Воронежский государственный университет
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Математический институт имени В. А. Стеклова
Российской академии наук

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Материалы
Международной конференции
Воронежская весенняя математическая школа
ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ — XXXI
Посвящается памяти Юлия Витальевича Покорного
(80-летию со дня рождения)

(3–9 мая 2020 г.)

Воронеж
АНО «Наука-Юнипресс»
2020

УДК 517.53(97; 98)
ББК 22.16
С56

П р о г р а м м н ы й   к о м и т е т:
Е. И. Моисеев (председатель), А. Д. Баев (зам. председателя), И. С. Ломов (зам. председателя), А. В. Боровских (зам. председателя), А. П. Хромов (зам. председателя), В. В. Власов, А. В. Глушко, М. Л. Гольдман, В. Г. Задорожний, В. Г. Звягин, М. И. Каменский, В. А. Костин, Г. А. Курина, В. И. Ряжских, Е. М. Семенов, С. М. Ситник, А. П. Солдатов, А. И. Шашкин, А. С. Шамаев.

О р г к о м и т е т:
Е. И. Моисеев (председатель), Д. А. Ендовицкий (сопредседатель), В. А. Садовничий (сопредседатель), А. Д. Баев (зам. председателя), И. С. Ломов (зам. председателя), О. А. Козадеров (зам. председателя), А. П. Хромов (зам. председателя), И. В. Асташова, А. В. Боровских, Я. М. Ерусалимский, М. С. Никольский, Н. Х. Розов, С. А. Шабров, М. Ш. Бурлуцкая (ученый секретарь).

С56 **Современные методы теории краевых задач** : материалы Международной конференции : Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения — XXXI» (3–9 мая 2020 г.) / Воронежский государственный университет ; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова ; Математический институт имени В. А. Стеклова РАН. — Воронеж : АНО «Наука-Юнипресс», 2020. — 239 с.

ISBN 111-1-1111-1111-1

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXXI», которая посвящена памяти Юлия Витальевича Покорного (80-летию со дня рождения). Тематика охватывает широкий спектр проблем качественной и спектральной теории дифференциальных уравнений, геометрии и анализа, моделирования, оптимального управления, теории игр и других смежных направлений, преподавания математики.

УДК 517.53(97; 98)
ББК 22.16

ISBN 111-1-1111-1111-1

© Воронежский государственный университет, 2020
© Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, 2020
© Математический институт имени В. А. Стеклова РАН, 2020
© Оформление. АНО «Наука-Юнипресс» 2020

Содержание

Contents

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО - ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г.Э. Абдурагимов (Махачкала, ДГУ)
gusen_e@mail.ru

Вопросам исследования существования и единственности положительных решений функционально–дифференциальных уравнений посвящено достаточно большое количество работ и основным орудием исследования здесь являются методы функционального анализа, основанные на использовании теории полуупорядоченных пространств, тесно связанной с именами Ф. Рисса, М. Г. Крейна, Л. В. Канторовича и др. В последующем методы исследования положительных решений операторных уравнений были развиты М. А. Красносельским, в частности в работах [1, 2, 3], и его учениками Л. А. Ладыженским, И. А. Бахтиным, В. Я. Стеценко, Ю. В. Покорным и др.

В данной работе на основе с помощью специальных топологических средств доказано существование и единственность положительного решения краевой задачи

$$x'' + p(t)x(t) - f(t, (Tx)(t)) = 0, \qquad 0 < t < 1,$$

$$x'(0) + \alpha x(0) = 0, \qquad x'(1) - \beta x(0) = 0,$$

где α и β — действительные неотрицательные числа, $p(t)$ — неотрицательная непрерывная и ω — периодически продолжимая на $\mathbb{R}$ функция при $\omega = 1$, $p(i) = p(0)$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, причем $p(t) + \alpha + \beta \neq 0$ в $[0, 1]$, $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{L}_p$ $(1 < p < \infty)$ — линейный непрерывный оператор, функция $f(t, u)$ неотрицательна на $[0, 1] \times [0, \infty]$, монотонно возрастает по второму аргументу, удовлетворяет условию Каратеодори и $f(\cdot, 0) \equiv 0$.

Литература

1. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений / М.А. Красносельский. — М. : Физматгиз, 1962. — 396 с.

2. Красносельский М. А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. — М. : Наука, 1975. — 511 с.

3. Красносельский М.А. Ненулевые решения с сильными нелинейностями / М.А. Красносельский, Ю.В. Покорный // Матем. заметки — 1969. — Т. 5, № 2. — С. 253–260.

© Абдурагимов Г.Э. , 2018

О ЗАДАЧЕ УСПОКОЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЯМИ[1]

А.Ш. Адхамова (Москва, РУДН)
ami_adhamova@mail.ru

В работе [1] Н. Н. Красовский сформулировал и изучил задачу об успокоении системы с последействием, описываемой дифференциально-разностным уравнением запаздывающего типа. Он свел эту задачу к краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений с отклоняющимся аргументом в младших членах. А. Л. Скубачевский в работе [2] обобщил задачу Н. Н. Красовского на случай, когда уравнение, описывающее управляемую систему, содержит также старшие члены с запаздыванием. В статье [3] рассматривается модель с постоянными матричными коэффициентами и несколькими запаздываниями.

Рассмотрим линейную нестационарную систему управления, описываемую системой дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\sum_{m=0}^{M} A_m(t)y'(t-m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t-m\tau) = u(t), \quad 0 < t, \tag{1}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix},$$

где $A_m(t)$ — $n\times n$ матрица с элементами, которые являются функциями из $C^1(\mathbb{R})$, $B_m(t)$ — $n\times n$ матрица с элементами, которые являются функциями из $C(\mathbb{R})$, $A_m = \{a_{ij}(t)\}_{i,j=1\dots n}$, $B_m = \{b_{ij}(t)\}_{i,j=1\dots n}$, запаздывание $\tau > 0$ — константа и $u(t)$ — вектор-функция управления.

Предыстория системы опеределяется начальным условием:

$$y(t) = \varphi(t), \ t \in [-M\tau, 0], \tag{2}$$

где $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$ заданная вектор-функция.

Мы рассмотрим задачу о приведении системы (1) - (2) в положение равновесия. Найдем такое управление $u(t)$, $0 < t < T$, что:

$$y(t) = 0, \ t \in [T - M\tau, T], \tag{3}$$

[1] Работа выполнена при поддержке Программы РУДН «5-100» и при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00288).

© Адхамова А.Ш., 2018

где $T \geqslant (M+1)\tau$.

Из всевозможных управлений будем искать управление, доставляющее минимум функционалу:

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \to min,$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, мы получаем вариационную задачу о минимуме функционала энергии

$$J(y) = \int_0^T \left| \sum_{m=0}^{M} A_m(t) y'(t-m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t) y(t-m\tau) \right|^2 dt \to min \tag{4}$$

с краевыми условиями (2) - (3).

В работе была установлена связь между вариационной задачей для нелокальных функционалов, описывающих многомерную систему управления с последействиями, и соответствующей краевой задачей для систем дифференциально-разностных уравнений второго порядка и доказана однозначная разрешимость вариационной и краевой задач.

Литература

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. / Н.Н. Красовский. — М. : Наука, 1968. — 476 с.

2. Skubachevskii A.L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. / A.L. Skubachevskii. — Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1997. — 298 p.

3. Adkhamova A.S, Skubachevskii A.L. Damping Problem for Multidimensional Control System with Delays / A.S. Adkhamova, A.L. Skubachevskii // Distributed Computer and Communication Networks. — 2016. — P. 612–623 .

НЕВЫРОЖДЕННЫЕ ОРБИТЫ В $\mathbb{C}^4$ РАЗЛОЖИМЫХ 7-МЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ[1]

Р.С. Акопян, А.В. Атанов (Москва, МИРЭА; Воронеж, ВГУ)

akrim111@yandex.ru; atanov.cs@gmail.com

При изучении голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^4$ отдельный интерес представляют невырожденные по Леви поверхности, не сводимые к трубчатым многообразиям (см. [1]). У алгебр Ли, отвечающих таким поверхностям, размерность абелевых подалгебр не может быть больше 3.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00497).

© Акопян Р.С., Атанов А.В., 2018

Ниже обсуждаются 7-мерные разложимые алгебры, у которых имеются лишь маломерные абелевы подалгебры. К ним, например, относится семейство алгебр $g_{3,6} \oplus g_{4,8}$ (в обозначениях [2]) с коммутационными соотношениями:

$$[e_1, e_2] = e_1, [e_1, e_3] = 2e_2, [e_2, e_3] = e_3,$$
$$[e_4, e_7] = (h+1)e_4, [e_5, e_6] = e_4, [e_5, e_7] = e_5, [e_6, e_7] = he_6, \ |h| \leqslant 1.$$

Отметим, что существует всего три 7-мерных алгебры Ли, разложимых на 5-мерную и 2-мерную компоненты и имеющих абелевы подалгебры лишь малых размерностей: $g_5 \oplus g_2$, $g_{5,36} \oplus g_2$, $g_{5,37} \oplus g_2$ (в обозначениях работ [2, 3]).

Предложение 1. *Следующие вещественно-аналитические гиперповерхности пространства* $\mathbb{C}^4$ *являются невырожденными по Леви орбитами алгебр* $g_{3,6} \oplus g_{4,8}$ $(\alpha \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{C})$*:*

$$y_4 = y_3^2 \pm y_2^\alpha \cdot |z_1|^{-\alpha}, \quad (y_4 - y_3^2)y_2 = |z_1| + \mathrm{Re}(Az_1),$$
$$y_4 = y_1 y_3 + y_3 (\alpha \ln y_3 + \ln y_2). \tag{1}$$

Предложение 2. *У алгебры* $g_5 \oplus g_2$ *нет невырожденных по Леви орбит в пространстве* $\mathbb{C}^4$.

Пример. Голоморфно однородная Леви-невырожденная несферическая гиперповерхность

$$y_4 = |z_1| y_2 + y_3^2$$

пространства $\mathbb{C}^4$ является орбитой алгебры $g_{5,37} \oplus g_2$, описываемой следующими коммутационными соотношениями:

$$[e_1, e_4] = e_1, [e_2, e_3] = e_1, [e_2, e_4] = e_2,$$
$$[e_2, e_5] = -e_3, [e_3, e_4] = e_3, [e_3, e_5] = e_2, [e_6, e_7] = e_6.$$

Все результаты получены на основе техники голоморфной реализации абстрактных алгебр Ли (см., например, [4]) и интегрирования получаемых алгебр голоморфных векторных полей. В настоящее время авторами проверяется гипотеза о полноте списка (1) для орбит семейства алгебр $g_{3,6} \oplus g_{4,8}$ и изучаются другие разложимые 7-мерные алгебры.

Литература

1. *Doubrov B.* Homogeneous Levi nondegenerate hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$ / B. Doubrov, A. Medvedev, D. The // arXiv: 1711.02389v1

2. *Мубаракзянов Г.М.* О разрешимых алгебрах Ли / Г.М. Мубаракзянов // Изв. вузов. Матем. — 1963. — №1. — С. 114–123.

3. *Мубаракзянов Г.М.* Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка / Г.М. Мубаракзянов // Изв. вузов. Матем. — 1963. — №3. — С. 99–106.

4. *Атанов А.В.* Разложимые пятимерные алгебры Ли в задаче о голоморфной однородности в $\mathbb{C}^3$ / А.В. Атанов, А.В. Лобода // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2019. — Т. 173. — С. 86–115.

ИССЛЕДОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КОЛЕБАНИЙ ПОДВЕСНОГО МОСТА, ИМЕЮЩИЙ ОБЩУЮ ТОЧКУ КОНТАКТА С КАБЕЛЕМ

А.Б. Алиев, Е.М. Фархадова (Баку, АзТУ; ИММ НАН Азербайджана
alievakbar@gmail.com, ferhadova.yeter@gmail.com

Рассматривается математическая модель, описывающая колебания подвесного моста, когда натягивающий трос имеет одну общую точку с дорожным полотном

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} + (u-v)_+ = f_1(x,u,v), \\ v_{tt} - v_{xx} - (v-u)_+ = f_2(x,u,v), \end{cases} \qquad (1)$$

где $u(x,t)$- состояние дорожного полотна, а $v(x,t)$- состояние натягивающего кабеля. Здесь $0 \leqslant x \leqslant l$, $t > 0$, $z_+ = \max\{z, 0\}$. $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ непрерывно дифференцируемые функции, определенные в области $[0,l] \times R^2$.

Исходя из физических соображений требуется выполнение следующих граничных условий и условий сопряжения:

$$u(0,t) = u'(0,t) = u(l,t) = u'(l,t) = v(0,t) = v(l,t) = 0, t > 0, \qquad (2)$$

$$u(\xi-0,t) = u(\xi+0,t) = v(\xi-0,t) = v(\xi+0,t), 0 < \xi < l, t > 0, \qquad (3)$$

$$u''(\xi-0,t) = u''(\xi+0,t) = 0, t > 0, \qquad (4)$$

$$u'''(\xi-0,t) - u'''(\xi+0,t) - v'(\xi-0,t) + v'(\xi+0,t) = 0, t > 0. \qquad (5)$$

Предположим, что выполнены следующие начальные условия:

$$u(x,0) = u_0(x),\ u'(x,0) = u_1(x), 0 \leqslant x \leqslant l, \qquad (6)$$

$$v(x,0) = v_0(x),\ v'(x,0) = v_1(x), 0 \leqslant x \leqslant l \qquad (7)$$

При выполнении некоторых условий доказано существование и единственность локальных и глобальных решений задачи (1)-(7). Исследовано также поведение решений при $t \to +\infty$.

© Алиев А.Б., Фархадова Е.М., 2018

ОБ ОДНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ВЕТВИ НЕЛИНЕЙНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ШЕСТОГО ПОРЯДКА С НЕГЛАДКИМИ РЕШЕНИЯМИ

А.В. Анохина, Ф.В. Голованева, М.Б. Давыдова, Е.С. Сустретова (Воронеж)

alenaanoxina94@yandex.ru

В работе изучается нелинейная граничная задача шестого порядка с негладкими решениями

$$\begin{cases} -\left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\mu} + (ru''_{xx})''_{x\mu} + Q'_{\mu}u = \lambda F(x,u); \\ u(0) = u'_x(0) = \alpha_1 u''_{xx}(0) + \alpha_2 u'''_{xxx}(0) = 0; \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = \beta_1 u''_{xx}(\ell) + \beta_2 u'''_{xxx}(\ell) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Решение (1) мы будем искать в классе E — дважды непрерывно дифференцируемых функций $u(x)$, у которых: $u''_{xx}(x)$ — μ–абсолютно непрерывна на $[0,\ell]$; $pu'''_{xx\mu}(x)$ — дважды непрерывно дифференцируема; $\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(x)$ — μ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$.

В точках ξ, принадлежащих множеству $S(\sigma)$ — точек разрыва функции $\sigma(x)$, которая порождает меру на $[0;\ell]$, и содержит все особенности модели, уравнение в (1) понимается как равенство $-\Delta\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(\xi) + \Delta\left(ru_{xx}\right)'_{x}(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \lambda F(\xi,u(\xi))$, где $\Delta u(\xi)$ — полный скачок функции $u(x)$ в точке ξ; $\lambda > 0$ — спектральный параметр. Через Λ обозначим множество положительных значений λ, при каждом из которых (1) имеет хотя бы одно решение. Будем считать действительное число λ собственным значением задачи (1), если при этом λ система (1) имеет нетривиальное решение.

Уравнение в (1) задано почти всюду (в смысле меры μ) на множестве $\overline{[0;\ell]}_S$, которое строится следующим образом. Строго возрастающая на $[0;\ell]$ функция $\mu(x)$ определяет неполное метрическое пространство $J_S = [0;\ell]\setminus S(\mu)$, где $S(\mu)$ — множество точек разрыва функции $\mu(x)$ с метрикой $\varrho(x,y) = |\mu(x)-\mu(y)|$. Стандартное пополнение, при котором каждая точка $\xi\in S(\mu)$ заменяется на упорядоченную пару $\{\xi-0,\xi+0\}$, обозначим через $\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}$. Объединение $\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}$ и $S(\mu)$ нам даёт $\overline{[0;\ell]}_S$.

Будем предполагать, что функции $p(x)$, $r(x)$ и $Q(x)$ μ-абсолютно непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}$, $\min\limits_{x\in\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}} p(x) > 0$, $Q(x)$ не убывает, а $F(x,u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори: 1) $F(x,u)$ при почти всех x (относительно μ-меры) определена и непрерывна по u; 2) функция $F(x,u)$ измерима по x при каждом u; 3) $|F(x,u)|\leqslant m(x)$, где $m(x)$ — μ-суммируемая функция на $\overline{[0;\ell]}_S$.

© Анохина А.В., Голованева Ф.В., Давыдова М.Б., Сустретова Е.С., 2018

Будем говорить, что однородное уравнение $\left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\mu} + uQ'_\mu = 0$ не осциллирует на $[0;\ell]$, если любое его нетривиальное решение имеет не более пяти нулей с учетом кратностей.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $F(x,u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори и $F(x,0)\equiv 0$; $F(x,u)$ строго возрастает по $u>0$ и каждом фиксированном x, $F(x,u)$ допускает представление $F(x,u)=f(x,u)\cdot u$, где $f(x,u)$ не возрастает по u при $u>0$ и каждом x; однородное уравнение не осциллирует на $[0;\ell]$. Тогда множество Λ собственных значений задачи (1), отвечающих неотрицательным на $[0;\ell]$ собственным функциям, обладает следующими свойствами: 1) Λ связно; 2) при каждом $\lambda\in\Lambda$ задача (1) имеет единственное положительное в $(0;\ell)$ решение $u(x,\lambda)$; 3) $u(x,\lambda)$ строго возрастает по λ; при каждом $\lambda^*\in\Lambda$ соответствующее решение $u(x,\lambda^*)$ задачи (1) является равномерным пределом последовательности $u_n(x)$, определяемой итерационными равенствами:*

$$\begin{cases} -\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx\mu} + \left(ru''_{xx}\right)''_{x\mu} + uQ'_\mu = \lambda^* F(x,u_{k-1}(x)),\\ u(0)=u'_x(0)=\alpha_1 u''_{xx}(0)+\alpha_2 u'''_{xxx}(0)=0;\\ u(\ell)=u'_x(\ell)=\beta_1 u''_{xx}(\ell)+\beta_2 u'''_{xxx}(\ell)=0 \end{cases}$$

$(k=1,2,\dots)$ *при любой начальной непрерывной и неотрицательной функции $u_0(x)$.*

Для решения задач подобного типа широко используется «поточечный подход», предложенный Ю.В. Покорным. Данный метод использован в работах [1]–[2].

Литература

1. Покорный, Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Докл. АН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

2. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

3. Pokornyi, Yu. V. Toward A Sturm-Liouville Theory for an Equation with Generalized Coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, No. 6. — P. 769–787.

4. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

5. Шабров, С. А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса / С. А. Шабров //

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

6. Баев, А. Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

7. Шабров, С. А. Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2015. — № 2. — С. 168–179.

8. Баев, А. Д. Дифференциал Стилтьеса в импульсных нелинейных задачах / А. Д. Баев, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Доклады Академии наук. — 2014. — Т. 458, № 6. — С. 627–629.

9. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма–Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

10. Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для решения граничной задачи с дифференциалами Стилтьеса на геометрическом графе / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Е. В. Лылов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 97–105.

11. Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для задачи с разрывными решениями / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Ж. О. Залукаева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2016. — № 4. — С. 112–120.

12. Шабров, С. А. Адаптация метода конечных элементов для математической модели с негладкими решениями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2016. — № 2. — С. 153–164.

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕОДНОРОДНОСТЬЮ В ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ[1]

С.Н. Асхабов (Грозный, ЧГПУ, ЧГУ)
askhabov@yandex.ru

В конусе положительных при $x > 0$ функций

$$Q_0^2 = \left\{u(x) : u(x) \in C^2(0,\infty), u(0) = u'(0) = 0 \text{ и } u(x) > 0 \text{ при } x > 0\right\}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-41-200001).

© Асхабов С.Н., 2018

изучается нелинейное интегро-дифференциальное уравнение вида

$$u^{\alpha}(x) = \int\limits_0^x k(x-t)\, u''(t)dt + f(x), \quad \alpha > 1, \tag{1}$$

где $k(x) \in C^3[0,\infty)$ и $f(x) \in C^2[0,\infty)$ удовлетворяют условиям:

$$k'''(x) \text{ не убывает, } k(0) = k'(0) = k''(0) = 0 \text{ и } k'''(0) = p > 0,$$

$$f'(x) \text{ не убывает, } f(0) = 0, \sup_{0<x\leqslant b} \frac{f(x)}{x^{\alpha/(\alpha-1}} < \infty, \ b > 0, \text{ и}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^x k'''(x-t)\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}k'(t) + f^{(\alpha-1)/\alpha}(t)\right]^{1/(\alpha-1)} dt + f'(x)}{\left(\int\limits_0^x k''(x-t)\left[\frac{(\alpha-1)^2 p}{2\alpha\,(\alpha+1)}\right]^{1/(\alpha-1)} t^{2/(\alpha-1)}dt + f(x)\right)^{(\alpha-1)/\alpha}} = 0.$$

При этих условиях получены следующие априорные оценки

$$\left[\frac{(\alpha-1)^2 p}{2\alpha\,(\alpha+1)}x^2\right]^{1/(\alpha-1)} \leqslant u(x) \leqslant \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}k'(x) + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)\right]^{1/(\alpha-1)}$$

и методом весовых метрик (аналог метода Белицкого) доказана теорема о существовании, единственности и способе нахождения решения интегро-дифференциального уравнения (1) в классе Q_0^2. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты. В случае интегрального уравнения вида (1) и интегро-дифференциального уравнения первого порядка вида (1) с $f(x) \equiv 0$ аналогичное исследование было проведено в [1] и [2], соответственно.

Следует отметить, что нелинейные интегро-дифференциальные уравнения вида (1) тесно связаны с интегральными уравнениями со степенной нелинейностью, возникающими при решениии задач гидродинамики, при описании процесса распространения ударных волн в трубах, наполненнных газом, и других (подробнее, см. [1]).

Литература

1. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения типа свертки / С.Н. Асхабов. — М. : Физматлит, 2009. — 304 с.

2. Асхабов С.Н. Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью / С.Н. Асхабов // Современные проблемы математики и механики. Материалы междун. конф. — М : МАКС Пресс, 2019. — С. 11–14.

КЛАССИЧЕСКОЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Е.А Бадерко, К.В. Семенов (Москва,
МГУ им. М.В. Ломоносова)
baderko.ea@yandex.ru, ksemenf@mech.math.msu.su

Строится классическое фундаментальное решение для равномерно - параболического уравнения с одной пространственной переменной x. Относительно старшего коэффициента, непрерывного по временной переменной t равномерно по x, предполагается, что по переменной x этот коэффициент удовлетворяет только условию Дини равномерно по t. При этом младшие коэффициенты уравнения могут расти определенным образом при приближении к прямой $t = 0$.

Условия на гладкость старшего коэффициента являются минимальными для существования классического фундаментального решения для параболического уравнения, см. [1].

Устанавливаются оценки для фундаментального решения и его производных. Фундаментальное решение строится модифицированным методом Леви. Отличие от классического метода состоит в выборе параметрикса.

Предложенный в работе параметрикс позволяет получить существование старших производных решения только при условии Дини.

Устанавливаются оценки для фундаментального решения и его производных.

Литература

1. Ильин А.М. О фундаментальном решении параболического уранения / А.М. Ильин. — Доклады Академии Наук — 1962. — Т. 147, № 4. — С. 768–771

© Бадерко Е.А., Семенов К.В., 2018

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ НА ПЛОСКОСТИ[1]

Е.А Бадерко, М.Ф. Черепова (Москва,
МГУ им. М.В. Ломоносова), (Москва, НИУ «МЭИ»)
baderko.ea@yandex.ru, cherepovamf@mpei.ru

В полосе $D = \{(x,t) \in R^2 : x \in R, 0 < t < T\}, 0 < T < +\infty$, рассматривается равномерно–параболический по Петровскому матричный оператор

$$Lu = \partial_t u - \sum_{k=0}^{2} A^{(k)}(x,t)\partial_x^k u, \quad u = (u_1, \ldots, u_m),\ m \geqslant 1,$$

где $A^{(k)} = \left\| a_{ij}^{(k)} \right\|_{i,j=1}^{m}$ — матрицы, элементы которых удовлетворяют условиям:
a) собственные числа μ_r матрицы $A^{(2)}$ подчиняются неравенству $Re\mu_r(x,t) \geqslant \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $(x,t) \in \overline{D}, r = \overline{1,m}$;
b) $a_{ij}^{(k)} \in H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}), \alpha \in (0,1), i,j = \overline{1,m}, k = 0,1,2$;
($H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$ — пространство Гёльдера).

В D рассматриваем область $\Omega = \{(x,t) \in D : g_1(t) < x < g_2(t)\}$ с негладкими, вообще говоря, боковыми границами $\Sigma_k = \{(x,t) \in \overline{D} : x = g_k(t)\}, k = 1,2$, где функции g_k удовлетворяют условиям:

$$|g_k(t+\Delta t) - g_k(t)| \leqslant K|\Delta t|^{(1+\alpha)/2},\ t, t+\Delta t \in [0,T],\ k = 1,2, \quad (1)$$

$$g_1(t) < g_2(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T. \quad (2)$$

Теорема. *Пусть для оператора L выполнены условия a), b) и для кривых $\Sigma_k, k = 1,2$ — условия (1), (2). Пусть u — классическое решение задачи*

$$Lu = 0 \ \text{в}\ \Omega,\ u|_{t=0} = 0,\ u|_{\Sigma_k} = 0,\ k = 1,2,$$

такое, что $u \in \underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$. Тогда $u \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$.

Аналогичное утверждение справедливо для второй краевой задачи.

