, 2019. — 745 с.

2. Аграчев А.А. Геометрическая теория управления / А.А. Аграчев, Ю.Л. Сачков. // М. : Физматлит. — 2005. — 391 с.

3. Сачков Ю.Л. Левоинвариантные задачи оптимального управления на группах Ли, интегрируемые в эллиптических функциях / Ю.Л. Сачков // Успехи мат. наук. — 2023. — Т. 78(469), № 1. — С. 67–166.

АНОРМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ В СУБРИМАНОВОЙ $(2, 3, 5, 8, 14)$–ЗАДАЧЕ[1]

Е.Ф. Сачкова, Ю.Л. Сачков

(Переславль–Залесский, ИПС им. А.К.Айламазяна РАН)

efsachkova@mail.ru, yusachkov@gmail.com

Рассматривается левоинвариантная субриманова структура на свободной нильпотентной группе Ли ранга 2, глубины 5. Для этой структуры исследуются анормальные траектории.

Субриманова структура на гладком многообразии M есть распределение $D \subset TM$, снабженное скалярным произведением. Важнейшим инвариантом субримановой структуры является ее глубина — минимальный порядок скобки Ли, необходимый для порождения касательного пространства к пространству состояний из ортонормированного репера структуры. Субримановы структуры глубины 1 римановы. Имеется довольно детальная теория субримановых структур глубины 2, а также некоторые результаты для глубины 3, 4. Случай следующей глубины 5 практически не исследован, в данной работе рассматривается простейшая субриманова структура этой глубины.

Рассмотрим свободную нильпотентную алгебру Ли ранга 2, глубины 5:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{g} = \operatorname{span}(X_1, \dots, X_{14}),\\
&[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5, \quad [X_1, X_4] = X_6,\\
&[X_2, X_4] = [X_1, X_5] = X_7, \quad [X_2, X_5] = X_8,\\
&[X_1, X_6] = X_9, \quad [X_2, X_6] = X_{10}, \quad [X_2, X_7] = X_{11}, \quad [X_2, X_8] = X_{12},\\
&[X_3, X_4] = X_{13} - X_{10}, \quad [X_3, X_5] = X_{14} - X_{11}, \quad [X_1, X_7] = X_{13},\\
&[X_1, X_8] = X_{14}.
\end{aligned}
$$

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–11–00140, `https://rscf.ru/project/22-11-00140/`.

На пространстве $\mathbb{R}^{14}$ рассмотрим структуру группы Ли G, для которой поля $X_1, \dots, X_{14}$ служат левоинвариантным репером.

Кратчайшие субримановой структуры с ортонормированным репером (X_1, X_2) суть решения задачи оптимального управления

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = u_1 X_1(x) + u_2 X_2(x), \quad x \in G,\, u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,\\
&x(0) = x^0 = \mathrm{Id} = (0, \dots, 0), \quad x(t_1) = x^1,\\
&J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2)\, dt \to \min .
\end{aligned}
$$

На основе принципа максимума Понтрягина получено описание анормальных экстремальных траекторий.

Обозначим распределение $D = \mathrm{span}(X_1, X_2)$ и его степени:

$$
\begin{aligned}
D^2 &= D + [D, D] = \mathrm{span}(X_1, \dots, X_3),\\
D^3 &= D^2 + [D, D^2] = \mathrm{span}(X_1, \dots, X_5),\\
D^4 &= D^3 + [D, D^3] = \mathrm{span}(X_1, \dots, X_8),
\end{aligned}
$$

а также их аннуляторы

$$
\left(D^k\right)^\perp = \{\lambda \in T^*G \mid \langle \lambda, D^k \rangle = 0\}, \qquad k = 1, \dots, 4.
$$

Имеется очевидная стратификация содержащего анормальные экстремали многообразия $S = \left(D^2\right)^\perp$:

$$
S = \left(\left(D^2\right)^\perp \setminus \left(D^3\right)^\perp\right) \sqcup \left(\left(D^3\right)^\perp \setminus \left(D^4\right)^\perp\right) \sqcup \left(D^4\right)^\perp .
$$

Анормальные экстремали исследуются согласно этой стратификации.

Анормальная экстремаль называется хорошей (nice), если она принадлежит $\left(D^2\right)^\perp \setminus \left(D^3\right)^\perp$. В докладе будут описаны свойства этих экстремалей (гладкость, оптимальность, геометрия соответствующей гамильтоновой системы), а также подмножество в G, заполненное хорошими анормальными траекториями (стратифицируемость, размерность стратов). Эти результаты связаны с двумя основными проблемами субримановой геометрии: гладкостью анормальных кратчайших и субримановой гипотезой Сарда.

Литература

1. Agrachev A., Barilari D., Boscain U. A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian

viewpoint / A. Agrachev. // Cambridge Univ. Press. — 2019. — 745 с.

2. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления / А.А. Аграчев, Ю.Л. Сачков. // М. : Физматлит. — 2005. —391 с.

АЛГОРИТМ ПОИСКА ТОЧНОГО ЗНАЧЕНИЯ АРГУМЕНТА МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ В ОЦЕНКЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РЯДА ФУРЬЕ НЕПРЕРЫВНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Т.Ю. Семенова (Москва, МГУ)
station@list.ru

Рассмотрим пространство $C_{2\pi}$ непрерывных на $\mathbb{R}$ действительнозначных 2π-периодических функций с нормой $\|f\| = \max\limits_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi} |f(x)|$. Пусть $\omega(f, \gamma)$ — модуль непрерывности функции f, а $S_n(f, x)$ — n-я частичная сумма ее ряда Фурье. $D_n(t) = \frac{\sin(n+0.5)t}{2\sin(t/2)}$ — ядро Дирихле, $L_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt$ — константа Лебега.

Многие авторы ([1]–[3]) устанавливали оценки вида

$$\|f(x) - S_n(f, x)\| \leqslant K_n\, \omega(f, \gamma_n), \quad \forall f \in C_{2\pi},$$

где $\gamma_n > 0$ — некоторая последовательность аргументов модуля непрерывности, а величина $K_n = K_n(\gamma_n)$. Более общая задача была отмечена в [4]. Она заключается в исследовании характеристик

$$K_n^*(\gamma) = \sup \frac{\|f(x) - S_n(f, x)\|}{\omega(f, \gamma)},$$

где sup берется по множеству $f \in C_{2\pi},\ f \neq \text{const}$. Известно ([5], [6]), что $K_n^*(\gamma) \geqslant (L_n + 1)/2$ для любого $\gamma > 0$. Положим

$$\gamma_n^* = \inf\Big\{\gamma > 0,\ K_n^*(\gamma) = \frac{L_n + 1}{2}\Big\}.$$

В работе [4] доказано, что

$$\|f(x) - S_n(f, x)\| \leqslant \frac{L_n + 1}{2}\, \omega\Big(f,\ \frac{2\pi}{3(n+0.5)}\Big), \quad \forall f \in C_{2\pi}, \qquad (1)$$

при этом выполнено неравенство

$$\frac{2\pi}{3(n+0.5)} - \frac{\pi^2}{4(n+0.5)^3} \leqslant \gamma_n^* \leqslant \frac{2\pi}{3(n+0.5)},\ \ \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (2)$$

Таким образом, значение аргумента модуля непрерывности в оценке (1) таково, что при больших значениях n его нельзя существенно уменьшить. В то же время из (2) имеем неравенства

$$0.665181... \leqslant \gamma_1^* \leqslant 1.396263...,$$
$$0.679844... \leqslant \gamma_2^* \leqslant 0.837758...,$$
$$0.540849... \leqslant \gamma_3^* \leqslant 0.598398...$$

Поэтому при конкретных небольших значениях n для улучшения оценки скорости сходимости ряда Фурье есть смысл найти точное значение γ_n^* и заменить им аргумент модуля непрерывности в (1).

В данной работе предложен алгоритм для вычисления γ_n^*, а также получены γ_1^*, γ_2^*, γ_3^*. Заметим, что заменить аргумент $\frac{2\pi}{3(n+0.5)}$ в модуле непрерывности на величину γ_n^* можно также в оценке нормы остатка ряда Фурье

$$\|f(x) - S_n(f, x)\| < \Big(\frac{2}{\pi^2}\ln\frac{V(f)}{\omega\big(f, \frac{2\pi}{3(n+0.5)}\big)} + 1.303\Big)\omega\Big(f, \frac{2\pi}{3(n+0.5)}\Big),$$

доказанной в работе [7] для произвольной непостоянной функции f из $C_{2\pi}$, имеющей ограниченную на отрезке $[-\pi, \pi]$ вариацию $V(f)$.

Литература

1. Киш О. Оценка отклонения частных сумм ряда Фурье / О. Киш // Acta math. Acad. sci. Hung. — 1971. — Т. 22, № 1–2. — С. 173–176.

2. Гаврилюк В.Т. Приближение непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами / В.Т. Гаврилюк // Теория приближения функций. М.: 1977. — С. 101–103.

3. Miloradovi S. Aproksimacije funckcija Fourier–ovim sumama i gorns granica Fourierovih koeficijenta / S. Miloradovi // Beograd: Magistarski rad, 1977.

4. Гаврилюк В.Т., Стечкин С.Б. Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье. / В.Т. Гаврилюк, С.Б. Стечкин // Тр. МИАН СССР. — 1985. — Т. 172. — С. 107–127.

5. Даугавет И.К. Об одном свойстве вполне непрерывных операторов в пространстве C. / И.К. Даугавет // Усп. мат. наук. — 1963. — Т. 18, № 5. — С. 157–158.

6. Стечкин С.Б. О приближении непрерывных периодических функций суммами Фавара. // Тр. МИАН СССР. — 1971. — Т. 109. — С. 26–34.

7. Попов А.Ю., Семенова Т.Ю. Уточнение оценки скорости равномерной сходимости ряда Фурье непрерывной периодической функции ограниченной вариации / А.Ю. Попов, Т.Ю. Семенова // Матем. заметки. — 2023. — Т. 113, № 4. — С. 544–559.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ[1]

Е.В. Серегина[1], М.А. Степович[2], М.Н. Филиппов[3]
([123]Россия, [12]Калуга, [1]Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Калужский филиал,
[2]Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского,
[3]Москва, Институт общей и неорганической химии)
[1]*evfs@yandex.ru,* [2]*m.stepovich@mail.ru,* [3]*fil@igic.ras.ru*

Для математического моделирования двумерного нестационарного уравнения диффузии с переменным коэффициентом предложена эффективная вычислительная схема с использованием проекционного метода Галеркина. Ранее [1] показаны некоторые возможности использования этого метода для решения стационарного уравнения диффузии и получена порядковая оценка погрешности невязки, соответствующей приближенному уравнению диффузии. Настоящая работа продолжает такие исследования. Рассмотрение проведено для нестационарного уравнения диффузии, описывающего зависимость от времени концентрации неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ), генерированных внешним воздействием в однородном полупроводнике, после прекращения действия внешнего источника [2]:

$$\frac{\partial c\,(x,y,t)}{\partial t} = D\Delta c\,(x,y,t) - \frac{c\,(x,y,t)}{\tau(t)}$$

с граничными условиями

$$c(x,y,0) = n(x,y),\ c(\pm\infty,y,t) = 0,\ c(x,\pm\infty,t) = 0,\ c(x,y,+\infty) = 0,$$

$$-\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty,\ 0 \leqslant t < \infty.$$

Здесь $c(x,y,t)$ — зависимость концентрации ННЗ от времени, $n(x,y)$ — концентрация ННЗ в стационарном случае, до выключения

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Калужской области № 23–21–10069, `https://rscf.ru/project/23-21-10069/`.

внешнего воздействия, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — двумерный оператор Лапласа, $D = \mathrm{const}$ — коэффициент диффузии и $\tau = \tau(t)$ — зависимость времени жизни ННЗ от времени после выключения внешнего источника ННЗ. В настоящей работе рассмотрена математическая модель, описывающая два механизма рекомбинации неравновесных ННЗ при выключении внешнего воздействия, при этом зависимость числа неравновесных ННЗ от времени описывается двумя экспонентами [2].

Решение было получено в виде частичной суммы ряда по модифицированным функциям Лагерра с параметром, ускоряющем сходимость ряда.

Литература

1. Makarenkov A.M., Seregina E.V., Stepovich M.A. The projection Galerkin method for solving the time–independent differential diffusion equations in a semi–infinite domain / A.M. Makarenkov, E.V. Seregina, M.A. Stepovich // Computational mathematics and mathematical physics. — 2017. — Vol. 57, № 5. — P. 802–814.

2. Seregina E.V., Stepovich M.A. and Filippov M.N. On a mathematical model of the diffusion of excitons in a semiconductor taking into account their variable lifetime / E.V. Seregina, M.A. Stepovich, M.N. Filippov // Journal of Surface Investigation: X–ray, Synchrotron and Neutron Techniques. — 2023. — Vol. 17, No 2. — P. 376–380.

РЕЗОНАНСЫ И ХАОС В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

В.В. Сидоренко (Москва, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН)
vvsidorenko@list.ru

Если в некоторой планетной или спутниковой системе отношение периодов обращения двух тел вокруг основного тела (звезды или планеты) приблизительно равно отношению двух малых целых чисел, то тогда говорят, что эти тела находятся в резонансе средних движений (РСД). При резонансе средних движений влияние взаимных возмущений усиливается. В одних случаях это делает систему неустойчивой, в других, наоборот, усиливает устойчивость (в частности, предотвращает тесные сближения). Особую сложность при исследовании РСД представляют ситуации неединственности резонансных режимов движений. В этом случае необходимо выделить области фазового пространства задачи, в которой могут сосуществовать разные резонансные режимы движения, сравнить вероятности захвата в эти режимы и установить, возможны ли в результате эволюции движения переходы из одного режима в другой.

В большинстве случаев современные аналитические исследования резонансов средних движений (РСД) в рамках ограниченной или неограниченной задачи трех тел опираются на различные модификации «второй фундаментальной модели резонанса» [1]. Данная модель применима тогда, когда эксцентриситеты и наклонения орбит тел, движущихся в резонансе, достаточно малы - порядка некоторой степени малого параметра задачи, которым является отношение массы этих тел к массе центрального тела.

Другой подход к изучению РСД был предложен в 1985 г. американским специалистом по небесной механике Дж. Уиздомом [2]. Описание РСД в подходе Уиздома полностью эквивалентно той картине резонансных эффектов, которая приводится в руководствах по современной теории гамильтоновых систем (см., например, [3]). Подход Уиздома предполагает двукратное осреднение (по орбитальному движению и по колебаниям/«вращениям» вспомогательной переменной - резонансной фазы) для построения эволюционных уравнений, описывающих динамику системы на длительных временных интервалах. Примечательно, что подход Уиздома применим в малоисследованном случае резонансных движений с большими наклонениями и эксцентриситетами. Кроме того, подход Уиздома позволяет учесть ряд механизмов хаотизации движения в задаче трех тел.

В докладе будут представлены результаты применения подхода Уиздома для изучения вековых эффектов при РСД 1:1 в рамках ограниченной задачи трех тел. В [4] были установлены условия формирования и разрушения квазиспутниковых режимов движения небесных тел. В [5] с помощью подхода Уиздома исследована возможность преобразования у астероидов-«троянцев» движения в окрестности точки либрации L_4 в движение в окрестности точки либрации L_5 (и наоборот). В [6] рассматривалась ситуация, когда планета и астероид движутся по близким орбитам, но в противоположном направлении. Краткий обзор этих исследований послужит убедительной демонстрацией эффективности подхода Уиздома.

Литература

1. Henrard J. A Second Fundamental Model for Resonance / J. Henrard, A. Lemaitre // Celest. Mech. — 1983. — V. 30. — P. 197–218.

2. Wisdom J. A perturbative treatment of motion near the 3/1 commensurability / J. Wisdom // Icarus — 1985. — V. 63. — P. 272–286

3. Арнольд В.И. Математические аспекты классической и небесной механики / В.И. Арнольд, В.В. Козлов, А.И. Нейштадт. — М.: изд–во УРСС, 2002. — 414 с.

4. Sidorenko V.V. Quasi-satellite orbits in the general context of dynamics in the 1:1 mean motion resonance. Perturbative treatment / V.V. Sidorenko, A.I. Neishtadt, A.V. Artemyev, L.M. Zeleny // Celest. Mech. Dyn. Astron. — 2014. — V. 120. — P. 131–162.

5. Sidorenko V.V. Dynamics of “jumping” Trojans: a perturbative treatment / V.V. Sidorenko // Celest. Mech. Dyn. Astron. — 2018. — V. 130. № 67.

6. Sidorenko V.V. A perturbative treatment of the retrograde co-orbital motion / V.V. Sidorenko // Astronomical Journal. — 2020. — V. 160. — 9 p.

О КОНЕЧНОМЕРНЫХ АППРОКСИМАЦИЯХ ОСОБОГО ИНТЕГРАЛА ГИЛЬБЕРТА ПО ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

Ю.С. Солиев (Москва, МАДИ)
su1951@mail.ru

Рассмотрим особый интеграл

$$A_{s+1}f = A_{s+1}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{(t-x)^{s+1}}dt, s = 0, 1, 2, ..., \qquad (1)$$

понимаемый в смысле главного значения по Коши ($s = 0$) или в смысле конечного значения по Адамару ($s > 0$), где $f(x)$ — плотность интеграла, ограниченная на вещественной оси R функция.

Пусть $L_p(R)$ — пространство всех измеримых на R функций f с нормой $\|f\|_p = \|f\|_{L_p} < \infty$, где

$$\|f\|_p = \left\{ \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leqslant p < \infty; \sup_{t\in R} |f(t)|, p = \infty \right\},$$

$\omega_k(f,t)_p = \omega_k(f,t)_{L_p}$ — модуль гладкости k-го порядка f в $L_p(R)$, $L_p^r(R)$ — подпространство функций $f \in L_p(R)$, для которых производная $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на R и $\left\|f^{(r)}\right\|_p = \left\|f^{(r)}\right\|_{L_p} < \infty$, $B_{p,\sigma}$ — множество целых функций экспоненциального типа $\leqslant \sigma < \frac{\pi}{h}$, принадлежащих $L_p(R)$.

Введем интерполяционный оператор (ср. с [1])

$$L_N f = L_N(f;x) = \sum_{k=-N}^{N} f(kh) sinc\frac{\pi}{h}(x-kh), sincx = \frac{sin\ x}{x}, h>0. \tag{2}$$

Аппроксимируя плотность интеграла (1) выражением (2), получим квадратурную формулу (ср. с [2])

$$A_{s+1}f = A_{s+1}(L_N;x) + R_{Ns}f = \left(\frac{\pi}{h}\right)^s \sum_{k=-N}^{N} f(kh) \sum_{j=0}^{s} \frac{(-1)^{s+j}}{j!} \times$$

$$\times\left(\frac{cos\left(\frac{\pi x}{h} - k\pi + \frac{j\pi}{2}\right)}{(\frac{\pi x}{h} - k\pi)^{s-j+1}} + \sum_{v=1}^{s-j+1} \frac{sin\frac{(s-v)\pi}{2}}{(s-j+1-v)!(\frac{\pi x}{h} - k\pi)^v}\right) + R_{Ns}f, \tag{3}$$

где $R_{Ns}f = R_{Ns}(f;x)$ — остаточный член.

Теорема 1. *Пусть $f \in L_p^r(R), r = 0, 1, ..., \ 1 < p < \infty, \sigma > 1$. Тогда*

$$\|R_{Ns}f\|_p \leqslant C_{r,p,s} N^{-r+s} \omega_k(f^{(r)}, \frac{1}{N})_p,$$

где $C_{r,p,s}$ — постоянная, зависящая только от r, p и s.

Следствие. *Пусть в условиях теоремы $\omega_k(f,\delta)_p = 0(\delta^\alpha), 0 < \alpha < 1$. Тогда*

$$\|R_{Ns}f\|_p = O(N^{-r-\alpha+s}), r+\alpha-s > 0.$$

С помощью результатов работ [3], [4] доказывается

Теорема 2. *Пусть $f \in L_\infty^r(R), r = 1, 2, ..., \sigma > 1, \ \omega_k(f,\delta)_p = 0(\delta^\alpha), 0 < \alpha < 1$. Тогда*

$$\|R_{Ns}f\|_\infty = \|R_{Ns}f\|_C = O\left(\frac{ln\ N}{N^{r+\alpha-s}}\right), r+\alpha-s > 0. \tag{4}$$

Через $H^\alpha(R)$ обозначим класс функций $f(x)$, $x \in R$, удовлетворяющих «глобальному» условию Гельдера [5]

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant A \frac{|x_1 - x_2|^\alpha}{(1+|x_1|)^\alpha (1+|x_2|)^\alpha}, \ x_1, x_2 \in R.$$

Далее, положим $H^{r+\alpha}(R) = \{f : f^{(r)}(x) \in H^\alpha(R)\}$.

Теорема 3. *Если $f(x) \in H^{r+\alpha}(R), r = 0, 1, ..., \ 0 < \alpha < 1$, то для остаточного члена квадратурной формулы (3) справедлива оценка (4).*

Литература

1. Умаханов А.Я. Интерполяция функций суммами Уиттекера и их модификациями: условия равномерной сходимости / А.Я. Умаханов, И.И. Шарапудинов // Владикавк. Матем. журн. — 2016. — Т. 18, — №4, — С. 61–70.

2. Солиев Ю.С. Об одном способе построения квадратурных формул для гиперсингулярного интеграла Гильберта / Ю.С. Солиев // Матер. междунар. научн. конф. ВЗМШ — 2023. — Воронеж. — 2023. — С. 299–301.

3. Stenger F. Numerical methods based on sinc and analytic functions / Stenger F. // New York: Springer-Verlag. — 1993. — 565 p.

4. Габдулхаев Б.Г. Аппроксимация в H–пространствах и приложения / Б.Г. Габдулхаев // ДАН СССР. — 1975. — Т. 223, — №6. — С.1293–1296.

5. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. // Минск: Наука и техника. — 1987. — 688 с.

РЕЗОНАНСНЫЕ РЕШЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ЗАТУХАЮЩИМИ ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

О.А. Султанов (Уфа, ИМВЦ УФИЦ РАН)
oasultanov@gmail.com

Рассматривается класс сильно нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости с осциллирующими возмущениями. Предполагается, что интенсивность возмущений затухает степенным образом со временем, а частота полиномиально растет. Обсуждается динамика возмущённой асимптотически автономной системы вдали от равновесия. Показывается, что в зависимости от структуры и параметров возмущений система может находиться в одном из двух режимов: в режиме синхронизации или в режиме фазового дрейфа. Доказывается, что в первом случае существуют резонансные решения с неограниченно растущей энергией, у которых фаза подстраивается под фазу возмущения. Исследуется устойчивость и асимптотическое поведение таких решений на далеких временах с помощью комбинации техники усреднения и метода функции Ляпунова. Предложенная теория применяется для описания резонансных режимов осциллятора Дуффинга с затухающими чирпированными возмущениями. Полученные результаты указывают на возможность эффективного использования затухающих со временем возмущений для управления динамикой нелинейных систем.

Литература

1. Sultanov O.A. Resonances in asymptotically autonomous systems with a decaying chirped-frequency excitation / O.A. Sultanov // Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B. — 2023. — V. 28, № 3. — P. 1719–1749.

ВОПРОСЫ НЕПРЕРЫВНОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ НА МНОЖЕСТВЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

А.Х. Сташ (Майкоп, АГУ)

aidamir.stash@gmail.com

В работах [1, 2] И. Н. Сергеева на полупрямой вводились и исследовались различные характеристики ляпуновского типа ненулевых решений линейных дифференциальных уравнений и систем. В настоящей работе будем рассматривать *верхние* и *нижние сильные* и *слабые* показатели колеблемости *нулей*, *корней* и *гиперкорней*. Ранее сильные показатели колеблемости назывались полными частотами, а слабые показатели — векторными частотами.

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

с *непрерывными* оператор-функциями $A: \ \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ (каждую из которых будем отождествлять с соответствующей системой).

Спектром какого-либо показателя колеблемости назовем множество его различных значений на ненулевых решениях дифференциальной системы. Точную нижнюю и точную верхнюю грани спектра какого-либо показателя колеблемости будем называть крайними показателями колеблемости дифференциальной системы и рассматривать их как функционалы на множестве $\mathcal{M}^n$ с естественными для функции линейными операциями и равномерной на $\mathbb{R}_+$ топологией, задаваемой метрикой

$$\rho(A, B) = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \min\{|A(t) - B(t)|, 1\}, \quad A, B \in \mathcal{M}^n.$$

Подсчет последних происходит путем усреднения числа нулей (или корней, или гиперкорней) проекции решения x дифференциальной системы на какую-либо прямую, причем эта прямая выбирается так, чтобы полученное среднее значение оказалось минимальным: если указанная минимизация производится перед усреднением, то получаются слабые показатели колеблемости, а если после, то — сильные показатели колеблемости. При этом для вычисления этих характеристик решения y линейного уравнения n-го порядка осуществляется переход к вектор-функции $x = (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$.

Из результатов работ [1, 3, 4] вытекает, что сужение любой из крайних показателей колеблемости на топологическое подпространство $\mathcal{C}^n \subset \mathcal{M}^n$ автономных дифференциальных систем есть непрерывная функция.

Кроме того, непрерывность крайних показателей колеблемости наблюдается и на топологичеком подпространстве $\mathcal{E}^2 \subset \mathcal{M}^2$ двумерных систем, отвечающих уравнениям второго порядка (см. [1]).

В работе [5] на множестве $\mathcal{M}^2$ были найдены не только точки разрыва, но и точки неинвариантности крайних показателей колеблемости гиперкорней относительно возмущений, исчезающих на бесконечности. Оказалось, что этот результат можно перенести не только на остальные показатели колеблемости, но и обобщить на n-ый случай.

Теорема 1. *Для любого $n \geqslant 2$ в пространстве $\mathcal{M}^n$ существует точка, в которой ни один из крайних показателей колеблемости нулей, корней и гиперкорней не является ни непрерывным, ни полунепрерывным сверху, ни полунепрерывным снизу, ни даже инвариантным относительно бесконечно малых возмущений.*

Литература

1. Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Известия РАН. Серия математическая. — 2012. — Т. 76, № 1. — С. 149–172.

2. Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Мат. сб. — 2013. — Т. 204, № 1. — С. 119–138.

3. Бурлаков Д.С., Цой С.В. Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы / Д.С. Бурлаков, С.В. Цой // Труды Семинара им. И. Г. Петровского. — 2014. — Вып. 30. — С. 75–93.

4. Сташ А.Х. Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем /А.Х. Сташ // Вестник

Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2019. — Т. 29, Вып. 4. — С. 558–568.

5. Сергеев И.Н. О показателях колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальных систем, задающих повороты плоскости / И.Н. Сергеев // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. — 2019. — № 1. — С. 21–26.

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ РАВНОМЕРНЫХ ПОЧТИ–ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ф.М. Талбаков (Душанбе, ТГПУ им. С.Айни)
talbakov_90@mail.ru

Пусть функция $f(x,y)\in \mathbf{B}$ с конечной нормой

$$\|f(x,y)\|_{\mathbf{B}}=\sup_{x,y\in R}|f(x,y)|,$$

для которой ряд Фурье имеет вид

$$f(x,y)\sim \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}A_{k,l}e^{i(\lambda_k x+\lambda_l y)},$$

$$A_{k,l}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}f(x)e^{-i(\lambda_k x+\lambda_l y)}dxdy,$$

где $\{\lambda_k\},\{\lambda_l\}$ — показатели Фурье, которые имеют единственную предельную точку в нуле, то есть (см. напр. [2–4])

$$\lambda_k>0(k>0),\lambda_{-k}=-\lambda_k,|\lambda_{k+1}<\lambda_k|(k=1,2,..),\lim_{k\to\infty}|\lambda_k|=0,$$

$$\mu_l>0(l>0),\mu_{-l}=-\mu_l,|\mu_{l+1}|<|\mu_l|(l=1,2,...),\lim_{l\to\infty}|\mu_l|=0.$$

Приводим достаточные условия сходимости ряда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\mid A_{k,l}\mid^{\beta}\mid kl\mid^{\gamma}\ (\gamma>0,0<\beta<q). \tag{1}$$

Для функции $f(x,y)\in \mathbf{B}$ рассмотрим интегральное представление

$$F(x,y)=\theta_1\theta_2\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(\theta_1t_1+\theta_2t_2)}f(x-t_1,y-t_2)dt_1dt_2$$

По теореме о неопределенном интеграле [1, с. 29] для равномерных почти–периодических функций, $F(x)$ также является равномерной почти–периодической. При $\theta > 0$ введем в рассмотрение величину

$$\Omega(f;\theta_1,\theta_2) =$$
$$= \theta_1\theta_2\{M_{xy}\{|\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\theta_1 t_1+\theta_2 t_2)}f(x-t_1,y-t_2)dt_1dt_2|^p\}\}^{1/p} =$$
$$= \theta_1\theta_2\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}|\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\theta_1 t_1+\theta_2 t_2)}\times$$
$$\times f(x-t_1,y-t_2)dt_1dt_2|^p dxdy\}^{1/p}.$$

Результаты данной работы является аналогими некоторых результатов работ [2,3] для класса почти–периодических в смысле Бора функций.

Теорема *Если для функции $f(x,y)\in \boldsymbol{B}$, спектр которой удовлетворяет условиям (1), сходится ряд*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}2^{(\nu-1)(\gamma+\frac{q-\beta}{q})}2^{(\mu-1)(\gamma+\frac{q-\beta}{q})}\Omega^{\beta}(f;\lambda_{2^\nu},\mu_{2^\nu}),$$

где $1 < p \leqslant 2, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, 0<\beta<q, \gamma>0$, *тогда ряд (1) сходится.*

Для функция $f(x,y)\in\mathbf{B}$ при некоторого числа α $(0<\alpha\leqslant 1)$ имеет место

$$|\int_0^u f(x-t,y)dt| \leqslant C|u|^{1-\alpha}, \int_0^u f(x,y-t)dt| \leqslant C|u|^{1-\alpha}.$$

Литература

1. Левитан Б.М. Почти–периодические функции / Б.М. Левитан. — М. : Наука, 1953. — 396 с.

2. Талбаков Ф.М. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти–периодических функций Безиковича / Ф.М. Талбаков // ДАН РТ. — 2020. — Т. 63, № 5–6. — С. 286–292.

3. Хасанов Ю.Х., Талбаков Ф.М. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти–периодических функций Безиковича / Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков // ДАН РТ. — 2018. — Т. 61, № 1–2. — С. 813–821.

4. Хасанов Ю.Х., Талбаков Ф.М. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти–периодических функций Безиковича / Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков // ДАН РТ. — 2016. — Т. 59, № 1–2. — С. 11–18.

О КОНКУРЕНТНОЙ КРОСС–ДИФФУЗИОННОЙ СИСТЕМЕ ХИЩНИК–ЖЕРТВА С ДИФФУЗИЕЙ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ПЛОТНОСТИ

Ж.О. Тахиров (Ташкент, Институт Математики АН РУз)
prof.takhirov@yahoo.com

Динамика конкуренции между хищником и жертвой широко изучалась в последние годы из–за их повсеместного существования и важности в математической биологии и экологии. При взаимодействии хищник–жертва, помимо случайного распространения хищника и жертвы, хищник имеет тенденцию перемещаться в район с более высокой плотностью популяции жертвы. В [1] авторы впервые предложили следующую модель с одним хищником и одной жертвой , чтобы объяснить, что поиск на ограниченной территории создает следующее явление скопления хищников

$$u_t = \nabla \cdot (d(w)\nabla(u) - \nabla \cdot (u\chi(w)\nabla w) + G_1(u, w),$$

$$w_t = D\Delta w + G_2(u, w),$$

где $D > 0$ — коэффициент диффузии жертв, $d(w)$ — функция подвижности хищников, $\chi(w)$ — коэффициент чувствительности жертвы к таксису, а член $-\nabla \cdot (u\chi(w)\nabla w)$ обозначает тенденция хищника двигаться в направлении увеличения градиента жертвы. Функции $G_1(u, w)$ и $G_2(u, w)$ описывают взаимодействия хищник–жертва, включающие как внутривидовые, так и межвидовые взаимодействия. С тех пор были предложены различные модели реакции–диффузии для интерпретации феномена «жертва–таксис» [2]. Однако много исследований посвящено изучению моделей «жертва–таксис» с одним хищником и одной жертвой. В последнее время большое внимание привлекают модели с двумя хищниками и одной жертвой с «жертва–таксис» (напр.[3–4]).

В данной заметке мы изучаем кросс–диффузионную систему, моделирующую динамическое поведение двух хищников и одной жертвы

$$u_t = \nabla \cdot (d_1(w)\nabla u) - \nabla \cdot (u\chi_1(w)\nabla w) + b_1 u g_1(w) - u h_1(u), x \in Q, t > 0,$$

$$v_t = \nabla \cdot (d_2(v)\nabla v) - \nabla \cdot (v\chi_2(w)\nabla w) + b_2 v g_2(w) - v h_2(v), x \in Q, t > 0,$$
$$w_t = \nabla \cdot (d_3(w)\nabla w) + f(w) - u g_1(w) - v g_2(w), x \in Q, t > 0,$$
$$\partial\nu_u = \partial\nu_v = \partial\nu_w = 0, x \in \partial\Omega, t > 0,$$
$$u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), w(x,0) = w_0(x), x \in \Omega,$$

где $\Omega \in R^n (n \geqslant 1)$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\frac{\partial}{\partial\nu}$ — производная по внешней нормали от $\partial\Omega$, u, v и w — плотности двух хищников и одной жертвы, соответственно. Коэффициенты b_1, b_2 предполагаются положительными. Члены $\nabla \dot{c}(d_1(w)\nabla u)$ и $\nabla\cdot(d_2(w)\nabla v)$ описывают диффузию двух хищников с коэффициентами $d_i(w)(i = 1,2)$ соответственно, $\nabla \dot{c}(d_3(w)\nabla w)$ диффузию жертвы с коэффициентом $d_3(w)$.

$-\nabla \cdot (u\chi_1(w)\nabla w)$ и $-\nabla \cdot (v\chi_2(w)\nabla w)$ представляют механизмы жертв таксиса с коэффициентами $\chi_i(w)$ для $i = 1, 2$. Функции $ug_1(w)$ и $vg_2(w)$ учитывают межвидовые взаимодействия, функции $uh_1(u), vh_2(v)$ обозначают внутривидовые взаимодействия. $h_1(u), h_2(v)$ — функция смертности хищников, $f(w)$ — функция роста жертвы.

Сначала мы докажем глобальную ограниченность классических решений. Суть этой системы в том, что пространственно-временные вариации скорости хищников определяются градиентом добычи. Существование в глобальном масштабе и единственность классических решений этой системы доказывается принципом неподвижной точки с использованием оценок L_p и оценок типа Шаудера для параболических уравнений. На основе установленных результатов глобальной ограниченности исследуются некоторые качественные свойства решений.

Литература

1. Kareiya P. Swarms of predators exhibit preytaxis if individual predators use area–restricted search / P. Kareiya, G.T. Odell // Amer.Nat. — 1987. — № 130. — C. 233–270.

2. Ainseba B.E. A reaction–diffusion system modeling predator–prey with prey–taxis / B.E. Ainseba, M. Bendahmane, A. Noussair // Nonlinear Anal. : RWA. — 2008. — № 9. — P. 2086–2105.

3. Qui S. Dynamics for a three–species predator–prey model with density–dependent motilities / S. Qui, C. Mu, X. Tu // J. Dyn. Differ. Equations. — 2021. — V. 35, — № 735.

4. Zheng P. On a two–species competitive predator–prey system with density–dependent diffusion / P. Zheng // Mathematical Biosciences and Engineering. — 2022. — V. 19, — № 12. — P. 13241–13457.

РЕШЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ «МОЖНО ЛИ УСЛЫШАТЬ ФОРМУ БАРАБАНА»

С.А. Титаренко (Санкт-Петербург, ТПП СПб)
titarenko.sa@gmail.com

Задача: $-\Delta U_n = E_n U_n,\ U_n\ |_{\partial\Omega} = 0, Spec(\Omega) = \{0 < E_1 < E_2 \leqslant \ldots\}$, рассматривается в обратной постановке: найти неизвестную область Ω по ее заданному спектру лапласиана $Spec(\Omega)$. Акустический смысл этой задачи о колебаниях мембраны Ω использовал М. Кац (1966) для образной формулировки постановки (цитата в названии доклада). Например, круглые и прямоугольные «барабаны» однозначно определяются своим спектром. **Изометричные** области **изоспектральны** (спектры = как счетные множества), но **обратное неверно**: найдено немало примеров неизометричности-изоспектральности - см. обзор О. Жиро, К. Цас, Rev. Modern Physics, 82, 2010 и рис.1. Новый «метод изоспектрии» [Титаренко С.А., Препринт №2020-04 СПб Матем. Общ.] позволил доказать:

Если изоспектральные области неизометричны, они m-клеточны, $m \geqslant 4$, и связаны многозначной изометрией. (1)

Пример рис.1 и 2: 7-клеточные Ω и $\widetilde{\Omega}$ неизометричны, но связаны клеточной изометрией $\mathbf{T}-$ 7-значной в клетках $\Phi \subset \Omega$ и однозначной при сужении на клетки $\Phi \subset \widetilde{\Omega}$. **Клетка** – связная подобласть $\Phi \subset \Omega$, спектр которой $Spec(\Phi) \subset Spec(\Omega)$. Понятие клетки проще всего для 1-мерной задачи: $-U_n'' = E_n U_n,\ U_n(0) = U_n(\pi) = 0, \Omega = (0, \pi)$, где $U_n(x) = \sqrt{2/\pi} sinnx$ и $Spec(\Omega) = \{1^2, 2^2, \ldots\}$. Интервал $\Phi = (0, \pi/m)$ есть клетка, т.к. сужения $\{\sqrt{2/\pi} sinmkx\}_{k=1}^{\infty}\ |_{\Phi}$ ($m = 3$ на рис. 3) равны нулю на концах Φ и дают ВСЕ его собственные функции $\Rightarrow Spec(\Phi) = \{k^2, (2k)^2, \ldots\} \subset Spec(\Omega)$. Нечетное продолжение этих сужений через границы клеток дает исходные $U_{mk}(x)$ для m-клеточной Ω. Аналогичная картина для 2-мерных областей рис.2: здесь клетки и их собственные функции отражаются относительно отрезков на границе клеток.

«Метод изоспектрии»: 1) собственные функции $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$ и ортогональный, но ненормированный базис в $H(\Omega)$ (=соболевское пространство функций с интегрируемым квадратом градиента и нулем на $\partial\Omega$) : $(U_n, U_n)_{H(\Omega)} = 1 + E_n$. Для любых областей Ω и $\widetilde{\Omega}$ стандартный изоморфизм $T : L_2(\Omega) \to L_2(\widetilde{\Omega})$, сопоставляя ортонормированные в L_2 собственные базисы $\widetilde{U_n} = TU_n$, сохраняет их ортонормированность и в соболевских пространствах только если: $\widetilde{U_n}/\sqrt{1+\widetilde{E_n}} = TU_n/\sqrt{1+E_n} \Rightarrow \sqrt{1+\widetilde{E_n}} = \sqrt{1+E_n} \Rightarrow \widetilde{E_n} = E_n, \forall n \Rightarrow$ **Изоспектральность** $\Leftrightarrow$ **двойному изоморфизму** $T : TH(\Omega) = H(\widetilde{\Omega}) \bigwedge TL_2(\Omega) = L_2(\widetilde{\Omega})$, сохраняющему оба скалярных произведения. 2) Этот изоморфизм индуцирует для каждой подобласти $\omega \subset \Omega$ с собственным базисом $\{u_k(\omega)\}_{k=1}^{\infty}$ ее **отражение** $\mathbf{T}\omega := \bigcup_{k=1}^{\infty} int\ suppTu_k(\omega) \subset \widetilde{\Omega} \Rightarrow$ **критерий** локальной изоспектральности:

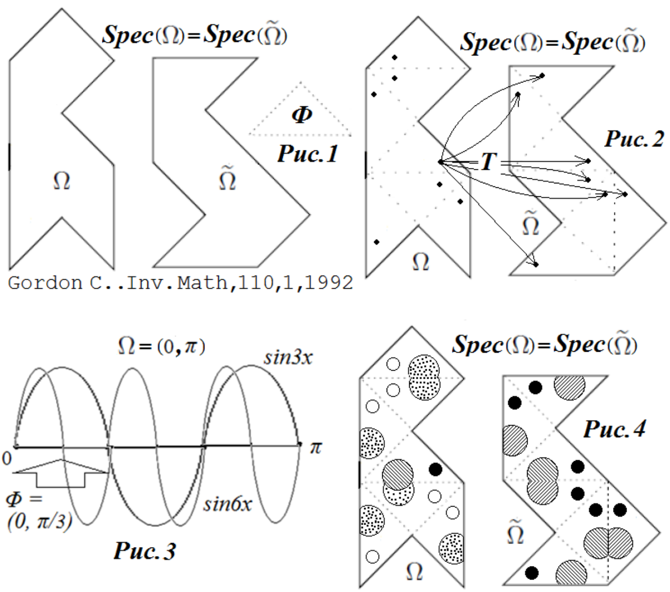
$Spec(\omega) = Spec(\mathbf{T}\omega) \Leftrightarrow TH(\omega) = H(\mathbf{T}\omega) \Leftrightarrow TL_2(\omega) = L_2(\mathbf{T}\omega)$. (2) Возможны ТРИ случая: I. (2) **неверно** $\forall\omega \neq \Omega \Rightarrow$ приводится к случаю II либо III подбором согласованных собственных базисов. II. (2) **верно** $\forall\omega \subset \Omega \Rightarrow$ Теорема изометрии: Ω и $\widetilde{\Omega}$ **изометричны**. III. (2) **верно** для некоторых, но не всех $\omega \subset \Omega \Rightarrow$ Теорема клеточности: Ω и $\widetilde{\Omega}$ являются клеточными с одинаковой клеткой и отражение $\mathbf{T}$ есть их клеточная изометрия.

Если Ω и $\widetilde{\Omega}$ неизометричны, II невозможно и из III следует их m-клеточность: $m = 1$ исключается неизометричностью, как и $m = 2$ - области имеют ось симметрии с одинаковыми клетками. Для $m = 3$ два отражения клетки дают только изометричные Ω и $\widetilde{\Omega} \Rightarrow$ (1).

Для $\forall\omega \subset \Omega$ клеточная изометрия упрощает построение $\mathbf{T}\omega$ и обратного отражения $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\omega$, которые всегда изоспектральны - см. рис.4: ω = черный круг внутри клетки и ω = заштрихованный круг на границе двух клеток. Компоненты несвязных $\mathbf{T}\omega \subset \widetilde{\Omega}$ имеют НЕ геометрическую, а ФИЗИЧЕСКУЮ связность: пространства функций над ними «переплетены» охватывающим физическим полем $\{\widetilde{U_n}\}_{n=1}^{\infty}$ с помощью некоторой ортогональной симметричной матрицы. Подобласти $\omega : Spec(\omega) = Spec(\mathbf{T}\omega)$ образуют **алгебру** – для их пересечений, дополнений и объединений сохраняется **равенство** (других!) спектров, позволяя генерировать континуум новых примеров изоспектральных-неизометричных подобластей. Например, на рис.4 наряду с парой из 7 кругов либо парой из 2 «бабочек» с 3 круговыми сегментами изоспектральны и их дополнения: пары многосвязных областей Ω и $\widetilde{\Omega}$ с 7 либо 5 «дырками» соответственно.

КОРРЕКТНОСТЬ НЕЛОКАЛЬНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С «ВЕСОВОЙ» ПРОИЗВОДНОЙ

С.А. Ткачева, Г.Б. Савченко, И.Г. Мануковская



(Воронеж, ВГУ)
svtkach@mail.ru

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений с частными производными следующего вида

$$D_{\alpha,t}\overline{u} - B(-iD_x)\overline{u} = \overline{f}(t,x), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, x \in \mathbb{R}^m; \tag{1}$$

Искомая вектор–функция $\overline{u} = \overline{u}(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), ..., u_n(t,x))$ удовлетворяет граничному условию

$$B_1\overline{u}(t,x)|_{t=0} = B_2\overline{u}(t,x)|_{t=T} \tag{2}$$

$D_{\alpha,t} = \sqrt{\alpha(t)}\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\alpha(t)}$ — дифференциальный оператор, с «весовыми» производными по переменной $\in [0,T]$, где $\alpha(t)$ достаточно гладкая на $[0,T]$ функция, обращающаяся в нуль при $t = +0 : \alpha(+0) = 0, \alpha(t) > 0$, где $t \in [0,T]$.

Функция $\overline{f}(t,x) = (f_1(t,x), f_2(t,x), ..., f_n(t,x))$ — заданная комплекснозначная вектор — функция, определенная в слое

$(0 \leqslant t \leqslant T, x \in \mathbb{R}^m)$. $B(-iD_x)$ — дифференциальный оператор по $x \in \mathbb{R}^m$. Символ оператора $B(-iD_x)$ — это матрица

$$B(I) = \begin{pmatrix} b_{11}(I) & \cdots & b_{1n}(I) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}(I) & \cdots & b_{nn}(I) \end{pmatrix}$$

элементы которой $b_{ij}(l) = \sum b_v^{i,j} I^v$ — полиномы с постоянными коэффициентами, где $v = (v_1, v_2, ..., v_m)$ — мультииндекс $|v| = v_1 + v_2 + ... + v_m, i, j = 1, 2, ..., n$. $B_1\overline{u}(t,x), B_2\overline{u}(t,x)$ — дифференциальные операторы по $x \in \mathbb{R}^m$, символы которых $B_1(I), B_2(I)$ — полиномиальные матрицы n–го порядка, причем определитель $B_2^{-1}(I)$ отличен от нуля. На гладких функциях $\overline{u}(t,x) \in L_2$ зададим оператор G_α по формулам (см. [1])

$$G_\alpha[\overline{u}](\tau, t) = \sqrt{\alpha(t)}\overline{u}(t,x)|_{t=\tau} = \overline{v}(\tau, x).$$

Здесь $t = t(\tau)$ — функция, обратная функции

$$\tau = \tau(t) = \int\limits_t^T \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}, 0 < t < T, 0 < \tau < \gamma, \gamma = \int\limits_t^T \frac{d\rho}{\alpha(\rho)} < \infty.$$

Теорема. *Пусть $\overline{f}(t,x) \in L_2([0,T] \times \mathbb{R}^m)$ и матрица $B(I)$ такова, что существует положительная постоянная $C > 0$ и вещественная функция $\varphi(I)$, что*

$$\|exp(\tau B(I))\| \leqslant C_0 exp(\tau\varphi(I)), (|\tau| \leqslant T),$$

а также выполняются условия:

1) $\left\| \frac{B_1(I)}{B_2(I)} - exp(TB(I)) \right\| \geqslant \omega \quad (\forall I \in \mathbb{R}^m)$,

2) $\left\| \frac{B_1(I)}{B_2(I)} \right\| \varphi^{-1}(I) < K_1$,

при $\varphi(I) \geqslant K_2$, где ω, K_1, K_2 — положительные постоянные. Тогда задача (1)–(2) разрешима при любой правой части $\overline{f}(t,x) \in L_2([0,T] \times \mathbb{R}^m)$ и справедливо неравенство:

$$\int\limits_0^1 \|\overline{u}(t,x)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^m)} dt \leqslant c \int\limits_0^1 \|\overline{f}(t,x)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^m)} dt. \tag{3}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $s \in \mathbb{R}^m$.

Литература

1. Глушко В.П. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка: пространства, операторы, граничные задачи / В.П. Глушко, Ю.Б. Савченко // Итоги науки и техники ВИНИТИ М. — 1985. — Т. 23. —С. 125–218.

2. Ткачева С.А. Исследование разрешимость нелокальной граничной задачи для дифференциальных уравнений с «весовой» производной / С.А. Ткачева, Г.Б. Савченко, И.Г. Забабурина // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий. ПМТУКТ–2022. Воронеж, Воронежский государственный педагогический университет. — 2022. — С. 70–71.

ОБ ОТСУТСТВИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ У ОДНОГО КЛАССА ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ[1]

В.Б. Тлячев, Д.С. Ушхо (Майкоп, АГУ)

tlyachev@adygnet.ru

При качественном исследовании динамической системы важно знать, могут ли в каких-либо областях содержаться замкнутые траектории, в частности, предельные циклы. К сожалению, общих критериев существования или отсутствия траекторий такого рода нет, есть лишь достаточные условия, гарантирующие отсутствие замкнутых траекторий в некоторой области, например, критерии Бендиксона и Дюлака, и существования таковых (принцип кольца) [1]. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P_i(x,y) \equiv P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} Q_i(x,y) \equiv Q(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где $P_i(x,y) = \sum\limits_{k+l=i} a_{kl}x^k y^l,\ Q_i(x,y) = \sum\limits_{k+l=i} b_{kl}x^k y^l, a_{kl}, b_{kl} \in \mathbb{R}$, $(P,Q) = 1, deg(P^2 + Q^2) = 2n$.

Предполагается, что система (1) обладает следующими свойствами:

1. Имеет хотя бы одно состояние равновесия;

---

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РОО «ФОРА» (проект № 02-01-2023)

2. Правые части этой системы одновременно не являются однородными полиномами степени n;

3. Все рассматриваемые состояния равновесия системы расположены в ограниченной части фазовой плоскости.

Если $tg\varphi = m$, где φ — угол наклона касательных к траекториям автономной дифференциальной системы в точках изоклины L, отличных от состояний равновесия, то m будем называть направлением, индуцированным на изоклине L.

Символом $l_i^{m_j}$ будем обозначать прямую изоклину l_i, на которой индуцировано направление m_j.

Две прямые изоклины $l_i^{m_j}, l_s^{m_r}$ будем считать несовпадающими, если $|m_j - m_r| + |i - s| > 0$.

Введем следующие обозначения:

Z — множество всех прямых изоклин системы (1);

Z^m — подмножество множества Z, элементами которого являются прямые изоклины, на которых индуцировано направление m.

Теорема. *Пусть система* (1) *имеет* $2n$ *прямых изоклин, принадлежащих множеству* $Z^{m_1} \bigcup Z^{m_2}$*, причем все прямые этого множества, за исключением* l_{2n}^{∞}*, параллельны между собой,* $m_1 \neq m_2$*. Если все прямые множества* Z^{m_2}*, кроме* l_{2n}^{∞}*, являются инвариантными прямыми, то система* (1) *не имеет предельных циклов.*

Следствие. У квадратичной системы, имеющей три параллельных прямых изоклины, одна из которых является инвариантной прямой, отсутствуют предельные циклы.

Замечание. Квадратичная система не имеет предельных циклов при наличии у нее двух пересекающихся инвариантных прямых. См. также [1, 2].

Литература

1. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. — М. : Наука. — 1990. — 486 с.

2. Баутин Н.Н. О периодических решениях одной системы дифференциальных уравнений / Н.Н. Баутин // Прикладная математика и механика. — 1954. — Т. 18, № 1. — С. 128.

ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ ДВУМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ С ПАМЯТЬЮ

Ж.Д. Тотиева (Владикавказ, Южный математический институт ВНЦ РАН)

jannatuaeva@inbox.ru

Для $(x,z), x \in \mathbb{R}, z > 0, t \in \mathbb{R}$ рассматривается система уравнений термоупругости с памятью [1,2]:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L\Big[h(x,t), \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z}\Big[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial z} - (3\lambda + 2\mu)\int\limits_0^{H(x,z,t)} \alpha(s)ds\Big]\Big], \tag{1}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = k\Delta H, \quad H\,|_{t<0} \equiv 0, \; u\,|_{t<0} \equiv 0, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} L\left[h(x,t), \frac{\partial u}{\partial z}\right]_{z=+0} = -\frac{\delta(t)}{\lambda(0) + 2\mu(0)} \\ + \frac{3\lambda(0) + 2\mu(0)}{\lambda(0) + 2\mu(0)} L\left[h(x,t), R(H(0,t))\right], \end{gathered} \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial z} - \gamma H\right)|_{z=+0} = -\gamma(\tilde{T}_1 - \tilde{T}_0)t\theta(t), \tag{4}$$

где $u(x,z,t)$ — смещение, $H(x,z,t)$ — приращение температуры, Δ — оператора Лапласа по переменным x, z; $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака; $\tilde{T}_1 > \tilde{T}_0$, $\gamma > 0$ — некоторые постоянные, $\theta(t)$ — функция Хевисайда, $R(s) = \int_0^s \alpha(\tau)d\tau$, оператор L определен по формуле $L\left[h(x,t), u(x,z,t)\right] = u(x,z,t) + \int_0^t h(x,t-\tau)u(x,z,\tau)d\tau$.

В систему уравнений входят $k = const > 0$ — коэффициент температуропроводности, $\rho(z) > 0$ — плотность среды, $\lambda(z), \mu(z)$ — параметры Ламе, $\alpha(z)$ — коэффициент теплового расширения среды. Считаем, что $\mu(z) > 0$, $\lambda(z) + 2\mu(z) > 0$.

Задачу определения вектора смещения $u(x,z,t)$ и приращения температуры $H(x,z,t)$, удовлетворяющих (в обобщенном смысле) равенствам (1)–(4), при заданных функциях $\alpha(s)$, $h(t)$, $\rho(z)$, $\mu(z)$, $\lambda(z)$ и заданных постоянных k, γ, $\tilde{T}_0$, $\tilde{T}_1$ будем называть **прямой задачей**.

Предполагаем, что ядро $h(x,t)$ можно представить в виде (формально вводится малый параметр $\varepsilon > 0$):

$$h(x,t) = h_0(t) + \varepsilon h_1(x,t), \tag{5}$$

где функция $h_0(t)$ является заданной, а $h_1(x,t)$ – неизвестная, малая по абсолютной величине, добавка. Требование малости добавочного ядра понимается как малость по норме, содержащей производные ядра до некоторого порядка.

Обратная задача: найти ядро $h_1(x,t) \in C_t^1([0,\infty); L_2(\mathbb{R}))$, $t > 0$, если известна дополнительная информация о решении прямой задачи (1)–(4):

$$u(x,z,t)|_{z=+0} = g(x,t), \ t > 0, \tag{6}$$

$g(x,t)$ — заданная функция.

Будем считать, что для $T > 0$ $\tilde{h}_1(\nu,t) := F_x[h_1](\nu,t)$ (образ Фурье)$\in \tilde{\Lambda}(\omega,T)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{h}_1(\nu,t) \in C_t^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$ и $\forall$ фиксированного $t \in [0,T]$ $supp\ \tilde{h}_1(\nu,t) \subset [-\omega,\omega]$. Соответственно, $h_1(x,t) \in \Lambda(\omega,T)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{h}_1(\nu,t) \in \tilde{\Lambda}(\omega,T)$.

Теорема 1. *Пусть $\omega > 0$, $T > 0$ фиксированы. Для существования и единственности решения обратной задачи (1)-(6) $h_1(x,t) \in \Lambda(\omega,T)$ необходимо и достаточно, чтобы $h_0(t) \in C^3[0,T]$, $\tilde{g}(\nu,t) := F_x[g](\nu,t) \in C_t^2(\mathbb{R}\times[0,T])$, $\tilde{g}(\nu,0) = 0$, и $\forall$ фиксированного $t \in [0,T]$ $supp\ \tilde{g}(\nu,t) \subset [-\omega,\omega]$.*

Теорема 2. *Пусть $h_1^{(1)}(x,t), h_1^{(2)}(x,t) \in \Lambda(\omega,T)$ — решения обратной задачи (1)-(6), отвечающие информациям $g^{(1)}(x,t)$, $g^{(2)}(x,t)$ соответственно. Тогда при выполнении условий теоремы 1 имеет оценка устойчивости*

$$\int\limits_R \|h_1^{(1)} - h_1^{(2)}\|^2_{C[0,T]}\,dx \leqslant C\int\limits_{-\omega}^{\omega} \|\tilde{g}^{(1)} - \tilde{g}^{(2)}\|^2_{C^2[0,T]}\,d\nu.$$

где C — некоторая константа, зависящая от величин ω, T и значений функций $\mu(z), \lambda(z), \rho(z), h_0(t)$.

Литература

1. Коваленко А.Д. Термоупругость /А.Д. Коваленко. // Киев :Вища школа, 1975. — 216 с.

2. Тотиева Ж.Д. Задача об определении одномерного ядра уравнения термовязкоупругости / Ж.Д. Тотиева, Д.К. Дурдиев// Математические заметки // 2018. — Т. 103, № 1. — С. 118–132.

ЛИНЕЙНОЕ ЧАСТНО–ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА ОТ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Н.И. Трусова

(Липецк, ЛГПУ имени П.П. Семенова–Тян–Шанского)
trusova.nat@gmail.com

Весовым частно-интегральным оператором (Ч-И оператором) с интегральной мерой Лебега—Киприянова $t_\alpha^{\gamma_\alpha} dt_\alpha$ [1] в $\mathbb{R}_m$ называется выражение

$$(K_\alpha u)(x) = \int_{\Omega_m} k_\alpha(x; t_\alpha)\, u(t_\alpha, x_{\overline{\alpha}})\, t_\alpha^{\gamma_\alpha}\, dt_\alpha,$$

где $x = (x_\alpha, x_{\overline{\alpha}}) \in \mathbb{R}_m \times \mathbb{R}_{n-m}$, $\Omega_m \in \mathbb{R}_m$.

Пусть область Ω_m есть шар с центром в начале координат переменного радиуса $\rho \in [0; R]$. Весовым Ч-И оператором, примененным к функции от сферической симметрии, называется выражение

$$(I_\alpha f)(|x_\alpha|,\, x_{\overline{\alpha}}) = \int_{|t_\alpha|<R} k(|x_\alpha|, x_{\overline{\alpha}};\, t_\alpha) f(t_\alpha,\, x_{\overline{\alpha}})\, t_\alpha^{\gamma_\alpha}\, dt_\alpha\,.$$

Сферическое преобразование координат $t_\alpha = \rho\Theta$ приводит этот оператор к виду

$$(I_\alpha f)(|x_\alpha|,\, x_{\overline{\alpha}}) = |S_1(m)|_{\gamma_\alpha} \int_0^\rho k(|x_\alpha|,\, x_{\overline{\alpha}}; \rho)\ f(\rho,\, x_{\overline{\alpha}})\ \rho^{m+|\gamma|-1}\ d\rho\,,$$

где $|\gamma| = \sum\limits_i \gamma_{\alpha_i}$ и $|S_1(m)|_{\gamma_\alpha}$ — "площадь нагруженной сферы".

Линейным весовым Ч–И оператором от сферически симметричных функций называется выражение

$$(If)(|x_\alpha|,\, x_{\overline{\alpha}}) = \sum_{m=0}^{n} \ \sum_\alpha (I_\alpha f)(|x_\alpha|,\, x_{\overline{\alpha}})\,. \tag{1}$$

Линейное частно–интегральное уравнение Фредгольма второго рода с линейным весовым оператором (1) имеет вид

$$\varphi(|x_\alpha|, x_{\overline{\alpha}}) - \lambda I\varphi(|x_\alpha|, x_{\overline{\alpha}}) = f(|x_\alpha|, x_{\overline{\alpha}}), \quad x \in \mathbb{R}_n\,. \tag{2}$$

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, $\gamma_i > -1$. Оператор $(If)(|x_\alpha|, x_{\overline{\alpha}})$ рассматривается в весовом анизотропном пространстве Лебега—Киприянова $L_{\mathbf{p}}^\gamma(D)$, $D = (D_1 \times D_2 \times D_3)$, $D_i = (0, b_i)$, норма которого определена равенством

$$\|u\|_{L_{\mathbf{p}}^\gamma(D)} =$$

$$= \left(\int\limits_{D_3} \left(\int\limits_{D_2} \left[\int\limits_{D_1} |\,u(x)|^{p_1}\, x_1^{\gamma_1} dx_1 \right]^{p_2/p_1} x_2^{\gamma_2} dx_2 \right)^{p_3/p_2} x_3^{\gamma_3} dx_3 \right)^{1/p_3}.$$

Теорема. *Пусть* $\nu = m + |\gamma_\alpha| - 1$, $\nu > -1$ *и* $k_0 \in L_\infty^\gamma(D)$, $k \in L_\infty^{\gamma_{\overline{\alpha}}}(D_{x_{\overline{\alpha}}};\ L_{(p',\,p)}^{(\nu,\,\nu)}(D_{\rho,\,r}))$, $k_{1,\ldots,n} \in L_{p'}^\nu(D_\rho;\, L_p^\nu(D_r))$ *и*

$$\|f\|_{P_{L^{\gamma}_{(p,\infty)}}} = \sup\left\{\|f\|_{L^{\gamma_{\overline{\alpha}}}_{p^{r+1}}(D_{x_{\overline{\alpha}}};\, L^{\nu}_{p}(D_\rho))}\right\}_{\ell=1}^{\infty} < \infty\,,$$

где $|\lambda|\, Q\, H < 1$, *где* $Q = \sup\limits_{\ell}\left\{\, [\,\mu(D_{x_{\overline{\alpha}}})]^{\frac{1}{p^{i}\,p'}}\,,\ [\,\mu(D)]^{\frac{1}{p^{\ell}\,p'}}\,,\right\}_{\ell=1}^{\infty}\,,$

$$H = \max\left\{\|k_0\|_{L^{\gamma}_{\infty}(D)}, \|k_\alpha\|_{L^{\gamma_{\overline{\alpha}}}_{\infty}(D_{x_{\overline{\alpha}}};L^{(\nu,\nu)}_{(p',p)}(D_{\rho,r}))}, \|k_{1,\dots,n}\|_{L^{\nu}_{p'}(D_\rho;L^{\nu}_{p}(D_r))}\right\}.$$

Тогда в $L^{\gamma}_{(p,\infty)}(D) = L^{\gamma_{\overline{\alpha}}}_{\infty}(D_{x_{\overline{\alpha}}};\, L^{\nu}_{p}(D_\rho))$ *существует предел* $\Phi = \lim\limits_{v\to\infty} \Phi_\nu$ *функциональной последовательности*

$$\Phi_v f = \varphi^{(v)}(|x_\alpha|, x_{\overline{\alpha}}) = \sum_{\ell=0}^{v} \lambda^{\ell} (I^{\ell} f)(|x_\alpha|, x_{\overline{\alpha}}).$$

Оператор Φ *действует ограниченно из* $L^{\gamma}_{(p,\infty)}(D)$ *в* $L^{\gamma}_{p}(D)$ *и* $\|\Phi\|_{L^{\gamma}_{p}(D)} \leqslant \lim_{\overline{v\to\infty}} \|\Phi_v\|_{L^{\gamma}_{(p,\infty)}(D)}$. *Решение уравнения (2) единственно и существует в виде*

$$\varphi(|x_\alpha|, x_{\overline{\alpha}}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda^{\ell} (I^{\ell} f)(|x_\alpha|, x_{\overline{\alpha}})\,, \text{причем } \|\varphi\|_{L^{\gamma}_{p}} \leqslant \frac{\|f\|_{M_{L^{\gamma}_{(p,\infty)}}}}{1-|\lambda| Q\, H}.$$

Частно–интегральные уравнения Фредгольма второго рода $\mathbb{R}_2$ рассмотрены в [2], а в $\mathbb{R}_m$ изучались в [3].

Литература

1. Ляхов Л.Н. Оператор Киприянова—Бельтрами с отрицательной размерностью оператора Бесселя и сингулярная задача Дирихле для В–гармонического уравнения / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина // Дифференциалные уравнения. — 2020. — Т. 56, № 12. — С. 1610–1620.

2. Ляхов Л.Н. Об уравнениях Фредгольма для частного интеграла в $\mathbb{R}_2$ / Л.Н. Ляхов, А.И. Иноземцев, Н.И. Трусова // Проблемы математического анализа. — 2020. — вып. 107. — С. 59–67.

3. Ляхов Л.Н. Об уравнении Фредгольма с весовым частно-интегральным оператором положительного порядка / Л.Н. Ляхов, Н.И. Трусова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика, Математика, №3. Воронеж: Изд-во дом ВГУ. — 2021. — С. 91–105.

РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО–КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ КЕЛЬВИНА–ФОЙГТА КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА[1]

М.В. Турбин, А.С. Устюжанинова (Воронеж, ВГУ)

mrmike@mail.ru, nastyzhka@gmail.com

[1] Работа выполнена за счёт Российского Научного Фонда (грант № 23–21–00091).

Модель движения жидкости Кельвина–Фойгта конечного порядка является одной из моделей с конечным числом дискретно распределённых времён релаксации и ретардации. Исследование модели движения жидкости Кельвина–Фойгта конечного порядка с частной производной в реологическом соотношении было начато А.П. Осколковым (см. подробнее его обзорную работу [1]). Дальнейшее исследование моделей Кельвина–Фойгта с частной производной по времени в реологическом соотношении проводилось рядом авторов, в том числе и авторами этого доклада (см. обзор [2]). В настоящее время активно исследуются различные задачи для моделей Кельвина–Фойгта и их модификаций (см., например, [3,4]).

При этом для учёта памяти вдоль траекторий движения жидкости в реологическом соотношении вместо частной производной рассмотрена субстанциональная производная. При этом получается система уравнений, содержащая интегральный член вдоль траекторий движения жидкости. А именно, в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 2,3$ на промежутке времени $[0,T], T < \infty$, рассматривается следующая система уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \mu_1 \Delta v + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_2 \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - 2\mu_2 \mathrm{Div}\left(v_k \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_k} \right) -$$

$$-2\mathrm{Div} \int_0^t \sum_{i=1}^{L} \beta_i e^{\alpha_i (t-s)} \mathcal{E}(v)(s, z(s,t,x))\, ds + \nabla p = f; \qquad (1)$$

$$\mathrm{div}\, v = 0, \quad (t,x) \in Q_T = [0,T] \times \Omega; \qquad (2)$$

$$\text{где} \quad z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad 0 \leqslant t, \tau \leqslant T, \quad x \in \Omega. \quad (3)$$

Здесь v и p скорость и давление в жидкости, f — плотность внешних сил, $\mu_1, \mu_2 > 0$ — вязкость жидкости и время ретардации. $\mathcal{E}(v) = 1/2(\nabla v + (\nabla v)^T)$ — тензор скоростей деформаций. Неизвестными являются скорость движения v и давление жидкости p, а также траектории движения частиц жидкости z, определяемые полем скоростей.