[1] Результаты Череповой М.Ф. получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2020-0022)
© Бадерко Е.А., Черепова М.Ф., 2018

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

А.Д. Баев, Н.И. Работинская, С.А. Чечина, Н.А. Бабайцева (Воронежский государственный университет)

Исследование теории вырождающихся псевдодифференциальных уравнений в настоящее время является актуальной задачей в связи с использованием этих операторов при доказательстве теорем о существовании решений и получении коэрцитивных априорных оценок решений краевых задач для вырождающихся уравнений. Такие краевые задачи возникают, например, при моделировании процессов гидродинамики с сингулярными особенностями. В настоящей работе исследуется вопрос об ограниченности одного класса весовых псевдодифференциальных операторов, построенных по специальному интегральному преобразованию F_α, введенному в [1]. Теорема об ограниченности доказывается в специальных весовых пространствах типа пространств С.Л. Соболева.

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \text{const}$ для $t \geqslant d$ при некотором $d > 0$.

Следуя [1] введём интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t)\exp(i\eta\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)})\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \qquad (1)$$

определенное первоначально, например, на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$. Преобразование (1) связано с преобразованием Фурье

$$F_{\tau\to\eta}[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\exp(i\eta\tau)d\tau, \quad \eta \in R^1$$

следующим равенством

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)],$$

где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2(R^1_+)}.$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 19–11–00197).

© Баев А.Д., Работинская Н.И., Чечина С.А., Бабайцева Н.А., 2018

Это равенство позволяет расширить преобразование (1) до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$, а также рассмотреть это преобразование на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование, отображающее $L_2(R^1)$ на $L_2(R^1_+)$. Это преобразование можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}.$$

Можно показать, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ выполняются соотношения

$$F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta),\ j = 1, 2, ...,$$

где

$$D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)},\quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha}(R^n_+)$ (s – действительное число) состоит из всех функций $v(x,t) \in L_2(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v\|^2_{s,\alpha} = \int\limits_{R^n} (1 + |\xi|^2 + \eta^2)^s \left|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]\right|^2 d\xi d\eta.$$

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ ($s \geqslant 0,\ q > 1$) состоит из всех функций $v(x,t) \in H_{s,\alpha}(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,q} = \{\sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]} \left\| F^{-1}_{\xi\to x} F^{-1}_\alpha [(1 + |\xi|^2 + \eta^2)^{\frac{s-ql}{2}} F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial^l_t v]]\right\|^2_{L_2(R^+_n)}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $[\frac{s}{q}]$ - целая часть числа $\frac{s}{q}$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует число $\nu \in (0{,}1]$ такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)| \leqslant c < \infty$ при всех $t \in [0, +\infty)$. Кроме того, $\alpha(t) \in C^{s_1}[0, +\infty)$ для некоторого $s_1 \geqslant 2N - |\sigma|$, где $N \geqslant \max\limits_{0\leqslant p_1\leqslant l}\{2p_1 + \frac{l-p_1+\frac{3}{2}}{\nu} + 1,\ \sigma + 1,\ \sigma + \frac{l}{2}\},\ l = 1,\ 2...,$ σ - некоторое действительное число.

Заметим, что указанное выше число ν существует, если $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}...F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле

$$P^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})v(x,t) = F_\alpha^{-1}F^{-1}_{\xi\to x}[p(t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[v(x,t)]].$$

Определение 3. Будем говорить, что символ $p(t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $P^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S^{\sigma}_{\alpha,\rho,\delta}(\Omega)$, где $\Omega\subset\bar{R}^1_+,\ \sigma\in\mathrm{R}^1, 0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$, если функция $p(t,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t\in\Omega$ и по переменной $\eta\in R^1$. Причем, при всех $j=0,\ 1,\ 2,...,\ \ l=0,\ 1,\ 2,...$ справедливы оценки

$$|(\alpha(t)\partial_t)^j\partial^l_\eta\lambda(t,\xi,\eta)|\leqslant c_{jl}(1+|\xi|+|\eta|)^{\sigma-\rho l+\delta j} \tag{2}$$

с константами $c_{jl}>0$, не зависящими от $\xi\in R^{n-1},\ \ \eta\in R^1$, $t\in K$, где $K\subset\Omega$ - произвольный отрезок.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть выполнено условие 1 и символ $\lambda(t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу $S^{\sigma}_{\alpha,\rho,\delta}(\Omega)$, $\Omega\subset\bar{R}^1_+,\ \sigma\in R^1,\ 0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$. Пусть $v(x,t)\in H_{s+\sigma,\alpha}(R^n_+),\quad \partial^l_t v(x,t)\in H_{s+\sigma,\alpha}(R^n_+),\quad l=1,2,....$ Пусть выполнено условие 1 (с заменой σ на $s+\sigma$). Тогда для оператора

$$M_{l,\sigma}=\partial^l_t K^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t})-K^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t})\partial^l_t \tag{3}$$

справедлива оценка

$$\|M_{l,\sigma}v\|_{s,\alpha}\leqslant c(\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial^j_t v\right\|_{s+\sigma-\rho,\alpha}+\sum_{j=0}^{l-1}\left\|\partial^j_t v\right\|_{s+\sigma+\delta(l-\rho-j),\alpha}) \tag{4}$$

с константой $c>0$, не зависящей от v.

Аналогичные свойства для других классов псевдодифференциальных операторов доказаны в [1]–[8].

Литература

1. Баев, А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

2. Баев, А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

3. Баев, А. Д. Априорные оценки и существование решений краевых задач в полупространстве для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А. Д. Баев, П. В. Садчиков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2010. — № 1. — С. 162–168.

4. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.

5. Баев, А. Д. О свойствах коммутации одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 102–108.

6. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 460, № 2. — С. 133–135.

7. Баев, А. Д. Теоремы об ограниченности и композиции для одного класса весовых псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 39–49.

8. Баев, А. Д. О некоторых краевых задачах для псевдодифференциальных уравнений с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2016. — Т. 466, № 4. — С. 385–388.

ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА[1]

А.Д. Баев, Н.И. Работинская, С.А. Чечина,
Н.А. Бабайцева (Воронежский государственный университет)

Исследование теории вырождающихся псевдодифференциальных уравнений в настоящее время является актуальной задачей в связи с использованием этих операторов при доказательстве теорем о существовании решений и получении коэрцитивных априорных оценок решений краевых задач для вырождающихся уравнений. Такие краевые задачи возникают, например, при моделировании процессов гидродинамики с сингулярными особенностями. В настоящей работе исследуется вопрос об ограниченности одного класса весовых псевдодифференциальных операторов, построенных по специальному интегральному преобразованию F_α, введенному в [1]. Теорема об ограниченности доказывается в специальных весовых пространствах типа пространств С.Л. Соболева.

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \text{const}$ для $t \geqslant d$ при некотором $d > 0$.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 19–11–00197).

© Баев А.Д., Работинская Н.И., Чечина С.А., Бабайцева Н.А., 2018

Следуя [1] введём интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \tag{1}$$

определенное первоначально, например, на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$. Преобразование (1) связано с преобразованием Фурье

$$F_{\tau\to\eta}[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \exp(i\eta\tau) d\tau, \quad \eta \in R^1$$

следующим равенством

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)],$$

где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)} u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\, \|u\|_{L_2(R_+^1)} \quad .$$

Это равенство позволяет расширить преобразование (1) до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R_+^1)$, а также рассмотреть это преобразование на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование, отображающее $L_2(R^1)$ на $L_2(R_+^1)$. Это преобразование можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F_{\eta\to\tau}^{-1}[w(\eta)]\Bigg|_{\tau=\varphi(t)} .$$

Можно показать, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}_+^1)$ выполняются соотношения

$$F_\alpha[D_{\alpha,t}^j u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta), \; j = 1, 2, ...,$$

где

$$D_{\alpha,t} = \frac{1}{i} \sqrt{\alpha(t)} \partial_t \sqrt{\alpha(t)}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha}(R^n_+)$ (s – действительное число) состоит из всех функций $v(x,t) \in L_2(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v\|^2_{s,\alpha} = \int\limits_{R^n} (1+|\xi|^2+\eta^2)^s \left|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]\right|^2 d\xi d\eta.$$

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ ($s \geqslant 0,\ q > 1$) состоит из всех функций $v(x,t) \in H_{s,\alpha}(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,q} = \{\sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]} \left\| F^{-1}_{\xi\to x} F^{-1}_\alpha [(1+|\xi|^2+\eta^2)^{\frac{s-ql}{2}} F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial^l_t v]] \right\|^2_{L_2(R^+_n)} \}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $[\frac{s}{q}]$ — целая часть числа $\frac{s}{q}$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует число $\nu \in (0{,}1]$ такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)| \leqslant c < \infty$ при всех $t \in [0,+\infty)$. Кроме того, $\alpha(t) \in C^{s_1}[0,+\infty)$ для некоторого $s_1 \geqslant 2N - |\sigma|$, где $N \geqslant \max\limits_{0\leqslant p_1 \leqslant l} \{2p_1 + \frac{l-p_1+\frac{3}{2}}{\nu} + 1,\ \sigma+1,\ \sigma+\frac{l}{2}\},\ l = 1,\ 2...,\quad \sigma$ — некоторое действительное число.

Заметим, что указанное выше число ν существует, если $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}...F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле

$$P^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})v(x,t) = F^{-1}_\alpha F^{-1}_{\xi\to x}[p(t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[v(x,t)]].$$

Определение 3. Будем говорить, что символ $p(t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $P^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S^\sigma_{\alpha,\rho,\delta}(\Omega)$, где $\Omega \subset \bar{R}^1_+,\ \sigma \in \mathrm{R}^1, 0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$, если функция $p(t,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $j = 0,\ 1,\ 2, ...,\quad l = 0,\ 1,\ 2, ...$ справедливы оценки

$$|(\alpha(t)\partial_t)^j \partial^l_\eta \lambda(t,\xi,\eta)| \leqslant c_{jl}(1+|\xi|+|\eta|)^{\sigma-\rho l+\delta j} \tag{2}$$

с константами $c_{jl} > 0$, не зависящими от $\xi \in R^{n-1},\ \eta \in R^1$, $t \in K$, где $K \subset \Omega$ - произвольный отрезок.

Справедливо следующее утверждение.

Определение 4. Пусть $\Omega \subset \bar{R}^1_+$ – открытое множество. Будем говорить, что функция $a(y,z,\xi,\eta)$ принадлежит классу $S^{m,\alpha,\rho,\delta}(\Omega)$, $m \in R^1,\ 0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$, если $a(y,z,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой по переменным $y \in \Omega$, $\mathrm{z} \in \Omega$, $\eta \in \mathrm{R}^1$ и на компактных подмножествах множества $\Omega \times \Omega$ имеет место при всех $j, k, l = 0, 1, 2, ...$ оценка

$$|(\alpha(y)\partial_y)^j(\alpha(z)\partial_z)^k\partial_\eta^l a(y, z, \xi, \eta)| \leqslant c_{jkl}(1 + |\xi| + |\eta|)^{m-\rho l+\delta(k+j)}$$

с константами $c_{jkl} > 0$, не зависящими отp, y, z, η и $\xi \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}\text{ - }1}$.

Рассмотрим оператор вида

$$Au(x, y) = F^{-1}_{\alpha_{\eta\to y}} F_{\alpha_{z\to\eta}} F^{-1}_{\xi\to x}[a(y, z, \xi, \eta)F^{[}_{x\to\xi}u(x, z)]], \qquad (3)$$

где $F_{\alpha_{z\to\eta}}(F^{-1}_{\alpha_{\eta\to z}})$ – прямое (обратное) весовое преобразование, переводящее zвη (η в z).

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть A – оператор вида (2), причем $a(p, y, z, \xi, \eta) \in S^{m,\alpha,p}(\Omega)$, $\Omega \subset \bar{R}^1_+$, $m \in R^1$, $p \in Q = \{p \in C, |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| > 0\}$. Тогда найдется такой символ $\lambda(p, y, \xi, \eta) \in S^m_{\alpha,\rho,\delta}(\Omega)$, что $A = K(y, D_x, D_{\alpha,y})$, где $K(y, D_x, D_{\alpha,y})$ – весовой псевдодифференциальный оператор с символом $\lambda(y, \xi, \eta)$. Причем $\lambda(y, \xi, \eta) = \sqrt{\alpha(y)}\exp(i\eta\int\limits_y^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \cdot A(\frac{1}{\sqrt{\alpha(y)}}\exp(-i\eta\int\limits_y^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}))$.

При этом справедливо соотношение

$$\lambda(y, \xi, \eta) - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(i)^j}{j!}(\alpha(y)\partial_y)^j\partial_\eta^j a(y, z, \xi, \eta\ )|_{z=y} \in S^{m-N}_{\alpha,\rho,\delta}(\Omega)$$

при любых $N = 1, 2, ...$

Теорема 1 даёт возможность построить сопряженный оператор к весовому псевдодифференциальному оператору.

Аналогичные свойства для других классов псевдодифференциальных операторов доказаны в [1]–[8].

Литература

1. Баев, А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

2. Баев, А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

3. Баев, А. Д. Априорные оценки и существование решений краевых задач в полупространстве для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А. Д. Баев, П. В. Садчиков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2010. — № 1. — С. 162–168.

4. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.

5. Баев, А. Д. О свойствах коммутации одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 102–108.

6. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 460, № 2. — С. 133–135.

7. Баев, А. Д. Теоремы об ограниченности и композиции для одного класса весовых псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 39–49.

8. Баев, А. Д. О некоторых краевых задачах для псевдодифференциальных уравнений с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2016. — Т. 466, № 4. — С. 385–388.

О КОМПОЗИЦИИ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ВЫРОЖДЕНИЕМ[1]

А.Д. Баев, С.А. Чечина, А.А. Бабайцев, В.Д. Харченко (Воронежский государственный университет)

Рассмотрим достаточно гладкую функцию $\alpha(t),\ t \in R^1_+$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \mathrm{const}$ для $t \geqslant d$ для некоторого $d > 0$.

Рассмотрим функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$ интегральное преобразование, определенное формулой

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \tag{1}$$

Это преобразование было введено в [1]. В [1] показано, что преобразование F_α связано с преобразованием Фурье

$$F_{\tau\to\eta}[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \exp(i\eta\tau) d\tau, \quad \eta \in R^1$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 19–11–00197).

© Баев А.Д., Чечина С.А., Бабайцев А.А., Харченко В.Д., 2018

следующим равенством $F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]$, здесь $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$. В [1] и [2] показано, что преобразование F_α может быть продолжено до преобразования, осуществляющего взаимно однозначное и взаимно непрерывное преобразование пространств $L_2(R^1_+)$ и $L_2(R^1)$, а также может быть рассмотрено на некоторых классах обобщенных функций.

Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование, которое можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$, где $F^{-1}_{\eta\to\tau}$ — обратное преобразование Фурье. Можно показать, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ выполняются соотношения $F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta)$, $j = 1, 2, ...$, где $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}...F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный $K(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ оператор по формуле $K(p,t,D_x,D_{\alpha,t})v(x,t) = F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha[\lambda(p,t,\xi,\eta)F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]]$, где символ $\lambda(p,t,\xi,\eta)$ есть бесконечно дифференцируемая функция по совокупности переменных, растущая по переменным ξ, η не быстрее некоторого многочлена.

Определение 1. Будем говорить, что символ $\lambda(p,y,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p,y,D_x,D_{\alpha,y})$ принадлежит классу символов $S^{\sigma,\rho}_{\alpha,p}(\Omega)$, где $\Omega \subset \bar{R}^1_+$, $\sigma \in \mathrm{R}^1, p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$, если функция $\lambda(p,y,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $y \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $j = 0,\ 1,\ 2, ...,\quad l = 0,\ 1,\ 2, ...$ справедливы оценки

$$|(\alpha(y)\partial_y)^j\partial^l_\eta\lambda(p,y,\xi,\eta)| \leqslant c_{jl}(|p|^2 + |\xi| + |\eta|)^{\sigma-\rho l}$$

с константами $c_{jl} > 0$, не зависящими от $p \in Q$, $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $y \in K$, где $K \subset \Omega$ — произвольный отрезок. Здесь σ, $\rho \in (0;1]$ — действительное число.

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha}(R^n_+)$ (s – действительное число) состоит из всех функций $v(x,t) \in L_2(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v\|^2_{s,\alpha} = \int\limits_{R^n}(|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2)^s\,|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]|^2\,d\xi d\eta.$$

Определение 3. Пространство $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ $(s \geqslant 0,\ q > 1)$ состоит из всех функций $v(x,t) \in H_{s,\alpha}(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,q} = \{\sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]} \left\| F^{-1}_{\xi\to x} F^{-1}_{\alpha}[(|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2)^{\frac{s-ql}{2}} F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial_t^l v]] \right\|^2_{L_2(R^n_+)}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $[\frac{s}{q}]$ — целая часть числа $\frac{s}{q}$.

При $s = 0$ пространства $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$, $H_{s,\alpha}(R^n_+)$совпадают с пространством $L_2(R^n_+)$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует число $\nu \in (0{,}1]$ такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)| \leqslant c < \infty$ при всех $t \in [0,+\infty)$. Кроме того, $\alpha(t) \in C^{s_1}[0,+\infty)$ для некоторого $s_1 \geqslant 2N - |\sigma|$, где

$$N \geqslant \max_{0\leqslant p_1 \leqslant l}\{2p_1 + \frac{l - p_1 + \frac{3}{2}}{\nu} + 1,\ \sigma + 1,\ \sigma + \frac{l}{2}\},\ l = 1,\ 2...,$$

σ — некоторое действительное число.

Заметим, что указанное выше число ν существует, если $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $G(p,y,D_x,D_{\alpha,t})$ и $Q(p,y,D_x,D_{\alpha,y})$ – весовые псевдодифференциальные операторы с символами $g(p,y,\xi,\eta)$, $q(p,y,\xi,\eta)$, принадлежащими классам $S^{m_1,\rho}_{\alpha,p}(\Omega)$, $S^{m_2,\rho}_{\alpha,p}(\Omega)$ (m_1,m_2-действительные числа), $p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$, $\rho \in (0;1]$. Тогда для любого $N \geqslant 0$ существует $N_1 > 0$ и такой символ $T_{N_1}(p,y,\xi,\eta) \in S^{-N}_{\alpha,p}(\Omega)$, что справедливо равенство

$$G(p,y,D_x,D_{\alpha,t})Q(p,y,D_x,D_{\alpha,t}) - \sum_{j=1}^{N_1-1} R_j(p,y,D_x,D_{\alpha,t}) =$$

$$= T_{N_1}(p,y,D_x,D_{\alpha,t}),$$

где $T_{N_1}(p,y,D_x,D_{\alpha,t})$ – весовой псевдодифференциальный оператор с символом $T_{N_1}(p,y,\xi,\eta)$, а $R_j(p,y,D_x,D_{\alpha,y})$ – весовой псевдодифференциальный оператор с символом

$$r_j(p,y,\xi,\eta) = \frac{1}{j!}\partial^j_\eta g(p,y,\xi,\eta) \cdot (\alpha(y)\partial_y)^j q(p,y,\xi,\eta).$$

При $\rho = 1$ теорема, аналогичная теореме 1, доказана в [3]. Некоторые другие свойства весовых псевдодифференциальных операторов с символом из класса $S^m_{\alpha,\rho}(\Omega)$ доказаны в [4] - [8].

Литература

1. Баев, А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

2. Баев, А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

3. Баев, А. Д. Априорные оценки и существование решений краевых задач в полупространстве для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А. Д. Баев, П. В. Садчиков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2010. — № 1. — С. 162–168.

4. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.

5. Баев, А. Д. О свойствах коммутации одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 102–108.

6. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 460, № 2. — С. 133–135.

7. Баев, А. Д. Теоремы об ограниченности и композиции для одного класса весовых псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 39–49.

8. Баев, А. Д. О некоторых краевых задачах для псевдодифференциальных уравнений с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2016. — Т. 466, № 4. — С. 385–388.

ОЦЕНКА КОММУТАТОРА ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ВЫРОЖДЕНИЕМ[1]

А.Д. Баев, С.А. Чечина, А.А. Бабайцев, В.Д. Харченко (Воронежский государственный университет)

Рассмотрим достаточно гладкую функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \mathrm{const}$ для $t \geqslant d$ для некоторого $d > 0$.

Рассмотрим функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$ интегральное преобразование, определенное формулой

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t)\exp(i\eta\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)})\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \qquad (1)$$

Это преобразование было введено в [1]. В [1] показано, что преобразование F_α связано с преобразованием Фурье

$$F_{\tau\to\eta}[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\exp(i\eta\tau)d\tau, \quad \eta \in R^1$$

следующим равенством $F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]$, здесь $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$. В [1] и [2] показано, что преобразование F_α может быть продолжено до преобразования, осуществляющего взаимно однозначное и взаимно непрерывное преобразование пространств $L_2(R^1_+)$ и $L_2(R^1)$, а также может быть рассмотрено на некоторых классах обобщенных функций.

Обозначим через F^{-1}_α обратное к F_α преобразование, которое можно записать в виде $F^{-1}_\alpha[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$, где $F^{-1}_{\eta\to\tau}$ - обратное преобразование Фурье. Можно показать, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ выполняются соотношения $F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta)$, $j = 1, 2, ...$, где $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}...F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный $K(p, t, D_x, D_{\alpha,t})$ оператор по формуле

$$K(p, t, D_x, D_{\alpha,t})v(x, t) = F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha[\lambda(p, t, \xi, \eta)F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x, t)]],$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 19–11–00197).

© Баев А.Д., Чечина С.А., Бабайцев А.А., Харченко В.Д., 2018

где символ $\lambda(p,t,\xi,\eta)$ есть бесконечно дифференцируемая функция по совокупности переменных, растущая по переменным ξ, η не быстрее некоторого многочлена.

Определение 1. Будем говорить, что символ $\lambda(p,y,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p,y,D_x,D_{\alpha,y})$ принадлежит классу символов $S^{\sigma,\rho}_{\alpha,p}(\Omega)$, где $\Omega\subset\bar{R}^1_+$, $\sigma\in\mathrm{R}^1, p\in Q=\{p\in C,\ |\arg p|<\frac{\pi}{2},\ |p|>0\}$, если функция $\lambda(p,y,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $y\in\Omega$ и по переменной $\eta\in R^1$. Причем, при всех $j=0,\ 1,\ 2,...,\ \ l=0,\ 1,\ 2,...$ справедливы оценки

$$|(\alpha(y)\partial_y)^j\partial^l_\eta\lambda(p,y,\xi,\eta)|\leqslant c_{jl}(|p|^2+|\xi|+|\eta|)^{\sigma-\rho l}$$

с константами $c_{jl}>0$, не зависящими от $p\in Q,\ \xi\in R^{n-1},\ \ \eta\in R^1$, $y\in K$, где $K\subset\Omega$ - произвольный отрезок. Здесь $\sigma,\ \rho\in[0;1)$ — действительное число.

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha}(R^n_+)$ (s — действительное число) состоит из всех функций $v(x,t)\in L_2(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v\|^2_{s,\alpha}=\int\limits_{R^n}(|p|^2+|\xi|^2+\eta^2)^s\,|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]|^2\,d\xi d\eta.$$

Определение 3. Пространство $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ ($s\geqslant 0,\ q>1$) состоит из всех функций $v(x,t)\in H_{s,\alpha}(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,q}=\{\sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]}\left\|F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha[(|p|^2+|\xi|^2+\eta^2)^{\frac{s-ql}{2}}F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial^l_t v]]\right\|^2_{L_2(R^n_+)}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $[\frac{s}{q}]$ — целая часть числа $\frac{s}{q}$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует число $\nu\in(0{,}1]$ такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)|\leqslant c<\infty$ при всех $t\in[0,+\infty)$. Кроме того, $\alpha(t)\in C^{s_1}[0,+\infty)$ для некоторого $s_1\geqslant 2N-|\sigma|$, где

$$N\geqslant\max_{0\leqslant p_1\leqslant l}\{2p_1+\frac{l-p_1+\frac{3}{2}}{\nu}+1,\ \sigma+1,\ \sigma+\frac{l}{2}\},\ l=1,\ 2...,$$

σ — некоторое действительное число.

Заметим, что указанное выше число ν существует, если $\alpha(+0)=\alpha'(+0)=0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть символ$\lambda(p,y,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p,y,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу

$S^{\sigma;\rho}_{\alpha,p}(\Omega)$, $\Omega \subset \bar{R}^1_+$, $\sigma \in R^1, p \in Q = \{p \in C, \ |\arg p| < \frac{\pi}{2}, \ |p| > 0\}$. Пусть $v(x,y) \in H_{s+\sigma,\alpha}(R^n_+), \partial^l_y v(x,y) \in H_{s+\sigma,\alpha}(R^n_+), l = 1, 2, ...$ Пусть выполнено условие 1 (с заменой σна $s+\sigma$). Тогда для оператора

$$M_{l,\sigma} = \partial^l_y K^{(\sigma)}(p, y, D_x, D_{\alpha,y}) - K^{(\sigma)}(p, y, D_x, D_{\alpha,y})\partial^l_y \qquad (2)$$

справедлива оценка

$$\|M_{l,\sigma}v, |p|\|_{s,\alpha} \leqslant c(\sum_{j=0}^{l} \left\|\partial^j_y v, |p|\right\|_{s+\sigma-1,\alpha} + \sum_{j=0}^{l-1} \left\|\partial^j_y v, |p|\right\|_{s+\sigma,\alpha}) \qquad (3)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от v.

При $\rho = 1$ теорема, аналогичная теореме 1, доказана в [3]. Некоторые другие свойства весовых псевдодифференциальных операторов с символом из класса $S^m_{\alpha,\rho}(\Omega)$ доказаны в [4]–[8].

Литература

1. Баев, А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

2. Баев, А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

3. Баев, А. Д. Априорные оценки и существование решений краевых задач в полупространстве для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А. Д. Баев, П. В. Садчиков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2010. — № 1. — С. 162–168.

4. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.

5. Баев, А. Д. О свойствах коммутации одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 102–108.

6. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 460, № 2. — С. 133–135.

7. Баев, А. Д. Теоремы об ограниченности и композиции для одного класса весовых псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 39–49.

8. Баев, А. Д. О некоторых краевых задачах для псевдодифференциальных уравнений с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2016. — Т. 466, № 4. — С. 385–388.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОСРЕДНЕНИЯ С РАСЩЕПЛЕНИЕМ НЕЛОКАЛЬНОСТИ[1]

Ж.Д. Байшемиров, М. Нуртас, К. Утепова, М. Шерахан (Алматы, КазНПУ им. Абая; Алматы, ИИВТ КН МОН РК; Алматы, МУИТ)
zbai.kz@gmail.com

Данная работа посвящена построению полностью осредненной модели, то есть макроскопические уравнения которой не содержат микроскопические переменные, а задача на ячейке, определяющая маскроскопические коэффициенты, не зависит от макроскопических переменных. Идея заключается в том, чтобы разнести нелинейность и нелокальность на разные уровни асимптотического разложения.

Пусть мерой степени нелокальности является параметр

$$\omega = \varepsilon^2 K_{\text{тр}}/K_{\text{бл}} \tag{1}$$

тогда $\omega \sim 1$ в сильно контрастных средах, где возникает сильная нелокальность, и ω мал: $\varepsilon < \omega < 1$ в умеренно контрастных средах, где память есть, но слабая.

В настоящей работе мы рассматриваем случай умеренного контраста, то есть слабой (или «короткой») памяти [1, 2]. Для упрощения выкладок положим в [3, 4]: $\delta = 1/2$, то есть

$$K_{\text{бл}}/K_{\text{тр}} = \varepsilon\sqrt{\varepsilon}$$

или

$$\omega = \sqrt{\varepsilon} \tag{2}$$

Прежде всего введем расширение решения $\tilde{s}\,(x, y, t)$, $\tilde{p}\,(x, y, t)$ так что $p_w\,(x,t) = \tilde{p}\,(x,y,t)|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}$, $s\,(x,t) = \tilde{s}\,(x,y,t)|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}$

Тогда для производных справедливо следующее:

$$\frac{\partial p\,(x,t)}{\partial x_i} \to \left.\left(\frac{\partial \tilde{p}\,(x,y,t)}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \tilde{p}\,(x,y,t)}{\partial y_i}\right)\right|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}$$

Поскольку операции расширения и дифференцирования коммутируют, получаем, что аргумент y может рассматриваться как быстрая независимая переменная от x, а в конечных результатах надо

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта КН МОН РК №AP05132680.

© Байшемиров Ж.Д., Нуртас М., Утепова К., Шерахан М., 2018

положить его равным медленной переменной x/ε. Двухмасштабная формулировка уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \varphi(y)\,\partial_t s_\alpha + \varphi(y)\,\beta_\alpha(y)\,s_\alpha \partial_t p_\alpha = \\ = \left(\nabla_x + \frac{1}{\varepsilon}\nabla_x\right)\cdot\left(K(y)\ \ \lambda_\alpha\left(\nabla_x p_\alpha + \frac{1}{\varepsilon}\nabla_x p_\alpha\right)\right), \quad x\in\Omega, y\in Y, t\in(0,T) \\ p_o = p_w + p, \qquad s_o = 1 - s_w \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} s_w|_{t=0} = s^0(x), \quad p_w|_{t=0} = p_w^0(x) \\ \left[K\lambda_\alpha \frac{\partial p_\alpha}{\partial n}\right]_\Gamma = 0, \quad [p_\alpha]_\Gamma = 0, \quad \alpha = w, o \\ s_w, p_w \text{ 1-периодичны по } y \end{cases} \tag{3}$$

ее можем представить в вариационной формулировке:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega\int_Y \varphi w \partial_t s_\alpha\, dxdy + \int_\Omega\int_Y \varphi\beta_\alpha s_\alpha w\, \partial_t p_\alpha\, dxdy = \\ &= -\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega\int_Y K\,\lambda_\alpha\left(\partial_{yi}p_\alpha + \varepsilon\partial_{xi}p_\alpha\right)\left(\partial_{yi}w + \varepsilon\partial_{xi}w\right)dydx = \\ &= -\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega\int_{Y^{\mathcal{F}}} K^{\mathcal{F}}\lambda_\alpha^{\mathcal{F}}\left(\partial_{yi}p_\alpha + \varepsilon\partial_{xi}p_\alpha\right)\left(\partial_{yi}w + \varepsilon\partial_{xi}w\right)dydx - \\ &\quad -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_\Omega\int_{Y^{\mathcal{M}}} K^{\mathcal{M}}\lambda_\alpha^{\mathcal{M}}\left(\partial_{yi}p_\alpha + \varepsilon\partial_{xi}p_\alpha\right)\left(\partial_{yi}w + \varepsilon\partial_{xi}w\right)dydx \end{aligned} \tag{4}$$

для любой функции $w = w(x,y)$ в $\Omega\times Y$, такой, что $w|_{\partial\Omega} = 0$.

Так как функция w равна нулю на $\partial\Omega$, то интегралы по границе области $\partial\Omega$ обнуляются, также из-за периодичности всех функций по y интегралы по границе периода ∂Y обнуляются.

Литература

1. Panfilov M. Macroscale models of flow through highly heterogeneous porous media / M. Panfilov // Kluwer Academic Publishers, —Dordrecht —2000.

2. Amaziane B. Generalized nonequilibrium capillary relations for two-phase flow through heterogeneous media. / B. Amaziane, J.P. Milisic, M. Panfilov, L. Pankratov // Physical Review E. — 2012. № 85 016304.

3. Bourgeat A. Effective two-phase flow through highly heterogeneous porous media / A. Bourgeat, M. Panfilov // Computational Geosciences —1998. —V. - 2, —C. 191–215.

4. Байшемиров Ж.Д. Усредненная модель неравновесной двухфазной фильтрации несжимаемых жидкостей в двухмасштабной среде с сильно контрастными свойствами / Ж.Д. Байшемиров, А.Б. Жанбырбаев, Д.Д. Баймурзаев // Вестник КБТУ. —2018. — № 4 —C.-49–55

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ И БИИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА[1]

А.Г. Баскаков, Г.В. Гаркавенко, И.А. Криштал, Н.Б. Ускова (Воронеж, ВГУ, ВГПУ, ВГТУ, США, ДеКалб, Университет Северного Иллинойса)
anatbaskakov@yandex.ru, g.garkavenko@mail.ru, ikrishtal@niu.edu, nat-uskova@mail.ru

Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство, $B(\mathcal{H})$ — банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathcal{H}$, с нормой $\|\cdot\|$ и $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \subset B(\mathcal{H})$ — идеал операторов Гильберта-Шмидта с нормой $\|\cdot\|_2$.

Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — линейный замкнутый самосопряженный оператор, имеющий изолированные собственные значения λ_i, $i \in \mathbb{Z}$, конечной кратности, и $P_i = P(\{\lambda_i\}, A)$ — соответствующие спектральные проекторы. Обозначим через $d = \inf\{|\lambda_i - \lambda_j| : i, j \in \mathbb{Z}\}$.

Пусть $T : \mathbb{R} \to B(\mathcal{H})$ — изометрическое представление, заданное формулой $T(t)x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i\lambda_k t} P_k x$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{H}$, и $\widetilde{T} : \mathbb{R} \to B(B(\mathcal{H}))$ — изометрическое представление, заданное формулой $\widetilde{T}(t)Xx = T(t)XT(-t)x$, $X \in B(\mathcal{H})$, $x \in \mathcal{H}$, $t \in \mathbb{R}$. Для $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $X \in B(\mathcal{H})$, $x \in \mathcal{H}$, положим $\widetilde{T}(f)Xx = \int_{\mathbb{R}} f(t)\widetilde{T}(-t)Xx\,dt$ (см. [1], [2]).

Через $f_0 \in L_1(\mathbb{R})$ обозначим некоторую функцию, преобразование Фурье которой равно единице в некоторой окрестности нуля, а символом $f_1 \in L_1(\mathbb{R})$ — функцию, преобразование Фурье $\widehat{f}_1$ которой в некоторой окрестности нуля U равно нулю и $\widehat{f}_1(\lambda) = 1/\lambda$, вне U. Имея функцию f_0, можно построить f_1, положив $\widehat{f}_1(\lambda) = (1 - \widehat{f}_0(\lambda))\lambda^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Тогда $\widehat{f}_1(\lambda) = 0$ в некоторой окрестности нуля, $\widehat{f}_1 \in L_1(\mathbb{R})$ и $f_1 \in L_1(\mathbb{R})$ (см. [1], [2]).

Теорема 1. *Пусть выполнено одно из условий:*

$$1)\quad B \in B(\mathcal{H}), \quad 2\pi\|B\|d^{-1} < 1,$$
$$2)\quad B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), \quad 4\|B\|_2 d^{-1} < 1.$$

Тогда нелинейное операторное уравнение метода подобных операторов (см. [1]-[3]) имеет решение X_*, оператор $A - B$ подобен диагональному оператору $A - \widetilde{T}(f_0)X_*$, и имеет место равенство

$$(A - B)(I + \widetilde{T}(f_1)X_*) = (I + \widetilde{T}(f_1)X_*)(A - \widetilde{T}(f_0)X_*).$$

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00732).

© Баскаков А.Г., Гаркавенко Г.В., Криштал И.А., Ускова Н.Б., 2018

При этом, если $B \in B(\mathcal{H})$, то $X_* \in B(\mathcal{H})$ и $\widetilde{T}(f_1)X_* \in B(\mathcal{H})$. Если же $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и $\widetilde{T}(f_1)X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Определение 1. Нетривиальное замкнутое линейное подпространство $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ называется биинвариантным для линейного оператора $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, если оно инвариантно вместе со своим ортогональным дополнением $\mathcal{H}_0^\perp$.

Лемма 1. *Пусть линейный оператор $\mathcal{E} : D(\mathcal{E}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ перестановочен с некоторым ортопроектором Q. Тогда подпространства $\operatorname{Im} Q$ и $\operatorname{Ker} Q$ являются биинвариантными для оператора $\mathcal{E}$.*

Обозначим через $\widetilde{P}_k$ проектор

$$\widetilde{P}_k = (I + \widetilde{T}(f_1)X_*)P_k(I + \widetilde{T}(f_1)X_*)^{-1}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

Теорема 2. *Подпространства $\operatorname{Im} \widetilde{P}_k = (I + \widetilde{T}(f_1)X_*)\mathcal{H}_k$, $\operatorname{Ker} \widetilde{P}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, образуют счетный набор биинвариантных подпространств для оператора $A - B$.*

Литература

1. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов / А.Г. Баскаков. — Воронеж : Издательство ВГУ, 1987. — 165 с.

2. Баскаков А.Г. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов / А.Г. Баскаков // Сиб. матем. журн. — 1983. — Т. 24, № 1. — С. 21–39.

3. Baskakov A.G. Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices / A.G. Baskakov, I.A. Krishtal, N.B. Uskova // J. Math. Anal. Appl. — 2019. — V. 477. — P. 930–960.

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ФДУ[1]

Ю.Е. Безмельницына, С.В. Корнев (Воронеж, ВГПУ)

bezmelnicyna@inbox.ru, kornev_vrn@rambler.ru

Пусть (Ω, Σ, μ) – полное вероятностное пространство. Для $h > 0$ обозначим символом $\mathcal{C}$ пространство $C([-h, 0]; \mathbb{R}^n)$ всех непрерывных функций $x : [-h, 0] \to \mathbb{R}^n$ с обычной нормой. Для каждой функции $x(\cdot) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ символом $x_t \in \mathcal{C}$ обозначается функция, заданная как $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-h, 0]$. Пусть $\psi : \Omega \times [-h, 0) \to \mathbb{R}^n$ – заданная начальная функция такая, что оператор $\omega \in \Omega \to \psi(\omega, \cdot) \in \mathcal{C}$ измерим. Обозначим символом $\mathcal{D}_\psi$ множество всех функций $x : \Omega \times [-h, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ таких, что: (i) $x(\cdot, t)$ измерима п.в. $t \in [-h, +\infty]$; (ii) для каждого $\omega \in \Omega$ сужение $x(\omega, \cdot)$ на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ является абсолютно непрерывным; (iii) для каждого $\omega \in \Omega$ имеем $x(\omega, t) = \psi(\omega, t)$, $t \in [-h, 0]$.

---

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-51-15003 НЦНИ_а).

© Безмельницына Ю.Е., Корнев С.В., 2018

Рассмотрим задачу Коши для случайного ФДУ вида:

$$x'(\omega,t) = f(\omega,t,x_t) \quad \text{п.в.} \ \ t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$x(\omega,t) = \psi(\omega,t), \qquad t \in [-h,0], \tag{2}$$

для всех $\omega \in \Omega$, где $f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям: $(f1)$ f – случайный c-оператор (см. [1]), т.е. он измерим относительно $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$, где $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$ – наименьшая σ-алгебра на $\Omega \times X$, включающая все множества $A \times B$, где $A \in \Sigma$, $B \in \mathbb{B}(X)$ и $\mathbb{B}(X)$ – борелевская σ-алгебра на X, и непрерывен для всех $\omega \in \Omega$; $(f2)$ существует $c : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, такое что $c(\omega,\cdot)$ – локально интегрируемо на $\mathbb{R}_+$ для каждого $\omega \in \Omega$, $c(\cdot,t)$ – измеримо п.в. $t \in I$, и для каждого $\omega \in \Omega$ имеем $\|f(\omega,t,\varphi)\| \leqslant c(\omega,t)(1+|\varphi|)$, $\varphi \in \mathcal{C}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Для заданной начальной функции ψ под *случайным решением* задачи (1), (2) понимается функция $x \in D_\psi$, удовлетворяющая для каждого $\omega \in \Omega$ уравнению (1) п.в. $t \in \mathbb{R}_+$.

Пусть $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – локально липшицева функция. Для $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathbb{R}^n$ *обобщенная производная Кларка* $V^0(x_0;\nu)$ функции V в точке x_0 по направлению ν определяется формулой $V^0(x_0;\nu) = \overline{\lim}_{x\to x_0, t\to 0+}(V(x+t\nu)-V(x))/t$, где $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда *обобщенный градиент Кларка* $\partial V(x)$ функции V в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ определяется как: $\partial V(x_0) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ \langle x,\nu\rangle \leqslant V^0(x_0;\nu) \text{ для всех } \nu \in \mathbb{R}^n\right\}$.

Определение 1. (см. [1]) *Отображение $V\colon \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется случайным негладким потенциалом, если: $(i)V(\cdot,x)\colon \Omega \to \mathbb{R}$ измеримо для каждого $x \in \mathbb{R}^n$; $(ii)V(\omega,\cdot)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является для любого $\omega \in \Omega$ регулярной функцией (см. [2]).*

Обозначим $\mathfrak{V}$ набор всех случайных негладких потенциалов $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих для каждого $\omega \in \Omega$ *условию коэрцитивности* $\lim_{\|x\|\to+\infty} V(\omega,x) = -\infty$.

Заметим, что для каждого $\omega \in \Omega$ для данной функции $V \in \mathfrak{V}$, для каждого $r_\omega > 0$ существует $k_\omega(r) > r_\omega$ такой, что если $\alpha_r(\omega) := \inf\{V(\omega,x),\ \|x\| \leqslant r_\omega\}$, то $V(\omega,x) < \alpha_r(\omega),\ \|x\| \geqslant k_\omega(r)$.

Пусть теперь $g : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — заданная функция, удовлетворяющая условиям: (j) $g(\cdot,t)$ – измерима п.в. $t \in \mathbb{R}_+$; (jj) $g(\omega,\cdot)$ – абсолютно непрерывна; (jjj) $\inf\{g(\omega,t) :\ \omega \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}\} \geqslant 1$.
Развивая понятие, введенное в [3], дадим следующее определение.

Определение 2. *Случайный негладкий потенциал $V \in \mathfrak{V}$ назовем случайным негладким интегральным направляющим потенциалом (ИНП) для уравнения (1) вдоль функции g, если для каждого $\omega \in \Omega$ существует $r_{V_\omega} > g(\omega,0)\|\psi(\omega,0)\|$ такое, что для каждой функции $x \in \mathcal{D}_\psi$, удовлетворяющей условиям: (l) существует наибольшее число $\tau_1 := \tau_1(\omega,x) > 0$ такое, что $g(\omega,t)\|x(\omega,t)\| \leqslant r_{V_\omega}$ для всех $t \in [0,\tau_1)$; (ll) существует число $\tau_* := \tau_*(\omega,x) > \tau_1$ такое, что $g(\omega,\tau_*)\|x(\omega,\tau_*)\| = k_{V_\omega} := k_\omega(r_{V_\omega})$; (lll) $\|x'(\omega,t)\| \leqslant \|f(\omega,t,x_t)\|$*

п.в. $t \in \mathbb{R}_+$, *найдется сечение* $\upsilon(s) \in \partial V(g(\omega, s)x(\omega, s))$ *такое, что* $\int_{\tau_\sharp^x}^{\tau_*^x} \langle \upsilon(s), g'(\omega, s)x(\omega, s) + g(\omega, s)f(s)\rangle ds \geqslant 0$, *где* $\tau_\sharp^x := \sup\{\tau \in [\tau_1^x, \tau_*^x),\ \|g(\tau)x(\tau)\| = r_{V_\omega}\}$.

Теорема 1. *Если* $V \in \mathfrak{V}$ *– случайный негладкий ИНП для уравнения (1) вдоль функции* g, *то каждое решение задачи Коши (1), (2) удовлетворяет оценке* $\|x(\omega, t)\| \leqslant k_{V_\omega} \cdot \frac{1}{g(\omega,t)}$, $\omega \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Литература

1. Andres J. Random topological degree and random differential inclusions / J. Andres, L. Górniewicz // Topol. Meth. Nonl. Anal. — 2012. — № 40. — P. 337–358.

2. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ / Ф. Кларк. — М. : Наука, 1988.

3. Корнев С.В. О негладких интегральных направляющих функциях в исследовании асимптотического поведения решений функционально-дфференциальных уравнений / С.В. Корнев // Известия ВГПУ. Естественные науки. —2015. —Т.3, № 268. — С. 182–184.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ КОМПЛЕКСНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КЛАССАХ ФУНКЦИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ СТЕПЕННОГО ХАРАКТЕРА[1]

А.М. Бирюков (Москва, НИУ МЭИ)
birukovalmix@mail.ru

В предлагаемой работе изучается комплексная задача Коши для общих линейных систем дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, z) - A(t, z, D)u = h(t, z)$$
$$u(t_0, z) = \varphi(z),$$

в банаховых пространствах аналитических функций, имеющих особенности степенного характера при приближении к боковой поверхности полицилиндра. Получены необходимые и достаточные условия для корректности задачи Коши в рассматриваемой шкале функциональных пространств, тем самым, точно описана структура систем дифференциальных уравнений, для которых эта корректность имеет место. Ранее в работе [1] подобные задачи рассматривались в классах аналитических функций с супремум- нормами и были получены критерии корректности в заданной шкале функциональных пространств. Оказывается, что условия, при выполнении которых имеет место корректность задачи Коши в пространствах с супремум-нормами и в пространствах с интегральными метриками,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 19-11-00033).

© Бирюков А.М., 2018

совпадают. В работе [2] были выведены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Коши в пространствах с интегральными метриками, но особенности степенного характера распространялись по боковой границе конуса. Таким образом получено, что критерий корректности комплексной задачи Коши тесно связан с геометрией распространения возможных особенностей решения $u(t, z)$.

Литература

1. Дубинский Ю.А. Задача Коши в комплексной области / Ю.А. Дубинский. — М. : Издательство МЭИ, 1996. — 180 с.

2. Бирюков А.М. Комплексная задача Коши в шкале аналитических функций с особенностями степенного характера / А.М. Бирюков // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 8. — С. 1067–1074.

ИНТЕГРО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ СО СЛАБОЙ ГРАНИЧНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ[1]

М.Н. Ботороева, О.С. Будникова, С.С. Орлов (Иркутск, ИГУ)

masha888888@mail.ru, osbud@mail.ru, orlov_sergey@inbox.ru

В докладе планируется рассмотреть систему взаимосвязанных алгебраических уравнений и интегральных уравнений Вольтерра первого и второго рода, которая имеют форму уравнения

$$A(t)u(t) - \int_0^t s^{-a} K(t,s)u(s)\,ds = f(t),\ t \in [0;\,1], \tag{1}$$

с ненулевой тождественно вырожденной $(n \times n)$-матрицей $A(t)$. Эти объекты называют *интегро-алгебраическими* уравнениями (ИАУ). Предполагается, что элементы $(n \times n)$-матрицы $K(t, s)$ непрерывны по совокупности переменных $(t, s) \in [0;\,1] \times [0;\,t]$, при этом $a \in (0;\,1)$. Согласно статье [1], слабую особенность ядра на прямой $s = 0$ будем называть *граничной*. Следует заметить, что ИАУ вида (1) почти не изучались ранее. Близкими им объектами являются, например дифференциально-алгебраические уравнения, у которых матрица в главной части имеет нуль в точке $t = 0$ [2]. Представляемый доклад посвящен исследованию разрешимости ИАУ (1) и зависимости их решений от параметра a. Обсуждается применение многошаговых методов [3] численного решения класса слабосингулярных ИАУ (1).

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и ВАНТ (проекты № 18-51-54001 Вьет_а, № 20-51-54003 Вьет_а).

© Ботороева М.Н., Будникова О.С., Орлов С.С., 2018

Литература

1. Kolk M. Numerical solution of Volterra integral equations with singularities / M. Kolk, A. Pedas // Front. Math. China. — 2013. — Vol. 8, No. 2. — P. 239–259.

2. Koch O. Collocation methods for index 1 DAEs with a singularity of the first kind / O. Koch, R. März, D. Praetorius, E. Weinmüller // Math. Comput. — 2010. — Vol. 79, No. 269. — P. 281–304.

3. Булатов М.В. Исследование многошаговых методов для решения интегроалгебраических уравнений : построение областей устойчивости / М.В. Булатов, О.С. Будникова // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 2013. — Т. 53, № 9. — С. 1448–1459.

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ШЕСТОГО ПОРЯДКА С НЕГЛАДКИМИ РЕШЕНИЯМИ

М.А. Буйвалова, Ф.В. Голованева, М.Б. Давыдова, Д.И. Алёхина (Воронеж)

marusjabuj@yandex.ru

В этой работе изучается нелинейная граничная задача шестого порядка с производными по мере

$$\left\{ \begin{array}{l} -\left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\mu} + \left(ru''_{xx}\right)''_{x\mu} + qu = f(x,u); \\ u(0) = u'_x(0) = \alpha_1 u''_{xx}(0) + \alpha_2 u'''_{xxx}(0) = 0; \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = \beta_1 u''_{xx}(\ell) + \beta_2 u'''_{xxx}(\ell) = 0. \end{array} \right. \tag{1}$$

Решение (1) мы будем искать в классе E дважды непрерывно дифференцируемых функций $u(x)$, вторая производная $u''_{xx}(x)$ которых μ–абсолютно непрерывна на $[0,\ell]$; $pu'''_{xx\mu}(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемы, $\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(x)$ — μ–абсолюно непрерывна на $[0;l]$. Нелинейность предполагается «сильной» (типа $f(x,u) = |u|^\alpha$, $\alpha > 1$). В точках ξ, принадлежащих множеству $S(\mu)$, (1) понимается как равенство $-\Delta\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(\xi) + \Delta\left(ru''_{xx}\right)'_x(\xi) + q(\xi)u(\xi) = f(\xi, u(\xi))$, где $\Delta u(\xi)$ — полный скачок функции $u(x)$ в точке ξ.

Уравнение в (1) задано почти всюду (по мере μ) на множестве $\overline{[0;\ell]}_S$, построение которого можно найти в [1], [2]. При этом каждая точка $\xi \in S(\mu)$ заменена на упорядоченную пару $\{\xi - 0, \xi + 0\}$, обозначим через $\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}$; $\overline{[0;\ell]}_S = \overline{[0;\ell]}_{S(\mu)} \cup S(\mu)$.

Мы предполагаем, что функции $p(x)$ и $r(x)$ абсолютно непрерывны на $[0;\ell]$, $\min\limits_{x\in[0;\ell]} p(x) > 0$, $q(x)$ — μ–суммируема на $[0;\ell]$ и $f(x,u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори: 1) $f(x,u)$ при почти всех x

© Буйвалова М.А., Голованева Ф.В., Давыдова М.Б., Алёхина Д.И., 2018

(относительно μ-меры) определена и непрерывна по u; 2) функция $f(x,u)$ измерима по x при каждом u; 3) $|f(x,u)| \leqslant m(x)$, где $m(x)$ — μ-суммируемая функция на $\overline{[0;\ell]}_S$.

Условия, которые мы наложили на функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x,u)$ обеспечивают разрешимость уравнения из (1) в E.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия: 1) $f(x,u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, 2) $f(x,0) \equiv 0$, 3) $f(x,u)$ порождает непрерывный оператор суперпозиции, действующий из $C[0;\ell]$ в некоторое $L_{p,\mu}[0;\ell]$, 4) при некоторых $0 < r < R < \infty$ справедливо (a) модель (1) при любых $\lambda \in (0;1)$ не имеет решений, удовлетворяющих неравенствам $u_0(x) \cdot \|u\|_C \leqslant u(x) \leqslant r$ ($u_0(x) = \frac{x(\ell-x)}{\ell}$); (b) для некоторой $h(x)$, (отличной от тождественного нуля), принадлежащей $L_{1,\mu}[0;\ell]$, и для любого $\lambda > 0$ модель $-\left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\mu} + (ru''_{xx})''_{x\mu} + qu = f(x,u)$, $u(0) = u'_x(0) = \alpha_1 u''_{xx}(0) + \alpha_2 u'''_{xxx}(0) = 0$ $u(\ell) = u'_x(\ell) = \beta_1 u''_{xx}(\ell) + \beta_2 u'''_{xxx}(\ell) = 0$ не имеет решений, для которых $u_0(x)\|u\|_C \leqslant u(x) \leqslant R$. Тогда нелинейная модель (1) имеет неотрицательное нетривиальное решение.*

Концепция поточечной трактовки уравнения с негладкими решениями доказала свою эффективность (см. [1]–[2]).