Для этой системы уравнений рассматривается начально-краевая задача с начальным и граничным условиями

$$v|_{t=0} = a(x), \quad x \in \Omega, \quad v|_{\partial\Omega \times [0,T]} = 0. \qquad (4)$$

Основным результатом является следующая теорема:

Теорема 1. *Существует хотя бы одно слабое решение начально-краевой задачи (1)—(4).*

Для доказательства рассматривается аппроксимационная задача, разрешимость которой устанавливается при помощи теоремы Лере–Шаудера о неподвижной точке. После чего на основе априорных оценок решений показывается, что из последовательности решений аппроксимационной задачи можно извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся к слабому решению начально–краевой задачи (1)—(4) при стремлении параметра аппроксимации к нулю.

Литература

1. Осколков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта / А.П. Осколков // Тр. МИАН СССР. — 1988. — Т. 179. — С. 126–164.

2. Звягин В.Г. Исследование начально–краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина–Фойгта / В.Г. Звягин, М.В. Турбин // СМФН. — 2009. — Т. 31. — С. 3–144.

3. Ustiuzhaninova A. Feedback Control Problem for Modified Kelvin–Voigt Model / A. Ustiuzhaninova, M. Turbin // J. Dyn. Control Syst. — 2022. — V. 28. — P. 465–480.

4. Turbin M. Pullback attractors for weak solution to modified Kelvin–Voigt model / M. Turbin, A. Ustiuzhaninova // Evolution Equations and Control Theory. — 2022. — V. 11, №. 6. — P. 2055–2072.

О ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВХОДНЫХ ДАННЫХ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ В ПОЛУПРОВОДНИКЕ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ[1]

[1]Д.В. Туртин, [2]М.А. Степович, [2]В.В. Калманович, [3]А.А. Картанов, [4]В.Л. Головань

[1](Иваново, ИвГУ), [2](Калуга, КГУ им. К.Э. Циолковского), [3](Калуга, ООО «КАМИН-Классик»), [4](Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)

[1]*turtin@mail.ru*, [2]*m.stepovich@rambler.ru*, [2]*v572264@yandex.ru*, [3]*kartanovartem@gmail.com*, [4]*v_glog@mail.ru*

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Калужской области № 23–21–10069, `https://rscf.ru/project/23-21-10069/`.

Диффузия неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ), генерированных широким внешним источником в однородном полупроводнике (см. [1–3] и литературу там же), описывается дифференциальным уравнением

$$D\,\frac{d^2p(z)}{dz^2}-\frac{p(z)}{\tau}=-\rho(z);\ D,\tau=\mathrm{const}. \qquad (1)$$

Для мишени конечной толщины l граничные условия запишем в виде [4–6]

$$D\ \left.\frac{dp(z)}{dz}\right|_{z=0}=v_{s1}p(0),\ v_{s1}=\mathrm{const},$$

$$D\ \left.\frac{dp(z)}{dz}\right|_{z=l}=-v_{s2}p(l),\ v_{s2}=\mathrm{const}.$$

Получены следующие оценки зависимости от входных данных решений дифференциального уравнения (1):

1) при наличии внешних воздействий на изучаемый полупроводник в правой части дифференциального уравнения диффузии (1) будем иметь различные функции $\rho_1(z)$ и $\rho_2(z)$ и, соответственно, два различных его решения $p_1(z)$ и $p_2(z)$. Если $|\rho_1(z)-\rho_1(z)|\leqslant\varepsilon$, где ε — положительная константа, то $\forall z\in[0,l]$

$$|p_2(z)-p_1(z)|\leqslant C\varepsilon,\ C=\left[\mathrm{ch}(l\sqrt{\sigma})-1\right]/D\sigma,\ \sigma=1/D\tau;$$

2) если $p_1(z)$ — решение уравнения (1), а $p_2(z)$ — решение этого же уравнения, но с правой частью $-\rho\,(z)-\varepsilon$ и с теми же граничными условиями, а ε — положительное число, характеризующее случайное внешнее воздействие, то $\forall z\in[0,l]$

$$|p_2(z)-p_1(z)|\leqslant C\exp(\sqrt{\sigma}z)+\tau\varepsilon,\ \sigma=1/D\tau,\ C=\mathrm{const}.$$

Полученные оценки использованы при математическом моделировании влияния входных данных на решения дифференциального уравнения диффузии ННЗ в полупроводниковых материалах микро–, нано–, оптоэлектроники и СВЧ–техники.

Литература

1. Wittry D.B. Measurements of diffusion lengths in direct–gap semiconductors by electron beam excitation / D.B. Wittry, D.F. Kyser // Journal Appl. Phys. — 1967. — V. 38, No. 1. — P. 375–382.

2. Rao–Sahib T.S. Measurements of diffusion lengths in p–tipe gallium arsenide by electron beam excitation / T.S. Rao–Sahib, D.B. Wittry // Journal Appl. Phys. — 1969. — V. 40, No. 9. — P. 3745–3750.

3. Степович М.А. Количественная катодолюминесцентная микроскопия прямозонных материалов полупроводниковой оптоэлектроники / М.А. Степович // Дис. … д–ра физ.-мат. наук. — М. : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. — 351 с.

4. Степович М.А. О некоторых математических моделях диффузии неравновесных неосновных носителей заряда, генерированных электронным пучком в полупроводниковой мишени / М.А. Степович, Д.В. Туртин, В.В. Калманович // Современные информационные технологии в образовании и научных исследованиях : материалы VII международной научно-технической конференции. — Донецк : ДонНТУ, 2021. — С. 22–25.

5. Туртин Д.В. О корректности математических моделей диффузии и катодолюминесценции / Д.В. Туртин, М.А. Степович, В.В. Калманович, А.А. Картанов // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 1 (50). — С. 81–100.

6. Степович М.А. О корректности математической модели коллективной диффузии неосновных носителей заряда в однородной полупроводниковой мишени конечной толщины / М.А. Степович, Д.В. Туртин, В.В. Калманович // Научные труды Калужского государственного университета им. К.Э. Циолковского. Сер. : Естественные и технические науки. — Калуга : КГУ им. К.Э. Циолковского, 2021. — С. 219–225.

ИССЛЕДОВАНИЕ И АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ «ЛЕС–БИОМАССА»

Э.Е. Тусупбекова (Москва, МГУ)

elmira.tussupbekova@gmail.com

Лес — важнейший компонент биосферы, основной источник экологической безопасности человека. В лесах содержится около 60–70 процентов всего атмосферного запаса углекислоты — 400–500 млрд.т. Помимо биологической пользы леса приносят огромный вклад в развитие экономики многих промышленно развитых стран мира.

В данной работе проводится исследование и анализ динамической модели для сохранения лесного хозяйства, которое истощается из-за вырубки лесов, роста лесной промышленности, климатических факторов. Рассматривается возрастная структура лесной биомассы через деление на молодые (P) и зрелые (M) популяции. Для промышленных предприятий (I) накладывается ограничение на вырубку молодых популяций. В качестве альтернативных ресурсов для промышленных предприятий вводится модифицированная функция Лесли–Гоуэра. В работе изучается система нелинейных дифференциальных уравнений, исследуется устойчивость решений системы, допускающей линеаризацию в окресности положений равновесия. Взаимодействие между величинами P, M, I описывается динамической системой:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{k}\right) - \beta P + \gamma P, \tag{1}$$

$$\frac{dM}{dt} = \beta P - q_1 EM - d_1 M, \tag{2}$$

$$\frac{dI}{dt} = \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2 I}{\alpha_3 + M}\right) I - d_2 I, \tag{3}$$

где $P(0) \geqslant 0, M(0) \geqslant 0, I(0) \geqslant 0$, а r, β, k, γ, q_1, E, d_1, d_2 α_1, α_2, α_3 – действительные параметры. Для доказательства положительности и ограниченности решений системы используется Лемма Чена. Теория дифференциальных неравентсв используется для получения достаточных условий существования предельных значений введенных переменных.

Исследуется устойчивость положения равновесия системы. Рассматриваются четыре биологически возможных положения равновесия системы. В ходе работы выявлены условия при которых положения равновесия представляют собой устойчивый узел, неустойчивый узел, устойчивый седлоузел, неустойчивый седлоузел, устойчивый диакритический узел, неустойчивый диакритический узел. Строятся фазовые портреты в проекции по двум переменным при помощи веб–приложения PhaPl [2]. Для построения фазовых траекторий в трехмерном пространстве использовались следующие библиотеки питона: matplotlib.pyplot, mpl_toolkits.mplot3d, scipy.integrate.

В ходе работы проанализировано каждое уравнение системы по отдельности. Решения уравнений выражены в квадратурах. Исследовано поведение решения первого уравнения на бесконечности. В результате анализа изучаемой модели были доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $(r - \beta + \gamma) \neq 0$. *Тогда решения системы (1)–(3) имеют следующий вид:*

$$P(t) = \frac{r - \beta + \gamma}{(\frac{r-\beta+\gamma}{P_0} - \frac{r}{k})e^{-(r-\beta+\gamma)t} + \frac{r}{k}},$$

$$M(t) = \frac{\beta(r - \beta + \gamma)}{e^{(q_1 E + d_1)t}} \int \frac{e^{(q_1 E + d_1)t} dt}{(\frac{r-\beta+\gamma}{P_0} - \frac{r}{k})e^{-(r-\beta+\gamma)t} + \frac{r}{k}} + \widetilde{C},$$

$$I(t)=\frac{e^{(\alpha_1-d_2)t}}{\alpha_2}\times$$
$$\times\Big(\int\frac{e^{(\alpha_1-d_2)t}}{\alpha_3+\big(\frac{\beta(r-\beta+\gamma)}{e^{(q_1E+d_1)t}}\int\frac{e^{(q_1E+d_1)t}dt}{(\frac{r-\beta+\gamma}{P_0}-\frac{r}{k})e^{-(r-\beta+\gamma)t}+\frac{r}{k}}+\widetilde{C}\big)}dt+C\Big)^{-1},$$

где $\widetilde{C},C\in\mathbb{R}$.

Теорема 2. *Пусть* $(r-\beta+\gamma)=0$. *Тогда решения системы (1)–(3) имеют следующий вид:*

$$P(t)=\frac{1}{\frac{r}{k}t+\frac{1}{P_0}},$$

$$M(t)=\frac{\beta}{e^{(q_1E+d_1)t}}\int\frac{e^{(q_1E+d_1)t}dt}{\frac{r}{k}t+\frac{1}{P_0}}+\widetilde{\widetilde{C}}$$

$$I(t)=\frac{e^{(\alpha_1-d_2)t}}{\alpha_2}\Big(\int\frac{e^{(\alpha_1-d_2)t}}{\alpha_3+\big(\frac{\beta}{e^{(q_1E+d_1)t}}\int\frac{e^{(q_1E+d_1)t}dt}{\frac{r}{k}t+\frac{1}{P_0}}+\widetilde{\widetilde{C}}\big)}dt+C\Big)^{-1},$$

где $\widetilde{\widetilde{C}},C\in\mathbb{R}$.

В результате численного моделирования построены графики, соответствующие полученным в работе результатам при различных комбинациях значений параметров.

Литература

1. Асташова И.В. Применение динамических систем к исследованию асимптотических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений высоких порядков / И.В. Асташова // Современная математика и ее приложения. — 2003. — Т. 8. — 3–33 с.

2. Черепанов А.А. Программный комплекс PhaPl для автоматического построения и исследования фазовых портретов на плоскости / А.А. Черепанов // Открытое образование. — 2017. — 41. — 52 с.

3. Chen F. On a nonlinear nonautonomous predator - prey model with diffusion and distributed delay / F. Chen // Comput Appl Math — 2014. — 33. —- 49 p.

4. Leslie P.H. Some further notes on the use of matrices in population mathematics / P.H. Leslie // Oxford University Press — 1948. — 213. — 245 p.

5. Manisha C., Joydip D.,Om P. M. A mathematical model for the conservation of forestry biomass with an alternative resource for

industrialization: a modified Leslie Gower interaction / C. Manisha , D. Joydip , P.M. Om // Springer International Publishing Switzerland — 2015. — 1 — 10 p.

ЯВЛЕНИЕ ПОГРАНСЛОЯ В АЛГЕБРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В.И. Усков (Воронеж, ВГЛТУ)
vum1@yandex.ru

Рассматривается задача Коши:

$$(A - \varepsilon B - \varepsilon^2 C)\frac{du}{dt} = (D + \varepsilon E + \varepsilon^2 F)u(t, \varepsilon), \qquad (1)$$

$$u(t_0, \varepsilon) = u^0(\varepsilon), \qquad (2)$$

где A, B, C, D, E, F — замкнутые линейные операторы, действующие из банахова пространства X_1 в банахово пространство E_2, $\overline{\operatorname{dom} A} = \overline{\operatorname{dom} B} = \overline{\operatorname{dom} C} = \overline{\operatorname{dom} D} = \overline{\operatorname{dom} E} = \overline{\operatorname{dom} F} = X_1$, $u^0(\varepsilon)$ — голоморфная в окрестности точки $\varepsilon = 0$, $t \in [t_0; t_{max}]$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$.

Здесь оператор A фредгольмовский с нулевым индексом (далее, Φ_0–оператор), имеющий одномерное ядро. Рассматривается случай конечной длины D–жордановой цепочки оператора A.

Явление погранслоя для уравнения

$$A\frac{du}{dt} = (B + \varepsilon C)u(t, \varepsilon)$$

изучалось в работе [1] в случае Φ_0–оператора A с одномерным ядром и в [2] в случае A, обладающим свойством иметь 0 нормальным собственным числом с n–мерным ядром.

В настоящей работе операторные пучки более высокого порядка по ε. Цель работы: выявить условия, при которых возникает явления погранслоя в задаче (1), (2) — они называются *условиями регулярности вырождения*.

Напомним, что в задаче (1), (2) имеет место *явление погранслоя вблизи точки* $t = t_0$, если решение представимо в виде [3,4]

$$u(t, \varepsilon) = \bar{u}(t) + v(t, \varepsilon),$$

где $\bar{u}(t)$ — решение предельной задачи, а $v(t, \varepsilon)$ — функция погранслоя вблизи точки $t = t_0$.

Для решения задачи выведено уравнение ветвления, позволяющее определить вид функций погранслоя с применением диаграммы Ньютона [5].

Результат в частном случае иллюстрируется примером.

Литература

1. Зубова С.П. Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве. Регулярный случай / С.П. Зубова, В.И. Усков // Математические заметки. — 2018. — Т. 103, вып. 3. — С. 393–404.

2. Uskov V.I. Boundary layer phenomenon for a first order descriptor equation with small parameter on the right-hand side / V.I. Uskov // Journal of Mathematical Sciences (New York). — 2020. — V. 250, № 1. — P. 175–181.

3. Васильева А.Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. — М. : Наука, 1973. — 272 с.

4. Зубова С.П. О роли возмущений в задаче Коши для уравнения с фредгольмовым оператором при производной / С.П. Зубова // Доклады РАН. — 2014. — Т. 454, № 4. — С. 383–386.

5. Чеботарев Н.Г. Теория алгебраических функций / Н.Г. Чеботарев. — М. : Либроком, 2009. — 400 с.

ПЕРВАЯ КУРСОВАЯ РАБОТА ПЕРВОКУРСНИКОВ НАПРАВЛЕНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ИНФОРМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

О.Ф. Ускова, О.Д. Горбенко, Н.А. Каплиева (Воронеж, ВГУ)
sunny.uskova@list.ru

Факультет прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета (ПММ ВГУ) образован в нашей стране одним из первых факультетов подобного профиля. Одной из основных дисциплин бакалавров, обучающихся по направлению фундаментальная информатика и информационные технологии (ФИИТ), является «Информатика и программирование», изучение которой начинается с первого курса. По этой дисциплине читаются лекции, проводятся практические занятия и лабораторные работы.

Начиная с 2019 года по дисциплине «Информатика и программирование» для первокурсников, обучающихся по направлению ФИИТ

(02.03.02) учебным планом предусмотрена курсовая работа. Основная цель курсовой работы закрепить и показать знания языка программирования C++ в области базовых структур данных и разработке программ с использованием функций.

Курсовая работа выполняется самостоятельно с 1 по 30 апреля во внеаудиторное время, завершается представлением отчета по установленной форме и собеседованием с руководителем курсовой работы [2].

Отчет студента должен состоять из следующих частей.

1. Поставка задачи.

2. Описание данных и алгоритма решения задачи. Блок–схема алгоритма.

3. Описание структуры программы.

4. Результаты тестирования.

5. Список использованных источников.

6. Полный текст программы на языке C++.

Еженедельно в течение апреля месяца руководитель проводит консультации по выполнению заданий и оформлению курсовой работы.

Для курсовой работы первокурсников разработан банк заданий, содержащий 80 различных примеров задач [1]. Приведем примеры постановки задач.

Пример 1. С клавиатуры вводится информация об итогах последней экзаменационной сессии. Эта информация включает в себя: 1) целое число n — количество студентов; 2) n объединенных в структуру данных:
<имя> <фамилия> <оценка> <оценка> <оценка> <оценка>,
где <имя> <фамилия> — символьные строки, содержащие не более 20 символов, оценка за экзамен — десятичная цифра из диапазона <2>...<5>.

Требуется сформировать массив структур, в котором каждый элемент массива содержит фамилию студента и число успешно сданных им экзаменов, причем вначале размещаются данные о студентах, средний балл которых выше 3, затем об остальных студентах, при этом порядок следования данных в каждой части заменяется на обратный по отношению к тому, который был определен вводом. Вывести этот массив на экран, вывести также фамилии и оценки студентов, имеющих наибольшую сумму баллов.

Пример 2. Сформировать целочисленную квадратную матрицу A из m строк. Сформировать также массив B из m целых чисел.

Требуется найти скалярное произведение вектора B и любой из строк матрицы A, элементы которой упорядочены по возрастанию, и удалить эту строку из матрицы A.

Составить программу с использованием функций, двумерного динамического массива и указателей. Исходную матрицу A оставить в памяти без изменений.

Литература

1. Ускова О.Ф. Информатика и программирование : задачник–практикум по структурному программированию на языке C++ : учебное пособие / О.Ф. Ускова, Н.А. Каплиева, О.Д. Горбенко // Воронежский государственный университет. 2–е изд., Воронеж : Издательский дом ВГУ. — 2022. — 290 с.

2. Горбенко О.Д. Методические указания к выполнению курсовой работы по информатике и программированию / О.Д. Горбенко, О.Ф. Ускова. // Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2020. — 30 с.

ПРИМЕРЫ РАЗЛОЖЕНИЙ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ ПО ФРЕЙМАМ ГАБОРА, ПОРОЖДЁННЫМ ФУНКЦИЕЙ ГАУССА

С.Н. Ушаков, В.Л. Волков (Воронеж, ВГУ)
ushakowww@yandex.ru, madara2008@mail.ru

Большую роль в различных областях физики и математики, таких как, например, квантовая механика и цифровая обработка сигналов, играет системы функций вида

$$g_{k,m}(x,\alpha_1,\alpha_2) = \exp\left(-\frac{(x-k\alpha_1)^2}{2}\right)e^{im\alpha_2 x},\ a,b \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Стоит отметить, что данное семейство при различных соотношениях параметров α_1 и α_2 может оказаться как неполной системой в $L_2(\mathbb{R})$ ($\alpha_1 \cdot \alpha_2 > 2\pi$), так и имеющей лишние элементы, например, один, если $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = 2\pi$, и бесконечно много при $\alpha_1 \cdot \alpha_2 < 2\pi$. В последнем случае система (1) образует фрейм, именуемый фреймом Габора, для которого существует развитый математический аппарат. В специальном случае при $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \pi/N,\ N \in \mathbb{N}$ были получены явные формулы для двойственного фрейма $\tilde{g}_{k,m}$ Янсенном в статьях [1], [2]:

$$\tilde{g}_{km}\left(x,\alpha_1,\ \alpha_2\right) =$$
$$= \frac{1}{2\,N\sqrt{\pi}} \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} c_{k'}(2N\,\alpha_1)\ \exp\left(\frac{-\left(x-\alpha_1(k'N+2k)\right)}{2}\right)\times$$

$$\times \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} c_{m'}\left(2N\alpha_2\right)\exp\left(i\,\alpha_2(2m+Nm')x\right),$$

где

$$c_k(\omega) = \frac{1}{K\left(\omega\right)}\exp\left(\frac{k^2\omega^2}{4}\right)\sum_{r=|k|}^{\infty}\left(-1\right)^r\exp\left(-\frac{\left(r+0.5\right)^2\omega^2}{4}\right),$$

$$K\left(\omega\right) = \sum_{r=-\infty}^{\infty}\left(4r+1\right)\exp\left(-\frac{\left(2r+0.5\right)^2\omega^2}{4}\right).$$

Особенности вычисления коэффициентов $c_k(\omega)$ отражены в статьях [3], [4].

В данной работе при помощи явных формул для двойственного фрейма получены аналитически разложения некоторых элементарных функций и проведены численные эксперименты. Несмотря на то, что семейство (1) является фреймом в $L_2(\mathbb{R})$, для разложения брались функции из более широкого класса, поскольку в силу быстрого убывания функции Гаусса, получаемые коэффициенты и ряды являются сходящимися.

Приведём ниже в качестве примера одну из полученных формул при $\alpha_1\cdot\alpha_2=\pi$:

$$1 \equiv \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\left(2\alpha_1\right)\right)\times$$

$$\sum_{k'=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{m'=-\infty}^{+\infty}\left(-1\right)^{m'k'}a_{m'}(\alpha_2)\cos(m'\alpha_2 x)\right)\exp\left(-\frac{\left(x-\alpha_1 k'\right)^2}{2}\right),$$

где

$$a_{m'}\left(\alpha_2\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m(2\,\alpha_2)\exp\left(-\alpha_2^2(2m+m')^2\right).$$

Разложение единицы играет важную роль в квантовой оптике, где системы функций вида (1) называются когерентными состояниями[5]. Записанная выше формула позволяет использовать дельта-функцию (образ Фурье от единицы) в виде рядов, в которых суммируются физически осмысленные бесконечно дифференцируемые функции.

Литература

1. Janssen A.J.E.M. Duality and Biorthogonality for Weyl–Heisenberg Frames / A.J.E.M. Janssen // J. Fourier Anal. Appl. — 1995. — V. 1, № 4. — P. 403–436.

2. Janssen A.J.E.M. Some Weyl–Heisenberg frame bound calculations / A.J.E.M. Janssen // Indag. Math., New Ser. — 1996. — V. 7, № 2. — P. 165–183.

3.Zhuravlev M.V. Jacobi Theta–Functions and Systems of Integral Shfts of Gaussian Functions / M.V. Zhuravlev, E.A. Kiselev, L.A. Minin, S.M. Sitnik // Journal of Mathematical Sciences. — 2011. — V. 173, № 2. — P. 231–242.

4. Минин Л.А. Поведение коэффициентов узловых функций, построенных из равномерных сдвигов функций Лоренца и функций Гаусса / Л.А. Минин, С.М. Ситник, С.Н. Ушаков // Научные ведомости БелГУ. Серия : Физика. Математика. — 2014. — № 12 (183), вып. 35. — С. 214–217.

5. Мандель Л. Оптическая когерентность и квантовая оптика. / Л. Мандель , Э. Вольф // Физматлит. — 2000. — С. 896.

ОБ ОТСУТСТВИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПЛОСКИХ КУБИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ[1]

А.Д. Ушхо (Майкоп, АГУ)

uschho76@rambler.ru

При изучении схемы поведения фазовых траекторий системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{3} a_{i,j} \equiv P_3(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{3} b_{i,j} \equiv Q_3(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РОО «ФОРА» (проект № 02–02–2023)

где $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{R}$, $(P_3, Q_3) = 1$, имеющей инвариантные прямые, возникает вопрос о существовании или отсутствии предельных циклов. В этой связи уместно отметить, что система (1) не имеет предельных циклов, если из ее траекторий состоят пять прямых [1]. Однако существуют системы вида (1) с четырьмя инвариантными прямыми и предельным циклом.

Пример 1. При любом $\mu \in \mathbb{R}$ система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4(x^2-1)[(1+\mu)x - 4y], \\ \dfrac{dy}{dt} = (y+1)(y+2)(4x-2y) \end{cases} \qquad (2_\mu)$$

имеет инвариантные прямые $x-1=0$, $x+1=0$, $y+1=0$, $y+2=0$.

Точка $(0,0)$ системы (2_μ) является состоянием равновесия. Для системы (2_0) эта точка суть негрубый фокус. В самом деле, характеристические числа состояния равновесия системы чисто мнимые, а именно, $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{7}i$. Непосредственные вычисления показывают, что третья фокусная величина $\alpha_3(0,0) = \dfrac{107\pi}{112\sqrt{7}} < 0$. Согласно монографии [2] точка $(0,0)$ — устойчивый негрубый фокус системы (2_0). При переходе к сколь угодно малым положительным значениям μ негрубый фокус превращается в грубый противоположной устойчивости, порождая устойчивый предельный цикл, окружающий точку $(0,0)$.

Условимся обозначать:

Z — множество всех прямых изоклин системы (1);

Z^m — подмножество множества Z, состоящее из прямых изоклин, на которых индуцировано направление m.

$Z_3(k)$ — подмножество множества Z, состоящее из трех параллельных между собой прямых изоклин с угловым коэффициентом k, на которых индуцированы попарно различные направления;

$l_i^{m_j}$ — прямая изоклина l_i, на которой индуцировано направление m_j.

Теорема. *Если множество Z всех прямых изоклин кубической системы (1) имеет три подмножества $Z_3(k_1)$, $Z_3(k_2)$, $Z_3(k_3)$, где $(k_1-k_2)(k_1-k_3)(k_2-k_3) \neq 0$, причем во множестве $\bigcup_{i=1}^{3} Z_3(k_i)$ содержатся три инвариантных прямых, то эта система не имеет замкнутых траекторий, в частности, предельных циклов.*

Пример 2. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xy(-x-y+3), \\ \dfrac{dy}{dt} = (x-2)(y-2)(-x-y+1), \end{cases}$$

имеет три подмножества прямых изоклин

$$Z_3(\infty) = \{x = 0, x-2 = 0, x-1 = 0\},$$

$$Z_3(0) = \{y-2 = 0, y = 0, y-1 = 0\},$$

$$Z_3(-1) = \{-x-y+1 = 0, -x-y+3, -x-y+2 = 0\}.$$

Инвариантными для этой системы являются прямые $x = 0$, $y-2 = 0$, $-x-y+2 = 0$. Система имеет неустойчивый дикритический узел $N(0,2)$, устойчивые фокусы $S(2,1)$, и $Q(1,0)$, простые седла $M(1,2)$, $P(0,1)$, $R(0,2)$, удовлетворяет условиям теоремы, то есть ациклична.

Литература

1. Горбузов В.Н., Тыщенко В.Ю. Частные интегралы обыкновенных дифференциальных уравнений / В.Н. Горбузов, В.Ю. Тыщенко // Математический сборник. — 1992. — Т. 183, № 3. — С. 76–94.

2. Андронов А.А. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер.. // М. : Наука. — 1967. — 488 с.

ОБ n–КОМПОНЕНТНЫХ ОПЕРАТОРАХ

В.И. Фомин (Тамбов, ТГУ им. Г.Р. Державина)
vasiliyfomin@bk.ru

Пусть E, H – вещественные банаховы пространства; $\mathcal{L}(E)$, $\mathcal{L}(H)$ — вещественные банаховы алгебры ограниченных линейных операторов, действующих соответственно в пространствах E, H; $\mathcal{L}(E,H)$ — вещественное банахово пространство ограниченных линейных операторов, действующих из E в H; $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, n фиксировано; $\{X_i\}_{i=1}^n$, $\{Y_i\}_{i=1}^n$ — семейства вещественных банаховых пространств; для каждого $i = \overline{1;n}$ I_i — тождественный оператор в X_i; $\mathcal{L}(X_i, Y_i)$ — вещественное банахово пространство ограниченных линейных операторов, действующих из X_i в Y_i; $\mathcal{L}(X_i)$ — вещественная банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих из X_i в X_i.

Известно ([1, с.124]), что прямое произведение банаховых пространств является банаховым пространством. Следовательно, $\vec{X} = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$, $\vec{Y} = Y_1 \times Y_2 \times ... \times Y_n$ — вещественные банаховы пространства n-компонентных векторов с покоординатными линейными операциями и нормой: $\|\vec{x}\|_{\vec{X}} = \|x_1\|_{X_1} + \|x_2\|_{X_2} + ... + \|x_n\|_{X_n}$, $\|\vec{y}\|_{\vec{Y}} = \|y_1\|_{Y_1} + \|y_2\|_{Y_2} + ... + \|y_n\|_{Y_n}$.
В частности, при $X_i = E$, $Y_i = H$, $i = \overline{1,n}$, получаем вещественные банаховы пространства $E^n = E \times E \times ... \times E$, $H^n = H \times H \times ... \times H$.

По определению, n-компонентный оператор $\vec{F} : \vec{X} \to \vec{Y}$ — это оператор, $\vec{F} = (F_1, F_2, ..., F_n)$, где $F_i \in \mathcal{L}(X_i, Y_i)$, F_i фиксированы, $i = \overline{1,n}$, действующий по следующему закону:

$$\vec{F}\,\vec{x} = (F_1 x_1, F_2 x_2, ..., F_n x_n) \tag{1}$$

для любого элемента $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \vec{X}$.

Рассмотрим множество таких n-компонентных операторов:

$$\mathcal{L}\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = \left\{\vec{F} = (F_1, F_2, ..., F_n) : F_i \in \mathcal{L}(X_i, Y_i), i = \overline{1,n}\right\}.$$

Любой оператор $\vec{F} = (F_1, F_2, ..., F_n) \in \mathcal{L}\left(\vec{X}, \vec{Y}\right)$ является линейным (это следует из линейности его компонент F_i, $i = \overline{1,n}$).

Введём в множестве $\mathcal{L}\left(\vec{X}, \vec{Y}\right)$ естественные линейные операции: $\left(\vec{F} + \vec{G}\right)\vec{x} = \vec{F}\vec{x} + \vec{G}\vec{x}$, $\left(\alpha\vec{F}\right)\vec{x} = \alpha\vec{F}\vec{x}$. Используя формулу (1), получаем

$$\vec{F} + \vec{G} = (F_1 + G_1, F_2 + G_2, ..., F_n + G_n), \alpha\vec{F} = (\alpha F_1, ..., \alpha F_n). \tag{2}$$

Каждый оператор $\vec{F} \in \mathcal{L}\left(\vec{X}, \vec{Y}\right)$ ограничен и для его естественной нормы

$$\left\|\vec{F}\right\|_{\mathcal{L}\left(\vec{X},\vec{Y}\right)} = \inf\left\{c : \left\|\vec{F}\,\vec{x}\right\|_{\vec{Y}} \leqslant c\|\vec{x}\|_{\vec{X}}, \forall\vec{x} \in \vec{X}\right\} \tag{3}$$

справедлива оценка $\left\|\vec{F}\right\|_{\mathcal{L}\left(\vec{X},\vec{Y}\right)} \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \|F_i\|_{\mathcal{L}(X_i,Y_i)}$.

Множество $\mathcal{L}\left(\vec{X}, \vec{Y}\right)$, снабжённое линейными операциями (2) и нормой (3), является вещественным нормированным пространством. Обозначим это пространство тем же символом $\mathcal{L}\left(\vec{X}, \vec{Y}\right)$.

Известно ([2, с.91]), что нормированное пространство $\mathcal{L}(N, B)$ ограниченных линейных операторов, отображающих нормированное пространство N в банахово пространство B, является банаховым пространством. Следовательно, $\mathcal{L}\left(\vec{X},\vec{Y}\right)$ — банахово пространство, ибо $\vec{X},\vec{Y}$ — банаховы пространства.

Таким образом, $\mathcal{L}\left(\vec{X},\vec{Y}\right)$ есть вещественное банахово пространство ограниченных линейных n-компонентных операторов, действующих из $\vec{X}$ в $\vec{Y}$ по закону (1).

В случае $\vec{Y}=\vec{X}$, т.е. $Y_i = X_i$, $i=\overline{1,n}$, пространство $\mathcal{L}\left(\vec{X},\vec{Y}\right)$ принимает вид

$$\mathcal{L}\left(\vec{X},\vec{X}\right)=\mathcal{L}\left(\vec{X}\right)=\left\{\vec{F}=(F_1,F_2,...,F_n):F_i\in\mathcal{L}\left(X_i\right),i=\overline{1,n}\right\}.$$

Операция умножения элементов пространства $\mathcal{L}\left(\vec{X}\right)$ вводится естественным образом: $\left(\vec{F}\vec{G}\right)\vec{x}=\vec{F}\left(\vec{G}\vec{x}\right)$. Используя формулу (1), получаем

$$\vec{F}\vec{G}=\left(F_1G_1,F_2G_2,...,F_nG_n\right). \tag{4}$$

Операция умножения (4) некоммутативна. Для элемента $\vec{I}=(I_1,I_2,...,I_n)\in\mathcal{L}(\vec{X})$ имеем: $\vec{I}\vec{F}=\vec{F}\vec{I}=\vec{F}$ для любого $\vec{F}\in\mathcal{L}(\vec{X})$. Заметим, что $\left\|\vec{I}\right\|_{\mathcal{L}(\vec{X})}=1$. Для любых $\vec{F},\vec{G}\in\mathcal{L}(\vec{X})$ справедливо кольцевое свойство $\left\|\vec{F}\,\vec{G}\right\|_{\mathcal{L}(\vec{X})}\leqslant\left\|\vec{F}\right\|_{\mathcal{L}(\vec{X})}\left\|\vec{G}\right\|_{\mathcal{L}(\vec{X})}$.

Непосредственно проверяется, что для любых $\vec{F},\vec{G},\vec{H}\in\mathcal{L}(\vec{X})$, $\alpha\in\mathbb{R}$ справедливы равенства $\vec{F}\left(\vec{G}\vec{H}\right)=\left(\vec{F}\vec{G}\right)\vec{H}$, $\vec{F}\left(\vec{G}+\vec{H}\right)=\vec{F}\vec{G}+\vec{F}\vec{H}$, $\left(\vec{F}+\vec{G}\right)\vec{H}=\vec{F}\vec{H}+\vec{G}\vec{H}$, $\alpha\left(\vec{F}\vec{G}\right)=\left(\alpha\vec{F}\right)\vec{G}=\vec{F}\left(\alpha\vec{G}\right)$.

Таким образом, банахово пространство $\mathcal{L}\left(\vec{X}\right)$, снабжённое операцией умножения (4), есть вещественная банахова алгебра ограниченных линейных n-компонентных операторов, действующих в пространстве $\vec{X}$ по закону (). Обозначим эту алгебру тем же символом $\mathcal{L}\left(\vec{X}\right)$. Алгебра $\mathcal{L}\left(\vec{X}\right)$ некоммутативна, единицей в ней является оператор $\vec{I}=(I_1,I_2,...,I_n)$.

В случае $n=2$, т.е. $\vec{X}=X_1\times X_2$, понятие двукомпонентного оператора $\vec{F}=(F_1,F_2)\in\mathcal{L}(\vec{X})$ приведено в [3, с. 63].

В случае $\vec{X}=E^n$, т.е. $X_i=E$, $i=\overline{1,n}$, алгебра $\mathcal{L}\left(\vec{X}\right)$ принимает вид $\mathcal{L}\left(E^n\right)=\left\{\vec{F}=(F_1,F_2,...,F_n):F_i\in\mathcal{L}\left(E\right),i=\overline{1,n}\right\}$.

В случае $\vec{X} = E^n$ пространство $\mathcal{L}\left(\vec{X}, \vec{Y}\right)$ принимает вид

$$\mathcal{L}\left(E^n, \vec{Y}\right) = \left\{\vec{F} = (F_1, F_2, ..., F_n) : F_i \in \mathcal{L}\left(E, Y_i\right), i = \overline{1, n}\right\}.$$

В случае $\vec{Y} = H^n$, т.е. $Y_i = H$, $i = \overline{1, n}$, пространство $\mathcal{L}\left(E^n, \vec{Y}\right)$ принимает вид

$$\mathcal{L}\left(E^n, H^n\right) = \left\{\vec{F} = (F_1, F_2, ..., F_n) : F_i \in \mathcal{L}\left(E, H\right), i = \overline{1, n}\right\}.$$

В случае $\vec{Y} = H^n$ пространство $\mathcal{L}\left(\vec{X}, \vec{Y}\right)$ принимает вид

$$\mathcal{L}\left(\vec{X}, H^n\right) = \left\{\vec{F} = (F_1, F_2, ..., F_n) : F_i \in \mathcal{L}\left(X_i, H\right), i = \overline{1, n}\right\}.$$

Если $\vec{F} = (F_1, F_2, ..., F_n) \in \mathcal{L}\left(\vec{X}, H^n\right)$, то для компонент элемента $\vec{F}\,\vec{x} = (F_1x_1, F_2x_2, ..., F_nx_n)$ справедливы включения $F_ix_i \in H$, $i = \overline{1, n}$. Следовательно, компоненты элемента $\vec{F}\,\vec{x}$ можно суммировать. Это позволяет ввести следующее понятие.

По определению, n-компонентный оператор $\vec{F} : \bar{X} \to H$ — это оператор $\vec{F} = (F_1, F_2, ..., F_n)$, где $F_i \in \mathcal{L}\left(X_i, H\right)$, F_i фиксированы, $i = \overline{1, n}$, действующий по следующему закону:

$$\vec{F}\,\vec{x} = F_1x_1 + F_2x_2 + ... + F_nx_n \tag{5}$$

для любого элемента $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \vec{X}$.

Множество таких n-компонентных операторов обозначим символом $\mathcal{L}\left(\vec{X}, H\right)$.

Любой оператор $\vec{F} = (F_1, F_2, ..., F_n) \in \mathcal{L}\left(\vec{X}, H\right)$ является линейным.

Введя в множестве $\mathcal{L}\left(\vec{X}, H\right)$ естественные линейные операции и используя формулу (5), получаем для любых $\vec{F}, \vec{G} \in \mathcal{L}\left(\vec{X}, H\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, равенства вида (2).

Каждый оператор $\vec{F} \in \mathcal{L}\left(\vec{X}, H\right)$ ограничен и для его естественной нормы справедлива оценка $\left\|\vec{F}\right\|_{\mathcal{L}\left(\vec{X}, H\right)} \leqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \|F_i\|_{\mathcal{L}(X_i, H)}$.

Множество $\mathcal{L}\left(\vec{X}, H\right)$, снабжённое естественными линейными операциями и нормой, является вещественным нормированным пространством. Обозначим это пространство тем же символом $\mathcal{L}\left(\vec{X}, H\right)$.

Пространство $\mathcal{L}\left(\vec{X}, H\right)$ является банаховым пространством, ибо $\vec{X}, H$ — банаховы пространства.

Таким образом, $\mathcal{L}\left(\vec{X}, H\right)$ есть вещественное банахово пространство ограниченных линейных n-компонентных операторов, действующих из $\vec{X}$ в H по закону (5).

Частным случаем пространства $\mathcal{L}\left(\vec{X}, H\right)$ является пространство $\mathcal{L}\left(E^n, H\right)$. В случае $H = E$, получаем пространство $\mathcal{L}\left(E^n, E\right)$

Литература

1. Р. Эдвардс. Функциональный анализ / Р. Эдвардс. // М.: Мир, — 1969. — 1072 с.
2. Садовничий В.А. Теория операторов / В.А. Садовничий. // М.: Дрофа, — 2001. — 384 с.
3. С.Г. Крейн. Функциональный анализ. Справочная математическая библиотека. / С.Г. Крейн. // М.: Наука, — 1972. — 544 с.

О МАЛОМ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕМ ВОЗМУЩЕНИИ ВЕКТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ В СЛУЧАЕ НЕГАТИВНОГО ОПЕРАТОРНОГО ДИСКРИМИНАНТА

В.И. Фомин (Тамбов, ТГУ им. Г.Р. Державина)
vasiliyfomin@bk.ru

В банаховом пространстве E рассматривается вырождающееся уравнение вида

$$t^2 x''(t) + tAx'(t) + Bx(t) = f(t), \quad 0 < t < \infty, \tag{1}$$

где $A, B \in \mathcal{L}(E)$; $\mathcal{L}(E)$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в пространстве E; $f(t) \in C([0, \infty); E)$; $C([0, \infty); E)$ — линейное пространство непрерывных функций, действующих из $[0, \infty)$ в E.

В дальнейшем используются следующие обозначения: I, O — соответственно тождественный и нулевой операторы в пространстве E; $G\mathcal{L}(E) = \left\{Q \in \mathcal{L}(E) : \exists Q^{-1} \in \mathcal{L}(E)\right\}$; $\mathbb{C}_{Re\lambda > 3} = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > 3\}$;

для $H \in \mathcal{L}(E)$ $\sigma(H)$ — спектр оператора H, $\mu_H = \min\{Re\lambda : \lambda \in \sigma(H)\}$, $\nu_H = \max\{Re\lambda : \lambda \in \sigma(H)\}$; при фиксированном $H \in \mathcal{L}(E)$ для любого $t \in \mathbb{R}$

$$e^{Ht} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k H^k}{k!},$$

$$\sin Ht = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1} H^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos Ht = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k} H^{2k}}{(2k)!}.$$

При доказательстве приводимой ниже теоремы используется следующий факт: $C(t) = \cos Ht$ является косинус-оператор функцией, следовательно ([1,с.26]), существуют такие постоянные $K = K(H) > 0$, $w = w(H) \geqslant 0$, что

$$\|\cos Ht\| \leqslant K e^{\omega|t|}, \quad t \in \mathbb{R},$$

в частности,

$$\|\cos Ht\| \leqslant K e^{\omega t}, \quad 0 \leqslant t < \infty. \tag{2}$$

Рассмотрим стабилизирующее, т.е. устраняющее вырожденность, возмущение уравнения (1) малым параметром $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 = \mathrm{const}$, $\varepsilon_0 > 0$:

$$(t+\varepsilon)^2 x_\varepsilon''(t) + (t+\varepsilon) A x_\varepsilon'(t) + B x_\varepsilon(t) = f(t), \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{3}$$

$$x_\varepsilon(0) = x_{\varepsilon,0}, \quad x_\varepsilon'(0) = x_{\varepsilon,0}'. \tag{4}$$

Выясним вопрос об условиях сходимости решения задачи (3), (4) при $\varepsilon \to 0$ к ограниченному при $t \to +0$ решению уравнения (1).

Заменой переменной $t = \varepsilon e^s - \varepsilon$ задача (3), (4) сводится к задаче вида

$$u_\varepsilon''(s) + (A - I)\, u_\varepsilon'(s) + B u_\varepsilon(s) = g_\varepsilon(s), \quad 0 \leqslant s < \infty, \tag{5}$$

$$u_\varepsilon(0) = x_{\varepsilon,0}, \quad u_\varepsilon'(0) = \varepsilon\, x_{\varepsilon,0}'. \tag{6}$$

где $u_\varepsilon(s) = x_\varepsilon(\varepsilon e^s - \varepsilon)$, $g_\varepsilon(s) = f(\varepsilon e^s - \varepsilon)$.

Вид решения задачи (5), (6) и характер его поведения при $\varepsilon \to 0$ определяются свойствами оператора $D = (A - I)^2 - 4B$, который назовём операторным дискриминантом уравнения (1).

Случаи $D = O$ и $D = F^2$, $F \neq O$, изучены в работах [2,3].

Пусть

1) $D = -F^2$, где $F \in G\mathcal{L}(E)$ (в этом случае операторный дискриминант D называется негативным);

2) $AF = FA$;

3) $\|x_{\varepsilon,0}\| \leqslant L_0\varepsilon^{\alpha}$, $\left\|x'_{\varepsilon,0}\right\| \leqslant L_1\varepsilon^{\beta}$, где $L_0, L_1 > 0$ — константы; α, β — постоянные, удовлетворяющие условиям $\alpha > \nu_\Lambda + \omega$, $\beta > \nu_\Lambda + \omega - 1$ (здесь $\Lambda = -2^{-1}(A - I)$, $\omega = \omega(F_1)$ — константа из неравенства (2) при $H = F_1$, где $F_1 = 2^{-1}F$);

4) $\mu_A > 3$, т.е. $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_{Re\lambda>3}$;

5) $\omega < -1 - 2^{-1}(1 - \mu_A)$.

Теорема. *Пусть выполнены условия 1) – 5). Тогда задача (3), (4) имеет решение*

$$x_\varepsilon(t) = e^{\Lambda \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}} \left\{ \left[\cos\left(F_1 \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right] x_{\varepsilon,0} + \right.$$

$$\left. + \left[\sin\left(F_1 \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right] F_1^{-1}\left(\varepsilon x'_{\varepsilon,0} - \Lambda x_{\varepsilon,0}\right) \right\} +$$

$$+ \int\limits_0^t e^{\Lambda \ln \frac{t+\varepsilon}{\tau+\varepsilon}} \left[\sin\left(F_1 \ln \frac{t+\varepsilon}{\tau+\varepsilon}\right)\right] \frac{F_1^{-1} f(\tau)}{\tau+\varepsilon} d\tau;$$

справедлив предельный переход $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon(t) = x_0(t)$, $t \in (0, \infty)$, где

$$x_0(t) = \int\limits_0^t e^{\Lambda \ln \frac{t}{\tau}} \left[\sin\left(F_1 \ln \frac{t}{\tau}\right)\right] \frac{F_1^{-1} f(\tau)}{\tau} d\tau;$$

предельная функция $x_0(t)$ *является решением уравнения (1); это решение ограничено при* $t \to +0$*; если функция* $f(t)$ *ограничена на* $[0, \infty)$*, то* $x_0(t)$ *ограничено на* $(0, \infty)$.

Литература

1. Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи / В.К. Иванов, И.В. Мельникова, А.И. Филинков. — М.: Физматлит, 1995. — 176 с.

2. Фомин В.И. Малые стабилизирующие возмущения векторного уравнения Эйлера второго порядка с ограниченными операторными коэффициентами / В.И. Фомин // Дифференциальные уравнения. — 2000. — Т. 36, №1. — С. 1568–1569.

3. Фомин В.И. Об уравнении Эйлера второго порядка с ограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве / В.И. Фомин // Дифференциальные уравнения. — 2006. — Т. 42, №4. — С. 483–488.

О КОМПЛЕКСНОЙ ОПЕРАТОРНОЙ ФОРМУЛЕ ЭЙЛЕРА

В.И. Фомин (Тамбов, ТГУ им. Г.Р. Державина)
vasiliyfomin@bk.ru

Пусть E — вещественное банахово пространство; I, O — соответственно тождественный и нулевой операторы в пространстве E; $\mathcal{L}(E)$ — вещественная банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих из E в E; $E^2_{\mathbb{R}} = \{w = (x, y) : x, y \in E\}$ — банахово пространство комплексных векторов над полем вещественных чисел с линейными операциями $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $\alpha\,(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$ и нормой $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$ ([1, с. 102]); $\mathcal{L}^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}\left(E^2_{\mathbb{R}}\right) = \{Z = (A, B) = A + \mathrm{J}B : A, B \in \mathcal{L}(E)\}$ — вещественная банахова алгебра ограниченных линейных комплексных операторов, действующих в пространстве $E^2_{\mathbb{R}}$ по закону: $Zw = (A + \mathrm{J}B)\,(x, y) = (Ax - By, Ay + Bx)$, с линейными операциями $(A_1 + \mathrm{J}B_1) + (A_2 + \mathrm{J}B_2) = A_1 + A_2 + \mathrm{J}\,(B_1 + B_2)$, $\alpha\,(A + \mathrm{J}B) = \alpha A + \mathrm{J}\,(\alpha B)$, операцией умножения $(A_1 + \mathrm{J}B_1)\,(A_2 + \mathrm{J}B_2) = A_1A_2 - B_1B_2 + \mathrm{J}\,(A_1B_2 + B_1A_2)$ и нормой $\|Z\| = \|(A, B)\| = \|A\| + \|B\|$ ([2]). Здесь $\mathrm{J} = (O, I)$ — мнимая операторная единица.

Алгебра $\mathcal{L}^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}\left(E^2_{\mathbb{R}}\right)$ некоммутативна, единицей в ней является оператор $\hat{I} = (I, O)$.

Комплексные операторные функции e^Z, $\sin Z$, $\cos Z$ определяются на $\mathcal{L}^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}\left(E^2_{\mathbb{R}}\right)$ стандартным образом:

$$e^Z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^k}{k!}; \quad \sin Z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{Z^{2k+1}}{(2k+1)!}; \quad \cos Z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{Z^{2k}}{(2k)!}.$$

Для функции e^Z справедливо основное свойство экспоненциальной функции: для любых $Z_1, Z_2 \in \mathcal{L}^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}\left(E^2_{\mathbb{R}}\right)$, удовлетворяющих условию $Z_1Z_2 = Z_2Z_1$, справедливо равенство

$$e^{Z_1 + Z_2} = e^{Z_1} e^{Z_2}. \tag{1}$$

Функция e^Z периодична: для любых $Z \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{O\mathbb{C}}\left(E_{\mathbb{R}}^2\right)$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, справедливо равенство

$$e^{Z+2\pi m \mathrm{J}} = e^Z. \tag{2}$$

Теорема. *Для любого* $Z \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{O\mathbb{C}}\left(E_{\mathbb{R}}^2\right)$ *справедлива комплексная операторная формула Эйлера:*

$$e^{\mathrm{J}Z} = \cos Z + \mathrm{J} \sin Z.$$

Следствие. *Для любого* $Z \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{O\mathbb{C}}\left(E_{\mathbb{R}}^2\right)$ *справедливы равенства*

$$\sin Z = -2^{-1}\mathrm{J}\left(e^{\mathrm{J}Z} - e^{-\mathrm{J}Z}\right), \quad \cos Z = 2^{-1}\left(e^{\mathrm{J}Z} + e^{-\mathrm{J}Z}\right). \tag{3}$$

С помощью соотношений (1), (3) доказаны следующие формулы комплексной операторной тригонометрии: основное комплексное операторное тригонометрическое тождество: $\sin^2 Z + \cos^2 Z = \hat{I}$ для любого $Z \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{O\mathbb{C}}\left(E_{\mathbb{R}}^2\right)$; формулы сложения: для любых $Z_1, Z_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{O\mathbb{C}}\left(E_{\mathbb{R}}^2\right)$, удовлетворяющих условию $Z_1 Z_2 = Z_2 Z_1$, справедливы равенства

$$\sin\left(Z_1 + Z_2\right) = \sin Z_1 \cos Z_2 + \cos Z_1 \sin Z_2, \tag{4}$$

$$\cos\left(Z_1 + Z_2\right) = \cos Z_1 \cos Z_2 - \sin Z_1 \sin Z_2. \tag{5}$$

Из соотношений (1) – (3) следует периодичность функций $\sin Z$, $\cos Z$: для любых $Z \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{O\mathbb{C}}\left(E_{\mathbb{R}}^2\right)$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, справедливы равенства

$$\sin\left(Z + 2\pi m \hat{I}\right) = \sin Z, \quad \cos\left(Z + 2\pi m \hat{I}\right) = \cos Z.$$

Используя равенства (4), (5), получаем формулы приведения: $\sin\left(Z + \pi\hat{I}\right) = -\sin Z$, $\cos\left(Z + \pi\hat{I}\right) = -\cos Z$, $\sin\left(Z + \frac{\pi}{2}\hat{I}\right) = \cos Z$, $\cos\left(Z + \frac{\pi}{2}\hat{I}\right) = -\sin Z$.

Литература

1. Данфорд Н., Шварц.Дж. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Шварц. — М.: Иностранная литература, 1962. — 896 с.

2. Фомин В.И. О случае комплексных корней характеристического операторного полинома линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка в банаховом пространстве / В.И. Фомин // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т. 56, № 8. — С. 1045–1054.

СМЕШАННЫЕ ПЛОЩАДИ И ПОЛНОТА СИСТЕМ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

Б.Н. Хабибуллин

(Уфа, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН)

khabib-bulat@mail.ru

$\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$ — множества соответственно *натуральных, вещественных* и *положительных чисел. Евклидову площадь* множества S в *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ обозначаем через $\operatorname{\mathsf{area}}(S)$. *Смешанную площадь пары выпуклых компактов* $K \subset \mathbb{C}$ и $S \subset \mathbb{C}$ можно определить (см. [1, 2]) как число

$$\operatorname{\mathsf{area}}(K, S) := 2 \operatorname{\mathsf{area}}\Bigl(\frac{1}{2}K + \frac{1}{2}S\Bigr) - \frac{1}{2}\bigl(\operatorname{\mathsf{area}}(K) + \operatorname{\mathsf{area}}(S)\bigr). \qquad (1)$$

Подмножество векторного топологического пространства *полное,* если замыкание его линейной оболочки совпадает с пространством. *Распределению точек* Z на $\mathbb{C}$ сопоставляем *экспоненциальную систему* $\mathsf{Exp}^{\mathsf{Z}} := \Bigl\{w \underset{w \in \mathbb{C}}{\longmapsto} w^{p-1}e^{zw} \Bigm| \mathbb{N} \ni p \leqslant \mathrm{Z}(z)\Bigr\}$ с *распределением показателей* Z, где $\mathrm{Z}(z)$ — число вхождений $z \in \mathbb{C}$ в Z. Мы применяем понятие смешанной площади (1) для получения шкалы условий полноты системы $\mathsf{Exp}^{\mathsf{Z}}$ в банаховом пространстве $C(S) \bigcap \mathsf{Hol}(\operatorname{\mathsf{int}} S)$ функций f, непрерывных на выпуклом компакте $S \subset \mathbb{C}$ и одновременно голоморфных во внутренности $\operatorname{\mathsf{int}} S$ компакта S, с нормой $\|f\|_S := \sup\bigl\{|f(z)| \bigm| z \in S\bigr\}$. Для 2π-*периодической функции* $s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *считающей радиальной функцией для распределения точек* Z *с весом* s *по аргументам* называем функцию

$$\mathsf{Z}_s^{\mathrm{rad}}(r) \underset{r \in \mathbb{R}^+}{:=} \mathsf{Z}(0)\|s\|_{\mathbb{R}} + \sum_{\substack{z \in \mathsf{Z} \\ 0 < |z| \leqslant r}} s(\arg z) \geqslant 0, \quad \|s\|_{\mathbb{R}} := \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \bigl|s(\theta)\bigr|. \qquad (2)$$

Опорную функцию непустого выпуклого компакта $S \subset \mathbb{C}$ обозначаем как $\mathsf{spf}_S\colon \theta \underset{\theta \in \mathbb{R}}{\longmapsto} \sup\limits_{s \in S} \operatorname{Re} s e^{-i\theta} \in \mathbb{R}$. Через $\bar{S}$ обозначаем множество, зеркально симметричное $S \subset \mathbb{C}$ относительно вещественной оси $\mathbb{R}$.

Следующий основной результат нашего исследования точен, существенно развивает и обобщает известные достаточные условия полноты систем $\mathsf{Exp}^{\mathsf{Z}}$ в пространствах функций на компактах с равномерной нормой (см. [3–7]) и даёт новые результаты о полноте в

[1] Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 22-21-00026, `https://rscf.ru/project/22-21-00026/` .

терминах *периметра, евклидовой площади, ширины в направлении, широты,* или *толщины, диаметра* области определения функций.

Основная теорема. *Пусть* Z *— распределение точек на* $\mathbb{C}$ *и для некоторого числа* $r_0 > 0$ *функция* $f\colon [r_0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ *выпуклая и* $\liminf\limits_{t\to+\infty} f(t)/t = 0$*. Если* S *— непустой выпуклый компакт в* $\mathbb{C}$*, выпуклый компакт* $K \subset \mathbb{C}$ *содержит* $0 \in K$*, т.е. опорная функция* $\mathsf{spf}_K \geqslant 0$*, а для считающей радиальной функции* $\mathsf{Z}^{\mathrm{rad}}_{\mathsf{spf}_K}$ *для* Z *из* (2) *с весом* spf_K *по аргументам имеет место соотношение*

$$\sup_{r_0\leqslant r<R<+\infty}\left(\int_r^R \frac{\mathsf{Z}^{\mathrm{rad}}_{\mathsf{spf}_K}(t)}{t^2} f\bigl(t^2\bigr)\,\mathrm{d}t - \frac{\mathsf{area}\bigl(K,\bar{S}\bigr)}{\pi}\int_r^R \frac{f\bigl(t^2\bigr)}{t}\,\mathrm{d}t\right) = +\infty,$$

то система $\mathsf{Exp}^{\mathsf{Z}}$ *полна в пространстве* $C(S) \bigcap \mathsf{Hol}(\mathsf{int}\, S)$.

Возможны версии основной теоремы и для компактов $S \subset \mathbb{C}^n$.

Литература

1. Хабибуллин Б.Н. Теорема Хелли и сдвиги множеств. I / Б.Н. Хабибуллин // Уфимск. матем. журн. — 2014. — Т. 6, № 3. — С. 98–111.

2. Хабибуллин Б.Н. Теорема Хелли и сдвиги множеств. II. Опорная функция, системы экспонент, целые функции / Б.Н. Хабибуллин // Уфимск. матем. журн. — 2014. — Т. 6, № 4. — С. 125–138.

3. Хабибуллин Б.Н. Множества единственности в пространствах целых функций одной переменной / Б.Н. Хабибуллин // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1991. — Т. 55, № 5. — С. 1101–1123.

4. Хабибуллин Б.Н. Теорема единственности для субгармонических функций конечного порядка / Б.Н. Хабибуллин // Матем. сб. — 1991. — Т. 182, № 6. — С. 811–827.

5. Хабибуллин Б.Н. Полнота систем целых функций в пространствах голоморфных функций / Б.Н. Хабибуллин // Матем. заметки. — 1999. — Т. 66, № 4. — С. 603–616.

6. Хабибуллин Б.Н. Полнота систем экспонент и множества единственности / Б.Н. Хабибуллин. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2012. — 176 с. `http://www.researchgate.net/publication/271841461`

7. Салимова А.Е., Хабибуллин Б.Н. Распределение нулей целых функций экспоненциального типа с ограничениями на рост вдоль прямой / А.Е. Салимова, Б.Н. Хабибуллин // Матем. заметки. — 2020. — Т. 108, № 4. — С. 588–600.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АДАПТИВНОЙ ТЕРАПИИ МЕЛАНОМЫ

Е.Н. Хайлов, Э.В. Григорьева (Москва, МГУ;
Дентон (США), Техасский женский университет)
khailov@cs.msu.su; krasavizha@yahoo.com

Современные таргентные методы лечения меланомы основаны на непрерывном использовании максимально переносимой пациентом дозы. При этом они быстро устраняют чувствительные к лекарственным препаратам раковые клетки. В результате, такое лечение изменяет конкуренцию между лекарственно-чувствительными и лекарственно-устойчивыми раковыми клетками в пользу последних. Поэтому лекарственно-устойчивые раковые клетки начинают доминировать в организме пациента и применяемое лечение может оказаться неэффективным. Новым направлением в лечении меланомы является адаптивная терапия [1]. Она позволяет выжить значительному количеству лекарственно-чувствительных раковых клеток благодаря использованию минимально эффективных доз лекарственных препаратов или временных перерывов в их приеме. В результате эти клетки подавляют размножение лекарственно-устойчивых раковых клеток за счет конкуренции за общие ограниченные ресурсы. Для успешных результатов адаптивной терапии крайне важно найти оптимальные моменты переключения с этапа ее активного проведения на этап ее отсутствия и наоборот с учетом особенностей пациента.

В настоящем докладе на заданном временном отрезке, являющемся общим периодом лечения меланомы, рассматривается математическая модель конкуренции Лотки-Вольтерры [2], задаваемая системой дифференциальных уравнений, которая описывает взаимодействие между концентрациями лекарственно-чувствительных и лекарственно-устойчивых раковых клеток при проведении адаптивной терапии. Эта модель также содержит линейно входящую управляющую функцию времени, отвечающую за переход от этапа активного проведения адаптивной терапии к этапу ее отсутствия и наоборот. Для нахождения оптимальных моментов переключения между этими этапами ставится задача минимизации целевой функции, представляющей собой взвешенную сумму раковой нагрузки (суммы концентраций лекарственно-чувствительных и лекарственно-устойчивых раковых клеток) в организме пациента как на всем общем периоде лечения меланомы, так и в его конечный момент.

Такая задача минимизации имеет невыпуклую область управления, что может привести к отсутствию оптимального решения в поставленной задаче минимизации в традиционных для приложений классах допустимых режимов. Чтобы избежать этой проблемы, берется выпуклая оболочка области управления. В результате возникает ослабленная задача минимизации, в которой оптимальное решение уже существует. Аналитическое исследование этой задачи минимизации осуществляется благодаря применению принципа максимума Понтрягина. Анализ функции переключений, которая определяет поведение оптимального управления в ослабленной задаче минимизации, показывает, что эта функция обращается в нуль только в отдельных точках отрезка времени, являющегося общим периодом лечения заболевания. А потому, соответствующее этой функции переключений оптимальное управление будет принимать только два значения, одно из которых отвечает этапу активного проведения адаптивной терапии, а другое отражает этап ее отсутствия. Этот факт означает, что оптимальное решение в ослабленной задаче минимизации одновременно выступает в роли оптимального решения и в исходной задаче минимизации. Последующий анализ функции переключений определяет возможные виды оптимального управления в зависимости от параметров исходной модели Лотки-Вольтерры, а также весовых коэффициентов целевой функции. Затем приводятся результаты численных расчетов для значений параметров рассматриваемой модели и ее начальных условий, взятых из реальной клинической практики [1].

Литература

1. Kim E., Brown J.S., Eroglu Z., Anderson A.R.A. Adaptive therapy for metastatic melanoma: predictions from patient calibrated mathematical models / E. Kim, J.S. Brown, Z. Eroglu, A.R.A. Anderson // Cancers. — 2021. — V. 13, 823. — P. 1–15.

2. Хайлов Е.Н., Григоренко Н.Л., Григорьева Э.В., Клименкова А.Д. Управляемые системы Лотки-Вольтерры в моделировании медико-биологических процессов / Е.Н. Хайлов, Н.Л. Григоренко, Э.В. Григорьева, А.Д. Клименкова. // М. : МАКС Пресс, 2021. — 204 с.

ОТСУТСТВИЕ РЕШЕНИЙ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ[1]

А. Ханан (РУДН)
1042205064@pfur.ru

Статья посвящена расширению результаты проблемы отсутствия решения для полулинейных неравенств с ограниченными коэффициентами от n–мерного вещественного пространства до n–мерного комплексного пространства.

Будем рассмотреть эллиптические задачи вида:

$$-\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial z_j}a_{k,j}(z,u)\geqslant |u|^q,\qquad z\in\mathbb{C}^n. \tag{1}$$

Здесь $a_{k,j}:\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}\to\mathbb{C},\quad i,j=1,...,n,$ — каратеодориевы функции, удовлетворяющие:

$$|a_{k,j}(z,u)|\leqslant a_0|u|^p,\quad (z,u)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}, \tag{2}$$

с постоянной $a_0\geqslant 0$ и некоторым $p>0$ и $q>p$. Чтобы сравнить два комплексных числа, у нас есть следующее определение:

Определение 1. Если z_1,z_2 некоторые комплексные числа, то выполняются следующие равенства:

$$Re(z_1)\geqslant Re(z_2);\ Im(z_1)\geqslant Im(z_2).$$

где: $z_1\geqslant z_2$

Условия отсутствия решений комплекснозначных полулинейных неравенств второго порядка с ограниченными коэффициентами приведены в следующей теореме.

Теорема 1. *Задача (1) не имеет глобального нетривиального слабого решения, когда*

$$q\geqslant\frac{n}{n-1}p,\qquad q>p$$

Доказательство: Пусть $z=x+iy$, где $x=\rho cos(\theta),y=\rho sin(\theta)\in\mathbb{R}$, и пусть $u(z)=R(\rho)e^{i\Theta(\theta)}$.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10–01–00000).

Теперь, из определения (1) мы можем легко записать неравенство (1) в виде:

$$\begin{cases} -ReL(Re(a_{i,j})) + ImL(Im(a_{i,j}) \geqslant R^q, \\ -ImL(Re(a_{i,j}) - ReL(Im(a_{i,j}) \geqslant 0, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$L(f(z)) = \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_k \partial z_j} = ReL(f) + iImL(f).$$

Теорема доказывается на основе определения слабых решений и методом основных функций (см.[1]).

Обобщение предыдущей теоремы на более высокий порядок, имеет вид:

$$-\sum_{k\leqslant|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} a_{\alpha}(z,u) \geqslant u^q \qquad z \in \mathbb{C}^n, \tag{4}$$

Теорема 2. *Задача (4) не имеет глобального нетривиального слабого решения, когда*

$$q \leqslant \frac{n}{n-2|\alpha|} p, \quad q > p.$$

Литература

1. Митидиери Э., Похожаев С. И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных / Э. Митидиери, С.И. Похожаев // Тр. МИАН, — 2001, — Том 234, — С. 3–383.

2. Галахов Е.И., Салиева О.А. Разрушение решений некоторых нелинейных неравенств с особенностями на неограниченных множествах сети / Е.И. Галахов, О.А. Салиева // Мат. заметки. — 2015. — Т. 98, № 2. — С. 187–195.

О СХОДИМОСТИ И СУММИРУЕМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ

Ю.Х. Хасанов (Душанбе, РТСУ)
yukhas60@mail.ru

Пусть B_p $(1 \leqslant p < \infty)$ — есть линейное пространство, состоящее из функций $f(x)$, для которых $|f(x)|^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ интегрируема по

Лебегу в пространстве R с нормой

$$\|f(x)\|_{B_p} = \left\{ \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p} < \infty.$$

Для функции $f(x) \in B_p$ рассмотрим ряд Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)|A_n|^{\beta} \ \ (0 < \beta < 2), \tag{1}$$

где $\varphi(n)$ — четная, положительная функция, определенная на множестве целых чисел, а

$$A_n = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) exp(-i\lambda_n x) dx.$$

— коэффициенты Фурье, λ_n — показатели Фурье или спектр рассматриваемой функции $f(x) \in B_p$.

Исследуются критерий абсолютной сходимости рядов вида (1), когда показатели Фурье имеют единственную предельную точку в бесконечности или в нуле, т.е. когда выполнены соответственно, следующие условия

$$\lambda_0 = 0, \ \ \lambda_{-n} = -\lambda_n, \ \ |\lambda_n| < |\lambda_{n+1}|, \ \ \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty, \tag{2}$$

$$\lambda_0 = 0, \ \ \lambda_{-n} = -\lambda_n, \ \ |\lambda_n| > |\lambda_{n+1}|, \ \ \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0. \tag{3}$$

Когда показатели Фурье удовлетворяют условиям (2) и при $0 < \beta < 2$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\frac{\lambda_{2^\nu}}{\lambda_{2^{\nu-1}}})^{k\beta} \psi_\beta(2^\nu) \omega_k^\beta (f; \lambda_{2^{\nu-1}}^{-1})_{B_2} < \infty,$$

где $\omega_k(f;h)$ — модуль непрерывности порядка k, а

$$\psi_\beta(2^\nu) = \{ \sum_{n=2^{\nu-1}}^{2^\nu+1} [\varphi(n)]^{\frac{2}{2-\beta}} \}^{1-\frac{\beta}{2}},$$

то ряд (1) сходится.