Литература

1. Покорный, Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Докл. АН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

2. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

3. Pokornyi, Yu. V. Toward A Sturm-Liouville Theory for an Equation with Generalized Coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, No. 6. — P. 769–787.

4. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

5. Шабров, С. А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса / С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

6. Баев, А. Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

7. Шабров, С. А. Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2015. — № 2. — С. 168–179.

8. Баев, А. Д. Дифференциал Стилтьеса в импульсных нелинейных задачах / А. Д. Баев, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Доклады Академии наук. — 2014. — Т. 458, № 6. — С. 627–629.

9. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма–Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

10. Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для решения граничной задачи с дифференциалами Стилтьеса на геометрическом графе / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Е. В. Лылов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 97–105.

11. Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для задачи с разрывными решениями / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Ж. О. Залукаева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2016. — № 4. — С. 112–120.

12. Шабров, С. А. Адаптация метода конечных элементов для математической модели с негладкими решениями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2016. — № 2. — С. 153–164.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В.Б. Васильев (Белгород, НИУ БелГУ)
vbv57@inbox.ru

Мы исследуем дискретные аналоги псевдодифференциальных операторов и уравнений.

На целочисленной решетке $\mathbb{Z}^m (mod\ h), h > 0$ вводятся функции дискретного аргумента $u_d(\tilde{x}), \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m$, определяется дискретный аналог пространства Шварца $S(h\mathbb{Z}^m)$ и дискретное преобразование Фурье

$$(F_d u_d)(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m} u_d(\tilde{x}) e^{i\tilde{x}\cdot\xi} h^m, \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^m,$$

где $\hbar = h^{-1}, \mathbb{T} = [-\pi, \pi]$.

Положим $\zeta^2 = h^{-2} \sum\limits_{k=1}^{m} (e^{-ih\cdot\xi_k} - 1)^2$ и определим дискретный аналог пространства Соболева–Слободецкого $H^s(h\mathbb{Z}^m)$ как замыкание

© Васильев В.Б., 2018

пространства $S(h\mathbb{Z}^m)$ по норме

$$||u_d||_s = \left(\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m} (1+|\zeta^2|)^s |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}.$$

Если $\widetilde{A}_d(\xi)$ – периодическая функция на $\mathbb{R}^m$ с основным кубом периодов $\hbar\mathbb{T}^m$, мы рассматриваем ее как символ некоторого оператора. Пусть $D \in \mathbb{R}^m$ – область, $D_d = D \cap h\mathbb{Z}^m$. Стандартным образом определяем пространство $H^s(D_d)$ как пространство функций дискретного аргумента из $H^s(h\mathbb{Z}^m)$ с носителями в $overline D_d$.

Дискретным псевдодифференциальным оператором A_d в дискретной области D_d мы называем оператор вида [1,2,3]

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y}\in h\mathbf{Z}^m} \int\limits_{\hbar\mathbf{T}^m} \widetilde{A}_d(\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in D_d,$$

Далее исследуется разрешимость уравнения

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in D_d, \tag{1}$$

с помощью периодической факторизации символа и связанных с этим уравнением некоторых краевых задач [2,3]. Для некоторых канонических областей D получены результаты о разрешимости и аппроксимационных свойствах дискретных уравнений и дискретных краевых задач.

Литература

1. Vasilyev V.B. On a digital version of pseudo-differential operators and its applications / V.B. Vasilyev // Lect. Notes Comp. Sci. 2019. V.11386. P. 596-603.

2. Vasilyev V.B. On discrete solutions for pseudo-differential equations / V.B. Vasilyev // AIP Conf. Proc. V. 2116, 2019. P. 040010-1—040010-4.

3. Васильев В.Б. Операторы и уравнения: дискретное и непрерывное / В.Б. Васильев// Итоги науки и техники. Современные математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2019. Т. 160. С.18—27.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ВИДЕ СУММ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ И ОБ ОЦЕНКАХ ДЛЯ ИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

М.Ю. Ватолкин (Ижевск, ИжГТУ имени М.Т. Калашникова)
vmyu6886@gmail.com

Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — открытый интервал, $\mathcal{P} = (p_{ik})_0^2$ — нижняя треугольная матрица, $p_{ik} : I \to \mathbb{R}$, такая, что $p_{00}(\cdot)$ и $p_{22}(\cdot)$ измеримы, почти всюду конечны и почти всюду отличны от нуля, а $\frac{1}{p_{11}(\cdot)}$, $\frac{p_{10}(\cdot)}{p_{11}(\cdot)}$, $\frac{p_{20}(\cdot)}{p_{22}(\cdot)}$, $\frac{p_{21}(\cdot)}{p_{22}(\cdot)}$ локально суммируемы в I. Определим квазипроизводные ${}^0_{\mathcal{P}}x$, ${}^1_{\mathcal{P}}x$, ${}^2_{\mathcal{P}}x$ функции $x : I \to \mathbb{R}$ равенствами: ${}^0_{\mathcal{P}}x \doteq p_{00}x$, ${}^1_{\mathcal{P}}x \doteq p_{11}\frac{d({}^0_{\mathcal{P}}x)}{dt} + p_{10}({}^0_{\mathcal{P}}x)$, ${}^2_{\mathcal{P}}x \doteq p_{22}\frac{d({}^1_{\mathcal{P}}x)}{dt} + p_{21}({}^1_{\mathcal{P}}x) + p_{20}({}^0_{\mathcal{P}}x)$.

Линейным однородным квазидифференциальным называется уравнение [1] (в [1] изучается уравнение произвольного порядка).

$$({}^2_{\mathcal{P}}x)(t) = 0, \quad t \in I \tag{1}$$

Его решением называется всякая функция $x : I \to \mathbb{R}$, имеющая локально абсолютно непрерывные нулевую и первую квазипроизводные и удовлетворяющая (1) почти всюду в I.

Уравнение (1) называется неосцилляционным на промежутке $J \subset I$ (здесь $J = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$), если нулевая квазипроизводная любого его нетривиального решения имеет на J не более одного нуля [1].

Рассмотрим краевую задачу на собственные значения

$$({}^2_{\mathcal{P}}x)(t) = -\lambda\, ({}^0_{\mathcal{P}}x)(t) \quad (t \in J = [a, b]), \tag{2}$$

$$x(a) = x(b) = 0. \tag{3}$$

Последовательность решений $\{x_k(\cdot)\}_0^\infty$ построим так: $x_0(\cdot)$ есть решение задачи $({}^2_{\mathcal{P}}x)(t) = 0$ $(t \in J)$, ${}^0_{\mathcal{P}}x(a) = 0$, ${}^1_{\mathcal{P}}x(a) = 1$; $x_k(\cdot)$ находятся рекуррентно как решения задач $({}^2_{\mathcal{P}}x_k)(t) = ({}^0_{\mathcal{P}}x_{k-1})(t)$ $(t \in J)$, ${}^0_{\mathcal{P}}x_k(a) = 0$, ${}^1_{\mathcal{P}}x_k(a) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Решение $u(t, \lambda)$ уравнения (2), удовлетворяющее первому из условий (3), представимо в виде ряда [2]

$$u(t, \lambda) = x_0(t) - \lambda x_1(t) + \lambda^2 x_2(t) - \lambda^3 x_3(t) + \ \ldots \quad . \tag{4}$$

Собственные значения задачи (2),(3) представляют собой корни уравнения $\Phi(\lambda) = 0$, где $\Phi(\cdot)$ — сумма ряда (4) при $t = b$. Функция $u(t, \lambda^*) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\lambda^*)^k x_k(t)$ $(t \in J)$ есть собственная функция задачи (2),(3), отвечающая собственному значению λ^*.

Теорема. Пусть уравнение (1) неосциляционно на J и $C(t, s)$ — функция Коши уравнения (1), вещественные константы M_1, M_2

© Ватолкин М.Ю., 2018

и функция $\varphi(\cdot)$ таковы, что выполняются следующие неравенства: $\dfrac{{}^{\,0}_{\mathcal{P}}C(t,s)}{p_{22}(s)} \leqslant M_1 \dfrac{\varphi(t-a)}{\varphi(s-a)} \cdot (t-s), \qquad {}^{\,0}_{\mathcal{P}}C(t,a) \leqslant M_2\,\varphi(t-a)\cdot(t-a).$ $M \doteq max\{M_1, M_2\}$. Тогда справедливы точные (см. пример) оценки

$$0 \leqslant {}^{\,0}_{\mathcal{P}}x_k(t) \leqslant \frac{M^{k+1}\,(t-a)^{2k+1}\cdot\varphi(t-a)}{(2k+1)!} \ \bigl(t\in J,\ k=0,1,\dots\bigr). \quad (5)$$

Пример. Рассмотрим задачу вида (2),(3):

$$e^{-t^2/2}\Bigl(e^{t^2/2}x'\Bigr)' + (1/4)t^2x + (1/2)x = -\bigl(\lambda-(1/2)\bigr)x\ \bigl(t\in[0,1]\bigr), \quad (6)$$

$\bigl($уравнение (6) получено из: $e^{-t^2/2}\Bigl(e^{t^2/2}x'\Bigr)' + (1/4)t^2x = -\lambda x\bigr)$

$$x(0) = x(1) = 0. \quad (7)$$

Для (6),(7):$a=0$, $b=1$, $p_{00}(t)=1$, $p_{11}(t)=e^{t^2/2}$, $p_{10}(t)=p_{21}(t)=0$, $p_{22}(t) = e^{\frac{-t^2}{2}}$, $p_{20}(t) = \dfrac{t^2}{4}+\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{{}^{\,0}_{\mathcal{P}}C(t,s)}{p_{22}(s)} = \dfrac{e^{-(t^2+s^2)/4}}{e^{-s^2/2}}\cdot(t-s) = \dfrac{e^{-t^2/4}}{e^{-s^2/4}}\cdot(t-s) = 1\cdot\dfrac{\varphi(t)}{\varphi(s)}\cdot(t-s)$, $M_1 = M_2 = 1$, $\varphi(t) = e^{-t^2/4}$, ${}^{\,0}_{\mathcal{P}}x_k(t) = x_k(t) = \dfrac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot e^{-t^2/4}\ \bigl(k=0,1,2,\dots\bigr)$. Правые части оценок (5) достигаются. Представление (4) для задачи (6),(7) примет вид: $u(t,\lambda) = e^{-t^2/4}\cdot\sin\Bigl(\sqrt{\lambda-1/2}\,t\Bigr)\Big/\sqrt{\lambda-1/2}$. Корнями уравнения $\Phi(\lambda)=0$, где $\Phi(\lambda)=u(1,\lambda)$, являются $\lambda_k = 1/2+\bigl(\pi(k+1)\bigr)^2$ $\bigl(k=0,1,2,\dots\bigr)$. $u(t,\lambda_k) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(\lambda_k-1/2)^m\cdot x_m(t) = e^{-t^2/4}\cdot\sin\bigl(\pi(k+1)\,t\bigr)$ есть соответствующие λ_k собственные функции задачи (6),(7).

Литература

1. Дерр В.Я. Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения / В.Я. Дерр // Изв. института математики и информатики УдГУ. — 1999. — № 1(16). — С. 3–105.

2. Ватолкин М.Ю. О представлении решений квазидифференциального уравнения / М.Ю. Ватолкин, В.Я. Дерр // Изв. вузов. — 1995. — № 10(401). — С. 27–34.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В АЭРОГИДРОУПРУГОСТИ[1]

П.А. Вельмисов, Ю.А. Тамарова, Ю.В. Покладова (Ульяновск, УлГТУ)
velmisov@ulstu.ru, kazakovaua@mail.ru, pokladovau@inbox.ru

Предложены математические модели механических систем «трубопровод — датчик давления», предназначенных для измерения давления рабочей среды в камерах сгорания двигателей. На основе предложенных моделей, представляющих собой начально-краевые задачи для систем дифференциальных уравнений, исследуется совместная динамика чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе. Для описания динамики чувствительных элементов используются как линейные, так и нелинейные модели, динамика рабочей среды в трубопроводе описывается уравнениями линейной теории движения жидкостей или газов при различных предположениях о физической модели рабочей среды: несжимаемая идеальная, сжимаемая идеальная, несжимаемая вязкая. Разработаны как аналитические, так и численные методы решения указанных начально-краевых задач.

В качестве примера приведем математическую постановку, соответствующую плоской модели механической системы в предположении о сжимаемости рабочей среды.

$$\varphi_{tt} = a_0^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}), \quad x \in (0, l), \quad y \in (0, h), \tag{1}$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = \varphi_y(x, h, t) = 0, \quad x \in (0, l), \tag{2}$$

$$\varphi_x(l, y, t) = w_t(y, t), \quad y \in (0, h), \tag{3}$$

$$-\rho_0\varphi_t(0, y, t) = P(y, t), \quad y \in (0, h), \tag{4}$$

$$P_0 - \rho_0\varphi_t(l, y, t) - P_* = L(w(y, t)), \quad y \in (0, h). \tag{5}$$

Здесь $\varphi(x, y, t)$ — потенциал скорости, описывающий движение рабочей среды в трубопроводе; $w(y, t)$ — деформация упругого элемента, расположенного в конце трубопровода $x = l$; a_0, ρ_0, P_0 — скорость звука, плотность, давление, соответствующие состоянию покоя рабочей среды; $P(y, t)$ — закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод $x = 0$ (на выходе из камеры сгорания); P_* — внешнее воздействие на упругий элемент; индексы x, y, t снизу обозначают частные производные по координатам x, y и времени t. Дифференциальный (или интегро-дифференциальный) оператор $L(w(y, t))$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области (проекты № 18-41-730015, № 19-41-730006).
© Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А., Покладова Ю.В., 2018

в уравнении (5), описывающем динамику упругого элемента, может быть задан по разному в зависимости от выбранной модели твердого деформируемого тела, например

$$L(w(y,t)) = m\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \beta\dot{w}'''' + f(\dot{w}, w). \tag{6}$$

Точка и штрих обозначают частные производные по переменным y и t; $f(\dot{w}, w)$ — некоторая линейная или нелинейная функция, зависящая от деформации $w(y,t)$ и скорости деформации $\dot{w}(y,t)$; m, D, N, β — некоторые постоянные, являющиеся характеристиками упругого элемента. Имеем связанную задачу для функций $\varphi(x,y,t)$, $w(y,t)$, которая должна быть дополнена начальными условиями.

Рассмотрено несколько способов решения сформулированной выше задачи (а также других аналогичных задач). В частности, один из способов (основанный на введении усредненных характеристик соответствующих динамических систем) позволяет свести решение задач к исследованию дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом, связывающего величину деформации упругого элемента датчика $w(y,t)$ с законом изменения давления рабочей среды в двигателе $P(y,t)$. Аналогичные задачи в модели несжимаемой среды рассматривались в [1–5].

Приведем также математическую постановку, соответствующую одномерной модели динамической системы «трубопровод — датчик давления».

$$\varphi_{tt} - a_0^2\varphi_{xx} = 0, \tag{7}$$

$$-\rho_0\varphi_t(0,t) = P(t), \tag{8}$$

$$\varphi_x(l,t) = \dot{w}(t), \tag{9}$$

$$m\ddot{w}(t) + f(\dot{w}(t), w(t)) = P_0 - \rho_0\varphi_t(l,t) - P_*. \tag{10}$$

Решение задачи (7)–(10) сведено к исследованию дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом, связывающего величину перемещения чувствительного элемента $w(t)$ с законом изменения давления рабочей среды в двигателе $P(t)$

$$\begin{gathered}
f\left[\dot{w}\left(t-\frac{l}{a_0}\right), w\left(t-\frac{l}{a_0}\right)\right] + m\left[\ddot{w}\left(t-\frac{l}{a_0}\right) + \right.\\
\left. + \ddot{w}\left(t+\frac{l}{a_0}\right)\right] + f\left[\dot{w}\left(t+\frac{l}{a_0}\right), w\left(t+\frac{l}{a_0}\right)\right] - \\
-\rho_0 a_0\left[\dot{w}\left(t-\frac{l}{a_0}\right) - \dot{w}\left(t+\frac{l}{a_0}\right)\right] = 2P(t) + 2(P_0 - P_*).
\end{gathered} \tag{11}$$

Исследование уравнения (11) проводилось в случае конкретного задания вида функции $f(\dot{w}, w)$, например: $f(\dot{w}(t), w(t)) = \alpha\dot{w}(t) + \gamma_1 w(t) + \gamma_3 w^3(t) + \xi w^2(t)\dot{w}(t)$.

Литература

1. Анкилов А.В. Математическое моделирование механической системы «трубопровод—датчик давления» / А.В. Анкилов, П.А. Вельмисов, В.Д. Горбоконенко, Ю.В. Покладова. — Ульяновск : УлГТУ, 2008. — 188 с.

2. Вельмисов П.А. Исследование динамики деформируемых элементов некоторых аэрогидроупругих систем / П.А. Вельмисов, Ю.В. Покладова. — Ульяновск : УлГТУ, 2018. — 152 с.

3. Velmisov P.A. Mathematical modeling of the mechanical system «pipeline — pressure sensor» / P.A. Velmisov, Yu.V. Pokladova, U.J. Mizher // AIP Conference Proceedings 2172, 030006 (2019); doi: 10.1063/1.5133495.

4. Вельмисов П.А. Математическая модель системы «трубопровод—датчик давления» / П.А. Вельмисов, В.Д. Горбоконенко, Ю.А. Решетников // Механика и процессы управления : сборник научных трудов. — Ульяновск : УлГТУ, 2002. — С. 9–15.

5. Вельмисов П.А. Математическое моделирование механической системы «трубопровод—датчик давления» / П.А. Вельмисов, В.Д. Горбоконенко, Ю.А. Решетников // Датчики и системы. — 2003. — №6(49). — С. 12–15.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНО-ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ ЯДРАМИ[1]

В.В. Власов (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, Московский Центр фундаментальной и прикладной математики)
vikmont@yandex.ru

Исследования направлены на изучение асимптотических и качественных свойств решений интегро-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве методом спектрального анализа их символов. Главная часть рассматриваемых уравнений представляет собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Указанные интегро-дифференциальные уравнения являются обобщенными линейными моделями вязкоупругости, диффузии и теплопроводности в средах с памятью (уравнение Гуртина-Пипкина см. [1] и имеют ряд других важных приложений.

Проводится спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами указанных интегро-дифференциальных уравнений,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00288).

© Власов В.В., 2018

получены результаты о структуре и локализации их спектра (см. [1]–[4]).

На этой основе установлены результаты о существовании сильных и обобщенных решений этих уравнений, а также получены результаты о представлении решений в виде суммы слагаемых, отвечающих вещественной и невещественной частям спектра упомянутых оператор-функций (см. [1]-[4]).

Литература

1. Власов В.В. Спектральный анализ функционально-дифферен -циальных уравнений / В.В. Власов, Н.А. Раутиан — М. : МАКС Пресс, 2016. – 488 с.

2. Vlasov V.V. Well-posedness and spectral analysis of integrodifferential equations arising in viscoelasticity theory / V.V. Vlasov, N.A. Rautian // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — Vol. 233, no. 4. — P. 555–577.

3. Власов В.В. Корректная разрешимость и представление решений интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости / Власов В.В., Раутиан Н.А. // Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т.55, № 4. — С. 574–587.

4. Vlasov V.V. A Study of Operator Models Arising in Problems of Hereditary Mechanics / Vlasov V.V., Rautian N.A. // Journal of Mathematical Sciences (N. Y.). — 2020. — V. 244, no.2. — P. 170–182.

О СЛУЧАЙНОЙ СТЕПЕНИ СОВПАДЕНИЯ[1]

Е.Н. Гетманова, С.В. Корнев, В.В. Обуховский (Воронеж, ВГПУ)

ekaterina_getmanova@bk.ru, kornev_vrn@rambler.ru, valerio-ob2000@mail.ru

Характеристики типа топологической степени для многозначных отображений находят широкие применения в различных разделах современной математики (см., напр., [1-4], [6-8]). За последние десятилетия топологическая степень совпадения для пар, состоящих из линейного фредгольмова оператора и многозначного отображения (мультиотображения) была описана и изучена для различных классов мультиотображений (см., напр., [3, 8] и др.). Настоящая работа продолжает эти исследования и направлена на развитие степени совпадения для уплотняющего случайного многозначного возмущения линейного фредгольмова оператора.

Пусть E_1 – банахово, а E_2 – нормированное пространства; $U \subset E_1$ – открытое ограниченное множество; $L\colon Dom\ L \subset E_1 \to E_2$ –

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-2020-0009) и РФФИ (грант №20-51-15003 НЦНИ_а).

© Гетманова Е.Н., Корнев С.В., Обуховский В.В., 2018

линейный фредгольмов оператор нулевого индекса (см. [5]). Пусть β – монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная и правильная мера некомпактности в E_1 (см. [7]) и $K(E_2)$ обозначает совокупность всех непустых компактных подмножеств E_2.

Для полного измеримого пространства Ω пусть мультиотображение $\mathcal{F}\colon \Omega \times \overline{U} \to K(E_2)$ удовлетворяет условиям:

($\mathcal{F}1$) $\mathcal{F}$ – мультиотображение Каратеодори, т.е.: (i) $\mathcal{F}(\cdot, x)\colon \Omega \to K(E_2)$ измеримо для любого $x \in \overline{U}$, (ii) $\mathcal{F}(\omega, \cdot)\colon \overline{U} \to K(E_2)$ непрерывно для любого $\omega \in \Omega$;

($\mathcal{F}2$) $\mathcal{F}(\omega, \cdot)$ – J^c-мультиотображение для каждого $\omega \in \Omega$, т.е. представимо в виде конечной композиции полунепрерывных сверху мультиотображений с асферичными значениями (см. [2, 6]);

($\mathcal{F}3$) $(L, \mathcal{F}(\omega, \cdot))$ - β-уплотняющая пара для каждого $\omega \in \Omega$ (см. [4]).

Если теперь выполнено условие

($\mathcal{F}4$) $Lx \notin \mathcal{F}(\omega, x)$ для всех $x \in Dom\ L \cap \partial U$, для каждого $\omega \in \Omega$,

то для каждого $\omega \in \Omega$ определена целочисленная характеристика – степень совпадения $deg(L, \mathcal{F}(\omega, \cdot), \overline{U})$. Тогда случайная степень совпадения пары $(L, \mathcal{F})$ определяется как совокупность чисел

$$Deg(L, \mathcal{F}, \overline{U}) = \{deg(L, \mathcal{F}(\omega, \cdot), \overline{U})\colon \omega \in \Omega\}.$$

В докладе описываются основные свойства введенной характеристики и даются приложения к существованию случайных точек совпадения, основанные на следующем общем принципе.

Теорема 1. *Если $Deg(L, \mathcal{F}, \overline{U}) \neq 0$, то пара $(L, \mathcal{F})$ имеет случайную точку совпадения, т.е. существует такое измеримое отображение $\xi\colon \Omega \to U$, что $L\xi(\omega) \in \mathcal{F}(\omega, \xi(\omega))$ для всех $\omega \in \Omega$.*

Литература

1. Борисович Ю.Г. Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский // Успехи мат. наук. — 1980. — Т. 35, № 1. — С. 59–126.

2. Борисович Ю.Г. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. — 2-е изд. — М. : Либроком, 2011. — 298 с.

3. Корнев С.В. О некоторых вариантах теории топологической степени для выпуклозначных мультиотображений / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // Труды математического факультета Сер. "Новая серия" ВГУ. — 2004. — С. 56–74.

4. Обуховский В.В. О топологических характеристиках для некоторых классов многозначных отображений / В.В. Обуховский, С.В. Корнев, Е.Н. Гетманова // Чебышевский сборник. — 2020. — Т. 21, № 2. — С. 291–309.

5. Gaines R.E. Coincidence degree and nonlinear differential equations / R.E. Gaines, J.L. Mawhin. — Berlin: Lect. Notes Math. 568, Springer, 1977.

6. Górniewicz L. Topological fixed point theory of multivalued mappings / L. Górniewicz. — Springer, Dordrecht, 2006.

7. Kamenskii M. Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. — Berlin — New York: Walter de Gruyter, 2001.

8. Tarafdar E. On the existence of solutions of the equation $Lx \in Nx$ and a coincidence degree theory / E. Tarafdar, S.K. Teo // J. Austral. Math. Soc. A. — 1979. — V. 28, № 2. — С. 139–173.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А.В. Гилёв (Самара, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева)
toshqaaa@gmail.com

В докладе рассматривается краевая задача в области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$ для нагруженного гиперболического уравнения

$$u_{tt} - (au_x)_x + cu + \int_0^l K(x)udx = f. \tag{1}$$

Задача заключается в следующем: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \;\; u_t(x,0) = \psi(x), \;\; u(0,t) = 0, \;\; u(l,t) = 0.$$

Особенность этой задачи состоит в том, что уравнение является нагруженным.

В работе найдены условия на входные данные, при выполнении которых существует единственное обобщенное решение поставленной задачи. Под обобщенным решением мы понимаем функцию $u \in W^1_{2,0}(Q_T)$, такую, что $u(x,0) = \varphi(x)$, и удовлетворяющую тожде-

© Гилёв А.В., 2018

ству

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l(-u_tv_t+au_xv_x+cuv)dxdt+\int\limits_0^T\int\limits_0^l v(\int\limits_0^l K(x)udx)dxdt=$$
$$=\int\limits_0^l\psi(x)v(x,0)dx+\int\limits_0^T\int\limits_0^l fvdxdt,$$

для любой $v\in\hat{W}^1_{2,0}(Q_T)$, где обозначено

$$W^1_{2,0}(Q_T)=\{u(x,t):\ u\in W^1_2(Q_T),\ u(0,t)=u(l,t)=0\},$$
$$\hat{W}^1_{2,0}(Q_T)=\{v(x,t):\ v\in W^1_{2,0}(Q_T),\ v(x,T)=0\}.$$

Основным математическим инструментом доказательства разрешимости задачи и единственности ее обобщенного решения служат априорные оценки и свойства пространств Соболева.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ КАК РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ КОШИ-РИМАНА

Ю.А. Гладышев (Калуга, Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского)
v572264@yandex.ru

Изучению свойств функций, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений Коши-Римана, посвящено огромное количество статей и монографий, что во многом определено их большим значением при решении практических задач. В настоящем сообщении сделана попытка изучить некоторые классы функций, удовлетворяющих обобщенной системе Коши-Римана, введенной ранее [1]. Показано, что эти функции определяют решения системы уравнений Максвелла для электромагнитного поля, а также системы уравнений Дирака для частиц с нулевой массой покоя.