Аналогично, при выполнения условий (3) и $0 < \beta < 2$, из

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_\beta(2^\nu) W_k^\beta (f; \lambda_{2^{\nu-1}}^{-1})_{B_2} < \infty$$

следует сходимость ряда (1). Здесь величина

$$W_k(f;H)_{B_2} = \sup_{|t|\geqslant H} \|f_{T^r}(x)\|_{B_2} \ \ (H>0, k\in \mathbf{N}),$$

$$f_{T^r}(x) = \frac{1}{(2T)^r}\int_{x-T}^{x+T} dt_1 \int_{t_1-T}^{t_1+T} dt_2 \ldots \int_{t_{r-2}-T}^{t_{r-2}+T} dt_{r-1} \int_{t_{r-1}-T}^{t_{r-1}+T} f(t_r)dt_r$$

называется модулем усреднения порядка k функции $f(x)\in B_p$ (см. напр.[1]).

Заметим, что признаки абсолютной чезаровской суммируемости рядов Фурье почти–периодических в смысле Безиковича функций $f(x)\in B_p$ $(p\geqslant 1)$, в зависимости от поведения показателей Фурье, рассмотрены в работах [2]–[4].

Литература

1. Хасанов Ю.Х Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти–периодических функций / Ю.Х. Хасанов // Матем. заметки. — 2013. — Т. 94, № 5. — С.745–756.

2. Тиман М.Ф., Хасанов Ю.Х Об абсолютной суммируемости рядов Фурье почти–периодических функций Безиковича / М.Ф. Тиман, Ю.Х. Хасанов // Укр. мат. журнал. — 2009. — Т. 61, № 9. — С.1267–1276

3. Хасанов Ю.Х Об абсолютной суммируемости рядов Фурье почти–периодиче ских функций / Ю.Х. Хасанов // Укр. мат. журнал. — 2013. — Т. 65, № 12. — С.1716–1722.

4. Хасанов Ю.Х Об абсолютной чезаровской суммируемости рядов Фурье почти-периодических функций с предельными точками в нуле / Ю.Х. Хасанов // Уфимский. мат. журнал. — 2016. — Т. 8, № 4. — С.147–155.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕЧЕТКИМИ СОСТОЯНИЯМИ[1]

В.Л. Хацкевич (Воронеж, ВУНЦ ВВС ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина)

vlkhats@mail.ru

Нечеткое моделирование в последние десятилетия активно используется при решении различных прикладных задач, когда исходные данные неполные или слабо формализованные [1]. С другой стороны, при исследовании динамических процессов в условии

1

ограниченной исходной информации один из возможных подходов заключается в трактовке их параметров как реализации некоторых случайных процессов [2].

В данной работе сочетаются упомянутые подходы, а именно исследуются непрерывные случайные процессы с нечеткими состояниями (нечетко – случайные процессы). Точнее, мы считаем время и множество возможных нечетких состояний непрерывным. При этом сечение непрерывного нечеткого случайного процесса в любой момент времени представляет собой нечетко – случайную величину. В своем исследовании мы опираемся на известные результаты по теории нечетко – случайных величин [3,4] и классические результаты теории вещественных случайных процессов [2].

Пусть $[t_0, T]$ расширенный отрезок числовой оси, (Ω, Σ, P) вероятностное пространство, где Ω множество элементарных событий, Σ - σ-алгебра, состоящая из подмножеств множества Ω, P – вероятностная мера. Непрерывным случайным процессом с нечеткими состояниями или нечетко-случайным процессом (Н.С.П.) $\tilde{X}(t)$ будем называть случайную функцию $\tilde{X}(t) = \tilde{X}(\omega, t)$, значениями которой при $\forall t \in [t_0, T]$ являются нечетко – случайные величины (Н.С.В.).

Интервалы α – уровня $\tilde{X}(\omega, t)$ при фиксированных $t \in [t_0, T]$ определяют формулами $X_\alpha(\omega, t) = \{r \in R : \mu_{\tilde{X}(\omega,t)}(r) \geqslant \alpha\}$ $\alpha \in (0, 1]$, $X_0(\omega, t) = cl\{r \in R : \mu_{\tilde{X}(\omega,t)}(r) > 0\}$ где $\mu_{\tilde{X}(\omega,t)}(r)$ — функция принадлежности нечеткого числа $\tilde{X}(\omega, t)$, а cl обозначает замыкание множества. Интервал $X_\alpha(\omega, t)$ представим в виде $X_\alpha(\omega, t) = [X_\alpha^-(\omega, t), X_\alpha^+(\omega, t)]$. Его границы $X_\alpha^-(\omega, t), X_\alpha^+(\omega, t)$, представляющие собой скалярные случайные процессы, называют левым и, соответственно, правым α – индексами для $\tilde{X}(\omega, t)$.

Ниже будем рассматривать Н.С.П., для которых функции $X_\alpha^\pm(\omega, t)$ квадратично суммируемы по совокупности переменных на $\Omega \times [0, 1] \times [t_0, T]$.

Определим нечеткое ожидание $M\left(\tilde{X}(t)\right) = M\left(\tilde{X}(\omega, t)\right)$ Н.С.П. $X_\alpha^\pm(\omega, t)$ при $\forall t \in [t_0, T]$ как нечеткое ожидание соответствующей Н.С.В. с α – индексами

$$\left[M\left(\tilde{X}(t)\right)\right]_\alpha^\pm = \int\limits_\Omega X_\alpha^\pm(\omega, t) dP \ \ (\forall \alpha \in [0, 1]).$$

Ожиданием Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ назовем среднее нечеткого ожидания, т.е. число $m\left(\tilde{X}(t)\right)$, определяемое формулой

$$m\left(\tilde{X}(t)\right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\left[M(\tilde{X}(t))\right]^-(\alpha) + \left[M(\tilde{X}(t))\right]^+(\alpha)\right) d\alpha.$$

Корреляционной функцией Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ назовем величину

$$K_{\tilde{X}}(t,s) = cov\left(\tilde{X}(t), \tilde{X}(s)\right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(K_{X_\alpha^-}(t,s) + K_{X_\alpha^+}(t,s)\right) d\alpha.$$

Здесь $K_{X_\alpha^-}(t,s)$ и $K_{X_\alpha^+}(t,s)$ — корреляционные функции скалярных случайных процессов $X_\alpha^-(\omega,t)$ и $X_\alpha^+(\omega,t)$. Дисперсия Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ равна $D_{\tilde{X}}(t) = K_{\tilde{X}}(t,t)$.

К стационарным (в широком смысле) случайным процессам относятся такие ([2], гл. 8), математические ожидания которых не зависят от времени, а корреляционные функции зависят лишь от разности аргументов.

Назовем Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ стационарным, если его нечеткое ожидание $M\left(\tilde{X}(t)\right)$ и ожидание $m\left(\tilde{X}(t)\right)$ постоянны, а корреляционная функция $K_{\tilde{X}}(t_1,t_2)$ зависит от разности аргументов $t_2 - t_1 = \tau$. Имеет место

Теорема 1. *Пусть α – индексы Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ при $\forall\alpha \in [0,1]$ являются стационарными случайными процессами. Тогда Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ является стационарным случайным процессом.*

Теорема 2. *Пусть α – индексы Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ при $\forall\alpha \in [0,1]$ допускают спектральные разложения*

$$X_\alpha^\pm(\omega,t) = m_\alpha^\pm + \sum_{i=0}^{\infty}\left((\xi_\alpha^\pm)_i \cos\omega_i t + (\eta_\alpha^\pm)_i \sin\omega_i t\right),$$

причем при $\forall\alpha \in [0,1]$ для случайных величин $(\xi_\alpha^\pm)_i$, $(\xi_\alpha^\pm)_i$ выполнены условия: $E(\xi_\alpha^\pm)_i = E(\eta_\alpha^\pm)_i = 0$ $(i = 0,1,2,...)$; $E\left((\xi_\alpha^\pm)_i(\xi_\alpha^\pm)_j\right) = E\left((\eta_\alpha^\pm)_i(\eta_\alpha^\pm)_j\right) = 0$ $(i \neq j)$; $E\left((\xi_\alpha^\pm)_i(\eta_\alpha^\pm)_j\right) = 0$ $(\forall i,j = 0,1,2,...)$. Пусть дисперсии $D(\xi_\alpha^\pm)_i = D(\eta_\alpha^\pm)_i = (D_\alpha^\pm)_i$, причем $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(D_\alpha^\pm)_i < \infty$, $\forall\alpha \in [0,1]$.

Тогда $\tilde{X}(t)$ — стационарный Н.С.П.: его нечеткое ожидание постоянно и имеет α-индексы m_α^- и m_α^+, а корреляционная функция Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ имеет вид

$$K_{\tilde{X}}(\tau) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_0^1 \left((D_\alpha^-)_i + (D_\alpha^+)_i\right) d\alpha cos\omega_i\tau.$$

При этом дисперсия Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ определяется формулой $D_{\tilde{X}} = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\int\limits_0^1 ((D_\alpha^-)_i + (D_\alpha^+)_i)\, d\alpha$.

Литература

1. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. / А. Пегат. — М. : БИНОМ, 2016. — 798 с.

2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и их инженерные приложения. / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. — М. : Кнорус, 2016. — 439 с.

3. Puri M. L., Ralescu D.A. Fuzzy random variables / M. L. Puri, D.A. Ralescu // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1986. — V. 114. — P. 409–422.

4. Feng Y., Hu. L., Shu H. The variance and covariance of fuzzy random variables. / Y. Feng, L. Hu , H. Shu// Fuzzy Systems. — 2001. — V. 120. — P. 487–497.

О ПОЧЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

А.П. Хромов (Саратов, СГУ)
KhromovAP@info.sgu.ru

1. Рассмотрим на $[0,1]$ ряд Фурье функции $\varphi(x) \in L[0,1]$ по синусам, т.е. ряд

$$\sum_1^\infty 2(\varphi, \sin n\pi\xi)\sin n\pi x, \tag{1}$$

где $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Будем искать сумму ряда (1) среди функций из $L[0,1]$, привлекая аксиому:

$$\int_0^x \sum = \sum \int_0^x . \tag{2}$$

Пусть сумма ряда (1) есть $g(x) \in L[0,1]$. Тогда в силу (2):

$$\int_0^x g(t)dt = \sum_1^\infty 2(\varphi, \sin n\pi\xi)\int_0^x \sin n\pi t\, dt. \tag{3}$$

По теореме 3 [1, с.320] ряд (3) сходится в каждой точке и его сумма есть $\int_0^x \varphi(\xi)d\xi$. Поэтому из (3) получаем, что $g(x) = \varphi(x)$ почти всюду.

Тем самым (2) в применении к ряду (1) дает аналог метода суммирования Фейера. В самом деле, в случае сходимости ряда (1) почти всюду получаем, что и теперь сумма ряда (1) есть $\varphi(x)$ (регулярность метода). В случае расходимости ряда (1) также как и при суммировании по Фейеру получаем, что (2) дает сумму ряда (1), равную $\varphi(x)$. Особенность нашего метода в том, что у нас совсем не участвуют частичные суммы ряда (1).

2. Здесь мы покажем, как аксиома (2) позволяет определить сумму расходящегося ряда из косинусов:

$$\sum_1^\infty \cos n\pi x, \tag{4}$$

не являющегося рядом Фурье.

Лемма. Ряд (4) при $x \in [0, 1]$ не имеет суммы среди функций из $L[0, 1]$.

Доказательство. Допустим противное, т.е., пусть эта сумма есть $g(x) \in L[0, 1]$. Тогда в силу (2):

$$\int_0^x g(t)dt = \sum_1^\infty \int_0^x \cos n\pi t dt = \sum_1^\infty \frac{\sin n\pi x}{n\pi}. \tag{5}$$

Ряд

$$\sum_1^\infty \frac{\sin n\pi x}{n\pi} \tag{6}$$

сходится [2, с. 124] при всех x, и его сумма $\sigma(x)$ при $x \in [0, 1]$ есть

$$\sigma(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - x), & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

т.е., разрывная функция. Тем самым (5) не имеет места.

Хотя мы и не нашли суммы ряда (4), но зато в результате почленного интегрирования пришли к ряду (6). Рассматривая сумму ряда (6) на $[-1; 1]$ как обобщенную функцию получаем [см. 3, с. 33].

Теорема. *Сумма ряда* (4) *на* $[-1; 1]$ *есть* $-\frac{1}{2} + \delta(x)$, *где* $\delta(x)$ *— дельта–функция Дирака.*

Литература

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. // М. Л. : ГИТТЛ. — 1957. — 552 с.

2. Тригонометрические ряды / Н.К. Бари. // М.: Физматлит. — 1961. — 936 с.

3. Ломов И.С. Обобщенные функции в задачах математической физики: учебное пособие / И.С. Ломов. // М.: Макс Пресс. — 2021. — 112 с.

НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОТ ОДНОЙ ФУНКЦИИ ФОКСА С ЧЕТЫРЬМЯ ПАРАМЕТРАМИ

Ф.Г. Хуштова (Нальчик, ИПМА КБНЦ РАН)

khushtova@yandex.ru

В работе рассматривается функция Фокса с четырьмя параметрами, которая возникает при решении краевых задач для B–параболического уравнения с производной дробного порядка по времени [1], [2]. Для неё получены формулы дробного интегрирования Римана–Лиувилля и Эрдейи–Кобера.

Пусть $\varphi(x) \in L(a,b)$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$.

Определение 1. *Операторы дробного интегрирования Римана–Лиувилля* порядка α от функции $\varphi(x)$ определяются по формулам [3, с. 9]

$$D_{ax}^{-\alpha}\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt,$$

$$D_{bx}^{-\alpha}\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_x^b (t-x)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt.$$

Определение 2. *Операторы дробного интегрирования Эрдейи–Кобера* от функции $\varphi(x)$ определяются по формулам [4, с. 246], [5, с. 105]:

$$I_{0+;2,\beta}^{\alpha}\varphi(x) = \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\, x^{-2(\alpha+\beta)} \int\limits_0^x (x^2-t^2)^{\alpha-1} t^{2\beta+1}\varphi(t)\,dt,$$

$$I^{\alpha}_{-;2,\beta}\varphi(x) = \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\, x^{2\beta} \int\limits_{x}^{\infty} (t^2 - x^2)^{\alpha-1} t^{1-2(\alpha+\beta)} \varphi(t)\, dt.$$

Пусть $0 < \rho \leqslant 2$, μ, σ и $\nu \in \mathbb{C}$, $(\sigma+\nu)/2 \notin \mathbb{Z}$. Рассмотрим функцию от комплексного переменного z

$$\mathcal{J}^{\rho,\mu,\sigma}_{\nu}(z) = H^{2,1}_{2,3}\left[\left(\frac{z}{2}\right)^2 \,\middle|\, \begin{matrix} (1-\sigma/2, 1),\ (\mu - \rho\,\sigma/2, \rho) \\ (\nu/2, 1),\ (1-\sigma/2, 1),\ (-\nu/2, 1) \end{matrix} \right],$$

где $H^{2,1}_{2,3}[...]$ — *H–функция Фокса* [6, с. 528].

Имеют место следующие формулы дробного интегрирования.

Свойство 1. *Пусть $Re\,\mu > 0$. Тогда справедлива формула*

$$D^{-\alpha}_{cx} |x-c|^{\mu-\rho\sigma/2-1} \mathcal{J}^{\rho,\mu,\sigma}_{\nu}\left(|x-c|^{-\rho/2}\right) =$$

$$= |x-c|^{\mu+\alpha-\rho\sigma/2-1} \mathcal{J}^{\rho,\mu+\alpha,\sigma}_{\nu}\left(|x-c|^{-\rho/2}\right).$$

Свойство 2. *Пусть выполняются условия $-1 < Re\,\nu < 2 - Re\,\sigma$, либо $2 - Re\,\nu < Re\,\sigma < 4 + Re\,\nu$. Тогда справедлива формула*

$$x^{\nu-\alpha} I^{\alpha}_{0+;2,\nu-\alpha}\, x^{2\alpha-\nu} \mathcal{J}^{\rho,\mu,\sigma}_{\nu}(x) = 2^{\alpha} \mathcal{J}^{\rho,\mu,\sigma-\alpha}_{\nu+\alpha}(x).$$

Свойство 3. *Пусть $Re\,(\nu+\sigma)/2 > Re\,\alpha$. Тогда справедлива формула*

$$x^{\alpha-\nu} I^{\alpha}_{-;2,\nu-\alpha}\, x^{\nu} \mathcal{J}^{\rho,\mu,\sigma}_{\nu}(x) = 2^{\alpha} \mathcal{J}^{\rho,\mu,\sigma-\alpha}_{\nu-\alpha}(x).$$

Доказательство приведённых формул можно найти в работе [7].

Литература

1. Хуштова Ф.Г. Первая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и производной Римана—Лиувилля / Ф.Г. Хуштова // Матем. заметки. — 2016. — Т. 99, № 6. — С. 921–928.

2. Хуштова Ф.Г. Вторая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и частной производной Римана—Лиувилля / Ф.Г. Хуштова // Матем. заметки. — 2018. — Т. 103, № 3. — С. 460–470.

3. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение / А.М. Нахушев. — М. : Физматлит, 2003. — 272 с.

4. Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. — Мн. : Наука и техника, 1987. — 688 с.

5. Kilbas A.A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. — Amsterdam: Elsevier Science, Publishers BV, 2006. — 499 с.

6. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Т. 3. Дополнительные главы / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. — М. : Физматлит, 2003. — 688 с.

7. Хуштова Ф.Г. Некоторые формулы дробного интегрирования от одной функции Фокса с четырьмя параметрами / Ф.Г. Хуштова // Доклады АМАН. — 2022. — Т. 22, № 4. — С. 29–38.

ПРИБЛИЖЕНИЯ ЛОКАЛЬНО АППРОКСИМАТИВНО КОМПАКТНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ[1]

И.Г. Царьков (Москва, МГУ, механико-математический факультет, Московский центр фундаментальной и прикладной математики)

tsar@mech.math.msu.su

Определение 1. *Пусть* $X = (X, \|\cdot\|)$ *– линейное нормированное пространство,* $M \subset X$*, точка* $x \in X$ *называется точкой аппроксимативной компактности для множества* M*, если всякая минимизирующая последовательность* $\{y_n\} \subset M$ *(т.е. такая, что* $\|x - y_n| \to \varrho(x, M)$ $(n \to \infty)$*) имеет подпоследовательность* $\{y_{n_k}\}$*, сходящуюся к некоторой точке* $y \in M$ *при* $k \to \infty$*. Если все точки* $x \in X$ *являются точками аппроксимативной компактности для множества* M*, то множество* M *называется аппроксимативно компактным.*

Теорема 1. *Пусть* X *– равномерно выпуклое банахово пространство,* $M \subset X$ *– чебышевское множество, представляющее собой не более, чем счетное объединение аппроксимативно компактных множеств. Тогда множество* M *является чебышевским солнцем. Если дополнительно* X *– гладкое пространство, то* M *– выпуклое множество.*

Определение 2. *Пусть* $X = (X, \|\cdot\|)$ *– линейное нормированное пространство, множество* $M \subset X$ *называется локально аппроксимативно компактным (локально слабо компактным), если для любой точки* $x \in M$ *существует ее замкнутая окрестность* $U \subset X$*, для которой множество* $M \cap U$ *является аппроксимативно компактным (слабо компактным).*

[1] Исследование выполнено в МГУ им. М. В. Ломоносова за счет гранта Российского научного фонда (проект 22-21-00204).

Отметим, что слабо компактное множество в равномерно выпуклом банаховом пространстве является аппроксимативно компактным. Поэтому локально слабо компактное множество является локальным аппроксимативно компактным в равномерно выпуклом банаховом пространстве.

Теорема 2. *Пусть X – равномерно выпуклое банахово пространство, $M \subset X$ – сепарабельное локально аппроксимативно компактное чебышевское множество. Тогда множество M является чебышевским солнцем. Если дополнительно X – гладкое пространство, то M – выпуклое множество.*

Далее мы рассмотрим множества обобщенных дробей и произведений и применим к этим множествам полученные выше результаты. При этом мы будем использовать известный факт, что всякое замкнутое выпуклое непустое множество является аппроксимативно компактным в равномерно выпуклом пространстве. Здесь также надо отметить, что большинство классических нелинейных объектов, использующихся для аппроксимации, являются невыпуклыми.

Пример. *Приближение произведениями.* Пусть G – непустое ограниченно компактное подмножество $L_\infty = L_\infty(\Omega, \mu)$, $V_j \subset L_p = L_p(\Omega, \mu)$ – выпуклое замкнутое множество $(1 < p < \infty,\ j \in \mathbb{N})$. Рассмотрим множества $G_j := \{g \in G \mid \|g\|_{L_\infty} \leqslant j\}$ $(j \in \mathbb{N})$. Пусть $V := \bigcup\limits_j V_j$,

$$\mathcal{M} := \{gv \mid g \in G,\ v \in V\}.$$

Множество $\mathcal{M}$ не является чебышевским множеством в L_p, если не является выпуклым. Отметим, что в пространствах L_p всякое выпуклое и замкнутое множество является чебышевским, при этом замкнутость множества является также и необходимым условием.

Пример. *Приближение обобщенными дробями.* Пусть $G := \bigcup\limits_j G_j$, $V := \bigcup\limits_j V_j$, $G_0 \subset L_\infty$, где

$$G_j = \{g \in G_0 \mid 1/j \leqslant g(\cdot) \leqslant j \text{ почти всюду}\}$$
$$\text{– непустой компакт в } L_\infty\ (j \in \mathbb{N}),$$
$$V_j \subset L_p \text{ – выпуклое замкнутое множество } \ (1 < p < \infty,\ j \in \mathbb{N}).$$

Через $\mathcal{R}$ обозначим множество дробей

$$\{v/g \mid v \in V,\ g \in G\}.$$

Так же, как и в предыдущем примере можно показать, что множество $\mathcal{R}$ является чебышевским множеством в L_p тогда и только тогда, когда оно является замкнутым и выпуклым.

Пример. *Приближение ридж-функциями.* Пусть $\mathcal{A}$ – подмножество в $\mathbb{R}^m$, допускающее исчерпание компактами (т.е. представляющее собой счетное объединение компактов). Рассмотрим множество функций из $L_p(\mathbb{R}^m)$ $(1 < p < \infty)$

$$\mathfrak{R} = \Big\{ f((a,x)) \mid f \in L_p(\mathbb{R}),\ a \in \mathcal{A},\ x \in \mathbb{R}^m \Big\}$$

(в вышеприведенным обозначении $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$). Так же, как и в предыдущих примерах доказывается, что для того, чтобы множество $\mathfrak{R}$ было чебышевским в $L_p(\mathbb{R}^m)$ необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым и выпуклым. Аналогичное утверждение можно получить и для множеств вида

$$\mathfrak{R}_n = \Big\{ \sum_{k=1}^{n} f_k((a_k,x)) \mid f_k \in L_p(\mathbb{R}),\ a_k \in \mathcal{A},\ x \in \mathbb{R}^m \Big\},$$

или даже более общего вида

$$\widehat{\mathfrak{R}}_n = \Big\{ \sum_{k=1}^{n} f_k((a_k,x) + c_k) \mid f_k \in L_p(\mathbb{R}),\ a_k \in \mathcal{A},\ c_k \in \mathcal{C},\ x \in \mathbb{R}^m \Big\},$$

где $\mathcal{C}$ – множество из $\mathbb{R}$, допускающее исчерпание компактами.

К РАВНОМЕРНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ С КВАЗИДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

О.Б. Цехан (Гродно, ГрГУ)
tsekhan@grsu.by

На временном интервале $T = [t_0, t_1]$ рассматривается линейная нестационарная сингулярно возмущенная система с выходом

$$\begin{array}{l} \dot{z}(t) = A\,(t,\mu)\,z(t),\ z = (x,y)' \in \mathbb{R}^n,\ x \in \mathbb{R}^{n_1}, y \in \mathbb{R}^{n_2}, t \in T, \\ v(t) = c\,(t)\,z(t),\ v \in \mathbb{R},\ t \in T,\ z(t_0) = z_0 \in \mathbb{R}^n,\ z_0 = (x_0, y_0)', \end{array} \qquad (1)$$

где μ — малый параметр, $\mu \in (0,\mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$, $n = n_1 + n_2$, $A\,(t,\mu) = A^0(t) + \frac{1}{\mu}A^1(t)$, $A^0\,(t) = \left(\begin{smallmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $A^1\,(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ A_3(t) & A_4(t) \end{smallmatrix}\right)$,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ «Конвергенция–2025», задание 1.2.04).

$c(t) = (c_1(t), c_2(t))$, $A_i(t), \overline{1,4}$, $c_j(t), j = 1,2$, — непрерывные на T матричные функции подходящих размеров. Систему (1) отождествим с парой матричных функций $A(t,\mu), c(t)$ и будем обозначать (A_μ, c).

Пусть в системе (1) реализовались некоторые фиксированное $\mu \in (0,\mu^0]$ и неизвестное начальное состояние z_0, что породило процесс $z(t,\mu,z_0)$ $(t \in T)$ и выходную функцию $v(t,\mu,z_0)$ $(t \in T)$.

Для целого $m > 0$ обозначим через $\mathcal{U}_m(T)$ совокупность всех нижнетреугольных $\big((m+1)\times(m+1)\big)$–матриц $P(t)$ с непрерывными на T элементами $p_{ki}(t)$ $(k,i = 0,1,\ \dots,m)$, удовлетворяющими условию $p_{kk}(t) \neq 0$ $(t \in T)$, $(k = 0,1,\ \dots,m)$. Пусть $P(t) \in \mathcal{U}_k(T)$.

Определение 1 [1]. *При фиксированном $\mu > 0$ система (1) имеет P–класс k (записываем $(A_\mu, c) \in \{P,k\}$), если всякая ее выходная функция $v(t,\mu,z_0)$, $(t \in T)$, имеет непрерывные квазипроизводные [2] относительно матрицы $P(t)$ до порядка k включительно.*

Если параметр μ принимает всевозможные значения из $(0,\mu^0]$, то система (1) задает μ–параметрическое семейство $\{A^0, A^1, c\}_{\mu^0}$ систем, определяемых тройкой матричных функций A^0, A^1, c. Считаем, что $\{A^0, A^1, c\}_{\mu^0} \in \{P,k\}$, если $\{A_\mu, c\} \in \{P,k\} \forall \mu \in (0,\mu^0]$.

Пусть $(A_\mu, c) \in \{P, n-1\}$. Тогда определена n–вектор строка $V_P(t,\mu,z_0) = \big({}^0_P v(t,\mu,z_0) \quad {}^1_P v(t,\mu,z_0) \quad \dots \quad {}^{n-1}_{P} v(t,\mu,z_0)\big)$, где ${}^k_P f(t)$ — квазипроизводная порядка k [2] функции $f(t)$ относительно матрицы $P(t)$.

Определение 2. *При фиксированном $\mu \in (0,\mu^0]$ $(A_\mu, c) \in \{P,k\}$ P–равномерно наблюдаема на T, если $\forall z_0 \in \mathbb{R}^n$ отображение $z(t,\mu) \to V_P(t,\mu,z_0)$ инъективно для каждого $t \in T$. Семейство систем $\{A^0, A^1, c\}_{\mu^0} \in \{P, n-1\}$ P–равномерно наблюдаема на T, если любая $(A_\mu, c) \in \{A^0, A^1, c\}_{\mu^0}$ P–равномерно наблюдаема на T.*

С системой (1) связаны [3] независящие от параметра μ нестационарная вырожденная система (ВС) размерности n_1 и t–параметрическое семейство стационарных быстрых подсистем размерности n_2, связанных с системой погранслоя (СП). Пусть для заданной $P \in \mathcal{U}_{n-1}(T)$ матрица $\bar{P}$ есть ее верхний левый блок размера $(n_1 \times n_1)$.

Теорема 6. *Пусть $A_i(t), i = \overline{1,4}$ непрерывно дифференцируемы на T и $Re\,\lambda(A_4(t)) \leqslant -\alpha < 0 \forall \in T$. Если ВС $\bar{P}$–равномерно наблюдаема на T и каждая система из t–семейства быстрых подсистем полностью наблюдаема на T, то найдется такое $\mu^* \in (0,\mu^0]$, что семейство $\{A^0, A^1, c\}_{\mu^*}$ (1) P–равномерно наблюдаемо на T при каждой $P \in \mathcal{U}_{n-1}(T)$, для которой $\bar{P}$ есть верхний левый $(n_1 \times n_1)$–блок, и (в случае $n \geqslant 2$) $\{A^0, A^1, c\}_\mu \in \{P, n-1\} \,\forall \mu \in (0,\mu^0]$.*

Доказательство использует критерий P–равномерной наблюдаемости нестационарных систем [2], расщепляющее преобразование системы (1) [3], исследование структуры и свойств матриц наблюдаемости подсистем ВС и СП расщепленной системы, инвариантность принадлежности системы (1) P–классу $n-1$ [2] относительно реализованного расщепляющего преобразования, а также сохранение полноты ранга матрицы наблюдаемости при малых аддитивных и невырожденных мультипликативных преобразованиях.

Замечание. Условия, при которых верно $\{A^0, A^1, c\}_\mu \in \{P, n-1\}\,\forall \mu \in (0, \mu^0]$, изложены в [1].

Литература

1. Цехан О.Б. Об условиях квазидифференцируемости выходов одной линейной нестационарной системы, зависящей от параметра / О. Б. Цехан // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Междунар. конф. : Воронежская зимняя математическая школа — Воронеж : ВГУ, — 2023. —- С. 346–348.

2. Астровский А.И. Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений./ А.И. Астровский, И.В. Гайшун // Минск: Беларус. наука, — 2013.

3. Kokotovic P.V. Singular Perturbations Methods in Control: Analysis and Design / P.V. Kokotovic, H.K. Khalil, J. O'Reilly. — NY : Academic Press, 1999. — 371 p.

ОБ УНИВЕРСАЛЬНОЙ БЫСТРОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

А.Д. Чернышов, С.Ф. Кузнецов, В.В. Горяйнов, О.Ю. Никифорова, И.Г. Рукин (Воронеж, ВГУИТ, ВГТУ)
sfs134@mail.ru

Пусть некоторая непериодическая функция $f(x) \in L_2^\alpha[-a \leqslant x \leqslant a]$ из пространства Гильберта рассматривается на отрезке $[-a \leqslant x \leqslant a]$. Быстрым разложением $f(x)$ назовем сумму некоторой граничной функции $M_p(x)$ и ряда Фурье для разности $f(x) - M_p(x)$, т. е.

$$\begin{gathered}
f(x) = M_p(x) + a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m\pi \frac{x}{a} + b_m \sin m\pi \frac{x}{a}, \\
a_0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} (f(x) - M_p(x)) \; dx, \\
a_m = \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} ((f(x) - M_p(x))) \cos m\pi \frac{x}{a} \, dx, \\
b_m = \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} (f(x) - M_p(x)) \sin m\pi \frac{x}{a} \, dx.
\end{gathered} \tag{1}$$

Граничная функция $M_p(x)$ в (1) увеличивает скорость сходимости ряда Фурье для разности $(f(t) - M_p(t))$, что дает возможность его многократного дифференцирования и определяется суммой

$$M_p(x) = \sum_{q=0}^{p} A_q P_q(x), \tag{2}$$

где A_q некоторые постоянные, а $P_q(x)$ быстрые полиномы.

Коэффициенты A_q определяются по формуле [1]

$$A_q = f^{(q)}(a) - f^{(q)}(-a), \tag{3}$$

а $P_q(x)$ полиномы четной и нечетной степеней запишем рекуррентными формулами через определенные интегралы

$$\begin{gathered}
P_0(x) = \frac{x}{2a}, \; P_{2q-1}(x) = \int_0^x P_{2q-2}(x) \, dx, \\
P_{2q}(x) = \int_0^x P_{2q-1}(t) \, dt - \frac{x}{a} \int_0^a P_{2q-1}(x) \, dx, \; q = 1, 2, \ldots
\end{gathered} \tag{4}$$

Для определения коэффициентов a_0, a_m, b_m используем дискретную систему

Координаты $2N$ расчетных точек x_j зададим формулой

$$x_j = ja/N, \; j = -N \div N - 1. \tag{5}$$

Коэффициенты a_0, a_m, b_m разложения (5)находятся в явном виде:

$$a_0 = \frac{1}{2N} \sum_{j=-N}^{N-1} (f(t_j) - M_p(t_j)) \, . \tag{6}$$

$$a_m = \frac{1}{N}\sum_{j=-N}^{N-1}\left(f(x_j) - M_p(x_j)\right)\cos m\pi\frac{x_j}{a},\ m = 1 \div N-1. \tag{7}$$

$$b_m = \frac{1}{N}\sum_{j=-N}^{N-1}\left(f(x_j) - M_p(x_j)\right)\sin m\pi\frac{x_j}{a},\ m = 1 \div N-1. \tag{8}$$

Подставляя a_0, a_m, b_m из (6), (7) и (8) в (1), получим формулу для полной тригонометрической интерполяции $f(x)$ на отрезке $[-a, a)$ при $f(x)$ задании дискретными значениями $f(x_j)$:

$$\begin{gathered} f(x) = \frac{1}{2N}\sum_{j=-N}^{N-1}\left(f(x_j) - M_p(x_j)\right) + \\ \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{j=-N}^{N-1}\left(f(x_j) - M_p(x_j)\right)\cos n\pi\frac{x_j}{a}\cos n\pi\frac{x}{a} + \\ +\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{j=-N}^{N-1}\left(f(x_j) - M_p(x_j)\right)\sin n\pi\frac{x_j}{a}\sin n\pi\frac{x}{a} + M_p(x), \\ f(x) \in L_2^{p+2}\left(x \in [-a, a)\right). \end{gathered} \tag{9}$$

Литература

1. Chernyshov A.D. Universal fast expansion for solving nonlinear problems / A.D. Chernyshov, D.S. Saiko, E.N. Kovaleva // Journal of Physics: Conference Series. — 2020. — 1479. — 012147.

2. Чернышов А.Д. Универсальные быстрые тригонометрические интерполяции для интегро–дифференциальных задач различного порядка / А.Д. Чернышов, О.Ю. Никифорова, В.В. Горяйнов, С.Ф. Кузнецов, И.Г. Рукин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2022. — № 4 (54). — С. 57–70.

О ПОДХОДАХ К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ КОЭФФИЦИЕНТОВ И ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ В ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ[1]

В.Ф. Чистяков, Е.В. Чистякова (Иркутск, ИДСТУ СО РАН)

chist@icc.ru, elena.chistyakova@icc.ru

[1] Результаты получены в рамках госзадания Минобрнауки России по проекту «Теория и методы исследования эволюционных уравнений и управляемых систем с их приложениями» (№ гос регистрации: 121041300060-4).

В докладе рассматриваются системы обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ)

$$\Lambda_k x := \sum_{i=0}^{k} A_i(t)x^{(i)}(t) = f(t),\ t \in T, \tag{1}$$

где $A_i(t) - (\nu \times n)$ — матрицы, $x(t)$ — искомая и $f(t)$ — известная вектор-функции, $x^{(i)}(t) = (d/dt)^i x(t)$, $x^{(0)}(t) = x(t)$, и выполнено соотношение

$$\operatorname{rank} A_k(t) < \min\{\nu, n\}\ \forall t \in T, \tag{2}$$

эквивалентное при $\nu = n$ равенству $\det A_k(t) = 0\ \forall t \in T$. Такие системы принято называть дифференциально–алгебраическими уравнениями (ДАУ).

Поставим в соответствие системе (1) эквивалентную систему первого порядка

$$\mathrm{A}(t)\dot{\mathrm{x}} + \mathrm{B}(t)\mathrm{x} = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & A_k(t) \end{pmatrix}\dot{\mathrm{x}} + \begin{pmatrix} 0 & -E_m \\ A_0(t) & \tilde{A}(t) \end{pmatrix}\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$t \in T,\ \dot{\mathrm{x}} = (d/dt)\mathrm{x},$$

где

$$m = (k-1)n,\ \tilde{A}(t) = (A_1(t)\ A_2(t)\ \dots A_{k-1}(t)),$$

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x^\top & \dot{x}^\top & \dots & (x^{(k-1)})^\top \end{pmatrix}^\top,$$

$\top$ — символ транспонирования. Следуя [1], краевые условия задаются в виде интеграла Стильтьеса

$$\varpi(\mathrm{x}) = \int_\alpha^\beta [d\sigma(s)]C(s)\mathrm{x}(s) = a, \tag{4}$$

где $\sigma(s)$ — заданная матрица ограниченной полной вариации на T, $C(s)$ — заданная $(\rho \times \mathrm{m})$-матрица из $\mathbf{C}(T)$, $\mathrm{m} = kn$, $\rho \leqslant \mathrm{m}$, a—заданный вектор из $\mathbb{R}^\rho$.

Частными случаями условий (4) являются начальная и многоточечная краевая задачи [1]. Особенностью особых точек ДАУ является такое обстоятельство: они могут не совпадать с точками изменения ранга матрицы $A_k(t)$. В докладе излагаются методики поиска особых точек с учетом этого обстоятельства. Некоторые критерии присутствия особых точек на T содержатся в статье [2]. Мы приводим примеры применения разностных методов для решения ДАУ, когда мы получаем неверные сведения о расположении особых точек на

T . Поэтому в качестве базового метода решения краевых задач (1), (4) предлагается использовать метод наименьших квадратов, когда исходная задача сводится к поиску минимума функционала невязки в пространствах Соболева. Для ДАУ первого порядка некоторые варианты метода наименьших квадратов рассматривались в статьях [3], [4].

Литература

1. Бояринцев Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Е. Бояринцев. — Новосибирск: Наука, 1980.

2. Чистяков В.Ф. О регуляризации дифференциально–алгебраических уравнений / В.Ф. Чистяков // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2011. — Т. 51, № 3. — С. 2181-–2193.

3. Чистяков В.Ф., Чистякова Е.В. Применение метода наименьших квадратов для решения линейных дифференциально–алгебраических уравнений / В.Ф. Чистяков, Е.В. Чистякова // Сиб. журн. вычисл. матем. — 2013. —Т. 16, № 1. — С. 81-–95;

4. Chistyakov V.F., Chistyakova E. V. Evaluation of the Index and Singular Points of Linear Differential–Algebraic Equations of Higher Order / V.F. Chistyakov, E. V. Chistyakova // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — V. 231, Issue 6. — P. 827–845.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ[1]

Е.Е. Читоркин (Самара, Самарский университет; Саратов, СГУ)
chitorkin.ee@ssau.ru

Данная работа посвящена обратной задаче Штурма–Лиувилля $L = L(q, p_1, p_2, f_1, f_2)$ следующего вида:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, \pi), \tag{1}$$

$$p_1(\lambda)y'(0) + p_2(\lambda)y(0) = 0, \quad f_1(\lambda)y'(\pi) + f_2(\lambda)y(\pi) = 0, \tag{2}$$

где (1) – уравнение Штурма–Лиувилля с комплекснозначным потенциалом $q \in L_2(0, \pi)$, λ – спектральный параметр, краевое условие (2) в точке $x = 0$ содержит взаимно простые многочлены $p_j(\lambda)$,

[1] Работа выполнена в Саратовском государственном университете при финансовой поддержке РНФ (проект 21-71-10001, `https://rscf.ru/project/21-71-10001/`).

$j = 1, 2$, краевое условие в точке $x = \pi$ – произвольные функции $f_j(\lambda)$, $j = 1, 2$, аналитические во всей λ-плоскости.

Пусть N_1, N_2 — степени многочленов $p_1(\lambda)$ и $p_2(\lambda)$ соответственно, а $\{a_i\}_{i=0}^{N_1}$ и $\{b_i\}_{i=0}^{N_2}$ — коэффициенты при λ^i этих многочленов.

Введем обозначения:

$$\omega = \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt, \quad \varpi = \begin{cases} \omega - b_{N_1}, & N_1 = N_2 \\ \omega + a_{N_1}, & N_1 = N_2 - 1 \\ \omega, & N_1 \neq N_2, N_1 \neq N_2 - 1 \end{cases}$$

Обратная задача 1. *Предположим, что степени N_1, N_2 многочленов и функции $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ известны априори. По данному подспектру $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ и числу ϖ найти потенциал $q(x)$ и многочлены $p_1(\lambda)$, $p_2(\lambda)$.*

Для исследования задачи был использован подход работы [1]. Доказана единственность восстановления потенциала и многочленов в краевых условиях по части спектра. Доказательство приведено в [2].

Также рассмотрены приложения построенной теории для решения задач типа Хохштадта–Либермана с многочленами в краевых условиях и в условиях склейки внутри интервала. Для этих задач также сформулированы и доказаны теоремы единственности решения, причем для различных соотношений степеней многочленов используется весь спектр либо его часть. Доказательства основаны на сведении данных задач к задаче L с конкретными функциями $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ и последующей проверке выполнения условий теоремы единственности решения для этой задачи. Доказательства приведены в [2].

Литература

1. Bondarenko N.P. Inverse Sturm–Liouville problem with analytical functions in the boundary condition / N.P. Bondarenko // Open Math. — 2020. — Vol. 18, no. 1. — P. 512–528.

2. Bondarenko N.P. Inverse Sturm–Liouville Problem with Spectral Parameter in the Boundary Conditions / N.P. Bondarenko, E.E. Chitorkin // Mathematics. — 2023. — Vol. 11. — Article number: 1138.

О НЕКОТОРОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Е.Г. Чуб (Ростов-на-Дону, РГУПС)

elenachub111@gmail.com

Целью исследований является разработка метода совместного оценивания вектора состояния телекоммуникационной системы и идентификации параметров ее вектора состояния в реальном масштабе времени в условиях действия помех различной физической природы. Телекоммуникационная система описывается стохастической моделью в форме «объект -– наблюдатель»:

$$\dot{Y} = f_1 (Y, t) + U (Y, t) + f_0 (Y, t) V_t,$$

где Y – фазовая переменная; f_i, $i = 0, 1$ – известные нелинейные функции, удовлетворяющие условию Липшица $\forall Y, t$; $U (Y, t)$ – неизвестная функция, определяемая физическими свойствами объекта и подлежащая идентификации по показаниям измерителя;V_t – шум телекоммуникационной системы, наблюдается с помощью нелинейного наблюдателя вида $Z = h (Y, t) + W_t$, где Z – выходной сигнал наблюдателя, $h (Y, t)$ – известная нелинейная функция, W_t – шум измерений. Неизвестные параметры вектора состояния телекоммуникационной системы определяются из условия минимума функционала, характеризующего качество функционирования телекоммуникационной системы:

$$J = -\int_T \int_Y \rho_Z (Y, Z, t) \, dY dt + \int_{t_0}^{T} U^2 (Y, t) \, dt,$$

где $\rho_Z (Y, Z, t)$ – апостериорная плотность вероятности.

На первом этапе апостериорная плотность вероятности данного процесса аппроксимируется системой апостериорных моментов. Сделанное далее допущение о возможности аппроксимации плотности вероятности классом распределений Пирсона позволяет получить замкнутую систему уравнений моментов. На следующем этапе применение принципа максимума дает возможность перейти к решению двухточечной краевой задачи. На последнем этапе методика синтеза приближенного решения двухточечной краевой задачи на основе метода инвариантного погружения позволяет сформировать приближенное значение вектора состояния как решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Предложенный метод обеспечивает решение задачи оценивания вектора состояния телекоммуникационной системы в условиях действия помех различной физической природы. Реализация предложенного метода в современных телекоммуникационных системах не предъявляет дополнительных требований к вычислителю, что делает возможным его широкое применение.

Литература

1. Хуторцев В.В. Современные принципы управления и фильтрации в стохастических системах / В.В. Хуторцев, С.В. Соколов, П.С. Шевчук // М. : Радио и связь. — 2001. — 808 с.

2. Mit'kin A. Using the Pearson Distribution for Synthesis of the Suboptimal Algorithms for Filtering Multi-Dimensional Markov Processes / A. Mit'kin, V. Pogorelov, E. Chub. // Radiophysics and Quantum Electronics. — 2015. — V. 58, No. 3. — P. 224–232.

3. Sinicyn I. Filters / I. Sinicyn, N. Kalmann , N. Pugachev // M: Publ Logos. — 2006. — 640 p.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С НЕГЛАДКИМИ РЕШЕНИЯМИ

С.А. Шабров, Ал–Гарайхоли Иван Абдулкариим Хузам

(Воронеж, ВГУ)

shabrov_ s_ a@math.vsu.ru

В работе получены некоторые свойства функции $\theta(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^s}$, где λ_n — собственные значения спектральной задачи

$$\begin{cases} -\left(pu'_x\right)'_\sigma + qu = \lambda M'_\sigma u; \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где λ — спектральный параметр.

Решение (1), как и в работах [1]–[3], будем искать в классе E — абсолютно непрерывных на $[0;\ell]$ функций $u(x)$, первая производная которых $u'_x(x)$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0,\ell]$.

В точках ξ, принадлежащих множеству точек разрыва $\sigma(x)$, уравнение в (1) понимается как равенство $-\Delta\left(pu'_x\right)(\xi) + u(\xi)q(\xi) = \lambda M'_\sigma(\xi)u(\xi)$, где $\Delta u(\xi)$ — полный скачок функции $u(x)$ в точке ξ.

В работе предполагаются выполненными следующие условия: функции $p(x)$ и $M(x)$ σ-абсолютно непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}$ (описание построения множества $\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}$ см. [1]–[3]), $\min\limits_{x\in\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}} p(x) > 0$, $q(x)$ — σ–суммируема, $q(x) \geqslant 0$.

Литература

1. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный и др. // М. : Физматлит. — 2004. — 272 с.

2. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. // М. : Физматлит. — 2009. — 192 с.

3. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ОБРАТИМОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ШЕСТОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ И ПЕРИОДИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ

С.А. Шабров, Т.В. Гридяева, Ф.В. Голованева, М.Б. Давыдова

(Воронеж, ВГУ)

shabrov_s_a@math.vsu.ru

В работе доказывается интегральная обратимость граничной задачи

$$\begin{cases} Lu \equiv -\left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\mu} + (ru''_{xx})''_{x\mu} - (gu'_x)'_\mu + Q'_\mu u = F'_\sigma; \\ u(0) = u(\ell); \\ u'_x(0) = u'_x(\ell); \\ u''_{xx}(0) = u''_{xx}(\ell); \\ u'''_{xx\mu}(0) = u'''_{xx\mu}(\ell); \\ u^{(4)}_{xx\mu x}(0) = u^{(4)}_{xx\mu x}(\ell); \\ u^{(5)}_{xx\mu xx}(0) = u^{(5)}_{xx\mu xx}(\ell), \end{cases} \tag{1}$$

с производными по мере.

Решение (1) мы будем искать в классе E — дважды непрерывно дифференцируемых функций $u(x)$, у которых: $u''_{xx}(x)$ — μ–абсолютно непрерывна на $[0,\ell]$; $pu'''_{xx\mu}(x)$ — дважды непрерывно дифференцируема; $\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(x)$ — μ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$.

В точках ξ, принадлежащих множеству точек разрыва $\mu(x)$, уравнение в (1) понимается как равенство $-\Delta\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(\xi) + \Delta(ru''_{xx})'_x(\xi) - \Delta\left(gu'_x\right)(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \Delta F(\xi)$, где $\Delta u(\xi)$ — полный скачок функции $u(x)$ в точке ξ.

Будем предполагать, что функции $p(x)$, $r(x)$, $g(x)$, $F(x)$ и $Q(x)$ μ-абсолютно непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}$ (описание построения множества $\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}$ см. [2]), $\min\limits_{x\in\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}} p(x) > 0$, $Q(x)$ не убывает.

Получены достаточные условия существования и единственности (в классе непрерывных на квадрате $[0;\ell]\times[0;\ell]$ функций) функции влияния задачи (1).

Литература

1. Шабров С.А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса / С.А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

2. Шабров С.А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С.А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

3. Borodina E.A. Nonlinear sixth order models with nonsmooth solutions and monoton nonlinearity / E.A. Borodina, S.A. Shabrov, M.V. Shabrova // Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. — 2020. — P. 012023.

ИНВАРИАНТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

М.В. Шамолин (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова)
shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

Как известно [1], нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только первых интегралов) позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных систем этот факт естественен, но для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [2–4]).

В качестве примеров тензорных инвариантов приведем, прежде все–го, скалярные инварианты — это первые интегралы системы. Инвариантные векторные поля — поля симметрий (они коммутируют с векторным полем рассматриваемой системы). Фазовые потоки систем дифференциальных уравнений, порождаемых этими полями, переводят решения рассматриваемой системы в решения той же системы. Инвариантные внешние дифференциальные формы (поиск которых, в основном, и проведен в данной работе) порождают интегральные инварианты системы. При этом, очевидно, само векторное поле рассматриваемой системы является одним из инвариантов (тривиальный инвариант). Знание тензорных инвариантов системы дифференциальных уравнений облегчает и ее интегрирование, и качественное исследование. Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы из m дифференциальных уравнений помимо упомянутого тривиального инварианта надо знать еще $m-1$ независимых тензорных инвариантов.

Как показано ранее, задача о движении $(n+1)$–мерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, который можно образно описать, как «поток набегающей среды, заполняющей объемлющее $(n+1)$–мерное пространство», приводит к динамической системе на касательном расслоении к n-мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [5, 6]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, полный список первых интегралов состоит из функций, имеющих существенно особые точки, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. То же фазовое пространство естественно возникает в задаче о движении точки по n–мерной сфере с индуцированной метрикой объемлющего $(n+1)$–мерного пространства. Отметим также задачи о движении точки по более общим n–мерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского и т. д.

Важные случаи интегрируемых систем с n степенями свободы в неконсервативном поле сил рассматривались в других работах автора. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

В данной работе для рассматриваемого класса динамических систем предъявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм для однородных систем на касательных расслоениях к гладким конечномерным многообразиям (об аналогичных исследованиях для систем меньшей размерности см. [2, 3, 5]). Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля вносят в системы диссипацию раз–ного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Сначала изучается задача геодезических, включающая, в частности, геодезические на сфере и других поверхностях вращения, конечномерного пространства Лобачевского. Указываются достаточные условия интегрируемости уравнений геодезических. Затем в системы добавляется потенциальное поле сил специального вида, также указываются достаточные условия интегрируемости рассматриваемых уравнений, на классах задач, аналогичных рассмотренным ранее. И в заключение строится усложнение задачи, возникающее в результате добавления неконсервативного поля сил со знакопеременной диссипацией. Указываются достаточные условия интегрируемости.

Литература

1. Козлов В.В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений / В.В. Козлов // Успехи мат. наук. — 2019. — Т. 74, № 1. — С. 117–148.

2. Шамолин М.В. Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле / М.В. Шамолин. — М. : ЛЕНАНД, 2019. — 456 с.

3. Шамолин М.В. Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2. Закрепленные маятники разной размерности / М.В. Шамолин. — М. : ЛЕНАНД, 2021. — 400 с.

4. Шамолин М.В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия / М.В. Шамолин // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2020. — Т. 495, № 1. — С. 84–90.

5. Шамолин М.В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия / М.В. Шамолин // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2021. — Т. 497, № 1. — С. 23–30.

6. Козлов В.В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем / В.В. Козлов // Прикл. матем. и механ. — 2015. — Т. 79, № 3. — С. 307–316.

ВОПРОСЫ ОБРАТИМОСТИ В АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ ГЕРЦА

Р.Ф. Шамоян, Д.С. Ермакова (Саратов, СГУ, Брянск, БГУ)
rsham@mail.ru, darya.sergeevna.guseva@yandex.ru

В заметке даны некоторые обобщения недавних результатов из [1] и [2] о слабой обратимости в пространствах Бергмана на более общие пространства Герца. Введем необходимые определения.

Пусть U^n единичный полидиск комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, B^n — единичный шар комплексного пространства $\mathbb{C}^n$. $B^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$, $U^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, j = 1, \dots, n\}$. Пусть dv и dm_{2n} — нормированные меры Лебега на B^n и U^n. Пусть $\{a_k\}$ — r–решетка в B^n и U^n (см. [1]–[2]). Пусть $B(z,r)$ — шар Бергмана в B^n, а $U(z,r)$ — шар Бергмана в U^n (см. [1,2]). Определим пространства Герца: Пусть $H(B^n)$ — класс всех аналитических функций в B^n, $H(U^n)$ — класс всех аналитических функций в U^n. Аналитические классы Герца определим следующим образом. Пусть φ – положительная функция на $(0;\infty)$.

$$D^{p,q}_{\alpha,\varphi} = \left\{ f \in H(B^n) : \sum_{k\geqslant 0} \left(\int\limits_{B(a_k,r)} |f(z)|^p \, dv_\alpha(z) \right)^{q/p} < \infty \right\},$$

$$\tilde{D}^{p,q}_{\alpha,\varphi} = \left\{ f \in H(B^n) : \int\limits_{B} \left(\int\limits_{B(z,r)} |f(z)|^p \, dv_\alpha(z) \right)^{q/p} dv(z) < \infty \right\},$$

где $dv_\alpha(z) = \varphi^\alpha(|z|)\, dv(z)$, $0 < p, q < +\infty$, $\alpha > -1$.

$$B^{p,q}_{\alpha,\varphi} = \left\{ f \in H(U^n) : \sum_{k\geqslant 0} \left(\int\limits_{U(a_k,r)} |f(z)|^p \, d\tilde{v}_\alpha(z) \right)^{q/p} < \infty \right\};$$

где $d\tilde{v}_\alpha(z) = \prod\limits_{j=1}^{n} \varphi^\alpha(|z_j|)\, dm_{2n}(z)$, $0 < p, q < +\infty$, $\alpha > -1$.

$$\tilde{B}^{p,q}_{\alpha,\varphi} = \left\{ f \in H(U^n) : \int\limits_{U^n} \left(\int\limits_{U(z,r)} |f(z)|^p \, d\tilde{v}_\alpha(z) \right)^{q/p} dv(z) < \infty \right\},$$

где $0 < p, q < +\infty, \alpha > -1$. Заметим, что в единичном круге, если $p = q$, то $B^{p,p}_\alpha = D^{p,p}_\alpha = A^p_{\alpha,\varphi}$, где $A^p_{\alpha,\varphi}$ — классическое пространство типа Бергмана, $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$ хорошо изученное в работах различных авторов (см. [1,2]).

Предположим, что X подпространство пространства $H(B_n)$ в котором множество всех многочленов J от $z_1, \dots, z_n$ всюду плотно. При этом операторы $(\delta_z f) = f(z)$; $s_j f(z) = (z_j) \cdot f(z_1, \ldots, z_n)$, $j = 1, \ldots, n, z = (z_1, \ldots, z_n) \in B_n$ непрерывны в X.

Определение 1.(см [2]) *Функция $f \in X, f(z) \neq 0, z \in B_n$ называется слабо обратимой в пространстве X, если существует последовательность многочленов $\{P_m\}; P_m \in J; m = 1, 2, \ldots$ такая, что $\lim\limits_{m \to \infty} P_m f = 1$, причем сходимость имеет место в топологии пространства X.*

Пусть φ – положительная монотонно растущая непрерывная функция на $\mathbb{R}_+ = (0; \infty)$. Скажем, что φ — весовая на $(0; +\infty)$ если $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\varphi(x)}{\ln x} = +\infty$.

Мы формулируем наш результат:

Теорема 1.:*Пусть φ – весовая функция из $C^{(2)}(\mathbb{R}_+)$, $\frac{\varphi''(x)}{\varphi'^2(x)} \searrow 0$, $x \to +\infty$ и существует $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\varphi'(x) \cdot x}{\varphi(x)} = a_\varphi$, $0 \leqslant a_\varphi < +\infty$, $\int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{\varphi(x)}{x^3} \right)^{1/2} dx = +\infty$. Тогда, если f слабо обратима $f \in D^{p,q}(\varphi)$; или $f \in \tilde{D}^{p,q}(\varphi)$ $f(z) \neq 0$, $z \in B_n$, $1 < p, q < +\infty$, то f слабо обратима в пространстве $D^{p',q'}(\varphi)(\tilde{D}^{p',q'}(\varphi))$ при всех $0 < p' < p < \infty$, $0 < q' < q < \infty$.*

Замечание: При $p = q$ теорема 1 обобщает некоторые результаты [1,2].

Аналогичные результаты нами получены в пространствах в полидиске, введенных выше.

Литература

1. Шамоян Ф.А. Критерий слабой обратимости в весовых L^p-пространствах аналитических в шаре функций / Ф.А. Шамоян. // Сиб.мат.журнал. — 2009. — Т. 50, № 6. — С. 1115–1132

2. Шамоян Ф.А. О полиномиальной апроксимации в весовых анизотропных классах голоморфных функций / Ф.А. Шамоян // Complex variabl. and operator theory. — 2015. — Т. 9. — С. 1135–1156

К ПРОДОЛЖЕНИЮ ИНВАРИАНТНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Н.А. Шананин (Москва, ГУУ)

nashananin@inbox.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и

$$P = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha,\ x \in \Omega,\ D_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k},\ i^2 = -1, \tag{1}$$

— дифференциальный оператор порядка $m \geqslant 1$ с вещественно аналитическими, комплекснозначными коэффициентами, определенный в открытом множестве Ω. Предположим, что ядро $\mathcal{K}_x(P) \subset T_x^*\Omega$ симметрической m-линейной формы

$$\mathcal{F}_x(\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^m) = \frac{1}{m!} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_m = 1}^{n} \frac{\partial^m p_m}{\partial \xi_{j_1} \ldots \partial \xi_{j_m}}(x, \xi) \eta^1_{j_1} \ldots \eta^m_{j_m},$$

порожденной старшим символом, удовлетворяет условиям:

(1) $\bigcup\limits_{x \in \Omega} (x, K_x(P) \setminus \{0\}) = \mathrm{Char}(P)$;

(2) коразмерность $K_x(P)$ не зависит от $x \in \Omega$ и равна k.

Множество $\cup_{x \in \Omega}(x, K_x(P))$ в касательном расслоении $T\Omega$ индуцирует гладкое k–мерное подрасслоение:

$$L(P) = \{(x, \tau) \in T\Omega \,|\, x \in \Omega \text{ и } \xi(\tau) = 0\ \forall \xi \in K_x(P)\}.$$

Через $\mathcal{L}(P)$ обозначим соответствующую дифференциальную систему. Дифференциальная система $\mathcal{L}(P)$ порождает в C^∞–модуле $\mathcal{T}\Omega$ сечений касательного расслоения фильтрацию C^∞ – подмодулей $\mathcal{H}^j$, в которой первый элемент $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}(P)$, а последующие подмодули $\mathcal{H}^{j+1}$ порождаются векторными полями из $\mathcal{L}(P)$ и коммутаторами векторных полей вида $[\mathcal{L}(P), \mathcal{H}^j]$. Дифференциальную систему $\mathcal{L}$ называют неголономной, если найдется такое число r, что

$$\mathcal{L} = \mathcal{H}^1 \subsetneqq \mathcal{H}^2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathcal{H}^r = \mathcal{H}^{r+1} \subsetneqq \mathcal{T}\Omega.$$

Предположим, что

(3) дифференциальная система $\mathcal{L}(P)$ неголономна и подпространство $\mathcal{H}^r_x \subset T_x\Omega$ имеет размерность m, не зависящую от точки $x \in \Omega$, причем $k < m \leqslant n$.

В этом случае подмодуль $\mathcal{H}^r$ является голономной дифференциальной системой и в силу теоремы Фробениуса через каждую точку $x^0 \in \Omega$ проходит максимальное связное интегральное подмногообразие $M_{\mathcal{H}^r, x^0}$.

Говорят, что ростки обобщенных функций $u^1(x)$ и $u^2(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ равны в точке $x^0 \in \Omega$ и пишут $u^1_{x^0} \cong u^2_{x^0}$, если существует открытая окрестность $V \subset \Omega$ точки x^0, в которой $u^1(x) = u^2(x)$. Пусть $\varkappa : \Omega \to \Omega$ —диффеоморфизм и $g_\varkappa : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ —линейное отображение, удовлетворяющее условию локальности: $\operatorname{supp} g_\varkappa(u) \subset \varkappa(\operatorname{supp} u)$. Будем говорить, что функция $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $g_\varkappa$ инвариантна в точке $x^0 \in \Omega$, если $(g_\varkappa(f))_{x^0} \cong f_{x^0}$. Будем говорить, что дифференциальный оператор $P(x, D) : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ $g_\varkappa$ инвариантен в точке $x^0 \in \Omega$, если для любой функции $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ выполняется $(g_\varkappa(P(x, D)u)_{x^0} \cong (P(x, D)g_\varkappa(u))_{x^0}$.

Теорема 1. *Если оператор P вида* (1)*, удовлетворяющий условиям* (1)*,* (2) *и* (3)*, является $g_\varkappa$ инвариантным на Ω, то из равенства $(g_\varkappa(u))_{x^0} \cong u_{x^0}$ в точке $x^0 \in \Omega$ следует, что $(g_\varkappa(u))_x \cong u_x$ во всех точках $x \in M_{\mathcal{H}^r, x^0}$.*

В частности, если система $\mathcal{L}(P)$ вполне неголономна $(m = n)$, то $(g_\varkappa(u)) = u$ на множестве Ω.

Литература

1. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. (т. 1) / Л. Хермандер. // М. : Мир. — 1986. — 464 с.

2. Шананин Н.А. О продолжении решений линейных уравнений с аналитическими коэффициентами / Н.А. Шананин // Матем. заметки 111:6 (2022), С. 921-–928; Math. Notes, 111:6 (2022), — P. 954–960.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ОЦЕНИВАНИИ ТОЧНОСТИ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СЛУЧАЙНЫХ СУММ[1]

И.Г. Шевцова, М.А. Целищев

(Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова)

ishevtsova@gmail.com

В докладе обобщается определение стационарного распределения процесса восстановления, также известное под именем равновесного преобразования (equilibrium transform) распределения неотрицательной случайной величины или проинтегрированного хвоста (integrated tail) на распределения с произвольным носителем и конечным ненулевым первым моментом, а также доказываем точную

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-11-00212).

моментную оценку расстояния в метрике Канторовича между преобразованным распределением и исходным, рассматривая соответствующую экстремальную задачу условной оптимизации.

С помощью введенного преобразования и полученной оценки методом Стейна мы исследуем скорость сходимости в теореме Реньи, обосновывающей адекватность показательной аппроксимации для распределений сумм независимых случайных величин с конечными ненулевыми первыми моментами, в которых (случайное) число слагаемых имеет геометрическое распределение и не зависит от слагаемых, при неограниченном росте среднего числа слагаемых. Мы доказываем моментую оценку расстояния в метрике Канторовича между распределением нормированной геометрической случайной суммы и показательным законом без ограничений на носитель распределения слагаемых, не только обобщающую, но и уточняющую оценку из работы [1]. Кроме того, мы изучаем точность полученного неравенства с помощью определения асимптотически наилучших констант, для которых строим нижние оценки, показывая тем самым, что полученная оценка точности показательной аппроксимации имеет не только правильный порядок малости при неограниченном росте среднего числа слагаемых, но и не может уточнена более чем в четыре раза.

Представленные результаты опубликованы в [2].

Литература

1. Pekoz E.A., Rollin A. New rates for exponential approximation and the theorems of Renyi and Yaglom / E.A. Pekoz, A. Rollin. // Ann. Probab. — 2011. — Vol. 39, P. 587–608.

2. Shevtsova I.G., Tselischev M.A. New rates for exponential approximation and the theorems of Rényi and Yaglom / I.G. Shevtsova, M.A. Tselischev. // Mathematics — 2020. — Vol. 8, Article No. 577.

ОБ ОДНОЙ ПРИКЛАДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ[1]

А.И. Эгамов (Нижний Новгород, ННГУ)
albert810@yandex.ru

[1] Работа выполнена по договору № ССЗ-1771 от 22.04.2021г. на выполнение НИОКТР на тему: «Создание высокотехнологичного производства сахара на базе АО «Сергачский сахарный завод», в рамках реализации Соглашения о предоставлении из федерального бюджета субсидии на развитие кооперации российской образовательной организации высшего образования и организации реального сектора экономики в целях реализации комплексного проекта по созданию высокотехнологичного производства № 075-11-2021-038 от 24.06.2021г. (ИГК 000000S407521QLA0002).

В шестом семестре обучения по направлению ФИИТ (02.03.02) в Нижегородском государственном университете им. Н.И.Лобачевского студенты изучают предмет «Вычислительные методы» В рабочей программе дисциплин записано, что им необходимо выполнить лабораторную работу по одной-двум пройденным темам на усмотрение преподавателя. В последнее время особым интересом у студентов пользуется лабораторная работа по теме "Решение прикладной задачи дискретной оптимизации". В ней поставлена задача о переработке сахарной свеклы – в виде математической модели переработки фиксированного количества партий скоропортящегося сырья. Для решения этой важной прикладной задачи необходимо глубокое знание алгоритмов дискретной оптимизации, владение современными программными средствами и способность оценивать полученные путем численных расчетов результаты с точки зрения их прикладной значимости. Таким образом, данная проблема сочетает все необходимые компоненты для выполнения лабораторных работ и представляет хороший материал для обучения студентов в области ИТ в рамках учебной дисциплины. Предлагаемую задачу можно свести к известной задаче дискретной оптимизации: задаче о назначениях [1]. Ниже приводятся несколько причин, по которым по мнению автора эта лабораторная работа привлекает к себе интерес студентов.

1. Методы решения задачи близки к школьному аппарату математики.

2. При численном решении задачи основная трудность в написании программы "спрятана" в библиотеке подпрограмм, используемых алгоритмическом языком "Python". В стандартных библиотеках подпрограмм "scy.py" и "Munkres" имеется подпрограмма "венгерского алгоритма".

3. Правильность работы программы и истинность полученных результатов нетрудно проверяется, в том числе, проверка осуществляется визуально по графикам функций.

4. Задача относится к прикладным задачам, которые напрямую показывают связь теоретической и пратической математики.

Постановку задачи и проблемы, возникающие в связи с ее решением можно найти в [2–5]. В своих работах студенты исследуют новые эвристические алгоритмы переработки, оценивают эффективность эвристических квазиоптимальных алгоритмов переработки сахарной свеклы по отношению к теоретически рассчитанному максимально возможному выходу сахара.