Введем восьмимерное пространство переменных x_i, где $i=\overline{0,7}$. Для дальнейшего разделим его на два четырехмерных подпространства, сохранив для первых четырех переменных прежние обозначения x_iа остальные обозначим y_i, $i=\overline{0,3}$. Таким образом, изучаемые функции зависят от двух наборов переменных, которые для удобства будем обозначать x, y. Все функции $F(x,y)$ принимают значения во множестве кватернионов

$$F(x,y)=\sum_{i=0}^{3}f_i(x,y)e_i. \tag{1}$$

© Гладышев Ю.А., 2018

Здесь e_i – кватернионные единицы [2].

Если ввести операторы

$$D_1 = \sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad D_2 = \sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial}{\partial y_i}, \tag{2}$$

то обобщенные условия Коши-Римана [1] запишем

$$\begin{cases} D_1 X - \Psi D_2 = 0, \\ X\overline{D}_1 + \overline{D}_2 \Psi = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где X, Ψ — кватернионные функции указанных выше переменных, а $\overline{D}_1$,$\overline{D}_2$ — сопряженные в кватернионном смысле операторы [2].

Ранее были указаны некоторые свойства решений системы (3), а также дана их физическая интерпретация как включающих систему уравнений электромагнитного поля Максвелла [1].

Следующие предложения определяют некоторые свойства решений системы (3). Справедлива следующая

Теорема 1. *Если $X(x, y)$, $\Psi(x, y)$ удовлетворяют системе (3), то X, Ψ', определенные как*

$$X' = \overline{X}(y, x), \quad \Psi' = -\overline{\Psi}(y, x) \tag{4}$$

также удовлетворяют этой системе.

Доказательство легко провести используя свойства операции кватернионного сопряжения.

В предположении, что функция $\Phi(x, y)$, компоненты которой дважды непрерывно дифференцируемы по x_i, y_i справедлива

Теорема 2. *Если $\Phi(x, y)$ – гармоническая функция в R^8, т.е. есть решение уравнения Лапласа*

$$D_1\overline{D}_1\Phi + D_2\overline{D}_2\Phi = 0, \tag{5}$$

то функции

$$X = \overline{D}_1\Phi, \quad \Psi = -\Phi\overline{D}_2 \tag{6}$$

дают решение (3).

Доказательство проводится прямой подстановкой (6) в (3).

Полезна следующая

Теорема 3. *Если функции X и Ψ дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют системе (3), то функции X и Ψ — гармонические кватернионы, т.е. их компоненты гармонические функции.*

Для доказательства следует применить операторы (2) к системе (3).

Отметим, что как следствие теорем 2, 3, операцию (6) можно применять любое число раз, если компоненты X и Ψ есть функции бесконечно дифференцируемые.

В сообщении приведены примеры некоторых семейств функций.

В [1] было показано, что если принять, что функции X и Ψ зависят только от x_1, x_2, x_3, y_0, а $y_0 = it$ — чисто мнимая величина, то положив $X_0 = 0$, $X = \overrightarrow{H}$, $\Psi_0 = 0$, $\overrightarrow{\Psi} = i\overrightarrow{E}$, получим из (3) систему Максвелла [3] в области без зарядов и токов. В сообщении проанализировано, какое изменение произойдет в уравнениях Максвелла, если снять условие $X_0 = \Psi_0 = 0$. Это тем более важно, что если интерпретировать систему (3) как систему уравнений Дирака, то это условие не может быть поставлено.

Так как, согласно теореме 3, X_0 и Ψ_0 — гармонические функции, то закон сохранения электрического и магнитного зарядов (если последний существует) остаются в силе. Однако в системе Максвелла появляются некоторые, вообще говоря зависящие от времени, пространственно распределенные заряды. Если X_0 и Ψ_0 от времени не зависят, то остаются только токи зарядов. Эти токи стационарны и выражены как градиенты скаляров X_0 и Ψ_0.

Таким образом, в работе показано, что естественное с точки зрения кватернионов расширение класса решений (снятие требования $X_0 = \Psi_0 = 0$) не нарушает общей структуры уравнений Максвелла, но приводит к их определенной модификации.

Остается изучить класс решений зависящих от переменных x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3. Это предполагается сделать в следующем сообщении.

Литература

1. Гладышев Ю.А. Об одном обобщении условий Коши-Римана теории теории функции комплексного переменного в область кватерноионных функций. / Ю.А. Гладышев // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий : сборник трудов XI международной конференции. — Воронеж : ИПЦ «Научная книга», 2018. — С. 94–96.

2. Бранец В.Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. / В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский. — М. : Наука. — 1973. — 320 с.

3. Ландау Л.Д. Теоретическая физика. Том 2. Теория поля. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — М. : Физматлит, — 2003. — 534 с.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ, СВЯЗАННОЙ С ОПИСАНИЕМ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ[1]

Ю.Е. Гликлих, Г.Д. Кордюмов (Воронеж, ВГУ)
yeg@math.vsu.ru

Предварительные сведения о производных в среднем можно найти в [1].

В модели Хестона стохастической волатильности важную роль играет вспомогательный случайный процесс $y(t)$, который задается стохастическим дифференциальным уравнением в форме Ито вида

$$dy(t) = \alpha\sqrt{y(t)}dw(t) + \beta(y^* - y(t))dt,$$

где α, β и y^* — некоторые константы.

Мы обобщаем это уравнение до уравнения в терминах производных в среднем

$$\begin{cases} Dy(t) = \beta(y^* - y(t)) \\ D_2y(t) = \alpha^2 y(t) \end{cases},$$

которое описывает более широкий класс процессов. Для последнего уравнения получена теорема существования решения.

При переходе к соответствующему стохастическому дифференциальному включению в терминах производных в среднем

$$\begin{cases} Dy(t) \in \boldsymbol{\beta}(y^* - y(t)) \\ D_2y(t) \in \boldsymbol{\alpha}^2 y(t) \end{cases},$$

где многозначные константы $\boldsymbol{\alpha}^2$ и $\boldsymbol{\beta}$ задаются экспертами, удается показать, что среди его решений существует решение, минимизирующее некоторый функционал качества. Показано, что существует управление, посредством которого указанное оптимальное решение включения реализуется как решение уравнения с управлением с обратной связью.

Литература

1. Gliklikh Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh. — London : Springer Verlag, 2011. — 460 p.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00048).

© Гликлих Ю.Е., Кордюмов Г.Д., 2018

ОЦЕНКА АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КОНСТАНТЫ НИКОЛЬСКОГО[1]

Д.В. Горбачев, И.А. Мартьянов (Тула, ТулГУ)
dvgmail@mail.ru, martyanow.ivan@yandex.ru

Пусть $\mathcal{P}_n$ — множество алгебраических полиномов с комплексными коэффициентами. Через

$$\mathcal{M}(n) = \sup_{P\in\mathcal{P}_n\setminus\{0\}} \frac{\max_{x\in[-1,1]}|P(x)|}{\int_{-1}^{1}|P(x)|\,dx}$$

обозначим точную алгебраическую константу Никольского между равномерной и интегральной нормами.

Теорема. *Для произвольного целого $n \geqslant 0$ имеем*

$$0.1410(n+1)^2 \leqslant \mathcal{M}(n) \leqslant 0.1412(n+1)(n+2).$$

Данная теоремы уточняет предыдущие оценки, полученные в работах D. Amir и Z. Ziegler (1976), T. K. Ho (1976), F. Dai, D. Gorbachev и S. Tikhonov (2019).

Доказательство теоремы базируется на взаимосвязи алгебраической константы Никольского с тригонометрической константой Бернштейна–Никольского и наших результатах об оценках последней величины. Данная теорема также позволяет уточнить точную константу Никольского для полиномов на евклидовой сфере $\mathbb{S}^2$.

О МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ БЕЗ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ[1]

С.А. Гриценко (Москва, НИУ МЭИ)
sv.a.gritsenko@gmail.com

Известно, что наиболее строгие результаты теории усреднения получены для совершенно особых физических сред, когда локальная неоднородность имеет периодическую структуру. Предпринимается попытка получить усредненные модели, учитывающие переменную геометрию твердой компоненты. Рассматривается непериодическая пороупругая среда переменной структуры в области Ω с характеристической функцией $\chi_0(\mathbf{x})$ жидкой области Ω_f. Пусть

$$\chi_0(\mathbf{x}) = \chi_n(\frac{\mathbf{x}}{\delta}),\;\; \lambda_0 = \lambda_0^n\;\; \varrho_s = \varrho_s^n,\; \text{для } \mathbf{x} \in K_n^{(\delta)},$$

[1] Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00199).
© Горбачев Д.В., Мартьянов И.А., 2018
[1] Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2020-0022)
© Гриценко С.А., 2018

где $\chi_n(\mathbf{y})$ есть 1-периодическая в $\mathbf{y}$ функция,

$$\lambda_0^n = const,\ \varrho_s^n = const,\ \Omega = \bigcup_{n=1}^{N} K_n^{(\delta)},$$

и при $\delta > 0$ куб $K_n^{(\delta)}$ является пересечением области Ω с кубом $\delta\, K$, $K = [0,1]^3 \subset \mathbb{R}^3$, $IntK_n^{(\delta)} \cap IntK_m^{(\delta)} = \varnothing$ для $m \neq n$.

$$\chi^{(\delta)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \chi_n(\mathbf{y}),\ \lambda_0^{(\delta)}(\mathbf{x}) = \lambda_0^n,\ \varrho_s^{(\delta)}(\mathbf{x}) = \varrho_s^n \text{ for } \mathbf{x} \in K_n^{(\delta)}$$

есть кусочно-постоянная функция переменной $\mathbf{x}$. Тогда $\chi^{(\delta)}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ — 1-периодическая функция переменной $\mathbf{y}$.

Теперь можно рассматривать в области Ω при $t > 0$ задачу

$$\nabla \cdot \mathbf{w}^{\delta,\varepsilon} = 0,$$

$$\nabla \cdot \Big(\chi^{\delta,\varepsilon}\alpha_\mu \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \mathbf{w}^{\delta,\varepsilon}}{\partial t}\Big) + (1-\chi^{\delta,\varepsilon})\lambda_0^{(\delta)}\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{\delta,\varepsilon}) - p^{\delta,\varepsilon}\,\mathbb{I}\Big) + \varrho^{\delta,\varepsilon}\mathbf{F} = 0,$$

с характеристической функцией порового пространства $\Omega_f^{\delta,\varepsilon}$:

$$\chi^{\delta,\varepsilon}(\mathbf{x}) = \chi^{(\delta)}(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}).$$

ОЦЕНКА КВАЗИМНОГОЧЛЕНА

А.Е. Додонов (Владимир, ВлГУ)
art-dodonov@mail.ru

Рассмотрим квазимногочлен

$$\Omega(\lambda) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{s=1}^{m} p_{s,k}\lambda^s\right)e^{iz_k\lambda}, \qquad p_{s,k} \in \mathbb{C}, \quad z_k \in \mathbb{C}^+$$

и ассоциированные с ним дроби

$$\rho_1(z) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{m}\frac{\hat{p}_{s,k}z^s}{(z-z_k)^{m+1}}, \quad \rho_2(z) = Q(z)\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{(z-\overline{z_k})^{m+1}}, \qquad (1)$$

где при каждом k коэффициенты $\{\hat{p}_{s,k}\}_{s=0}^{m}$ являются решениями системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{s=j}^{m}\frac{C_m^j i^{m-j} s! z_k^{s-j}}{(s-j)!}\hat{p}_{s,k} = m! p_{m-j,k}, \qquad j = 0, 1, \ldots, m,$$

© Додонов А.Е., 2018

а $Q(z)$ — произвольный многочлен, $\deg Q \leqslant mn$. Методами работы [1] получается

Теорема. *Для любого $\lambda > 0$ имеет место неравенство*

$$|\Omega(\lambda)| \leqslant \frac{n(m+1)}{\lambda} \inf_{\rho_2} \max_{x\in\mathbb{R}} |\rho_1(x) + \rho_2(x)|, \tag{2}$$

где точная нижняя грань берется по всем дробям ρ_2 вида (1).

Примеры квазимногочленов $\Omega(\lambda)$, для которых оценки типа (2) существенно учитывают взаимное «погашение» гармонических слагаемых, приводились в работе [2].

Литература

1. Данченко В.И. Оценки производных наипростейших дробей и другие вопросы / В.И. Данченко // Математический сборник. — 2006. — Т. 197, № 4. — С. 33–52.

2. Danchenko V.I. Estimates for exponential sums. Applications / Danchenko V.I., Dodonov A.E. // Journal of Mathematical Sciences. — 2013. — Vol. 188, № 3. — Pp. 197–206.

ОЦЕНКА ПРОИЗВОДНОЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

А.Е. Додонов (Владимир, ВлГУ)

art-dodonov@mail.ru

При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим рациональные функции

$$R_1(z) = P(z) \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}, \qquad R_2(z) = Q(z) \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{z - \overline{z_k}}, \tag{1}$$

где $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z] : \deg P, \deg Q \leqslant n$, а $z_k \in \mathbb{C}^+$ — не обязательно различные числа. Обозначим $R = R_1 + R_2$. Пусть

$$B(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{x - z_k}{x - \overline{z_k}}, \qquad \mu(x) = -i\frac{B'(x)}{B(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2\,\mathrm{Im}\, z_k}{|x - z_k|^2},$$

$$M_\varphi(x) = \mathrm{Re}\,(e^{i\varphi} B(x)), \qquad N_\varphi(x) = \mathrm{Im}\,(e^{i\varphi} B(x)).$$

Пусть $\zeta_k = \zeta_k(\varphi)$ — нули функции M_φ. Отметим, что эти числа действительные и попарно различные. Будем обозначать

$$\mathcal{R}(\varphi) = \max_{1\leqslant k\leqslant 2n} |R(\zeta_k)|, \qquad \|R\| = \max_{x\in\mathbb{R}} |R(x)|.$$

© Додонов А.Е., 2018

Методами монографии [1] доказывается

Теорема. *При любых действительных x и α для рациональных функций вида* (1) *справедливы неравенства*

$$\left|R_1'(x)e^{-i\alpha}+R_2'(x)e^{i\alpha}\right|\leqslant\mu(x)\mathcal{R}(\varphi)\leqslant\mu(x)\|R\|, \qquad (2)$$

где $\varphi\in\mathbb{R}$ — такое число, что x — нуль функции $N_{\varphi+\alpha}$.

Оценка (2) экстремальна: для дробей $R(x)=B(x)$, $R_1(x)\equiv 1$, $R_2(x)=B(x)-1$ она обращается в равенство.

Литература

1. Русак В.Н. Рациональные функции как аппарат приближения / В.Н. Русак. — Мн. : Изд-во БГУ, 1979. — 176 с.

О РЕШЕНИЯХ КВАДРАТИЧНЫХ СРАВНЕНИЙ

В.Н. Думачев (Воронеж, ВИ МВД РФ)
dumv@comch.ru

В докладе рассматривается задача нахождения решений канонического квадратичного сравнения $x^2=y \bmod p$ в кольце простой нечетной характеристики $\mathbb{Z}_p$. В работе [1] показано, что основные инструменты анализа квадратичных сравнений — это символ Лежандра, а также символ Якоби. Однако использование данных символов позволяет лишь определить, является ли свободный член канонического сравнения квадратичным вычетом или же квадратичным невычетом.

Пусть $X\in\mathbb{Z}_p$. Обозначим через $Y_1\in\mathbb{Z}_p$ квадратичные вычеты, а через $Y_2\in\mathbb{Z}_p$ квадратичные невычеты, тогда $X=\{0,Y_1,Y_2\}$. Будем искать решения канонического квадратичного сравнения в виде полинома $f(y)=\sum\limits_{i=0}^{p-1}a_iy^i$, где $x\in X$. Очевидно, что вследствие конечности поля такой полином всегда существует. Поскольку отображение $X\to Y_1$ сюрьективно, положим $f(y_1)=x,\ f(y_2)=0$, где $y_1\in Y_1,\ y_2\in Y_2$.

Теорема 1. $\forall p=3\ mod\ 4$, *каноническое квадратичное сравнение имеет решение* $x=\frac{p+1}{2}y^{\frac{p+1}{4}}\left(1+y^{\frac{p-1}{2}}\right) mod\ p$.

□ Возводя обе части последнего уравнения в квадрат, получим критерий Эйлера для квадратичного вычета $x^{\frac{p+1}{2}}=x \bmod p$. ■

Заметим, что в данной теореме представлен минимальный по числу операций полином. Используя биномиальную формулу несложно оценить, что всего в $\mathbb{Z}_p$ можно получить $2^{\frac{p-1}{2}}$ различных полиномов,

© Думачев В.Н., 2018

дающих решение канонического сравнения с нулевым выходом для невычета.

Литература

1. Виноградов И.М. Основы теории чисел / И.М. Виноградов. — М. : ГИТТЛ, 1952. — 180 с.

О РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ АСИМПТОТИКЕ ЗАДАЧИ КОШИ ПРИ НАЛИЧИИ «СЛАБОЙ» ТОЧКИ ПОВОРОТА У ПРЕДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

А.Г. Елисеев (Москва, ФГБОУ «НИУ «МЭИ»)
eliseevag@mpei.ru

Рассматривается сингулярно возмущенная задача Коши при наличии «слабой» точки поворота у предельного оператора. Данная работа является развитием идей, изложенных в [1, 2].

Рассмотрим задачу Коши

$$\varepsilon\dot{u}(t,\varepsilon) = A(t)u(t,\varepsilon) + h(t), \quad u(0,\varepsilon) = u^0 \tag{1}$$

и выполнены условия:

1) $h(t) \in C^\infty([0,T], R^n)$;

2) $A(t) \in C^\infty([0,T], \mathcal{L}(R^n, R^n))$;

3) $A(t)$ диагонализируем, т.е. $A(t) = \lambda_1(t)P_1(t) + \lambda_2(t)P_2(t)$, $P_1(t) + P_2(t) = I$;

4) условие «слабой» точки поворота: $\lambda_2(t) - \lambda_1(t) =$ $= t^{k_0}(t-t_1)^{k_1}\ldots(t-t_m)^{k_m}a(t)$, где $a(t) \neq 0$, $k_0 + \ldots + k_m = n$;

5) $\operatorname{Re}\lambda_i(t) \leqslant 0$.

Сингулярности задачи (1) находятся из решения задачи Коши

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{J}_1 = \lambda_1(t)J_1 + \varepsilon K(t)J_2, & J_1(0,\varepsilon) = 1, \\ \varepsilon\dot{J}_2 = \lambda_1(t)J_2 + \varepsilon K(t)J_2, & J_2(0,\varepsilon) = 1, \end{cases} \tag{2}$$

где $K(t) = \sum\limits_{j=0}^{m}\sum\limits_{i=0}^{k_m-1} K_{j,i}(t)$ — многочлен Лагранжа–Сильвестра. Из решения задачи (2) находятся носители сингулярностей:

$$\sigma_{1,0}(t,\varepsilon) = e^{\varphi_1(t)/\varepsilon}, \quad \sigma_{2,0}(t,\varepsilon) = e^{\varphi_2(t)/\varepsilon},$$

$$\sigma_{1,k}^{(j_1,i_1,\ldots,j_k,i_k)}(t,\varepsilon) = e^{\varphi_1(t)/\varepsilon}\int\limits_0^t e^{\triangle\varphi(s_1)/\varepsilon}K_{j_k,i_k}(s_1)\cdot$$

$$\cdot\int\limits_0^{s_1} e^{-\triangle\varphi(s_2)/\varepsilon}K_{j_{k-1},i_{k-1}}(s_2)\ldots\int\limits_0^{s_{k-1}} e^{(-1)^{k-1}\triangle\varphi(s_k)/\varepsilon}K_{j_1,i_1}(s_k)ds_k\ldots ds_1,$$

© Елисеев А.Г., 2018

$$\sigma_{2,k}^{(j_1,i_1,\ldots,j_k,i_k)}(t,\varepsilon)=e^{\varphi_2(t)/\varepsilon}\int\limits_0^t e^{-\triangle\varphi(s_1)/\varepsilon}K_{j_k,i_k}(s_1)\cdot$$

$$\cdot\int\limits_0^{s_1} e^{-\triangle\varphi(s_2)/\varepsilon}K_{j_{k-1},i_{k-1}}(s_2)\ldots\int\limits_0^{s_{k-1}} e^{(-1)^k\triangle\varphi(s_k)/\varepsilon}K_{j_1,i_1}(s_k)ds_k\ldots ds_1,$$

где k — число интегралов, $0\leqslant j_s\leqslant m$, $0\leqslant i_s\leqslant k_s-1$, $\varphi_1(t)=\int\limits_0^t\lambda_1(s)ds$, $\varphi_2(t)=\int\limits_0^t\lambda_2(s)ds$, $\triangle\varphi(t)=\int\limits_0^t(\lambda_2(s)-\lambda_1(s))ds$.

Решение задачи (1) ищется в виде

$$u(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\Bigg[x_k^{(t)}\sigma_{1,0}(t,\varepsilon)+y_k(t)\sigma_{2,0}(t,\varepsilon)+$$
$$+\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_p=0}^{m}\sum_{i_1,\ldots,i_p=0}^{k_1-1,\ldots,k_p-1}\bigg(Z_{1,p,k}^{(j_1,i_1,\ldots,j_p,i_p)}(t)\sigma_{1,p}^{(j_1,i_1,\ldots,j_p,i_p)}(t,\varepsilon)+$$
$$+Z_{2,p,k}^{(j_1,i_1,\ldots,j_p,i_p)}(t)\sigma_{2,p}^{(j_1,i_1,\ldots,j_p,i_p)}(t,\varepsilon)\bigg)\Bigg]-$$
$$-\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\left(A^{-1}(t)\frac{d}{dt}\right)^{k+1}\int\limits_0^t h(s)ds.$$

Главный член асимптотики решения задачи Коши имеет вид

$$u_{\text{гл}}(t,\varepsilon)=e^{\varphi_1(t)/\varepsilon}U_1(t,0)\frac{P_1(0)h(0)}{\lambda_1(0)}+e^{\varphi_2(t)/\varepsilon}U_2(t,0)\frac{P_2(0)h(0)}{\lambda_2(0)}+$$
$$+\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_p=0}^{m}\sum_{i_1,\ldots,i_p=0}^{k_1-1,\ldots,k_p-1}\Big[\sigma_{1,p}^{(j_1,i_1,\ldots,j_p,i_p)}(t,\varepsilon)U_1(t,t_{j_p})P_1(t_{j_p})\cdot$$
$$\cdot Z_{1,p,0}^{(j_1,i_1,\ldots,j_p,i_p)}(t_{j_p})+\sigma_{2,p}^{(j_1,i_1,\ldots,j_p,i_p)}(t,\varepsilon)U_2(t,t_{j_p})P_2(t_{j_p})\cdot$$
$$\cdot Z_{2,p,0}^{(j_1,i_1,\ldots,j_p,i_p)}(t_{j_p})\Big]-A^{-1}(t)h(p).$$

Литература

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С.А. Ломов. — М. : Наука, 1981. — 400 с.

2. Елисеев А.Г., Ломов С.А. Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора / А.Г. Елисеев, С.А. Ломов // Мат. сборник. — 1986. — Т. 131, № 173. — С. 544–557.

О РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ПРИ НАЛИЧИИ «ПРОСТОЙ» РАЦИОНАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПОВОРОТА У ПРЕДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА[1]

А.Г. Елисеев, Т.А. Ратникова (Москва, ФГБОУ «НИУ «МЭИ»)
eliseevag@mpei.ru, ratnikovata@mpei.ru

В работе рассмотрена задача Коши, когда одно собственное значение предельного оператора $A(t)$ обращается в нуль при $t = 0$ и имеет вид $t^{m/n}a(t)$, где m/n — рациональное число и $a(t) \neq 0$:

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{u}(t) = A(t)u(t) + h(t), \\ u(0,\varepsilon) = u^0 \end{cases} \tag{1}$$

и выполнены условия:

1) $h(t) \in C^\infty[0,T]$;

2) $A(t) \in C[0,T]$, $A(t) \in C^\infty(0,T]$;

3) собственные значения матрицы $A(t)$ удовлетворяют условиям: $\lambda_1(t) \neq \lambda_2(t)$ $\forall t \in [0,T]$;

4) $\lambda_2(t) = t^{m/n}a(t)$, $a(t) \in C^\infty[0,T]$, $a(t) \neq 0$ $\forall t \in [0,T]$ — условие «простой» точки поворота;

5) $\operatorname{Re}\lambda_i(t) \leqslant 0$ $\forall t \in [0,T]$, $i = 1,2$;

6) $\exists \lim\limits_{t\to 0}\langle \dot{\bar{e}}_i(t), \bar{\psi}^j\rangle$, $i = 1,2$, $j = 1,2$, где $\bar{e}_i(t)$ — собственные векторы матрицы $A(t)$, $i = 1,2$; $\psi^j(t)$ — биортогональный базис к $\bar{e}_i(t)$, $j = 1,2$.