Литература

1.Bunday B. Basic linear programming / E. Arnold. — London, Baltimore, Md., USA. — 1984. — 163 p.

2. Balandin, D.V. [and etc.] Mathematical Modelling and Optimization of Scheduling for Processing Beet in Sugar Production / D. Balandin., K. Barkalov., I. Meyerov. (eds) // Communications in Computer and Information Science. — 2022. — V. 1750. — P. 227-–238. https://doi.org/10.1007/978-3-031-24145-1_19

3. Balandin D.V. [and etc.] Educational and Research Project «Optimization of the Sugar Beet Processing Schedul» / V. Voevodin, S. Sobolev, M. Yakobovsky, R. Shagaliev (eds). // Supercomputing. Lecture Notes in Computer Science(LNCS). — 2022. — V. 13708. — P. 409–422. https://doi.org/10.1007/978-3-031-22941-1_30

4. Balandin D.V., Kuzenkov O.A., Egamov, A.I.Estimating the efficiency of quasi-optimal strategies for sugar beet processing / D.V. Balandin, O.A. Kuzenkov, A.I. Egamov, Estimating // Eurasian Union of Scientists. Series: Technical, Physical and Mathematical Sciences. — 2022. — № 9(102). — P. 33–39.

5. Баландин Д.В. Лабораторная работа: Построение оптимальной стратегии переработки скоропортящейся сельхозпродукции / Д. В. Баландин, В. К. Вильданов, О. А. Кузенков [и др.] // Цифровые технологии и информационная безопасность бизнес-процессов: Сборник научных статей научно-практической конференции с международным участием, Нижний Новгород, 25 мая 2022 года / Редколлегия: А.О. Грудзинский [и др.] // Нижний Новгород : ННГУ им. Н.И. Лобачевского. — 2022. — С. 99–104.

ON THE INTEGRO–DIFFERENTIAL VOLTERRA EQUATION WITH DELAY TERM

K. Haddouche, S. Segni, W. Merchela, H. Guebbai

(Guelma, Algeria, Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Modélisation, Université 8 Mai 1945, Université Mustapha Stambouli de Mascara)

khawlahaddouche@yahoo.fr; segnianis@gmail.com; segni.sami@univ-guelma.dz; merchela.wassim@gmail.com; wassim.merchela@univ-mascara.dz; guebaihamza@yahoo.fr; guebbai.hamza@univ-guelma.dz

Recently the mathematical researches on the nonlinear integrodifferential equations of Volterra have known a great interest

[1,2]. Since they allow a better approach to deal with dynamic systems resulting from modeling in physics and engineering. In the other hand, the class of Volterra equations with a delay term plays an important role in the modeling of microbiological phenomena [3].

In this work, we treat an integro–differential Volterra equation of the second kind with a regular kernel and a delay term on the integration interval with the following form:

$$\forall t \in [0,T]\,,\ u(t) = \int_0^{\alpha(t)} \kappa\left(t, s, u(s), u'(s)\right) ds + f(t),$$

where, $f \in C^1[0,T]$, u to be found in $C^1[0,T]$ and α the delay term is assumed to be differentiable and $\forall t \in [0,T]\,,\ 0 \leqslant \alpha(t) \leqslant t$. Our goal is to build hypotheses that ensure the existence and uniqueness of the solution u, then we proceed to the numerical approximation using a Nyström method adapted to our equation.

References

1. Segni, Sami; Ghiat, Mourad; Guebbai, Hamza. / New approximation method for Volterra nonlinear integro–differential equation. Asian–European Journal of Mathematics. — 2018.

2. Guebbai, Hamza; Aissaoui, Mohamed Zine; Debbar, I.; Khalla, B. / Analytical and numerical study for an integro–differential nonlinear Volterra equation. Applied Mathematics and Computation. — 2014.

3. Sekar, R.C.G., Murugesan, K. / Single Term Walsh Series Method for the System of Nonlinear Delay Volterra Integro–Differential Equations Describing Biological Species Living Together. Int. J. Appl. Comput. Math. — 2018. https://doi.org/10.1007/s40819-017-0473-7.

CLASSICAL SOLUTION OF THE THIRD MIXED PROBLEM FOR THE TELEGRAPH EQUATION WITH A NONLINEAR POTENTIAL

V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko (Minsk, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus)
janycz@yahoo.com

In the domain $Q = (0,\infty) \times (0,\infty)$ of two independent variables $(t,x) \in Q \subset \mathbb{R}^2$, consider the one-dimensional nonlinear equation

$$\Box u(t,x) - f(t,x,u(t,x)) = F(t,x), \tag{1}$$

where $\Box = \partial_t^2 - a^2\partial_x^2$ is the d'Alembert operator ($a > 0$ for definiteness), F is a function given on the set $\overline{Q}$, and f is a function given on the set $[0, \infty) \times [0, \infty) \times \mathbb{R}$ and satisfying the condition of the Lipschitz–Carathéodory type in the third variable; i.e. there exists a function k of the class $L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ such that $|f(t, x, z_1) - f(t, x, z_2)| \leqslant k(t, x)|z_1 - z_2|$. Eq. (1) is equipped with the initial condition

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, \infty), \tag{2}$$

and the boundary condition

$$\partial_x u(t, 0) + \beta(t)u(t, 0) = \mu(t), \quad t \in [0, \infty), \tag{3}$$

where φ, ψ, μ and β are functions given on the half-line $[0, \infty)$.

Theorem 1. *Let the conditions $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$, $\mu \in C^1([0, \infty))$ and $\beta \in C^1([0, \infty))$ be satisfied, and let the function f satisfy the condition of the Lipschitz–Carathéodory type in the third variable. The third mixed problem (1) — (3) has a unique solution u in the class $C^2(\overline{Q})$ if and only if conditions*

$$\begin{gathered} \beta(0)\varphi(0) - \mu(0) + \varphi'(0) = 0, \\ f(0, 0, \varphi(0)) + F(0, 0) + a\left(\varphi(0)\beta'(0) + \beta(0)\psi(0) - \mu'(0) + \psi'(0)\right) = 0 \end{gathered} \tag{4}$$

are satisfied.

If the given functions of problem (1) — (3) do not satisfy the homogeneous matching conditions (4), then the solution of problem (1) — (3) is reduced to solving the corresponding matching problem in which the matching conditions are given on the characteristic $x - at = 0$.

The following conditions can be taken for the matching conditions:

$$\begin{aligned} &[(u)^+ - (u)^-](t, x = at) = C^{(1)}, \\ &[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-](t, x = at) = -a[(\partial_x u)^+ - (\partial_x u)^-](t, x = at) = \\ &= a\left(\mu(0) - \beta(0)\varphi(0) - \varphi'(0)\right) + \\ &+ \frac{1}{4a}\int\limits_0^{2at} \left[f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) - f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\right] dz, \end{aligned} \tag{5}$$

where $C^{(1)}$ is some arbitrary preset real constant.

Here by $()^\pm$ we have denoted the limit values of the function and its partial derivatives calculated on different sides of the characteristic $x - at = 0$; i.e., $(\partial_t^p u)^\pm(t, x = at) = \lim\limits_{\delta \to 0+} \partial_t^p u(t, at \pm \delta)$.

Now problem (1) — (3) can be stated using the matching conditions (5) as follows.

Problem (1) — (3) with matching conditions on characteristics. Find a classical solution of Eq. (1) with the Cauchy conditions (2), the boundary conditions (3), and the matching conditions (5).

References

1. Korzyuk V.I. Equations of Mathematical Physics / V.I. Korzyuk. — M. : Editorial URSS, — 2021. — 480 p.

2. Korzyuk V.I. Classical Solutions of Problems for Hyperbolic Equations. Part 2. / V.I. Korzyuk, I.S. Kozlovskaya. — Minsk : BSU, — 2017. — 52 p.

3. Korzyuk V.I. Classical Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential / V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko // Differential Equations. — 2022. — V. 58, № 2. — P. 175–186.

4. Korzyuk V.I. Classical and Mild Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential / V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. — 2023. — V. 43. — P. 48–63.

5. Korzyuk V.I. Classical Solution for the Mixed Problem for Klein–Gordon–Fock Equation with Nonlocal Conditions / V.I. Korzyuk, I.I. Stolyarchuk // Trudy Instituta Matematiki. — 2018. — V. 26, № 1. — P. 54–70.

NONLINEAR ELLIPTIC VARIATIONAL INEQUALITIES WITH VARIABLE BILATERAL CONSTRAINTS IN VARIABLE DOMAINS[1]

A.A. Kovalevsky (Yekaterinburg, IMM UB RAS and UrFU)
alexkvl71@mail.ru

In this talk, we consider a sequence of continuous strictly monotone coercive operators $\mathcal{A}_s\colon W^{1,p}(\Omega_s) \to (W^{1,p}(\Omega_s))^*$ in divergence form, where $\{\Omega_s\}$ is a sequence of domains in $\mathbb{R}^n$ contained in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ and $p > 1$. Along with this, we consider the sequence of sets

$$V_s = \{v \in W^{1,p}(\Omega_s)\colon \varphi_s \leqslant v \leqslant \psi_s \ \text{ a.e. in } \Omega_s\}, \tag{1}$$

[1] The research funding from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Ural Federal University Program of Development within the Priority-2030 Program) is gratefully acknowledged.

where φ_s and ψ_s are functions in $W^{1,p}(\Omega_s)$ such that $\varphi_s \leqslant \psi_s$ a.e. in Ω_s. We describe conditions for the convergence of solutions $u_s \in V_s$ of variational inequalities

$$\forall v \in V_s, \qquad \langle \mathcal{A}_s u_s - f_s, u_s - v\rangle \leqslant 0, \tag{2}$$

where $f_s \in (W^{1,p}(\Omega_s))^*$. These conditions concern the involved domains, operators, and constraints.

As for the involved domains, we assume that the embedding of $W^{1,p}(\Omega)$ into $L^p(\Omega)$ is compact, the sequence of domains Ω_s exhausts the domain Ω and the sequence of spaces $W^{1,p}(\Omega_s)$ is strongly connected with the space $W^{1,p}(\Omega)$. We also assume the G-convergence of the sequence $\{\mathcal{A}_s\}$ to an invertible operator $\mathcal{A}\colon W^{1,p}(\Omega) \to (W^{1,p}(\Omega))^*$. As for the constraints φ_s and ψ_s defining the sets V_s, we assume that they converge in a weak sense to functions φ and ψ in $W^{1,p}(\Omega)$, respectively, and

$$\operatorname{meas}\{\psi_s - \varphi_s < \alpha\} \to 0 \tag{3}$$

for a positive measurable function $\alpha\colon \Omega \to \mathbb{R}$. It is also assumed that, for every sequence of measurable sets $H_s \subset \Omega_s$ such that $\operatorname{meas} H_s \to 0$, the integrals of $|\nabla\varphi_s|^p$ and $|\nabla\psi_s|^p$ over H_s tend to zero.

The listed conditions and a strong convergence of the functionals f_s to a functional $f \in (W^{1,p}(\Omega))^*$ imply that the solutions of the variational inequalities (2) converge in a weak sense to the solution of a similar variational inequality with the operator $\mathcal{A}$, the functional f, and the constraint set defined by the lower obstacle φ and the upper obstacle ψ.

For the notions mentioned above and the proof of the described result, see the recent paper [2].

In this connection, we note that the weak convergence of solutions of nonlinear elliptic variational inequalities with G-convergent operators and sets of constraints of the form (1) was previously established in [1] in the case where $\varphi_s, \psi_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$, the functions φ_s and ψ_s converge in a strong sense to functions φ and ψ in $W^{1,p}(\Omega)$, respectively, and $\psi_s - \varphi_s \geqslant \sigma$ a.e. in Ω_s for a positive number σ. It is easy to see that the latter requirement is significantly stronger than condition (3). In the talk, we give an example where condition (3) and other conditions on the constraint functions φ_s and ψ_s in [2] are satisfied but the mentioned condition on the difference of ψ_s and φ_s in [1, Theorem 2.3] is not satisfied.

References

1. Kovalevsky A.A. *G*-convergence and homogenization of nonlinear elliptic operators in divergence form with variable domain /

A.A. Kovalevsky // Russ. Acad. Sci. Izv. Math. — 1995. — V. 44, № 3. — P. 431–460.

2. Kovalevsky A.A. Nonlinear variational inequalities with variable regular bilateral constraints in variable domains / A.A. Kovalevsky // Nonlinear Differ. Equ. Appl. — 2022. — V. 29, № 6. — Paper No. 70, 24 p.

STOCHASTIC LONGITUDINAL OSCILLATIONS VISCOELASTIC ROPE WITH MOVING BOUNDARIES, TAKING INTO ACCOUNT DAMPING FORCES

V.L. Litvinov, K.V. Litvinova (Moscow, Moscow State University)
vladlitvinov@rambler.ru

At present, reliability issues in the design of machines and mechanisms require more and more complete consideration of the dynamic phenomena that take place in the designed objects. The widespread use in technology of mechanical objects with moving boundaries necessitates the development of methods for their calculation. The problem of oscillations of systems with moving boundaries is related to obtaining solutions to integro-differential and partial differential equations in time-variable domains [1-10]. Such tasks are currently not well understood. Their peculiarity is the difficulty in using the known methods of mathematical physics, suitable for problems with fixed boundaries. The complexity of the solutions obtained is explained by the fact that up to now there has not been a sufficiently general approach to the analysis of the features of the dynamics of such systems. In connection with the danger of resonance, the study of forced oscillations is of great importance here. Attempts to investigate this process have been made, but the results obtained are limited mainly by a qualitative description of dynamic phenomena [1-4]. In addition, it is recognized that deterministic modeling of systems cannot be adequate for some types of problems, so it is necessary to switch to probabilistic-statistical, where there are random variables, stochastic fluctuations. When solving here, mainly approximate methods are used [5-9], since obtaining exact solutions is possible only in the simplest cases [10]. If the damping of transverse vibrations is mainly due to the action of external damping forces, then in the case of longitudinal vibrations, the damping is mainly affected by elastic imperfections in the material of the vibrating object [5-10]. The study of viscoelasticity includes the analysis of the stochastic stability of stochastic viscoelastic systems, their reliability, etc. The paper considers stochastic linear longitudinal oscillations of a viscoelastic beam with moving boundaries, taking into account the influence of damping forces. The case of a difference kernel makes it possible to reduce the problem of analyzing a system of stochastic integro-differential equations to the study of a system of stochastic differential equations. To estimate the expansion coefficients, it is proposed to apply the statistical numerical Monte Carlo method [11].

References

1. Savin G.N., Goroshko O.A. Dynamics of a variable length thread // Nauk. dumka, Kiev, — 1962, 332 P.

2. Samarin Yu.P. On a nonlinear problem for the wave equation in one-dimensional space // Applied Mathematics and Mechanics. — 1964. — T. 26, — V. 3. — P. 77–80.

3. Vesnitsky A.I. Waves in systems with moving boundaries and loads // Fizmatlit, Moscow, — 2001, — 320 P.

4. Lezhneva A.A. Bending vibrations of a beam of variable length // Izv. Academy of Sciences of the USSR. Rigid Body Mechanics. — 1970. — No. 1. — P. 159–161.

5. Litvinov V.L. Solution of boundary value problems with moving boundaries using an approximate method for constructing solutions of integro-differential equations // Tr. Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. — 2020. — Vol. 26, — No. 2. — P. 188–199.

6. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Mathematical models of longitudinal-transverse vibrations of objects with moving boundaries // Vestn. Himself. tech. un-t. Ser. Phys and mat. science, — 2015. — Vol. 19, — No. 2. — P. 382–397.

MIXED PROBLEM FOR INHOMOGENEOUS WAVE EQUATION OF BOUNDED STRING WITH NONSTATIONARY NONCHARACTERISTIC SECOND DERIVATIVES IN BOUNDARY MODES

V.V. Lysenko, F.E. Lomovtsev (Minsk, BSU)
valery.sholomitskaya@gmail.com, lomovcev@bsu.by

We find an explicit classical solution and an Adamard correctness criterion to the linear mixed problem for forced bounded string vibration equation with noncharacteristic second derivatives in nonstationary boundary modes. These results are obtained using the method “auxiliary mixed problems for wave equation on a half-line" [1]. The correctness criterion consist of necessary and sufficient smoothness requirements and two matching conditions, which give unique and stable solvability in set of twice continuously differentiable functions. Global correctness theorem is derived from the explicit classical solution and correctness criterion for an auxiliary mixed problem on the half–line in [2].

Noncharacteristic auxiliary mixed problem on the half–line

In the set $\dot{G}_\infty =]0, d[\times]0, +\infty[$ it is investigated the mixed problem

$$u_{tt}(x,t) + (a_1 - a_2)u_{xt}(x,t) - a_1 a_2 u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in \dot{G}, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ \ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ x > 0, \quad (2)$$

$$\Gamma(t)u \equiv [\zeta(t)u_{tt} + \xi(t)u_{xt} + \theta(t)u_{xx} + \alpha(t)u_t + \beta(t)u_x + \gamma(t)u]_{x=0} =$$
$$= \mu(t),\ t > 0,\ \ G_\infty = [0, d] \times [0, +\infty[, \quad (3)$$

where f, φ, ψ, μ, ζ, ξ, θ, α, β, γ are given real functions of variables x and t, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Let $C^k(\Omega)$ be a set of real k times continuously differentiable functions on a subset $\Omega \subset G_\infty$, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Critical characteristic $x = a_1 t$, $a_1 > 0$, divides the set G_∞ into two sets $G_- = \{(x,t) \in G_\infty : x > a_1 t,\ t > 0\}$, $G_+ = \{(x,t) \in G_\infty : x \leqslant a_1 t,\ x \geqslant 0\}$. From classical solutions $u \in C^2(G_\infty)$ of equation (1) and conditions (2), (3) obvious necessary smoothness requirements follow

$$f \in C(G_\infty),\ \varphi \in C^2[0, +\infty[,\ \psi \in C^1[0, +\infty[,\ \mu \in C[0, +\infty[. \quad (4)$$

Assuming $t = 0$ in the boundary mode (3) and calculating the values of the traces of the terms using the initial conditions (2) at $x = 0$ and equation (1) at $t = 0$, $x = 0$ we find the necessary matching condition

$$\zeta(0)[f(0,0) + (a_2 - a_1)\psi'(0) + a_1 a_2 \varphi''(0)] + \xi(0)\psi'(0) + \theta(0)\varphi''(0)+$$
$$+\alpha(0)\psi(0) + \beta(0)\varphi'(0) + \gamma(0)\varphi(0) = \mu(0). \quad (5)$$

In the following theorem, we use the notations:

$$F(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int\limits_0^t \int\limits_{x - a_1(t-\tau)}^{x + a_2(t-\tau)} f(s,\tau)\,ds\,d\tau,$$

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2}\left\{a_1\varphi(x + a_2 t) + a_2\varphi(0) + \int\limits_0^{x + a_2 t} \psi(s)\,ds\right\},\ F_i(x,t) =$$

$$= \frac{1}{a_1+a_2}\left[\int\limits_0^{t_i(x)}\int\limits_{x_i(t,\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau + \int\limits_{t_i(x)}^{t}\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau\right], \quad (6)$$

$$t_i(x) = (-1)^i\left(t-\frac{x}{a_1}\right), \ [x_i(t,\tau) = \left[1-(-1)^i\left(\frac{a_2}{a_1}+1\right)\right](x-a_1t)-a_2\tau,$$

$$i=1,2, \ P(t) = \mu(t) - \Gamma(t)(\Phi(x,t)+F_2(x,t)),$$

$$\chi(a,b) = exp\left\{-a_1\int\limits_a^b \sigma(s)ds\right\}, \ \ \sigma(t) = \frac{\beta(t)-a_1\alpha(t)}{{a_1}^2\zeta(t)-a_1\xi(t)+\theta(t)}.$$

The particular classical solutions $F_1, F_2 \in C^2(G_\infty)$ from (6) to the equation (1) are obtained by the correction method in [3].

Theorem 1. *Let functions ζ, ξ, θ, $\alpha, \beta, \gamma \in C[0,+\infty[$ be continuous, the boundary mode (3) be not characteristic: ${a_1}^2\zeta(t) - a_1\xi(t) + \theta(t) \neq 0, t \in [0,+\infty[$, and there is a classical solution $v \in C^2[0,+\infty[$, $v(\rho) \neq 0, v'(\rho) \neq 0$, $\rho \in [0,+\infty[$, to the ordinary differential equation*

$$[{a_1}^2\zeta(\rho/a_1) - a_1\xi(\rho/a_1) + \theta(\rho/a_1)]v''(\rho) -$$

$$-\left[\beta(\rho/a_1) - a_1\alpha(\rho/a_1)\right]v'(\rho) + \gamma(\rho/a_1)v(\rho) = 0.$$

The problem (1)–(3) in $\dot{G}_\infty$ has unique and stable on f, φ, ψ, μ classical solution $u \in C^2(G_\infty)$ if and only if the conditions (4), (5) are true,

$$J_1(x,t) \equiv \int\limits_0^t f(x+a_2(t-\tau),\tau)\,d\tau \in C^1(G_\infty), \quad (7)$$

$$J_{i+1}(x,t) \equiv \left[1-(-1)^i\left(\frac{a_2}{a_1}+1\right)\right]\int\limits_0^{t_i(x)} f(x_i(t,\tau),\tau)d\tau +$$

$$+\int\limits_{t_i(x)}^{t} f(x-a_1(t-\tau),\tau)d\tau \in C^1(G_\infty), \ i=1,2. \quad (8)$$

The classical solution to the mixed problem (1)–(3) serves functions:

$$u(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\left\{a_1\varphi(x+a_2t) + a_2\varphi(x-a_1t) + \int\limits_{x-a_1t}^{x+a_2t}\psi(s)ds\right\} +$$

$$+ F(x,t),\ (x,t) \in G_-, \tag{9}$$

$$u(x,t) = v(a_1 t - x)\left\{ \int\limits_0^{t_2(x)} \frac{a_1^2}{v^2(a_1 s)} \int\limits_0^{s} \frac{v(a_1\tau)\chi(s,\tau)P(\tau)}{a_1^2\zeta(\tau) - a_1\xi(\tau) + \theta(\tau)}\, d\tau ds + \right.$$

$$\left. \frac{a_1 v(0)\left[\psi(0) - a_2\varphi'(0)\right]}{a_1 + a_2} \int\limits_0^{t_2(x)} \frac{\chi(s,0)}{v^2(a_1 s)} ds \right\} + F_2(x,t) + \Phi(x,t), (x,t) \in G_+, \tag{10}$$

Corollary 1. *If the right-hand side f depends only on x or t and is continuous on x or t, then the statement of the theorem 1 is true without the integral smoothness requirements (7)–(8) on f.*

Basic noncharacteristic mixed problem on a segment

In the half–band $\dot{G} =]0, d[\times]0, +\infty[$ a basic mixed problem for the wave equation with noncharacteristic second derivatives is solved:

$$u_{tt}(x,t) + (a_1 - a_2)u_{xt}(x,t) - a_1 a_2 u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in \dot{G}_\infty, \tag{11}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in]0, d[, \tag{12}$$

$$\Gamma_i u = \left[\zeta_i(t)u_{tt} + \xi_i(t)u_{xt} + \theta_i(t)u_{xx} + \alpha_i(t)u_t + \beta_i(t)u_x + \gamma_i(t)u\right]_{x=\hat{d}_i} =$$

$$= \mu_i(t),\ t > 0,\ \hat{d}_i = (i-1)d,\ i = 1,\ 2,\ G = [0,d] \times [0, +\infty[, \tag{13}$$

where f, φ, ψ, μ_i, ζ_i, ξ_i, θ_i, α_i, β_i, γ_i, $i = 1,\ 2$, are the given bounded functions of their independent variables x and t, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ are the real constants. We replace the upper half–band G of the plane with a time–expanding by t set of closed rectangles $Q_n = [0,d] \times [0, d_{n+1}]$, where $d_n = (n-1)d/(a_1 + a_2)$, $n = 1,\ 2,\ ...$ We divide the rectangles Q_n into smaller rectangles $G_k = [0,d] \times [d_k, d_{k+1}]$, $k = \overline{1,n}$.

Divide rectangles G_k by the critical characteristics on triangles:

$$\Delta_{3k-2} = \left\{(x,t) : x \geqslant a_1 t_k,\ x + a_2 t_k \leqslant d,\ x \in [0,d],\ t \in [d_k, d_{k+1}]\right\},$$

$$\Delta_{3k-1} = \left\{(x,t) : x \leqslant a_1 t_k,\ x \in [0, a_1 d_2],\ t \in [d_k, d_{k+1}]\right\},$$

$$\Delta_{3k} = \left\{(x,t) :\ x + a_2 t_k \geqslant d,\ x \in [a_1 d_2, d],\ t \in [d_k, d_{k+1}]\right\},$$

$$t_k = t - d_k,\ k = \overline{1,n},\ n = 1,\ 2, ...$$

The formulas of solutions and the necessary and sufficient Adamard correctness conditions to the mixed problem (14)–(16) are given in the following theorem, in which we use the functions and notations:

$$F_{2,k}^{(1)}(x,t) =$$

$$= \frac{1}{a_1+a_2}\left[\int\limits_{d_k}^{t_2(x)}\int\limits_{a_2[t_2(x)-\tau]}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)ds d\tau + \int\limits_{t_2(x)}^{t}\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)ds d\tau\right],$$

$$t_2(x) = t - \frac{x}{a_1},\ t_2^*(x) = t - \frac{d-x}{a_2},\ F_{2,k}^{(2)}(x,t) =$$

$$= \frac{1}{a_1+a_2}\left[\int\limits_{d_k}^{t_2^*(x)}\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{d-a_1[t_2^*(x)-\tau]} f(s,\tau)ds d\tau + \int\limits_{t_2^*(x)}^{t}\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)ds d\tau\right],$$

$$\Phi_{3k-1}(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\left\{a_1\varphi_k(x+a_2t_k) + a_2\varphi_k(0) + \int\limits_0^{x+a_2t_k}\psi_k(s)ds\right\},$$

$$\Phi_{3k}(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\left\{a_2\varphi_k(x-a_1t_k) + a_1\varphi_k(d) + \int\limits_{x-a_1t_k}^{d}\psi_k(s)ds\right\},$$

$$P_{3k-2+i}(t) = \mu_i(t) - \Gamma_i(t)\left(\Phi_{3k-2+i}(x,t) + F_{2,k}^{(i)}(x,t)\right),\ k=\overline{1,n},$$

$$\chi_i(a,b) = exp\left\{-a_i\int\limits_a^b \sigma_i(s)ds\right\},\ \sigma_i(t) = \frac{(-1)^{i+1}\beta_i(t) - a_i\alpha_i(t)}{{a_i}^2\zeta_i(t) + (-1)^i a_i\xi_i(t) + \theta_i(t)}.$$

Theorem 2. *Let the coefficients $\zeta_i,\ \xi_i,\ \theta_i,\ \alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i \in C[0,d_{n+1}[,\ i = 1,2,$ be continuous, boundary modes (13) be not characteristic: ${a_i}^2\zeta_i(t) + (-1)^i a_i\xi_i(t) + \theta_i(t) \neq 0,\ t \in [0,d_{n+1}[, i = 1,\ 2,$ and there are solutions $v_i \in C^2[0,d_{n+1}[,\ v_i(\rho) \neq 0,\ v_i'(\rho) \neq 0,\ \rho \in [0,d_{n+1}[,$ to the equations*

$$[{a_i}^2\zeta_i(\rho/a_i) + (-1)^i a_i\xi_i(\rho/a_i) + \theta_i(\rho/a_i)]v_i''(\rho) +$$

$$+\left[(-1)^i\beta_i(\rho/a_i) + a_i\alpha_i(\rho/a_i)\right]v_i'(\rho) + \gamma_i(\rho/a_i)v_i(\rho) = 0,\ i = 1,\ 2.$$

The mixed problem (11)–(13) has a unique and stable classical solution $u \in C^2(Q_n)$ if and only if the smoothness requirements are true:

$$f \in C(Q_n),\ \varphi \in C^2[0,d],\ \psi \in C^1[0,d],\ \mu_1,\ \mu_2 \in C[0,d_{n+1}[,$$

$$J_{1,k}^{(p)}(x,t) \equiv \int\limits_{d_k}^{t} f(x-(-1)^p a_{3-p}(t-\tau),\tau)\,d\tau \in C^1(G_k),\ p=1,2, \quad (14)$$

$$J_{2,k}^{(i)}(x,t) \equiv \left[1-(-1)^i\left(\frac{a_2}{a_1}+1\right)\right] \int\limits_{d_k}^{t_i(x)+(2-i)2d_k} f\left(x_{i,k}(t,\tau),\tau\right)d\tau+$$

$$+\int\limits_{t_i(x)+(2-i)2d_k}^{t} f(x-a_1(t-\tau),\tau)d\tau \in C^1(\Delta_{3k-2}\cup\Delta_{3k-1}), \tag{15}$$

$$J_{3,k}^{(i)}(x,t) \equiv \left[1-(-1)^i\left(\frac{a_1}{a_2}+1\right)\right] \int\limits_{d_k}^{(-1)^i t_2^*(x)+(2-i)2d_k} f(x_{i,k}^*(t,\tau),\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_{(-1)^i t_2^*(x)+(2-i)2d_k}^{t} f(x+a_2(t-\tau),\tau)d\tau \in C^1(\Delta_{3k-2}\cup\Delta_{3k}), \tag{16}$$

and the matching conditions are true:

$$\zeta_i(0)[f(\hat{d}_i,0)+(-1)^i(a_i-a_{3-i})\psi'(\hat{d}_i)+a_1a_2\varphi''(\hat{d}_i)+\xi_i(0)\psi'(\hat{d}_i)+$$

$$+\theta_i(0)\varphi''(\hat{d}_i)+\alpha_i(0)\psi(\hat{d}_i)+\beta_i(0)\varphi'(\hat{d}_i)+\gamma_i(0)\varphi(\hat{d}_i)=\mu_i(0),\ i=1,\,2.$$

Here $x_{i,k}(t,\tau) = \left[1-(-1)^i\left((a_2/a_1)+1\right)\right](x-a_1t_{(2-i)k})-a_2\tau_{(2-i)k}$, $x_{i,k}^*(t,\tau)=d+\left[1-(-1)^i\left((a_1/a_2)+1\right)\right](x+a_2t_{(2-i)k}-d)+a_1\tau_{(2-i)k}$. *Classical solution* $u\in C^2(Q_n)$ *to mixed problem (11)–(13) is a function*

$$u_{3k-2}(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\left\{a_1\varphi_k(x+a_2t_k)+a_2\varphi_k(x-a_1t_k)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{x-a_1t_k}^{x+a_2t_k}\psi_k(s)ds\right\}+\frac{1}{a_1+a_2}\int\limits_{d_k}^{t}\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau,(x,t)\in\Delta_{3k-2}, \tag{17}$$

$$u_{3k-1}(x,t) = \Phi_{3k-1}(x,t)+F_{2,k}^{(1)}(x,t)+$$

$$+v_1(a_1t-x)\left\{\int\limits_{d_k}^{t-\frac{x}{a_1}}\frac{a_1^2}{v_1^2(a_1\delta)}\int\limits_{d_k}^{\delta}\frac{v_1(a_1\rho)\chi_1(\delta,\rho)P_{3k-1}(\rho)}{a_1^2\zeta_1(\rho)-a_1\xi_1(\rho)+\theta_1(\rho)}d\rho d\delta+\right.$$

$$\left.+\frac{a_1v_1(a_1d_k)\left[\psi_k(0)-a_2\varphi'{}_k(0)\right]}{a_1+a_2}\int\limits_{d_k}^{t-\frac{x}{a_1}}\frac{\chi_1(\delta,d_k)}{v_1{}^2(a_1\delta)}d\delta\right\},\ (x,t)\in\Delta_{3k-1}, \tag{18}$$

$$u_{3k}(x,t) = \Phi_{3k}(x,t) + F_{2,k}^{(2)}(x,t) +$$

$$+v_2(a_2t-d+x)\left\{ \int\limits_{d_k}^{t-\frac{d-x}{a_2}} \frac{a_2^2}{v_2^2(a_2\delta)} \int\limits_{d_k}^{\delta} \frac{v_2(a_2\rho)\chi_2(\delta,\rho)P_{3k}(\rho)}{a_2^2\zeta_2(\rho)+a_2\xi_2(\rho)+\theta_2(\rho)}\, d\rho d\delta + \right.$$

$$\left. + \frac{a_2v_2(a_2d_k)\left[\psi_k(d)-a_1\varphi'_k(d)\right]}{a_1+a_2} \int\limits_{d_k}^{t-\frac{d-x}{a_2}} \frac{\chi_2(\delta,d_k)}{v_2^2(a_2\delta)}\, d\delta \right\},$$

$$(x,t)\in\Delta_{3k},\ k=\overline{1,n},\ n=1,\,2,\ldots \tag{19}$$

Here $d_k = (k-1)d/(a_1+a_2), t_k = t-d_k, u_{3k-l}$ *are restriction of the classical solution* $u \in C^2(Q_n)$ *of the problem (11)–(13) to* Δ_{3k-l}, $l = 0,\,1,\,2,$ *and the intermediate recurrence initial data are equal to*

$$\varphi_1(x)=\varphi(x),\ \psi_1(x)=\psi(x),\ x\in[0,d],$$

$$\varphi_k(x) = u_{3k+j-4}|_{t=d_k},\ \psi_k(x) = \partial_t u_{3k+j-4}|_{t=d_k},$$

$$x\in[ja_1d_2,(a_1+ja_2)d_2],\ j=0,\,1,\ k=\overline{2,n},\ n=2,\,3,\ldots$$

Corollary 2. *If the right–hand side* f *depends only on* x *or* t *and is continuous on* x *or* t, *then the statement of the theorem 2 is true without the integral smoothness requirements (14)–(16) on* f.