Основные сингулярности задачи (1) имеют вид

$$e^{\varphi_i(t)/\varepsilon}, \quad i = 1,2;$$

$$\sigma_i(t,\varepsilon) = e^{\varphi_2(t)/\varepsilon}\int\limits_0^t e^{-\varphi_2(s)/\varepsilon}s^{(i+1-n)/n}ds, \;\; i = \overline{0,(p-1)}, \;\; p = m+n-1;$$

$$\varphi_1(t) = \int\limits_0^t \lambda_1(s)ds, \quad \varphi_2(s) = \int\limits_0^t s^{m/n}a(s)ds.$$

Решение задачи (1) имеет вид:

$$u(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{2} g_i(t,\varepsilon)e^{\varphi_i(t)/\varepsilon} + \sum_{i=1}^{p-1} f_i(t,\varepsilon)\sigma_i(t,\varepsilon) + w(t,\varepsilon),$$

[1] Результаты Ратниковой Т.А. получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2020-0022)

© Елисеев А.Г., Ратникова Т.А., 2018

где $g_i(t,\varepsilon)$, $f_i(t,\varepsilon)$, $w(t,\varepsilon)$ — гладкие функции, степенным образом зависящие от ε.

Методом регуляризации получено решение задачи (1) и доказаны теоремы о точечной разрешимости итерационных задач, асимптотичности регуляризованного ряда и теорема о предельном переходе.

Литература

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С.А. Ломов. — М. : Наука, 1981. — 400 с.

2. Елисеев А.Г., Ломов С.А. Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора / А.Г. Елисеев, С.А. Ломов // Мат. сборник. — 1986. — Т. 131, № 173. — С. 544–557.

3. Турсунов Д.А., Кожобеков К.Г. Асимптотика решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с дробной точкой поворота / Д.А. Турсунов, К.Г. Кожобеков // Известия Иркут. гос. ун-та. — 2017. — Т. 21. — С. 108–121.

4. Елисеев А.Г., Ратникова Т.А. Сингулярно возмущенная задача Коши при наличии рациональной «простой» точки поворота у предельного оператора / А.Г. Елисеев, Т.А. Ратникова // Дифф. урав. и процессы управ. — 2019. — № 3. — С. 63–71.

5. Eliseev A., Ratnikova T. Regularized Solution of Singularly Perturbed Cauchy Problem in the Presence of Rational «Simple» Turning Point in Two-Dimensional Case / A. Eliseev, T. Ratnikova // Axioms. — 2019. — № 8(4), 124. — https://doi.org/10.3390/axioms8040124.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ САРКОПЛАЗМАТИЧЕСКОГО РЕТИКУЛА КЛЕТОК ПОПЕРЕЧНО-ПОЛОСАТОЙ МЫШЦЫ[1]

Н.А. Енсебек, Ж. Кошербай, Р. Конради (Нур-Султан, ЕНУ им Л.Н. Гумилева)

n.yensebek@mail.ru, jannur98@mail.ru

Сокращение мышечного волокна является сложным биомеханическим процессом. Сеть разветвленных канальцев проникает в волокно мышцы с поверхности. Саркоплазматический ретикулум высвобождает кальций и активизирует сокращение волокна. Обычно изменения потенциала действия в волокнах скелетных мышц описываются по модели Ходжкина-Хаксли, которые фокусируются на процессах возбуждения-сжатия.

Наш подход направлен на изучение не только мышечной проводимости, но и нервной. Волокна скелетных мышц стимулируются

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РК (МОН РК, проект AP05136197).

© Енсебек Н.А., Кошербай Ж., Конради Р., 2018

нервными волокнами, нервно-мышечное соединение в конце каждого нервного волокна стыкует его с серединой мышечного волокна. Нервная ткань состоит из нейронов, образующих дендритное дерево (граф-дерево). Мы используем данные, полученные в [1], где изучено строение сети t-систем, то есть трубчатой системы поперечно-полосатых мышц. Поперечное сечение системы t-трубочек является прекрасным примером компактного графа с циклами.

На компактном графе нами исследована задача идентификации потенциала для волнового уравнения. Для исследования достаточных условий идентификации априорных параметров проводимости применяются методы Авдонина С.А. -– метод граничного управления (Boundary Control Method) и рекурсивный метод (Leaf Peeling Method). В процессе решения задачи важную роль сыграли результаты [2] по управляемости систем на звездных графах.

Литература

1. Peachey L.D., Eisenberg B.R. Helicoids in the t system and striations of frog skeletal muscle fibers seen by high voltage electron microscopy / Biophysical Journal, 1978. – Vol. 22. – P. 145–154.

2. Avdonin S., Avdonina N., Zhao Yu. Exact controllability for the wave equation on star graphs / IFAC, 2019. -– Vol. 52 (2). – P. 30–35.

О КОМБИНАТОРНОМ АЛГОРИТМЕ НАХОЖДЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ПУТЕЙ НА ОРГРАФЕ

Я.М. Ерусалимский, М.И. Чердынцева (Ростов-на-Дону, ЮФУ)

ymerusalimskiy@sfedu.ru

Отправляясь от идей Б. Паскаля, реализованных им при построении знаменитого арифметического треугольника, носящего его имя, авторы разработали алгоритм позволяющий для ориентированного графа $G(X, U, f)$ и произвольного подмножества его вершин Y $(Y \subseteq X)$ находить количество путей, ведущих из Y в каждую из вершин графа.

Блез Паскаль, изучая арифметический треугольник (напр. [1]), вероятно, не подозревал, что решает задачу о количестве путей, ведущих из фиксированной вершины графа-решётки в остальные его вершины. Граф-решётка имеет вершины в точках с целочисленными координатами в первом квадранте декартовой плоскости. Из каждой вершины графа-решётки выходит две дуги —в ближайшую правую вершину и в ближайшую верхнюю вершину.

Ясно, что для каждой его вершины, отличной от вершины $O(0; 0)$, количество путей, ведущих в неё из вершины $O(0; 0)$, равно количеству таких путей, заканчивающихся горизонтальной дугой, плюс

© Ерусалимский Я.М., Чердынцева М.И., 2018

количество таких путей, заканчивающихся вертикальной дугой. Именно это свойство множества путей графа-решётки порождает известное свойство треугольника Паскаля

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1}.$$

Аналогичным образом обстоит дело на произвольном ориентированном графе — количество путей, приходящих в произвольную вершину графа, равно сумме количеств путей, приходящих в неё по каждой из дуг, заканчивающихся в этой вершине. Это же свойство справедливо и для множества путей, начинающихся в произвольном подмножестве Y $(Y \subseteq X)$. Такое же свойство справедливо и для путей фиксированной длины. Перечисленные свойства лежат в основе предложенного динамического алгоритма.

Предложенный алгоритм легко адаптируется для графов с ограничениями на достижимость различных типов, когда на графе допустимыми являются только пути, удовлетворяющие дополнительным условиям, которые называются типом достижимости (см., например, [2–6]).

Интересной особенностью алгоритма является тот факт, что его трудоемкость не зависит от количества вершин во множестве Y, а зависит только от количества вершин и дуг графа. Его трудоемкость такая же как и алгоритма Дейкстры нахождения кратчайших путей на графе.

Литература

1.Ерусалимский Я.М. Треугольник Паскаля: комбинаторика и случайные блуждания: 2-е изд., испр. / Я.М Ерусалимский. — М. : Вузовская книга, 2020. — 121 с.

2. Ерусалимский Я.М. Графы с нестандартной достижимостью. Задачи, приложения: моногр. / Я.М Ерусалимский, В.А. Скороходов, М.В. Кузьминова, А.Г. Петросян. — Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2009. — 195 с.

3. Ерусалимский Я.М. Общий подход к нестандартной достижимости на графах / Я.М. Ерусалимский, В.А. Скороходов. // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естественные науки. — 2005. Спецвыпуск. Псевдодифференциальные уравнения и некоторые проблемы математической физики. — С. 64–67.

4. Erusalimskiy I.M. Graph–lattice: random walk and combinatorial identities, Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. — 2016. — V. 22. — Issue 2. — PP. 329–335.

5. Ерусалимский Я.М. 2–3 пути на графе-решётке. Случайные блуждания. —Матем. заметки. — 104:3 (2018). —С. 396–406 / англ. пе-

ревод: Erusalimskyi I.M. 2–3 Paths in a Lattice Graph: Random Walks. — Math. Notes. — 104:3 (2018). — PP. 395–403.

6. Жилякова Л.Ю. Графовые динамические модели и их свойства. — Автомат. и телемех. — 2015. — 8. — С. 115–139 / пер. на англ. Zhilyakova L.Yu. Dynamic graph models and their properties, Autom. Remote Control. — 76:8 (2015). — PP. 1417–1435.

ОБ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРАХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С МЕТАПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГРУППОЙ[1]

К.Н. Жуйков, П.А. Сипайло (Москва, РУДН)

zhuykovcon@gmail.ru, sipaylo@gmail.com

Рассматривается оператор вида конечной суммы

$$\mathcal{D} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} D_k \Phi^k \colon \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{H}^{s-d}(\mathbb{R}^N), \tag{1}$$

где D_k суть псевдодифференциальные операторы на $\mathbb{R}^N$ из класса Шубина [2] порядка $\leqslant d$, Φ — метаплектический оператор (см., напр., [1,4]), $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^N)$ — пространство Соболева (см., напр., [5]). Операторы такого вида являются G-операторами в смысле [5], где $G \simeq \mathbb{Z}$ — группа, порождённая степенями оператора Φ.

Под *траекторным символом* оператора (1) понимается семейство конечно-разностных операторов $\sigma_{\mathrm{tr}}(\mathcal{D})$ с параметром $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}$, действующих ограниченно в пространствах $\ell^2(\mathbb{Z}, \mu_{x,\xi,s}) \to \ell^2(\mathbb{Z}, \mu_{x,\xi,s-d})$ по формуле

$$[\sigma_{\mathrm{tr}}(\mathcal{D})(x,\xi)]v(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sigma(D_k)(S^n(x,\xi))v(n-k), \tag{2}$$

где $\sigma(D_k)$ — главный символ оператора D_k, $S^n(x,\xi)$ — результат n-кратного применения симплектической матрицы S, отвечающей оператору Φ, к вектору $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2N}$, а $\ell^2(\mathbb{Z}, \mu_{x,\xi,s})$ — гильбертово пространство последовательностей, квадратично суммируемых с весом $\mu_{x,\xi,s}(n) = |S^n(x,\xi)|^{2s}$.

В терминах траекторного символа (2) даны условия эллиптичности оператора (1) в зависимости от показателя s гладкости соответствующих пространств Соболева, предъявлена теорема конечности. В качестве примера найдены условия эллиптичности оператора $D_0 + D_1\Phi$, отвечающего симплектической матрице S. С помощью полученных результатов исследована фредгольмовость задачи управления для уравнения Шрёдингера.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00574А).

© Жуйков К.Н., Сипайло П.А., 2018

Литература

1. Лере Ж. Лагранжев анализ и квантовая механика / Ж. Лере. — М. : Мир, 1981.

2. Шубин М.А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория / М.А. Шубин. — М. : Добросвет, 2005. — 312 с.

3. Antonevich A.B. Functional Differential Equations: II. C^*-Applications Part 1: Equations with Continuous Coefficients / A.B. Antonevich, A.V. Lebedev. — Taylor & Francis, 1998. — 384 p.

4. de Gosson M. Symplectic Methods in Harmonic Analysis and in Mathematical Physics / M. de Gosson — Birkhäuser, Basel, 2011. — 338 p.

5. Nazaikinskii V.E. Elliptic Theory and Noncommutative Geometry. Nonlocal Elliptic Operators / V. E. Nazaikinskii, A. Yu. Savin, and B. Yu. Sternin — Birkhäuser, Basel, 2008. — 224 p.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С МАЛЫМИ ДИФФУЗИЕЙ И НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

А.В. Нестеров, А.В. Заборский (Москва,РЭУ им. Г.В. Плеханова; Обнинск, ИАТЭ)

andrenesterov@yandex.ru

Строится асимптотика решения (АР) задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного уравнения

$$\varepsilon^2(U_t + D(p)U_x) = L_p U + \varepsilon^{k_1} F(U, p) + \varepsilon^{k_2} B(p)U_{xx}, \tag{1}$$

$$U(x, 0, p) = \omega\left(x\varepsilon^{-1}, p\right) \tag{2}$$

$0 < \varepsilon << 1$, линейный оператор L_p имеет однократное $\lambda = 0$,$\forall\lambda \neq 0$ $Re\lambda < 0$; $k_1 = 1, 2; k_2 = 3, 4$; $|\omega^{(k)}(z, p)| \leqslant Ce^{-\sigma z^2}, \sigma > 0$.

АР задачи (1)-(2) имеет вид

$$U(x, t, p, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i (s_i(\zeta, t, p) + p_i(\xi, \tau, p)) + R = U_N + R \tag{3}$$

переменные ξ, τ, ζ выражаются через данные задачи. Получены задачи для определения всех членов разложения (3). При определенном выборе k_1, k_2 и условиях на функции$D(p), B(p)$, главный член АР описывается уравнением БКдФ.

© Заборский А.В., Нестеров А.В., 2018

Литература

1. Нестеров А. В. Асимптотическое разложение сингулярно возмущенного диференциально-операторного уравнения нелинейного уравнения с переменными коэффициентами. / А.В. Заборский , А.В. Нестеров // Математическое моделирование, —2016, —т.28, №1, —С. 117-131.

2. Васильева А. Б. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях / А.Б. Васильева , В.Ф. Бутузов — М. : Изд-во МГУ, 1978, —262 с.

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.В. Зайцева (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
zaitseva@cs.msu.ru

Рассмотрим в полуплоскости $(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times (0,+\infty)$ уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 u(x-h,t)}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

где a_j $(j=1,2)$, h — заданные вещественные числа, $a_1 > |a_2|$.

В настоящее время достаточно подробно исследованы задачи для дифференциально-разностных уравнений в ограниченных областях [1, 2]. В неограниченных областях изучены задачи для параболических [3] и эллиптических [4, 5] дифференциально-разностных уравнений.

В данной работе для уравнения (1), применив классическую операционную схему Гельфанда—Шилова, построено однопараметрическое семейство глобальных классических решений.

Литература

1. Skubachevskii A.L. Elliptic functional-differential equations and applications / A.L. Skubachevskii. — Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1997. — 294 p.

2. Скубачевский А.Л. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения / А.Л. Скубачевский // Успехи мат. наук. — 2016. — Т. 71, вып. 5(431). — С. 3–112.

3. Муравник А.Б. Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши / А.Б. Муравник // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — Т. 52. — С. 3–143.

© Зайцева Н.В., 2018

4. Муравник А.Б. Асимптотические свойства решений задачи Дирихле в полуплоскости для некоторых дифференциально-разностных эллиптических уравнений / А.Б. Муравник // Матем. заметки. — 2016. — Т. 100, вып. 4. — С. 566–576.

5. Муравник А.Б. Эллиптические задачи с нелокальным потенциалом, возникающие в моделях нелинейной оптики / А.Б. Муравник // Матем. заметки. — 2019. — Т. 105, вып. 5. — С. 747–762.

О ТЕОРЕМАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ И ПРИНЦИПЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ю.В. Засорин (Воронеж, ВГУ)
York-York-York-1960@yandex.ru

Рассматривается проблема о возможности перенесения условия регулярности решений на бесконечности одного уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами на другое таким образом, чтобы при этом сохранялась единственность решения.

Пусть $x, \xi \in R^n$, $P(D)$, $Q(D)$ — линейные дифференциальные операторы в частных производных в R^n с постоянными коэффициентами, и пусть $\mathcal{N}_P$ и $\mathcal{N}_Q$ — множества вещественных нулей их символов $P(i\xi)$ и $Q(i\xi)$ соответственно. Рассмотрим два однородных уравнения в шварцевском классе $S'(R^n)$ распределений умеренного роста или пространстве $Z'(R^n)$ аналитических функционалов:

$$P(D)u(x) = 0\,, \quad x \in R^n\,, \tag{1}$$

и

$$Q(D)u(x) = 0\,, \quad x \in R^n\,, \tag{2}$$

с одним и тем же условием регулярности решения на бесконечности:

$$\Psi(D)u(x) = o(|x|^{-\mu})\,, \quad x \to \infty\,, \quad (\mu \geqslant 0)\,, \tag{3}$$

где $\Psi(D)$ — некоторый дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами или псевдодифференциальный оператор, коммутирующий со сдвигами в R^n.

Главный результат сформулирован в следующем утверждении:

Теорема. *Пусть $\mathcal{N}_P \subset \mathcal{N}_Q$. Тогда из единственности решения в классе $S'(R^n)$ или $Z'(R^n)$ задачи* (2), (3) *следует и единственность решения задачи* (1), (3). *И, наоборот, из неединственности решения задачи* (1), (3) *следует неединственность решения задачи* (2), (3).

© Засорин Ю.В., 2018

МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ БЕЛОГО ШУМА[1]

М.Б. Зверева, М.И. Каменский, P. Raynaud de Fitte (Воронеж, ВГУ; Руан, UNR)
margz@rambler.ru, mikhailkamenski@mail.ru, prf@univ-rouen.fr

В настоящей работе мы исследуем начально-краевую задачу, описывающую колебания струны под воздействием белого шума. Одно из краевых условий предполагается нелинейным и возникает, если движение правого конца струны ограничено втулкой, представляющей собой отрезок $[-h, h]$, где $h > 0$. При этом мы допускаем случай, когда втулка сама может двигаться в перпендикулярном к оси Ox направлении так, что ее движение задается отображением $C(t) = [-h, h] + \xi(t)$. Математическая модель задачи имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,t)\dot{W}_t = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \\ u'_x(0,t) = \gamma u(0,t), \\ u(l,t) \in C(t) \\ -u'_x(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t)). \end{cases}$$

Здесь W_t —стандартный винеровский процесс, функция $B(x,t)$ характеризует дисперсию. Множество $N_{C(t)}(u(l,t))$ — нормальный конус к $C(t)$ в точке $u(l,t)$, определяемый как

$$N_{C(t)}(u(l,t)) = \{\xi \in R^1 : \xi \cdot (c - u(l,t)) \leqslant 0 \quad \forall c \in C(t)\}.$$

Мы предполагаем, что левый конец струны упруго закреплен с помощью пружины. Правый конец струны скользит (без учета трения) по вертикальной спице внутри втулки. Пока $|u(l,t)| < h$, правый конец струны внутри втулки остается свободным, что может быть выражено условием $u'_x(l,t) = 0$. Когда струна касается граничной точки втулки, то некоторое время должно быть выполнено условие $u(l,t) = h$, либо $u(l,t) = -h$ соответственно.

Доказаны теоремы существования и единственности решений для исследуемой модели.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-51-15003 НЦНИ-а).

© Зверева М.Б., Каменский М.И., Raynaud de Fitte P., 2018

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМАЦИЙ РАЗРЫВНОЙ СТРУНЫ[1]

М.Б. Зверева, С.А. Шабров, P. Raynaud de Fitte (Воронеж, ВГУ; Руан, UNR)

margz@rambler.ru, shaspoteha@mail.ru, prf@univ-rouen.fr

В настоящей работе изучается модель деформаций разрывной струны для случая, когда интенсивность внешней силы зависит от деформации. Математическая модель имеет вид

$$\begin{cases} -(pu'_\mu)(x) + (pu'_\mu)(0) + \int\limits_0^x u d[Q] = \int\limits_0^x f(s,u(s))d[\sigma](s), \\ (pu')_\mu(0) - \gamma_1 u(0) = 0, \\ (pu')_\mu(l) + \gamma_2 u(l) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Квадратными скобками мы подчеркиваем, что интеграл понимается по "расщепленной"мере (в смысле Ю.В. Покорного). Пусть 1) функции $p(x)$ и $Q(x)$ — $[\sigma]$-абсолютно непрерывны; 2) $\inf\limits_{(0,l)} p(x) > 0$; 3) функция $Q(x)$ не убывает на $[0;l]$; 4) функция $f(x,u)$ удовлетворяет условию Каратеодери.

Теорема 1. *Пусть, помимо условий 1)–4), выполнены следующие: i) функция $f(x,u)$ не убывает по u при каждом x, и $f(x,0) \geqslant 0$; ii) существует N пар чисел α_i, β_i, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \cdots < \alpha_n < \beta_n$, таких, что*

$$f(x, \beta_k u_0(x)) \int_0^\ell v_2(s)\, d[\sigma(s)] \leqslant \beta_k. \tag{2}$$

iii) для каждого k существует множество w_k положительной $[\sigma]$-меры такое, что

$$f(x, \alpha_k u_0(x)) \int_{w_k} v_1(s)\, d[\sigma(s)] \geqslant \alpha_k \quad (k = 1, \ldots, N) \tag{3}$$

Тогда, если неравенства (2) и (3) превращаются в строгие на множествах положительной $[\sigma]$-меры, то задача (1) имеет $2N-1$ нетривиальных решений $\{u_i(x)\}_{i=1}^{2N-1}$, удовлетворяющих неравенствам $u_i(x) \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, 2N-1)$, и $u_{2i-1}(x) \leqslant u_{2i+1}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-51-15003 НЦНИ-а).

© Зверева М.Б., Шабров С.А., Raynaud de Fitte P., 2018

VIBRATION OF PLATE ON THE BORDER OF FLUID FLOW

А.В. Звягин, Н.Э. Садыгова (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова)

zvyagin.aleksandr2012@yandex.ru, sadigova.nigar@gmail.com

Рассматриваемая проблема относится к задачам гидроупругости – о совместном движении упругих систем и жидкости. Эти задачи имеют практические приложения в машиностроении, в судостроении, в авиации, в транспортировке жидкостей на дальние расстояния, в строительстве космических аппаратов и во многих других областях. В данной работе рассматривается задача совместных колебаний пластины и движущейся жидкости. Пластина является частью границы потока жидкости. Считается, что жидкость является идеальной, несжимаемой, а течение – потенциальным. Система уравнений задачи состоит из уравнения Лапласа для потенциала скоростей жидкости, уравнения колебаний пластины и связывающих их граничных условий [1]. Потенциал жидкости ищется в форме действительной части аналитической функции – интеграла типа Коши. Учитывая граничные условия задачи, с помощью формул Сохоцкого – Племеля [2], получено интегро-дифференциальное уравнение колебаний пластины на границе жидкости. Решение полученного уравнения ищется в форме установившихся колебаний. Методом последовательных приближений удается найти частоты собственных колебаний системы пластина – жидкость» с любой заданной точностью. Разработанный метод позволяет исследовать зависимость частоты колебаний от основных параметров задачи – плотности и скорости жидкости, упругих характеристик пластин.

Литература

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды (том 1, том 2) / Л.И. Седов. — М. : Наука, 1970. — 568 с.

2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили // М. : Наука, 1966. 708 с.

© Звягин И.О., Садыгова Н.Э., 2018

О ВТОРОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ НЕГЛАДКОЙ ОБЛАСТИ НА ПЛОСКОСТИ

А.А. Злобина (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
zlomoonny@yandex.ru

В полосе $\mathbb{R} \times (0, T)$ рассматривается полуограниченная область Ω с негладкой боковой границей Σ, удовлетворяющей только условию Жевре (т. е. функция. задающая эту границу, удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\frac{1+\alpha}{2}$, $0 < \alpha < 1$).

Для параболического оператора

$$L \equiv \partial_t - A\partial_x^2,$$

где $A = \| a_{ij} \|_{i,j=1}^N$—матрица размерности $N \times N$ $(N \geqslant 1)$ с вещественными коэффициентами a_{ij}, рассматривается вторая начально-краевая задача

$$Lu = 0 \ \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = 0, \ x \geqslant g(0), \tag{2}$$

$$\partial_x u(g(t), t) = \psi(t), \ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

где $\psi \in \underset{0}{C}[0, T]$ имеет дробную производную порядка $1/2$, $\partial^{1/2}\psi \in \underset{0}{C}[0, T]$.

В работе, с помощью результатов из [1], устанавливается теорема единственности для решения поставленной задачи в классе $C_{x,t}^{1,0}(\overline{\Omega})$. Существование решения в таком классе для $\psi \in \underset{0}{C}[0, T]$ следует из [2]. В работе также исследуется характер гладкости решения u поставленной задачи.

Теорема 1. *Пусть u—решение задачи (1)—(2), $u \in C^{2,1}(\Omega) \cap \underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$. Тогда для любой $\psi \in \underset{0}{C}^{1/2}([0, T])$ это решение принадлежит пространству $\underset{0}{C}^{2,1}(\overline{\Omega})$ и верна оценка*

$$\| u; \Omega \|^{2,1} \leqslant C \| \psi; [0, T] \|^{1/2} .$$

.

Литература

1. Бадерко Е.А., Черепова М.Ф. О единственности решения первой начально-краевой задачи для параболических систем с постоянными коэффициентами в полуограниченной области на плоскости. /

© Злобина А.А., 2018

Е.А. Бадерко, М.Ф. Черепова // Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т. 55, № 5. — С. 673–682.

2. Тверитинов В.А. О второй краевой задаче для параболической системы с одной пространственной переменной. / В.А. Тверитинов // Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25, № 12. — С. 2178–2179.

ЗАДАЧА НАИЛУЧШЕГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕСОМ, ИМЕЮЩИМ ОСОБЕННОСТЬ НА ГРАНИЦЕ[1]

П.В. Зубков (Москва, НИУ «МЭИ»)
zubkovpv@mpei.ru

Пусть $G = \{z = x + iy \in C^1 : -\pi < x < \pi, y > 0\}$ — полуполоса на комплексной плоскости. В качестве весовой функции на G рассматривается степенная функция вида $\mu(y) = y^L$, где $-1 < L < 1$.

Символом $W^1_{2,L}(G)$ обозначим весовой класс периодических функций, определённых на G, для которых конечна величина

$$||f||_{W^1_{2,L}(G)} = \left(||y^{L/2}\nabla f||^2_{L_2(G)} + ||f||^2_{L_2(G)}\right)^{1/2}.$$

В [1] доказано, что всякая суммируемая с квадратом периодическая функция в весовом пространстве может быть представлена в виде ортогональной суммы аналитической и коаналитической составляющих $f(z) = f_a(z) + f_{ca}(z)$, поэтому коаналитическую составляющую естественно считать определенной характеристикой неаналитичности функции.

Определение. *Мерой неаналитичности или, что то же, коаналитическим уклонением функции $f(z) \in W^1_{2,L}(G)$ назовем число*

$$m(f, L) = ||f_{ca}||^2_{W^1_{2,L}(G)} = ||f - f_a||^2_{W^1_{2,L}(G)}.$$

Задача. *Среди всевозможных продолжений*

$$f(z) \in W^1_{2,L}(G), f(z)|_{y=0} = f_0(x) \in B_2^{(1-L)/2}(-\pi, \pi)$$

найти то, которое имеет наименьшее коаналитическое уклонение $m(f, L)$.

Имеет место

Теорема. *Для любой функции $f_0(x) \in B_2^{(1-L)/2}(-\pi, \pi)$ существует единственное решение задачи минимизации коаналитического уклонения при $-1 < L < 1$.*

[1] Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2020-0022).

© Зубков П.В., 2018

Доказательство как существования, так и единственности решения проводится в рамках идей теории монотонных операторов.

Литература

1. Зубков П.В. Об одной аналитической задаче в полуполосе / П.В. Зубков // Вестник МЭИ. — 2002. — № 6. — С. 52–61.

2. Зубков П.В. О задаче продолжения функции внутрь круга в пространствах с весом, имеющим особенность на границе / П.В. Зубков // Вестник МЭИ. — 2019. — № 4. — С. 143–146.

РЕШЕНИЕ МНОГОТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

С.П. Зубова, Е.В. Раецкая (Воронеж; ВГУ, ВГЛТУ)
spzubova@mail.ru; raetskaya@inbox.ru

Рассматривается система

$$\frac{\partial x}{\partial t} = B\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + Du, \tag{1}$$

где $t \in [0, T]$, $s \in [0, S]; x(t, s) \in R^n; u(t, s) \in R^m; B, D$ — матрицы соответствующих размеров.

Система (1) называется полностью управляемой, если существует такое управление $u(t, s)$, под воздействием которого система переводится из произвольного состояния $x(0, s)$ в произвольное состояние $x(T, s)$.

Устанавливаются свойства матричных коэффициентов, влекущие полную управляемость системы (1). Исследование ведется методом каскадной декомпозиции [1], заключающемся в поэтапном переходе от исходной системы к системам в подпространствах за конечное (равное p, $p \leqslant n$) число шагов.

Доказывается

Теорема. *Система* (1) *полностью управляема в том и только том случае, когда* D_p *сюръективен.*

В случае сюръективного D_p строится такое управления $u(t, s) \in C^j(T, S)$, под воздействием которого траектория системы $x(t, s)$ проходит через произвольно заданные точки (t_i, s) в произвольно заданные моменты времени t_i, $0 < t_1 < ... < t_i < ... < t_k < T$, $(i = \overline{1, k})$:

$$x(0, s) = a_0(s), x(t_i, s) = a_i(s), x(T, s) = a_T(s), \forall a_i(s) \in R^n. \tag{2}$$

Обратным ходом декомпозиции также строится, удовлетворяющая условиям (2), функция $x(t, s) \in C^{j+2}([0, T] \times [0, S])$.

© Зубова С.П., Раецкая Е.В., 2018

Литература

1. Zubova S.P. Construction of Controls Providing the Desired Output of the Linear Dynamic System /S.P. Zubova, E.V. Raetskaya// Automation and Remote Control. — 2018. —Vol. 79, — No. 5, — P. 774–791.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО- РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ СДВИГАМИ АРГУМЕНТОВ[1]

Е.П. Иванова (Москва, МАИ, РУДН)
elpaliv@yandex.ru

Рассматривается краевая задача для дифференциально - разностного уравнения:

$$A_R u = -\sum_{i,j=1}^{n} (R_{ij} u_{x_j})_{x_i} = f(x) \quad (x \in Q), \tag{1}$$

$$u(x) = 0 \quad (x \notin Q), \tag{2}$$

$Q-$ ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей, $f \in L_2(Q)$, разностные операторы $R_{ij} : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ вида:

$$R_{ij} u(x) = \sum_{h \in M_{ij}} a_{ijh}(u(x+h) + u(x-h)) \quad (a_{ijh} \in \mathbb{R}), \tag{3}$$

где $M_{ij} \subseteq M-$ конечное множество векторов с несоизмеримыми координатами. Решение u задачи (1)-(2) ищется в пространстве Соболева $\mathring{H}^1(Q)$ и определяется стандартным образом. В отличие от задач, изучаемых в [1], уравнение (1) содержит несоизмеримые сдвиги аргументов, что значительно осложняет исследование.

Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с целочисленными сдвигами исследовались в работах А.Л. Скубачевского [1]. В частности, им было показано, что в случае невырожденного разностного оператора краевая задача для дифференциально-разностного уравнения на ограниченной области эквивалентна краевой задаче для дифференциального уравнения на этой области с нелокальными краевыми условиями. Был предложен метод исследования задач для дифференциально-разностных уравнений с помощью нелокальных задач. Для дифференциально-разностных операторов с несоизмеримыми сдвигами этот метод в общем случае неприменим. Однако в случае, когда мнежество сдвигов разностного оператора порождает конечную орбиту границы заданной области, исходная краевая задача также может быть сведена к нелокальной.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №2̃0–01–00288).

© Иванова Е.П., 2018

Для этого строится специальное разбиение области на непересекающиеся подобласти, основанное не на аддитивной группе сдвигов, как в работах А.Л. Скубачевского, а на графе, ассоциированном с множеством сдвигов.

Это разбиение описано в работах [2],[3]. Оно применяется для исследования гладкости решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами и получений условий сильной эллиптичности (выполнения неравенства Гординга. Исследуется разрешимость краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргумента методом сведения их к нелокальным задачам. Этот метод применим и в случае, когда дифференциально-разностный оператор не является сильно эллиптическим. Сведение к нелокальной задаче позволяет строить аналитические решения краевых задач для дифференциально -разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументата.

Литература

1. Скубачевский А.Л. Краевые задачи для эллиптических дифференциально -разностных уравнений и их приложения / А.Л. Скубачевский // Успехи мат. наук. — 2016. — Т. 71, № 5. — С. 3–112.

2. Е. П. Иванова. О гладких решениях дифференциально - разностных с несоизмеримыми сдвигами аргументов /Е.П. Иванова // Матем. заметки. — 2019. — Т. 105, № 1. —С. 145–148.

3. Е. П. Иванова. Краевые задачи для дифференциально - разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов, сводящиеся к нелокальным задачам /Е.П. Иванова // СМФН. — 2016. — Т. 65, – С. 613–622.

УСТОЙЧИВЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЦЕПОЧКАХ С ДИФФУЗИОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ВНУТРЕННЕЙ СВЯЗЬЮ[1]

Л.И. Ивановский (Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова)
leon19unknown@gmail.com

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с диффузионным взаимодействием между соседними элементами и дополнительной внутренней связью

$$\dot{u}_j = N^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j - u_j^3, \qquad j = \overline{1, N}, \tag{1}$$

$$u_0 = u_1,\ u_{N+1} = u_N + \frac{\alpha}{N} u_k, \quad k \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant k < N, \tag{2}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10055).

© Ивановскмй Л.И., 2018

где u_j — гладкие функции при $t \geqslant 0$, а параметры $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$.

Система (1), (2) имеет однородное нулевое решение $u_j(t) \equiv 0$, для которого найдены условия устойчивости и выделены два способа потери устойчивости: дивергентный, когда среди всех возможных собственных значений найдется нулевое значение, или колебательный, соответствующий случаю выхода пары собственных значений с максимальной действительной частью на мнимую ось. Задача исследования состояла в изучении характера потери устойчивости нулевого решения системы (1), (2) и поиске асимптотических формул для режимов, ответвляющихся от нулевого решения при критических значениях параметров α и γ.

Полученные аналитические результаты проиллюстрированы численным решением системы (1), (2), при значениях параметров, близких к бифуркационным. Для системы (1), (2), при значениях параметра α, близких к критическому, была построена нормальная форма и на ее основе были определены условия появления около нуля неоднородных состояний равновесия и циклов.

ОБ АЛГОРИТМАХ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ[1]

В.А. Калитвин (Липецк, ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского)
kalitvin@gmail.com

Рассматривается уравнение с частными интегралами вида

$$x(t,s) = \int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_c^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma +$$

$$+ \int_a^t \int_c^s n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + f(t,s), (t,s) \in D, \qquad (1)$$

в пространстве $C(D)$ непрерывных на $D = [a,b] \times [c,d]$ функций. Здесь l, m, n, f — заданные непрерывные на $D \times T$, $D \times S$, $D \times T \times S$, D соответственно функции, $T = \{\tau : a \leqslant \tau \leqslant t \leqslant b\}$, $S = \{\sigma : c \leqslant \sigma \leqslant s \leqslant d\}$. Одним из способов численного решения интегральных уравнения является метод механических квадратур, основанный на замене интегралов конечными суммами с использованием квадратурных и кубатурной формул [2,3]. Однако применение этого метода для уравнения с частными интегралами вида (1)

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-41-480002).

© Калитвин В.А., 2018

требует обоснования сходимости, т.к. оператор, определяемый суммой первых трех слагаемых в правой части уравнения (1) не является компактным в пространстве непрерывных функций, даже если ядра l, m, n непрерывны [1]. Отрезки $[a, b]$ и $[c, d]$ разобъем на части точками $t_p = a + ph$ $(p = 0, 1, \ldots, P,\ a + Ph \leqslant b < (P + 1)h)$, $s_q = c + qg$ $(q = 0, 1, \ldots, Q,\ c + Qg \leqslant d < (Q + 1)g)$ соответственно. Полагая $t = t_p$, $s = s_q$ и применяя формулы

$$\int_a^{t_p} l(t_p, s_q, \tau)x(\tau, s_q)d\tau = h\sum_{i=0}^{p} \alpha_{pi}l_{pqi}x(t_i, s_q) + r^l_{pq},$$

$$\int_c^{s_q} m(t_p, s_q, \sigma)x(t_p, \sigma)d\sigma = g\sum_{j=0}^{q} \beta_{jq}m_{pqj}x(t_p, s_j) + r^m_{pq},$$

$$\int_a^{t_p}\int_c^{s_q} n(t_p, s_q, \tau, \sigma)x(\tau, \sigma)d\tau d\sigma = hg\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q} \gamma_{pqij}n_{pqij}x(t_i, s_j) + r^n_{pq},$$

где $l_{pqi} = l(t_p, s_q, t_i)$, $m_{pqj} = m(t_p, s_q, s_j)$, $n_{pqij} = n(t_p, s_q, t_i, s_j)$, а r^l_{pq}, r^m_{pq} и r^n_{pq} — остатки квадратурных и кубатурной формул, получим после отбрасывания остатков систему уравнений для приближенных значений x_{p0}, x_{0q}, x_{pq} функции x в точках (t_p, s_0), (t_0, s_q), (t_p, s_q) $(p = 1, \ldots, P; q = 1, \ldots, Q)$. Пусть $\delta_{p0}, \delta_{0q}, \delta_{pq}$ — погрешности в уравнениях с x_{p0}, x_{0q}, x_{pq}. Тогда $x_{00} = f(a, c)$, $x_{p0} = h\sum_{i=0}^{p} \alpha_{pi}l_{p0i}x_{i0} + f_{p0} + \delta_{p0}$, $x_{0q} = g\sum_{j=0}^{q} \beta_{jq}m_{0qj}x_{0j} + f_{0q} + \delta_{0q}$, $x_{pq} = h\sum_{i=0}^{p} \alpha_{pi}l_{pqi}x_{iq} + g\sum_{j=0}^{q} \beta_{jq}m_{pqj}x_{p_j} + +hg\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q} \gamma_{pqij}n_{pqij}x_{ij} + f_{pq} + \delta_{pq}$ $(p = 1, \ldots, P; q = 1, \ldots, Q)$, $f_{p0} = f(t_p, s_0)$, $f_{0q} = f(t_0, s_q)$, $f_{pq} = f(t_p, s_q)$.

Теорема. *Если r^l_{pq}, r^m_{pq} и r^n_{pq} стремятся к нулю равномерно относительно p, q при $h, g \to 0$; существуют такие числа A, B, C, что $|\alpha_{pi}| \leqslant A < \infty$, $|\beta_{jq}| \leqslant B < \infty$, $|\gamma_{pqij}| \leqslant C < \infty$; погрешности δ_{p0}, δ_{0q}, δ_{pq} стремятся к нулю равномерно относительно p, q при $h, g \to 0$, то при всех достаточно малых h и g приближенное решение x_{pq} может быть найдено из последней системы, причем для любого заданного $\epsilon > 0$ найдутся такие h_0 и g_0, что при $h < h_0$ и $g < g_0$ будут выполняться неравенства $|x_{pq} - x(t_p, s_q)| < \epsilon$ $(p = 0, 1, \ldots, P; q = 0, 1, \ldots, Q)$, причем $h\sum_{i=0}^{p} \alpha_{pi}l(t, s, t_i)x_{iq} + g\sum_{j=0}^{q} \beta_{jq}m(t, s, s_j)x_{pj} + hg\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q} \gamma_{pqij}n(t, s, t_i, s_j)x_{ij} + f(t, s)$ равномерно сходится на D к решению $x(t, s)$ при $h \to 0$, $g \to 0$.*

Другой алгоритм решения уравнения (1) будем называть комбинированным методом. В этом случае интегралы заменяются с помощью квадратурных и кубатурной формул, а решение находится методом итераций. С использованием данных алгоритмов были разработаны программы на языке программирования python и проведены численные эксперименты, показывающие достаточно хорошие результаты.

Литература

1. Калитвин А. С. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра- Фредгольма с частными интегралами / А.С. Калитвин, В.А. Калитвин. —Липецк : ЛГПУ, 2006. —177 с.

2. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. / М.А. Красносельский. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. — 456 с.

3. Даугавет И.К. Теория приближенных методов. Линейные уравнения / И.К. Даугавет. 2-е изд., перераб. и доп. —С.-Петербург : БХВ-Петербург, 2006. — 288 с.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ФУРЬЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ[1]

В.В. Калманович, Ю.А. Гладышев (Калуга, Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского)

v572264@yandex.ru

Рассмотрим многослойную среду из n слоев различных материалов. Ось x направим по потоку тепла $J(x)$, перпендикулярно слоям. Координаты границ слоев обозначим $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Номер (i) слоя (x_i, x_{i+1}) для соответствующих физических величин будем отмечать в верхнем индексе в скобках. Процесс переноса в каждом слое определен температурой $T^{(i)}(x,t)$ и потоком $J^{(i)} = -a_1^{(i)}(x)\frac{\partial T^{(i)}}{\partial x}$, которые удовлетворяют уравнениям

$$a_2^{(i)}(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1^{(i)}(x)\frac{\partial T^{(i)}}{\partial x}\right) - \frac{\partial T^{(i)}}{\partial t} = 0,\ i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

условиям непрерывного контакта на границах слоев

$$T^{(i)}(x_{i+1},t) = T^{(i+1)}(x_{i+1},t), \quad J^{(i)}(x_{i+1},t) = J^{(i+1)}(x_{i+1},t) \tag{2}$$

и краевым условиям третьего типа

$$\begin{gathered} T^{(1)}(x_1,t) - T_1 = -r^{(1)}J^{(1)}(x_1,t), \\ T_2 - T^{(n)}(x_{n+1},t) = -r^{(n+1)}J^{(n)}(x_{n+1},t), \end{gathered} \tag{3}$$

где $r^{(1)}$, $r^{(n+1)}$ — коэффициенты внешнего теплообмена, T_1, T_2 — внешние температуры. Коэффициенты $a_1^{(i)}(x)$, $a_2^{(i)}(x)$ учитывают

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19–03–00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18–41–400001).

© Калманович В.В., Гладышев Ю.А., 2018

возможную неоднородность слоёв и геометрию всей среды. Например, слои могут быть плоскими, иметь осевую или центральную симметрию.

Начальное распределение температуры задано

$$T^{(i)}(x,0) = g(x), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Функция $g(x)$, вообще говоря, может быть разрывной.

Ранее нами был предложен метод решения задачи тепломассопереноса в многослойной среде [1], [2], [3], [4], основанный на совместном использовании матричного метода и метода обобщенных степеней Берса [5], а также метода Фурье разделения переменных для нестационарной задачи с краевыми условиями первого рода. В настоящей работе показана возможность использования такого подхода для решения задачи (1) — (4) с краевыми условиями третьего типа.

Литература

1. Гладышев Ю.А. О возможности совместного применения матричного метода и аппарата обобщенных степеней Берса для математического моделирования процесса теплопереноса в объектах, обладающих цилиндрической симметрией /Ю.А. Гладышев, В.В. Калманович, Е.В. Серегина, М.А. Степович // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Ядерно-реакторные константы. — 2018. — № 3. — С. 158–167.

2. Gladyshev Y.A. On the possibility of applying the Bers apparatus to modeling the processes of heat and mass transfer caused by electrons in a planar multilayer medium / Y.A. Gladyshev, V.V. Kalmanovich, M.A. Stepovich // Journal of Surface Investigation: X-Ray, Synchrotron and Neutron Techniques. — 2017. — Vol. 11, No. 5. — Pp. 1096–1100.

3. Калманович В.В. О совместном применении матричного метода и аппарата обобщённых степеней Берса для математического моделирования процессов тепломассопереноса в полупроводниковых материалах электронной техники / В.В. Калманович, М.А. Степович // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем. — М. : ИППМ РАН. — 2018. — № 3. — С. 194–201.

4. Гладышев Ю.А. Приложение методов аппарата Берса к задачам процессов переноса в многослойной среде / Ю.А. Гладышев, В.В. Калманович, М.А. Степович // Вестник Калужского университета. — 2015. — № 3. — С. 5–10.

5. Bers L. On a class of functions defined by partial differential equations / L. Bers, A. Gelbart // Transactions of the American Mathematical Society. — 1944. — Vol. 56. — Pp. 67–93.

ЗАВИСИМОСТЬ ДИНАМИКИ ОДНОЙ МОДЕЛИ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ОТ ЗНАКА ДИФФУЗИИ[1]

А.А. Кащенко (Ярославль, ЯрГУ)
sa-ahr@yandex.ru

В докладе рассматривается математическая модель связанных осцилляторов

$$\begin{aligned} \dot{u}_0 + u_0 &= \lambda F(u_0(t-T)) + \gamma(u_1 - u_0), \\ \dot{u}_1 + u_1 &= \lambda F(u_1(t-T)) + \gamma(u_0 - u_1). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь u_i $(i = 0, 1)$ — действительные функции, F — нелинейная гладкая сохраняющая знак финитная функция (вне отрезка $[-p, p]$ она тождественно равна нулю, а при $0 < |u| < p$ выполняется условие $uF(u) > 0$), γ — ненулевая константа, λ — достаточно большой положительный параметр ($\lambda \gg 1$). Системы такого вида служат математическими моделями в прикладных задачах радиофизики, а также моделируют некоторые биологические процессы.

Мы изучаем поведение решений системы (1) при положительных и отрицательных значениях параметра связи γ. Для этого мы вводим в рассмотрение замкнутые ограниченные выпуклые множества начальных условий S^+, S^- (при $\gamma > 0$) и S^{+-} (при $-1/2 < \gamma < 0$), являющиеся подмножествами фазового пространства $C([-T, 0]; \mathbb{R}^2)$. Мы получаем, что оператор сдвига по траекториям преобразует данные множества в себя, поэтому у системы (1) существуют релаксационные периодические режимы с начальными условиями, принадлежащими данным множествам начальных условий. Построена асимптотика этих релаксационных циклов при $\lambda \to +\infty$.

В работе показано, что при положительных значениях коэффициента диффузии при всех достаточно больших значениях параметра λ у системы (1) существуют два релаксационных цикла с амплитудой $O(\lambda)$ и периодом $(1 + o(1)) \ln \lambda$ при $\lambda \to +\infty$, при $-1/2 < \gamma < 0$ существует релаксационный цикл с амплитудой $O(\lambda)$ и периодом $\frac{1+o(1)}{1+2\gamma} \ln \lambda$ при $\lambda \to +\infty$, а при $\gamma < -1/2$ существуют стремящиеся к бесконечности решения.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ № МК-1028.2020.1.

© Кащенко А.А., 2018

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В.А Киричек (Самара, Самарский университет)
Vitalya29@gmail.com

Рассмотрим в области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$ уравнение

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + cu = f \tag{1}$$

и поставим следующую задачу: найти в области Q_T решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 \tag{2}$$

и нелокальным условиям

$$u(0,t) + \int\limits_0^l K_1 u dx = 0, \quad u(l,t) + \int\limits_0^l K_2 u dx = 0. \tag{3}$$

Нелокальные условия являются интегральными условиями 2 рода с внеитегральными слагаемыми, которые представляет собой следы функции на границе. При исследовани подобных задач приемы, применяемые для обоснования разрешимости классических начально-краевых задач, оказываются неэффективными. Выбор метода исследования нелокальных задач зависит от вида интегральных условий [1]. На данный момент существуют наиболее эффективные методы исследования нелокальных задач: метод вспомогательных задач и метод сведения к нагруженному уравнению с однородными граничными условиями [2].В работе рассматривается второй из этих методов. Для этого введем оператор

$$v(x,t) = u(x,t) + \int\limits_0^l H(x,\xi)u(\xi,t)d\xi, \tag{4}$$

где $H(x,\xi) = \frac{1}{l}((l-x)K_1(\xi) + xK_2(\xi))$. В результате подстановки введенного оператора в исходной уравнение получим нагруженное уравнение относительно новой неизвестной функции, которая удовлетворяет однородным граничным условиям. Для исследования этой задачи применимы классические методы, с помощью которых в работе доказаны единственность и существование решения задачи.

Литература

1. Пулькина Л.С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений / — Самара : Издательство "Самарский университет 2012. — 194 с.

© Киричек В.А., 2018

2. Кожанов А. И. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений / А.И. Кожанов, Л.С. Пулькина // Дифференциальные уравнения. — 2006. — Т. 42, № 9. — С. 1166–1179.

О ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ЭВОЛЮЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

И.А. Колесникова (Москва, РУДН)
vipkolesnikov@mail.ru

Под задачей построения вариационного принципа для некоторой модели мы подразумеваем построение соответствующего функционала, для которого множество критических точек совпадает множество решений данной модели.

Задача построения функционала F_N по заданному оператору N называется классической обратной задачей вариационного исчисления. Совсем еще до недавнего времени никто практически не решал обратную задачу вариационного исчисления для дифференциально - разностных операторов в частных производных.

Только лишь для некоторого класса уравнений в частных производных, разработаны методы исследования вариационности задачи по структуре соответствующих операторов. Возникает теоретический и практический интерес в распространении полученных ранее результатов на дифференциально -разностные операторы.

Рассматривается дифференциально-разностное операторное уравнение $N(u) \equiv \sum\limits_{\lambda=-1}^{1} \Big\{ P_\lambda(t) u_t(t+\lambda\tau) + Q_\lambda(t, u(t+\lambda\tau)) \Big\} = 0, u \in D(N), t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$. Здесь $P_\lambda : U_1 \to V_1$ $(\lambda = -1, 0, 1)$ линейные операторы, зависящие от t. $Q_\lambda : [t_0-\tau, t_1+\tau] \times {U_1}^3 \to V_1$ вообще говоря нелинейный оператор; $N : D(N) \subseteq U \to V$; $U = C^1([t_0-\tau, t_1+\tau]; U_1)$, $V = C([t_0-\tau, t_1+\tau]; V_1)$, где U_1, V_1 действительные нормированные линейные пространства, $U_1 \subseteq V_1$.

Теорема. *Если $D_t^* = -D_t$ на множестве $D(N_u')$, тогда для существования прямой вариационной формулировки для оператора $N(u)$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий на множестве $D(N_u')$:*

$$P_{-\lambda} + P_\lambda^*|_{t \to t-\lambda\tau} = 0,$$

$$\frac{\partial P_\lambda^*}{\partial t}|_{t \to t-\lambda\tau} + (Q_{-\lambda})'_{u(t-\lambda\tau)} - ((Q_\lambda)'_{u(t+\lambda\tau)})^*|_{t \to t-\lambda\tau} = 0,$$

Литература

Филиппов В.М. Вариационные принципы для непотенциальных операторов /В.М. Филиппов— М.:УДН, 1985. — 106 с.

© Колесникова И.А., 2018

ПРОГИБЫ ПРОДОЛЬНО СЖАТОЙ БАЛКИ НА ДВОЙНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ В МОДЕЛИ ВЛАСОВА-ЛЕОНТЬЕВА

И.В. Колесникова (Воронеж, ВГУ)
kolinna@inbox.ru

В данной работе рассмотрена алгоритмизируемая методика приближенного вычисления и анализа закритических прогибов продольно сжатой уругой балки на двойном упругом основании в модифицированной модели Власова-Леонтьева. Изначально модель была предложена в виде ОДУ шестого порядка

$$-\frac{d^6w}{dx^6}+a_3\frac{d^4w}{dx^4}-a_2\frac{d^2w}{dx^2}+a_1\,w=p \tag{1}$$

при обобщенных краевых условиях Дирихле

$$\frac{d^4w}{dx^4}(0)=\frac{d^4w}{dx^4}(1)=\frac{d^2w}{dx^2}(0)=\frac{d^2w}{dx^2}(1)=w(1)=w(0)=0\,, \tag{2}$$

$w=w(x)$ — функция прогиба средней линии балки, a_1,a_2,a_3 — положительные механические константы, $p=p(x)$ — функциональный параметр внешней нагрузки, x — (промасшабированный) параметр длины средей линии балки. Уравнение (1) имеет единственное рещение в пространстве H^6 соболевских функций класса $W_2^6\,[0,1]$, удовлетворяющих краевым условиям (2), что объясняется положительной определенностью симметричного оператора $-\frac{d^6w}{dx^6}+a_3\frac{d^4w}{dx^4}-a_2\frac{d^2w}{dx^2}+a_1\,w$ (при выполнении краевых условий (2)).