Remark. If the right–hand side f depends on x and t, then for $f \in C(G_k)$ the integral smoothness requirements that the integrals (14)–(16) belong to the spaces $C^1(\Omega_k)$, where the sets Ω_k are respectively equal to the sets $G_k, \Delta_{3k-2}\cup\Delta_{3k-1}$ and $\Delta_{3k-2}\cup\Delta_{3k}$, are equivalent to their belonging to the spaces $C^{(1,0)}(\Omega_k)$ or $C^{(0,1)}(\Omega_k)$, $k=\overline{1,...,n}$. Here $C^{(1,0)}(\Omega_k)$ or $C^{(0,1)}(\Omega_k)$ are respectively the spaces of continuously differentiated on x or t, continuous on t or x functions in subsets Ω_k. The fairness, correctness of the classical solutions (9), (10) and (17)–(19) was verified by us on a personal computer in Mathematics.

The work on GPNI No. 11, «Convergence–2025», NIR 1.2.02.3.

References

1. Lomovtsev, F. E. Method of auxiliary mixed problems for a semi–bounded string. / F.E. Lomovtsev // Mezhdunar. mathematician. confer. "The Sixth Bogdanov Readings on Ordinary Differential Equations". — Minsk. — 2015. — Ch. 2. Mn.: IM NAS Belarus. — Pp. 74–75.

2. Lomovtsev, F. E. Uncharacteristic mixed problem for a one–dimensional wave equation in the first quarter of the plane

at nonstationary boundary second derivatives. / F.E. Lomovtsev, V.V. Lysenko // Vesnik Vitsebskaga dzyarzhaunaga universiteta. — 2019. — № 3 (104). — Pp. 5–17.

3. Lomovtsev, F. E. Correction method of test solutions to the general wave equation in the first quarter of the plane for the minimum smoothness of its right–hand side. / F. E. Lomovtsev // Zhurn. Belarusian State University. Mathematics. Informatics. — 2017. — № 3. — Pp. 38–52.

GLOBAL CORRECTNESS THEOREM TO THE SECOND MIXED PROBLEM FOR THE MODEL WAVE EQUATION AT VARIABLE RATE ON A SEGMENT

F.E. Lomovtsev, Liu Zhenhai, E.S. Cheb (Minsk, BSU)
lomovcev@bsu.by, zhhliu99@163.com, cheb@bsu.by

IIt is proved the global correctness theorem to the second mixed problem

$$u_{tt}-a^2(x,t)u_{xx}-a^{-1}(x,t)a_t(x,t)u_t-a(x,t)a_x(x,t)u_x=f(x,t),$$

$$(x,t)\in\dot{Q}_n=]0,d[\times]0,d_{n+1}[,\ d_n=(n-1)h^{(2)}[d/2,g_2(0,0)],\qquad(1)$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x),\ x\in[0,d],\qquad(2)$$

$$u_x|_{x=0}=\mu_1(t),\ u_x|_{x=d}=\mu_2(t),\ t\in[0,d_{n+1}],\ n=1,\ 2,...,\qquad(3)$$

where the coefficient a and the mixed problem data f, φ, ψ, μ_1, μ_2 are given real functions of their corresponding variables x and t.

Let $C^k(\Omega)$ be the set of k times continuously differentiable functions on the subset $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, $C^0(\Omega)=C(\Omega)$. The characteristic equations $dx-(-1)^i a(x,t)dt=0$ give characteristics $g_i(x,t)=C_i$, $i=1,\ 2$. If $a(x,t)\geqslant a_0>0$, then they decrease strictly in t at $i=1$ and increase strictly in t at $i=2$ with increasing x. Therefore, the functions $y_i=g_i(x,t)$ have inverse implicit functions $x=h_i\{y_i,t\}$, $t=h^{(i)}[x,y_i]$. If $a\in C^2(Q_n)$, then g_i, h_i, $h^{(i)}\in C^2$ to variables x, t, y_i, $i=1,\ 2$ [1].

The set $Q_n=[0,d]\times[0,d_{n+1}]$ is divided into rectangles $G_k=[0,d]\times[d_k,d_{k+1}]$, each of which is divided by the critical characteristics $g_2(x,t)=g_2(0,d_k)$, $g_1(x,t)=g_1(d,d_k)$, $k=1,\ 2,...,n$, into triangles:

$$\triangle_{3k-2}=\{(x,t):g_2(x,t)\geqslant g_2(0,d_k),\ g_1(x,t)\leqslant g_1(d,d_k),\ x\in[0,d]\},$$

$$\triangle_{3k-1}=\{(x,t):g_2(x,t)\leqslant g_2(0,d_k),\ x\in[0,d/2],\ t\in[d_k,d_{k+1}]\},$$

$$\triangle_{3k}=\{(x,t): g_1(x,t)\geqslant g_1(d,d_k),\, x\in[d/2,d],\, t\in[d_k,d_{k+1}]\}.$$

A following global correctness theorem is derived from [1] by "the method of auxiliary mixed problems for wave equation on a half-lineпїS.

Theorem. *Let be $a(x,t)\geqslant a_0>0$, $(x,t)\in Q_n$, $a\in C^2(Q_n)$. For the existence of a unique and stable with respect to φ, ψ, f, μ the classical solution $u\in C^2(Q_n)$ to the problem (1)–(3) in $\dot{Q}_n$, it is necessary and sufficient the smoothness requirements and matching conditions:*

$$\varphi\in C^2[0,d],\ \psi\in C^1[0,d],\ \mu_1,\ \mu_2\in C^1[0,d_{n+1}],\ f\in C(Q_n),$$

$$\int\limits_{d_k}^{t} f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)\,d\tau\in C^1(\Delta_{3k-2}\cup\Delta_{3k-1}),\ i=1,\,2, \tag{4}$$

$$\int\limits_{d_k}^{t} f(d-|d-h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)\,d\tau\in C^1(\Delta_{3k-2}\cup\Delta_{3k}),\ i=1,\,2, \tag{5}$$

$k=\overline{1,n}, n=1,2,..., \varphi'(\hat{d}_i)=\mu_i(0), \psi'(\hat{d}_i)=\mu_i'(0), \hat{d}_i=(i-1)d, i=1,\,2.$

This solution to the second mixed problem (1)–(3) in $\dot{Q}_n$ is the function

$$u_{3k-2}(x,t)=\frac{\varphi_k(h_2\{g_2(x,t),\,d_k\})+\varphi_k(h_1\{g_1(x,t),\,d_k\})}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),d_k\}}^{h_1\{g_1(x,t),d_k\}}\frac{\psi_k(\nu)}{a(\nu,d_k)}d\nu+\frac{1}{2}\int\limits_{d_k}^{t}\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}}\frac{f(\delta,\tau)}{a(\delta,\tau)}d\delta d\tau,\ (x,t)\in\Delta_{3k-2},$$

$$u_{3k-1}(x,t)=\frac{\varphi_k(h_1\{g_1(x,t),d_k\})+\varphi_k(h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),d_k\})}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{h_1\{g_1(x,t),d_k\}}\frac{\psi_k(\nu)}{a(\nu,d_k)}d\nu+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),d_k\}}\frac{\psi_k(\nu)}{a(\nu,d_k)}d\nu+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{d_k}^{t}\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}}\frac{f(|\delta|,\tau)}{a(|\delta|,\tau)}d\delta d\tau-\int\limits_{d_k}^{h^{(2)}[0,g_2(x,t)]}a(0,\rho)\mu_1(\rho)d\rho+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{d_k}^{h^{(2)}[0,g_2(x,t)]}\int\limits_{d_k}^{\rho}\Bigg[\frac{f(|h_1\{g_1(0,\rho),\,\tau\}|,\tau)}{a(|h_1\{g_1(0,\rho),\,\tau\}|,\tau)}\frac{\partial h_1\{g_1(0,\rho),\,\tau\}}{\partial\rho}+$$

$$+\frac{f(|h_2\{g_2(0,\rho),\,\tau\}|,\tau)}{a(|h_2\{g_2(0,\rho),\,\tau\}|,\tau)}\frac{\partial h_2\{g_2(0,\rho),\,\tau\}}{\partial\rho}\Bigg]d\tau d\rho,\ (x,t)\in\Delta_{3k-1},$$

$$u_{3k}(x,t)=\frac{\varphi_k(h_2\{g_2(x,t),d_k\})+\varphi_k(h_2\{g_2(d,h^{(1)}[d,g_1(x,t)]),d_k\})}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),d_k\}}^{d}\frac{\psi_k(\nu)}{a(\nu,d_k)}d\nu+\frac{1}{2}\int\limits_{h_2\{g_2(d,h^{(1)}[d,g_1(x,t)]),d_k\}}^{d}\frac{\psi_k(\nu)}{a(\nu,d_k)}d\nu+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{d_k}^{t}\int\limits_{d-h_1\{g_1(x,t),\tau\}}^{d-h_2\{g_2(x,t),\tau\}}\frac{f(d-|\delta|,\tau)}{a(d-|\delta|,\tau)}d\delta d\tau-\int\limits_{d_k}^{h^{(1)}[d,g_1(x,t)]}a(d,\rho)\mu_2(\rho)d\rho-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{d_k}^{h^{(1)}[d,g_1(x,t)]}\int\limits_{d_k}^{\rho}\Bigg[\frac{f(d-|d-h_2\{g_2(d,\rho),\,\tau\}|,\tau)}{a(d-|d-h_2\{g_2(d,\rho),\tau\}|,\tau)}\frac{\partial h_2\{g_2(d,\rho),\,\tau\}}{\partial\rho}+$$

$$+\frac{f(d-|d-h_1\{g_1(d,\rho),\,\tau\}|,\tau)}{a(d-|d-h_1\{g_1(d,\rho),\,\tau\}|,\tau)}\frac{\partial h_1\{g_1(d,\rho),\,\tau\}}{\partial\rho}\Bigg]d\tau d\rho,\ (x,t)\in\Delta_{3k},$$

for $k=1,2,...,n$, $n=1,2,...$ *Here the functions* u_{3k-l} *are the restrictions of the solution* $u\in C^2(Q_n)$ *to the mixed problem (1)–(3) on triangles* Δ_{3k-l}, $l=0,\ 1,\ 2$, *and recurrent initial data are equal*

$$\varphi_1(x)=\varphi(x),\ \psi_1(x)=\psi(x),\ x\in[0,d],\ \varphi_k(x)=u_{3k+j-4}(x,d_k),$$

$$\psi_k(x)=\partial_t u_{3k+j-4}(x,d_k),\ x\in[j(d/2),(j+1)(d/2)],\ j=0,1,\ k=\overline{2,n}.$$

Corollary. *If the right–hand side* f *depends only on* x *or* t *and is continuous on* x *or* t, *then the assertion of this Theorem is true without integral smoothness requirements (4) and (5).*

Remark. The global correctness theorem with explicit formulas of the classical solution to the first mixed problem for the model telegraph equation (1) with rate $a(x,t)$ has been deduced in [2].

Work is supported by BRFFR (project No. F22KI–001 of 05.11.2021).

References

1. Lomovtsev F.E. Second Mixed Problem for the General Telegraph Equation with Variable Coefficients in the First Quarter of the Plane. / F.E. Lomovtsev // Vesnik of the Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Information. Computing and Control. 2022. — Vol. 12, No. 3. — P. 50–70.

2. Lomovtsev F.E. Global Correctness Theorem of the First Mixed Problem for the Model Telegraph Equation at the Rate a(x,t) in the Half-Strip of the Plane. / F.E. Lomovtsev // Vesnik of the Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Information. Computing and Control. 2021. — Vol. 11, No 3. — P. 13–26.

ONE RELATION OF QUASI–NORMS OF HIGHER DERIVATIVES OF RATIONAL FUNCTIONS

V.R. Misiuk (Grodno, GrSU)
misiuk@grsu.by

Let T, D_+ and D_- be respectively the circle $|z| = 1$, the circle $|z| < 1$ and the domain $|z| > 1$ in the complex plane. For $0 < p \leqslant \infty$ we denote by $L_p(D_+)$ the Lebesgue space of complex functions on D_+ with respect to the flat Lebesgue measure with the usual quasi–norm $\|f\|_{L_p(D_+)}$. By $\mathcal{R}_n$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$, we denote the set rational functions of degree at most n with poles only in D_-. It is known that $r_n \in \mathcal{R}_n \bigcap L_\infty(D_+)$ satisfies the estimate $\|r_n'\|_{L_2(D_+)} \leqslant \sqrt{\pi\ n}\ \|r_n\|_{L_\infty(D_+)}$, received by E.P. Dolzhenko from geometrical considerations. At present, various types of it are known in the theory of rational approximation. Thus, in particular, its generalizations were obtained for the Lebesgue spaces $L_p(D_+)$ with respect to a flat measure, to higher derivatives and to fractional order derivatives, and the corresponding inverse theorems were given [3],[4].

For $\alpha \in \mathbb{R}$ and $0 < p \leqslant \infty,\ 0 < q \leqslant \infty$, denote by B_q^α the Hardy space — Besov(see, for example, [1],[2]). Namely, $f \in B_q^\alpha$ if for some $\beta > \alpha$ the function $\left(1 - |z|^2\right)^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}} \cdot \left(J^\beta f\right)(z)$ belongs to $L_q\left(D_+\right)$, where $J^\beta f$ is the Weyl derivative of the function f. Quasi-norm (norm at $1 \leqslant q \leqslant \infty$) in the space B_q^α is defined as follows

$$\|f\|_{B_q^\alpha} = \left\|\left(1 - |z|^2\right)^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}} \cdot \left(J^\beta f\right)(z)\right\|_{L_q(D_+)} =$$

$$= \left(\int\limits_{D_+} \left|\left(1 - |z|^2\right)^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}} \cdot \left(J^\beta f\right)(z)\right|^q dm_2(z)\right)^{\frac{1}{q}} < \infty\ .$$

It is well known that the definition of the space B_q^α does not depend on β: for different β the corresponding quasi–norms are equivalent. for the sake of convenience tends to take $\beta = \alpha + 1$.

Theorem 1.[3] *Let $r \in \mathcal{R}_n$, $\alpha > 0$, $p > 2$ and $1/q = \alpha + 2/p$. Then*

$$\|r\|_{B_q^\alpha} \leqslant c(\alpha, p) n^{\alpha+1/p} \|r\|_{L_p(D_+)},$$

where $c > 0$ and depends only on α и p.

We further assume that a rational function r of degree $n + m$ has no poles on T, and n poles lie in D_+ and m — in D_-. Then $r(z) = r_+(z) + r_-(1/z)$, where r_+ and r_- are rational functions of degree n and m, respectively, with poles only at D_-. From Theorem 1 we immediately obtain.

Theorem 2. *Let $\alpha > 0$, $p > 2$ and $1/q = \alpha + 2/p$. Then*

$$\|r_+\|_{B_q^\alpha} \leqslant c(\alpha, p) n^{\alpha+1/p} \|r\|_{L_p(D_+)},$$

$$\|r_-\|_{B_q^\alpha} \leqslant c(\alpha, p) m^{\alpha+1/p} \|r\|_{L_p(D_+)},$$

where $c > 0$ and depends only on α и p.

Applying the standard Bernstein method, it is easy to obtain the corresponding application in the form of inverse theorems, where the technical apparatus for solving them is the relations given here for derivatives of rational functions.

References

1. Flett T.M. Lipschitz spaces of functions on the circle and the disk / T.M. Flett // J. Math. Anal. and Appl. — 1972. — V. 39, No. 1. — P. 121–158.

2. Pekarsky A.A. Bernstein–type inequalities for derivatives of rational functions and inverse theorems of rational approximation / A.A. Pekarskii // Matem. Sb. — 1984. — V. 124 (166), No. 4 (8). — P. 571—588.

3. Misiuk V.R. Refinement of inequalities and Bernstein–type theorems of the theory of rational approximations with respect to the plane Lebesgue measure / V.R. Misiuk // Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. — 2008. — No. 2 (68). — P. 22—31.

4. Misiuk V.R. On the inverse theorem of the theory of rational approximations for Bergman spaces / V.R. Misiuk // Problems of physics, mathematics and technology. — 2010. — No. 1(2). — P. 34–37.

ON THE NEUMANN (P, Q)–EIGENVALUE PROBLEM IN ROUGH DOMAINS[1]

V.A. Pchelintsev (Tomsk, TSU)

va-pchelintsev@yandex.ru

[1] The research was supported by RSF (Grant № 23–21–00080).

We study the following Neumann (p, q)–eigenvalue problem:

$$-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda \|u\|^{p-q}_{L^q(\Omega_\gamma)} |u|^{q-2}u \text{ in } \Omega_\gamma, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega_\gamma,$$

in bounded domains $\Omega_\gamma \subset \mathbb{R}^n$ with anisotropic Hölder γ-singularities, $1 < p < \gamma$, $1 < q < p^*_\gamma$, where $p^*_\gamma = \gamma p/(\gamma - p)$.

Define domains Ω_γ with anisotropic Hölder γ-singularities (introduced in [1]:

$$\Omega_\gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_n < 1, 0 < x_i < g_i(x_n), i = 1, 2, \ldots, n-1\},$$

where $g_i(t) = t^{\gamma_i}$, $\gamma_i \geqslant 1$, $0 < t < 1$ are Hölder functions and for the function $G = \prod\limits_{i=1}^{n-1} g_i$ denote by

$$\gamma = \frac{\log G(t)}{\log t} + 1, \ 0 < t < 1.$$

It is evident that $\gamma \geqslant n$. In the case $g_1 = g_2 = \ldots = g_{n-1}$ we will say that domain Ω_γ is a domain with σ–Hölder singularity, $\sigma = (\gamma - 1)/(n - 1)$. In the case of the Lipschitz domains $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ we put $\gamma = n$.

Our approach is based on the theory of composition operators on Sobolev spaces and their applications to constant estimates in the corresponding Sobolev–Póincare inequalities and leads to the following result [2]:

Theorem 1. *Let*

$$\Omega_\gamma := \{x =\in \mathbb{R}^n : n \geqslant 3, 0 < x_n < 1, 0 < x_i < x_n^{\gamma_i}, i = 1, 2, \ldots, n-1\}$$

$\gamma_i \geqslant 1$, $\gamma := 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i$, *be domains with anisotropic Hölder γ–singularities.*

Then for $1 < s < p < \gamma$ and $1 < q < p^*_\gamma$, we have

$$\frac{1}{\lambda_{p,q}(\Omega_\gamma)} \leqslant \inf_{a \in I_a} a^{\frac{p}{q}-1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} (a\gamma_i - 1)^2 + n - 1 + a^2 \right)^{\frac{p}{2}} B^p_{r,s}(\Omega),$$

where $I_a = (n/\gamma, p(n-s)/s(\gamma - p))$ and $s < n$ is chosen such that $p^*_\gamma < \frac{ns}{n-s}$. $B_{r,s}(\Omega)$ is the best constant in the (r, s) – Sobolev–Poincaré inequality in the Lipschitz domain Ω, $1 < q < r < \infty$.

References

1. Gol'dshtein V. Applications of change of variables operators for exact embedding theorems / V. Gol'dshtein, L. Gurov // Integral Equ. Oper. Theory. — 1994. — Vol. 19 — P. 1–24.

2. Garain P. On the Neumann (p,q)-eigenvalue problem in Hölder singular domains / P. Garain, V. Pchelintsev, A. Ukhlov // arXiv: 2301.11037v1. — P. 1–15.

ON AN INTEGRAL OPERATOR FOR QUASI–MONOTONE FUNCTIONS

A. Senouci (Algeria, University of Tiaret)
kamer295@yahoo.fr

In 1993 Shanzhong Lai [3] considered weighted norm inequalities for general integral operators of the form

$$S_\varphi f(x) = \int_0^\infty \varphi(x,y)f(y)dy,\ \varphi(x,.) \geqslant 0, \varphi(x,.) \in L_1(0,\infty), x \in (0,\infty)$$

on monotone functions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. In [3] weight functions w, v were characterized for which the inequality

$$||S_\varphi f||_{L_{p,w}(0,\infty)} \leqslant C||f||_{L_{q,v}(0,\infty)}$$

holds for monotone functions f, $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$, $0 < q \leqslant p \leqslant 1$, where $C > 0$ is independent of f. Here and almost everywhere in the sequel w, v are positive Lebesgue measurable functions on $(0,\infty)$. Moreover other integral inequalities where obtained for a different range of parameters p, q, in particular for $p < 0$, $q < 0$. (See [1].)

In this work, we exend the results of [3] for quazi–monotone functions.

Definition 1. [2]. We say that a non–negative function f is quasimonotone on $]0,\infty[$, if for some real number α, $x^\alpha f(x)$ a is a decreasing or an increasing function of x. More precisely, given $\beta \in \mathbb{R}$, we say that $f \in Q_\beta$ if $xf^{-\beta}f(x)$ is non–increasing and $f \in Q^\beta$ if $x^{*\beta}f(x)$ is non–decreasing. Let

$$\Phi(x,r) = \int_0^r \varphi(x,y)dy, \quad \Phi_1(x,r) = \int_r^\infty \varphi(x,y)dy,$$

where $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

Theorem 1. *Let* $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$, $C_1 > 0$.

1. If $f \in Q_\beta$ *such that*

$$\left[\int_0^\infty (x^{-\beta}f)^p w\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant C_1 \left[\int_0^\infty (S_{\varphi,\beta})^q v\right]^{\frac{1}{q}}, \qquad (1)$$

then

$$\left[\int_0^\infty x^{-\beta p} w\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant C_1 \left[\int_0^\infty \Phi(x,r)^q v\right]^{\frac{1}{q}} \tag{2}$$

for all $r > 0$*, where* $S_{\varphi,\beta} = \int_0^\infty \varphi(x,y) y^{-\beta} f(y) dy$.

2. If f *satisfies (1) and* $f \in Q^\beta$*, then*

$$\left(\int_r^\infty x^{-\beta p} w\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant C_1 \left[\int_0^\infty \Phi(x,r)^q v\right]^{\frac{1}{q}} \tag{3}$$

for all $r > 0$*,*

Theorem 2. *Let* $0 < q \leqslant p \leqslant 1$*,* $C_2 > 0$*.*

1. If $f \in Q_\beta$ *such that*

$$\left[\int_0^\infty (S_{\varphi,\beta})^p w\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant C_2 \left[\int_0^\infty (x^{-\beta} f)^q v\right]^{\frac{1}{q}}, \tag{4}$$

then

$$\left[\int_0^\infty \Phi(x,r)^q w\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant C_2 \left[\int_0^r x^{-\beta q} v\right]^{\frac{1}{q}} \tag{5}$$

for all $r > 0$.

2. If f *satisfies (4) and* $f \in Q^\beta$*, then*

$$\left[\int_0^\infty \Phi_1(x,r)^p w\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant C_2 \left(\int_r^\infty x^{-\beta q} v\right]^{\frac{1}{q}} \tag{6}$$

for all $r > 0$.

Remark 1. If we put $\beta = 0$ in Theorem 1 and 2, we get the rezsults of [3].

References

1. Benaissa B., Senouci A. New integral inequalities related to a general integral operator through monotone functions / B. Beenaissa, A. Senouci // Sahand Communications in Mathematical Analysis. — 2022. — V. 19, n. 1 — P. 41–56.

2. Bergh J., Burenkov V.I., Persson, L.E. Best constants in reversed Hardy inequalities for quasimonotone functions / J. Bergh, V. I. Burenkov, L. E. Persson // Acta Sci. Math. (Szeged). — 1994. — V. 59 — P. 221–239.

3. Shanzhong Lai, Weighted norm inequalities for general operators on monotone functions /Shanzhong Lai // Amer. Math. Soc. — 1993. — V. 340, n. 2 — P. 811–836.

INITIAL–BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR GENERAL 1D INHOMOGENEOUS WAVE EQUATION WITH NONSTATIONARY CHARACTERISTIC SECOND DERIVATIVES IN BOUNDARY MODE

K.A. Spesivtseva, F.E. Lomovtsev (Minsk, BSU)
ksenia.spesivtseva@gmail.com, lomovcev@bsu.by

In set $\dot{G}_\infty$ an initial–boundary value (mixed) problem is posed [1]

$$(\partial_t - a_2\partial_x + b_2)(\partial_t + a_1\partial_x + b_1)u(x,t) = f(x,t),$$

$$(x,t) \in \dot{G}_\infty = (0,+\infty) \times (0,+\infty), \tag{1}$$

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t(x,t)|_{t=0} = \psi(x),\ x \in (0,+\infty), \tag{2}$$

$$\Gamma(t)u \equiv [\zeta(t)u_{tt} + \xi(t)u_{xt} + \theta(t)u_{xx} + \alpha(t)u_t + \beta(t)u_x +$$

$$+\gamma(t)u]|_{x=0} = \mu(t),\ t \in (0,+\infty). \tag{3}$$

Let $C^k(\Omega)$ be the set of all k times continuously and boundedly differentiable functions on a subset Ω of R^2 and $C^0(\Omega) = C(\Omega)$, $t_1(x) = \frac{x}{a_1} - t > 0$ in G_-, $t_2(x) = t - \frac{x}{a_1} \geqslant 0$ in G_+.

Definition 1. The classical solution to the problem (1)—(3) is the function $u \in C^2(G_\infty)$, $G_\infty = [0,+\infty) \times [0,+\infty)$, satisfying equation (1) on $\dot{G}_\infty$ in the usual sense, but the initial (2) and boundary (3) conditions in the sense of the limits for the corresponding expressions from its values $u(\dot{x},\dot{t})$ and its derivatives at interior points $(\dot{x},\dot{t}) \in \dot{G}_\infty$ tending to the corresponding boundary points (x,t) indicated in them.

Theorem 1. *Let in the boundary mode (3) the coefficients be ζ, ξ, θ, α, β, $\gamma \in C^1(R_+)$, first partial derivatives are noncharacteristic: $a_1\alpha(t) - \beta(t) \neq b_1[2a_1\zeta(t) - \xi(t)]$, $t \in R_+$, and second partial derivatives are taken along the critical characteristic of equation (1): $a_1^2\zeta(t) - a_1\xi(t) + \theta(t) \equiv 0$, $t \in R_+$. Then characteristic mixed problem (1)—(3) in set $\dot{G}_\infty$ has a unique and stable on φ, ψ, f, μ classical solution $u \in C^2(G_\infty)$ for those and only those φ, ψ, f, μ, which are $\mu \in C^1(R_+)$ and*

$$\varphi \in C^2(R_+),\ \psi \in C^1(R_+),\ f \in C(G_\infty),\ \mu \in C(R_+),\ R_+ = [0,+\infty),$$

$$\int_0^t f(x + a_2(t-\tau),\tau)d\tau \in C^1(G_\infty), \tag{4}$$

$$\Big[1 - (-1)^i\Big(\frac{a_2}{a_1} + 1\Big)\Big] \int_0^{t_i(x)} f\big(x_i(t,\tau),\tau\big)d\tau +$$

$$+\int_{t_i(x)}^{t} f\big(x-a_1(t-\tau),\tau\big)d\tau \in C^1(G_\infty),\ i=1,\ 2, \tag{5}$$

$$x_i(t,\tau)=\Big[1-(-1)^i\Big(\frac{a_2}{a_1}+1\Big)\Big](x-a_1t)-a_2\tau,$$

$$\Phi(t)\equiv[(a_2-a_1)\zeta(t)+\xi(t)]\,\varphi''(a_2t),$$

$$\Psi(t)\equiv[(a_2-a_1)\zeta(t)+\xi(t)]\,\psi'(a_2t)\in C^1(R_+),$$

$$\mathfrak{F}(t)\equiv a_2\xi(t)\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^t f(a_2(t-\tau),\tau)d\tau\right]+$$

$$+\theta(t)\left\{\frac{a_1-a_2}{a_1}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^t f(a_2(t-\tau),\tau)d\tau\right]-f(0,t)\right\}\in C^1(R_+)$$

and satisfy the matching conditions:

$$\zeta(0)\big[f(0,0)+(b_1a_2-b_2a_1)\varphi'(0)+a_1a_2\varphi''(0)+(a_2-a_1)\psi'(0)-$$
$$-b_1b_2\varphi(0)-\big(b_1+b_2\big)\psi(0)\big]+\big[a_1\xi(0)-a_1^2\zeta(0)\big]\varphi''(0)-$$
$$-\alpha(0)\psi(0)+\beta(0)\varphi'(0)+\gamma(0)\varphi(0)+\xi(0)\psi'(0)=\mu(0),$$

$$\zeta(0)\big[-(b_1+b_2)f(0,0)+b_1b_2(b_1+b_2)\varphi(0)+$$
$$+\big(2(a_1-a_2)b_1b_2+a_1b_2^2-a_2b_1^2\big)\varphi'(0)+\big[a_1(a_1-2a_2)b_2+$$
$$+a_2(a_2-2a_1)b_1\big]\varphi''(0)+\big(b_1^2+b_1b_2+b_2^2\big)\psi(0)+$$
$$+\big[(2a_1-a_2)b_1+(a_1-2a_2)b_2\big]\psi'(0)\big]-\xi(0)\big[b_1b_2\varphi'(0)+$$
$$+(b_1a_2-b_2a_1)\varphi''(0)+(b_1+b_2)\psi'(0)\big]+a_1\Phi'(0)-a_1\big[(a_2-a_1)\zeta'(0)+$$
$$+\xi'(0)\big]\varphi''(0)+\Psi'(0)-\big[(a_2-a_1)\zeta'(0)+\xi'(0)\big]\psi'(0)+$$
$$+\big(\zeta'(0)+\alpha(0)\big)\big[f(0,0)-b_1b_2\varphi(0)+(b_1a_2-b_2a_1)\varphi'(0)+$$
$$+a_1a_2\varphi''(0)-(b_1+b_2)\psi(0)+(a_2-a_1)\psi'(0)\big]+$$
$$+\xi'(0)\big[\psi'(0)+a_1\varphi''(0)\big]-a_1^2\zeta'(0)\varphi''(0)+$$
$$+\big(\alpha'(0)+\gamma(0)\big)\psi(0)+\beta(0)\psi'(0)+\beta'(0)\varphi'(0)+$$
$$+\gamma'(0)\varphi(0)+\|\vec{\nu}\|f'_{\vec{\nu}}(0,0)=\mu'(0).$$

This classical solution to the problem (1)—(3) on $\dot{G}_\infty$ is the function

$$u_-(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\Bigg\{a_1e^{-b_2t}\varphi(x+a_2t)+a_2e^{-b_1t}\varphi(x-a_1t)+$$

$$+e^{Bx-At}\left[\int\limits_{x-a_1t}^{x+a_2t}e^{-Bs}[A\varphi(s)+\psi(s)]ds+\int\limits_0^t\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)}e^{A\tau-Bs}f(s,\tau)dsd\tau\right]\Bigg\},$$

$$(x,t)\in G_-,$$

$$u_+(x,t) = \frac{e^{Bx-At}}{a_1+a_2}\Bigg[a_1 e^{-B(x+a_2t)}\varphi(x+a_2t) + a_2\varphi(0) +$$

$$+\int_0^{x+a_2t} e^{-Bs}[A\varphi(s)+\psi(s)]ds\Bigg] +$$

$$+a_1 e^{Bx-At}\int_0^{t_2(x)} \frac{\chi(a_1t_2(x),\rho)\left[e^{A\rho}\mu(\rho)-M(\rho)\right]}{a_1\alpha(\rho)-\beta(\rho)-b_1[2a_1\zeta(\rho)-\xi(\rho)]}d\rho + F_2(x,t),$$

$$(x,t)\in G_+,$$

$$F_2(x,t) = \frac{e^{Bx-At}}{a_1+a_2}\Bigg[\int\limits_0^{t_2(x)}\int\limits_{x_2(t,\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} e^{A\tau-Bs}f(s,\tau)dsd\tau +$$

$$+\int\limits_{t_2(x)}^{t}\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} e^{A\tau-Bs}f(s,\tau)dsd\tau\Bigg].$$

Corollary 1. If the right–hand side f depends only on x or t, then the statement of the theorem 1 is true without the integral smoothness requirements (4), (5) on f.

References

1. Spesivtseva K.A. Initial–Boundary Problem for a General One–Dimensional Wave Equation under a Nonstationary Boundary Mode with Characteristic Second Partial Derivatives. / K.A. Spesivtseva, F.E. Lomovtsev // Materials Intl. scientific conf. «Yerugin Readings-2018». — Minsk: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus. — 2018. — Part 2. — pp. 34–36.

Именной указатель

Н а у ч н о е   и з д а н и е

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ
ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ

Материалы
Международной конференции
Воронежская весенняя математическая школа
(3 мая – 9 мая 2023 г.)

Издано в авторской редакции

Верстка и подготовка оригинал–макета
Д.Э. Кондаурова

Подписано в печать 00.00.2023. Формат 60×84/16,
Усл. п. л. 22,4. Уч. изд. л. 22,0. Тираж 200 экз. Заказ 151

Издательский дом ВГУ
394018 Воронеж, пл. Ленина, 10
Отпечатано с готового оригинал–макета в типографии
Издательского дома ВГУ
394018 Воронеж, ул. Пушкинская, 3