Уравнение (1) является обобщением известного уравнения Фусса-Винклера-Циммермана $\frac{d^4w}{dx^4}-a_2\frac{d^2w}{dx^2}+a_1\,w=p$ из строительной механики. Рассмотренная ниже модификация предполагает наличие продольного сжатия балки, приводящего к смене знаков перед коэффициентами в модельном уравнении, что дает эффект 3-модового вырождения в нулевом состоянии:

$$\frac{d^6w}{dx^6}+a_3\frac{d^4w}{dx^4}+a_2\frac{d^2w}{dx^2}+a_1\,w-w^3=p\,. \tag{3}$$

Наличие нелинейного слагаемого позволяет «контролировать» рост амплитуд посткритических прогибов балки.

Основой примененной ниже методики исследования закритических прогибов служит вариационная версия метода Ляпунова-Шмидта, позволяющая не только вычислять прогибы, но и определять их устойчивость и проводить построение каустики (дискриминантного множества) в пространстве управляющих параметров

© Колесникова И.В., 2018

$a = (a_1, a_2, a_3)$. Центральная конструктивная идея — сведе́ние (редукция) задачи об изучении бифуркации изгибов к анализу ветвления критических точек полинома от шести переменных, являющегося главной частью ключевой функции

$$W(\xi, \delta, q) = \inf_{w:\ \langle w, e_k \rangle = \xi_k} V(w, a, q) = V\left(\sum_{i=1}^{3} \xi_i\, e_i + \Phi(\xi)\right), \qquad (4)$$

где

$$V(\xi, \delta, q) := \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{d^3 w}{dx^3}\right)^2 - a_3\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)^2 + a_2\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 - a_1 w^2\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} w^4 + p\, w\right), \qquad (5)$$

— потенциал уравнения (3), e_1, e_2, e_3 — моды прогиба в нуле при соответствующем значении векторного параметра $a = \overline{a}$, $\delta := a - \overline{a}$. Уравнение (3) является уравнением Эйлера для экстремалей функционала (5).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ОПТИЧЕСКОГО ДЕЛИТЕЛЯ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

А.И. Колпаков (Москва,ФГУП "ВНИИОФИ"),
А.М. Райцин (Москва, МТУСИ)
1978fox@mail.ru, arcadiyram@rambler.ru

В оптико-электронных информационно-измерительных системах (ИИС) с применением лазеров часто используются оптические делители (ОД) мощности излучения, позволяющие по небольшой величине отражённого от него излучения измерить мощность источника [1-2].

При проведения таких измерений необходимо знать коэффициент деления ОД

$$K_{\text{Д}} = \frac{K_{\text{пр}}}{K_{\text{отр}}},$$

где $K_{\text{пр}}$- коэффициент пропускания ОД, $K_{\text{отр}}$- коэффициент отражения ОД,

Для определения коэффициента деления в проходящем через ОД и отражённом от него лазерном пучке устанавливаются идентичные

© Колпаков А.И., Райцин А.М., 2018

средства измерений (СИ1 и СИ2) мощности, имеющие как недостаток различную чувствительность или коэффициенты преобразования $K_{\text{СИ1}}(P)$ и $K_{\text{СИ2}}(P)$ соответственно, зависящие от мощности излучения P и приводящие к погрешности оценки коэффициента деления. Эта оценка также зависит от случайных погрешностей измерений. Показано, что для уменьшения влияния упомянутых факторов целесообразно проводить дополнительную серию из n измерений, меняя местами СИ1 и СИ2, при этом наиболее вероятная оценка коэффициента деления определяется выражением

$$\hat{K}_{\text{Д}} = \sqrt{K_{\text{Д1}} K_{\text{Д2}}} = \sqrt{\frac{\hat{\tilde{U}}_1^*}{\hat{\tilde{U}}_2^*} \frac{\hat{\tilde{U}}_2}{\hat{\tilde{U}}_1}},$$

где $K_{\text{Д1}} = \frac{K_{\text{СИ1}}}{K_{\text{СИ2}}} K_{\text{Д}} = \frac{\hat{\tilde{U}}_1^*}{\hat{\tilde{U}}_2^*}$, $K_{\text{Д2}} = \frac{K_{\text{СИ2}}}{K_{\text{СИ1}}} K_{\text{Д}} = \frac{\hat{\tilde{U}}_2}{\hat{\tilde{U}}_1}$, $\hat{\tilde{U}}_1 = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} U_1(i)$;

$\hat{\tilde{U}}_2 = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} U_2(i)$; $\hat{\tilde{U}}_1^* = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{U}_1(i)$; $\hat{\tilde{U}}_2^* = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{U}_2(i)$;

$U_1(i)$, $U_2(i)$, $i = 1, 2, ...n$ - результаты измерений мощности СИ1 и СИ2; $\tilde{U}_1(i)$,$\tilde{U}_2(i)$, $i = 1, 2, 3...n$ - результаты измерений мощности СИ1 и СИ2 в дополнительной серии измерений.

В работе показано, что в случае неизменности коэффициентов преобразований от мощности излучения, оценка коэффициента деления от них не зависит. В противном случае определена оценка относительной погрешности коэффициента деления $\delta_{\text{нл}}$, обусловленная зависимостью коэффициентов преобразования от мощности излучения, выражаемая формулой

$$-2\theta^* \leqslant \delta_{\text{нл}} \leqslant 2\theta^*,$$

где $\theta^* = \max(\theta_{\text{СИ1}}, \theta_{\text{СИ2}})$, $\theta_{\text{СИ1}}, \theta_{\text{СИ2}}$ - относительные погрешности нелинейности СИ1 и СИ2.

Предложенная конструкция ОД, выполненная в виде клина, позволяет получить дополнительное отражение излучения от его задней грани и по измеренному сигналу определять постоянство коэффициента деления при использовании ОД в ИИС.

Определение коэффициента деления ОД в соответствии с приведённым алгоритмом измерений позволяет снизить влияние применяемых средств измерений на результат.

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования высокоточных измерительных технологий в области фотоники (ckp.vniiofi.ru), созданного на базе ФГУП "ВНИИОФИ".

Литература

1. Иванов В.С. Основы оптической радиометрии /Иванов В.С., Золотаревский Ю.М., Котюк А.Ф., Либерман А.А. и др. - М.: Физматлит, 2003. - 544 с.

2. Райцин А.М. Способ калибровки/поверки средств измерений мощности лазерного излучения /Райцин А.М., Улановский М.В. // Патент RU 2687303 C1, опубл. 13.05.2019, бюл. №14.

РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ И ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В.В. Корнев, А.П. Хромов (Саратов, СГУ)

KhromovAP@info.sgu.ru

Рассмотрим смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t),\ x,t \in [0,1]\times[0,\infty); \tag{1}$$

$$U_j(u(\cdot,t)) = 0,\ j=1,2; \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u'_t(x,0) = 0, \tag{3}$$

где $q(x), \varphi(x) \in L[0,1]$, $U_1(u(\cdot,t)) = u'_x(0,t) + u(0,t)$, $U_2(u(\cdot,t)) = u'_x(1,t)$.

Формальное решение по методу Фурье возьмем в виде [1]:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\varphi)\cos\rho t\,d\lambda, \tag{4}$$

где $R_\lambda = (L-\lambda E)^{-1}$ – резольвента оператора $Ly = -y''(x)+q(x)y(x)$, $U_1(y) = y'(0)+y(0) = 0$, $U_2(y) = y'(1) = 0$, E – единичный оператор, λ – спектральный параметр, $\lambda = \rho^2$, $Re\rho \geqslant 0$, γ_n – образ в λ – плоскости окружности $\tilde{\gamma_n}=\{\rho\,|\,|\rho - n\pi| = \delta\}$, $\delta > 0$ и достаточно мало, r достаточно велико и фиксировано, n_0 – такой номер, что при $n \geqslant n_0$ внутри γ_n находится одно собственное значение оператора L и все γ_n при $n \geqslant n_0$ находятся вне круга $|\lambda| = r$.

Следуя [2], [3], проводим формализм, базирующийся на использовании расходящихся рядов в понимании Эйлера (см. [4], [5]). Представим ряд (4) в виде

$$u(x,t) = u_{01}(x,t) + u_1(x,t), \tag{5}$$

где $u_{01}(x,t)$ есть ряд (4), в котором R_λ заменено на $R^0_\lambda = (L_0-\lambda E)^{-1}$ (L_0 есть L при $q(x) = 0$).

© Корнев В.В., Хромов А.П., 2018

Пусть $\varphi(x) \in C^2[0,1]$, $U_j(\varphi) = 0,\ j = 1,2$. Тогда (см. [6]) классическое решение задачи (1)–(3) при $q(x) = 0$ существует и имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)], \tag{6}$$

где $\tilde{\varphi}(x)$ определена при $x \in (-\infty, \infty)$ и $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ при $x \in [0,1]$. Поэтому в качестве суммы расходящегося ряда $u_{01}(x,t)$ будем брать $u_{01}(x,t)$ по формуле (6), где $\tilde{\varphi}(x)$ некоторая функция, определенная на $(-\infty,\infty)$ и $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ при $x \in [0,1]$. В нашем случае $\tilde{\varphi}(x)$ определяется следующим образом:

$$\tilde{\varphi}(1+x) = \varphi(1-x),\ x \in [0,1];$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(x-2) + 2\int_2^x e^{x-t}\tilde{\varphi}(t-2)\,dt,\ x > 2;$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(x+2) - 2\int_0^x e^{-(x-t)}\tilde{\varphi}(t+2)\,dt,\ x < 0.$$

Такое продолжение объясняется следующим фактом.

Теорема 1. *Если $\varphi(x) \in C^2[0,1]$ и $U_j(\varphi) = 0,\ j = 1,2$,то $\tilde{\varphi} \in C^2(-\infty,\infty)$ и формула (6) дает классическое решение задачи (1)–(3) при $q(x) = 0$.*

Правая часть (6) имеет смысл при любых $x,t \in (-\infty,\infty)\times[0,\infty)$. Обозначим ее $a_0(x,t)$. Так как $a_0(x,t)$ похожа на решение задачи (1)–(3) при $q(x) = 0$, то $u_1(x,t)$ похожа на решение задачи

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u_1(x,t) + f_0(x,t),\ x,t \in [0,1]\times[0,\infty); \tag{7}$$

$$U_j(u_1(\cdot,t)) = 0,\ j = 1,2; \tag{8}$$

$$u_1(x,0) = u'_{1_t}(x,0) = 0, \tag{9}$$

где $f_0(x,t) = -q(x)a_0(x,t)$.

Формальное решение по методу Фурье задачи (7)–(9) есть (см. [1])

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\int\limits_0^t R_\lambda(f_0(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\,d\lambda, \tag{10}$$

где $R_\lambda(f_0(\cdot,\tau))$ означает, что R_λ применяется к $f_0(x,\tau)$ по переменной x ($\tau-$ параметр). Тем самым мы совершили преобразование расходящегося ряда для $u_1(x,t)$ из (5) в расходящийся ряд (10).

Подобно (5) представим ряд (10) в виде

$$u_1(x,t) = u_{02}(x,t) + u_2(x,t), \tag{11}$$

где $u_{02}(x,t)$ есть ряд (10), в котором R_λ заменена на R_λ^0. Так как $\int\limits_0^{t-\tau} \cos\rho\eta\,d\eta = \frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}$, то ряд $u_{02}(x,t)$ преобразуется, опять как расходящийся ряд, к виду

$$u_{02}(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} Z_0(x,\eta;f_0(\cdot,\tau))\,d\eta,$$

где $Z_0(x,\eta;f_0(\cdot,\tau))$ есть ряд, аналогичный ряду $Z_0(x,t;\varphi)$ формального решения задачи (1)–(3) при $q(x)=0$. По формуле (6) суммой ряда $Z_0(x,\eta;f_0(\cdot,\tau))$ является

$$Z_0(x,\eta;f_0(\cdot,\tau)) = \frac{1}{2}\left[\tilde f_0(x+\eta,\tau) + \tilde f_0(x-\eta,\tau)\right].$$

В результате получаем следующую сумму ряда $u_{02}(x,t)$:

$$u_{02}(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} \left[\tilde f_0(x+\eta,\tau) + \tilde f_0(x-\eta,\tau)\right]\,d\eta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde f_0(\eta,\tau)\,d\eta. \tag{12}$$

Функцию $u_{02}(x,t)$, определенную при $x\in(-\infty,\infty)$, обозначим как $a_1(x,t)$.

Продолжим наш процесс. Ряд $u_2(x,t)$ есть

$$-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\int\limits_0^t \left(R_\lambda(f_0(\cdot,\tau)) - R_\lambda^0(f_0(\cdot,\tau))\right)\times$$

$$\times\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\,d\lambda, \tag{13}$$

а смешанная задача для $u_2(x,t)$ получается из задачи (7)–(9) заменой $u_1(x,t)$ на $u_2(x,t)$ и $f_0(x,t)$ на $f_1(x,t) = -q(x)a_1(x,t)$. Поэтому заменяем ряд (13) на формальное решение смешанной задачи для $u_2(x,t)$, т.е. на ряд

$$-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\int\limits_0^t R_\lambda(f_1(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\,d\lambda,$$

и т.д. В итоге приходим к ряду

$$A(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,t),$$

где

$$a_n(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_{n-1}(\eta,\tau)\,d\eta, \ \ n \geqslant 1,$$

$$f_n(x,t) = -q(x)a_n(x,t).$$

Лемма. *Пусть $\varphi(x) \in L[0,1]$, T – произвольное положительное число, $Q_T = [0,1] \times [0,T]$. Тогда существует константа $C_T > 0$, такая, что*

$$\| a_n(x,t) \|_{C[Q_T]} \leqslant M_1 \frac{(M_2 T)^{n-1}}{(n-1)!}, \ \ n = 1, 2, ...,$$

где $M_1 = \| a_1(x,t) \|_{C[Q_T]}$, $M_2 = C_T \| q(x) \|_1$, $\| \cdot \|_1$ – норма в $L[0,1]$. Кроме того, $M_1 \leqslant C \| \varphi \|_1$ и C не зависит от $\varphi(x)$.

Теорема 2. *Если $\varphi(x) \in L[0,1]$ то ряд $A(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T с экспоненциальной скоростью.*

Сумма ряда $A(x,t)$, как и в случае граничных условий $u(0,t) = u(1,t) = 0$ из [3], будет искомым обобщенным решением задачи (1)–(3).

Аналогичные результаты можно получить и в случае произвольных регулярных краевых условий (2).

Литература

1. Корнев В.В., Хромов А.П. Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения / ЖВМ и МФ,– 2019, – Т. 59, – № 2, – С. 107–121.

2. Хромов А.П. О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью / Известия Сарат. ун-та. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. — 2019. — Т. 19, Вып. 3. — С. 280–288.

3. Хромов А.П. Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения / Материалы . 20-й междунар Сарат. зим. шк. (28 янв.–1 февр. 2020 г.) Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2020. С. 433–439.

4. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. М. Л.: ГИТТЛ, 1949. 580 с.

5. Харди Г. Расходящиеся ряды. М: Из-во иностр. лит-ры, 1951. 504 с.

6. Хромов А.П. Поведение формального решения смешанной задачи для волнового уравнения / ЖВМ и МФ,– 2016, – Т. 56, – № 2, – С. 239–251

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА РАСПОЗНАВАНИЯ ЛИНИЙ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧ НА ФОТОГРАФИЯХ

Д.О. Коробков, И.Н. Смирнов (Москва, МГУ)
korob_ ok.exe@mail.ru

В современном мире большинство компаний, работающих в сфере энергоснабжения тратят большие ресурсы и деньги для распознавания и нахождения линии электропередач, для нахождения обвисших или оборванных линии и их ремонта. Но еще больше ресурсы тратятся для автоматизации этих действий, так как эти линии находятся не всегда в доступных местах, приходится использовать вертолеты для анализа подобного типа местностей. Для решения данной проблемы можно использовать беспилотные летающие аппараты и методы распознавания изображений для уменьшения затрат времени и расходов.

В ходе аэрофотосъёмки применяется такой способ наложения, когда один и тот же участок поверхности одновременно фигурирует на нескольких кадрах. При обработке снимки склеиваются на основании совпадения характерных признаков, становясь единым ортофотопланом.

Цель данной работы - разработка программного обеспечения, способного автоматически находить ЛЭП на ортофотоплане.

Рис. 1. Типичный фрагмент ортофотоплана

Рис. 2. Облако точек после обработки алгоритмом FAST-9

Глядя на рисунок 1 человек невооружённым глазом способен указать на опору ЛЭП. На первый взгляд создаётся впечатление, что стандартные алгоритмы поиска особых точек на изображении (такие как FAST-9 или FAST-12) способны по этому рисунку на выходе

© Коробков Д.О., Смирнов И.Н. , 2018

дать плотное облако точек в окрестности опоры ЛЭП, по которому можно будет вычислить положение опоры на рисунке. Кажется, что опора резко контрастирует с окружающей местностью.

Но на самом деле, применение подобных алгоритмов “в лоб” не даёт положительного результата (рисунок 2).

Это объясняется тем, что подобные алгоритмы применяются попиксельно и оперирую интенсивностью цвета в пикселях. Тени, отбрасываемые объектами на карте, контрастируют с окружением в большей степени, нежели опора ЛЭП.

Было принято решение подготовить изображение перед применением алгоритма FAST-9. Чем опора ЛЭП реально отличается от окружающей среды, так это соотношением интенсивности цветов в RGB каналах, интегральная же интенсивность не имеет значения. Грубо говоря, интегральная интенсивность всех цветовых каналов тени на травяной поверхности значительно превосходит интегральную интенсивность травяной поверхности, освещённой солнцем, но в плане соотношения интенсивности цветовых каналов RGB это всё ещё оттенок зелёного цвета (преобладание G компонента над R и B компонентами).

Необходимо выразить в виде единственного параметра характеристику соотношения цветов RGB каналов, для этого преобразуем 3 значения R, G и B $\in [0, 255]$ в угол на окружности, однозначно определяющий соотношение интенсивности в каналах (цвет).

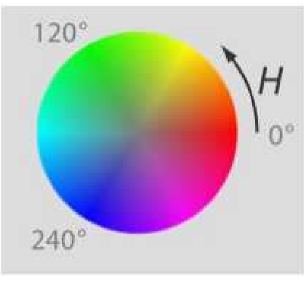

Рис. 3. Визуализация цветовой окружности

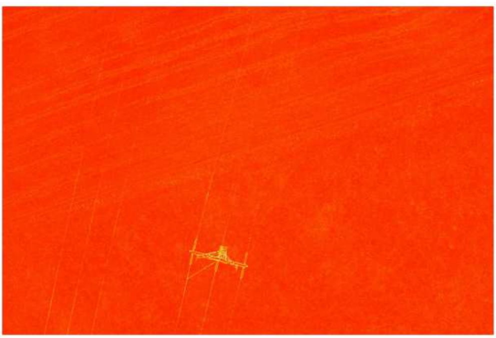

Рис. 4. Тепловая карта отклонений векторов цвета H от цветовой окрестности

Для этого нормируем R, G и B компоненты (разделим каждый на 255) и воспользуемся формулой:

$$H = 60 * \begin{cases} \frac{G-B}{Max-Min}, & \text{при } Max = R, G \geqslant B \\ \frac{G-B}{Max-Min} + 360, & \text{при } Max = R, G < B \\ \frac{B-R}{Max-Min} + 120, & \text{при } Max = G \\ \frac{R-G}{Max-Min} + 240, & \text{при } Max = B \end{cases} \qquad (1)$$

$$\text{при } Max = Max(R, G, B), Min = Min(R, G, B)$$

Существует вырожденный случай, когда Min = Max, это свидетельствует об оттенке серого. Доля таких значений приблизительно $\frac{1}{255^2} \approx 1.5 * 10^{-5}$. Для таких значений вычислить H невозможно, однако их доля настолько мала, что можно условно принять H = 0 (или любому другому значению по модулю 360) и эти вырожденные значения затеряются в естественном цветовом шуме. Получившиеся цвета нас, по большому счёту, не интересуют. Нас интересует величина отклонения цвета конкретного пикселя относительно его окрестности. На основании алгоритма FAST-9 построим тепловую карту отклонений цветов. Для удобства, минимальное отклонение (0°) будем рисовать красным пикселем, а максимальное (180°) - зелёным. Получим рисунок 4. По рисунку 4 визуально очевидно, что полученное облако зелёных точек плотно и точно повторяет контуры опоры ЛЭП.

Рис. 5. Исходный фрагмент с линиями ЛЭП

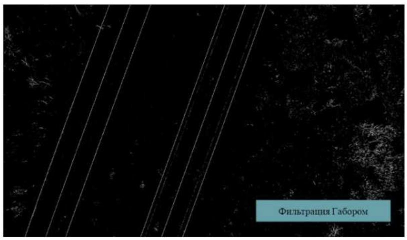

Рис. 6. Фрагмент с линиями ЛЭП после фильтрации Габором

Для повышения точности выявления опор ЛЭП можно при помощи фильтра Габора вычленить из снимка проводники ЛЭП и рассматривать только те особые точки, которые лежат в некоторой окрестности от проводников.

Если ваше целевое изображение состоит из периодической решетки в диагональном направлении, набор фильтров Габора дает сильный отклик, только если его направление совпадает с направлением решетки. В данной работе это свойство используется для выделения линий электропередач. БПЛА летит вдоль линий электропередач, следовательно примерное направление проводов известно. Используется чётная часть фильтра, так как оно выделяет линейные особенности лучше.

Программная реализация доступна по ссылке: https://github.com/KorobOKen/lep-seeker

Литература

1. Г. Г. Шевченко, Д.А. Гура, Р.Е.Глазков, Анализ программного обеспечения для обработки данных наземного лазерного сканирования // Современное промышленное и гражданское строительство, 2016, том 12, номер 3, 127–140.

2. А. В. Редько, А. Н. Молчанов, Ю.С. Белов, Использование алгоритмов определения ключевых точек изображения в задаче реконструкции трёхмерных сцен. // Электронный журнал: наука, техника и образование, С. 59—66.

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТЯХ ИРРЕГУЛЯРНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК

М.В. Коровина (Москва, МГУ)

betelgeuser@yandex.ru

Проблема посторения асимптотик решений линейных дифференциальных уравнений в окрестности иррегулярных особых точек была сформулирована Пуанкаре в работах [1], [2]. Пуанкаре рассматривал случай, когда иррегулярной особой точкой является бесконечность. Ранее эту задачу рассматривал Томэ в работе [3], где он показал, что в частном случае асимптотика решения этой задачи представима в виде выражения, которое содержит асимптотический, вообще говоря расходящийся степенной ряд. В работах Пуанкаре была сформулирована идея о том, что для сумирования этого асимптотического ряда может быть использовано интегральное преобразование, в частном случае это могло быть преобразование Лапласа. В данной работе эта идея развивается с помощью применения к этой задаче интегрального преобразования Лапласа-Бореля.

А именно рассматривается уравнение с голоморфными коэффициентами

$$\begin{gathered}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n} u\left(x\right)+a_{n-1}\left(x\right)\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} u\left(x\right)+\ldots\\ +a_{i}\left(x\right)\left(\frac{d}{dx}\right)^{i} u\left(x\right)+\ldots+a_{0}\left(x\right) u\left(x\right)=0\end{gathered} \tag{1}$$

© Коровина М.В., 2018

Целью нашего исследования является построение асимптотик решений уравнения (1) при $x \to \infty$. Бесконечность вообще говоря является иррегулярной особой точкой. В частном случае, когда она является регулярной особой точкой, задача построения асимптотик решений является решенной. Как известно асимптотики в окрестности регулярных особых точек являются конормальными (см. например [4]). Задача построения асимптотики решения в окрестности бесконечности путем замены $x = \frac{1}{r}$ сводится к задаче о постороении асимптотики решения в окрестности нуля для линейного дифференциальных уравнений с особенностью типа клюва 2-го порядка. А именно уравнение (1) можно переписать в виде

$$H\left(r, -r^2\frac{d}{dr}\right)u = 0 \tag{2}$$

Где

$$H\left(r, -r^2\frac{d}{dr}\right) = \left(-r^2\frac{d}{dr}\right)^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i\left(r\right)\left(-r^2\frac{d}{dr}\right)^i$$

Основной символ $H_0(p)$ оператора $\hat{H}$ равен $H_0(p) = H\left(0, p\right)$.

В статье [5] построены равномерные асимптотики для частного случая этой задачи, а именно для случая когда основной символ $H_0(p)$ оператора $\hat{H}$ имеет простые корни.

Далее этот частный случай для систем линейных дифференциальных уравнений рассматриваются например, в таких классических книгах как [6], [7], [8] и многих других работах.

В этих работах построены асимптотические разложения решений некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений, они были получены в виде произведений соответствующих экспонент на расходящиеся степенные ряды, а именно

$$u = \sum_{i=1}^{n} e^{\alpha_i/r} r^{\sigma_i} \sum_{k=0}^{\infty} a_i^k r^k \tag{3}$$

где α_i, $i = 1, ..., n$ — корни полинома $H_0\left(p\right)$ и σ_i и a_i^k — некоторые комплексные числа. Однако вопрос об интерпретации полученных расходящихся рядов был оставлен открытым, иными словами регулярный метод суммирования этих расходящихся рядов отсутствует. Будем называть такие асимптотики нефуксовыми асимптотиками.

Аппарат для интерпретации и построения асимптотических разложений вида (3), основанный на преобразовании Лапласа-Бореля, называется *ресургентным анализом*. Основная идея ресургентного анализа заключается в том, что формальные преобразования Бореля

$\tilde{u}_1(p)$, $\tilde{u}_2(p)$ ... представляют собой степенные ряды по двойственной переменной p, сходящиеся в окрестности точек $p = \lambda_j$. Обратное преобразование Бореля при этом дает регулярный способ суммирования рядов (3). Однако, при этом необходимо доказать бесконечную продолжимость функций $\tilde{u}_j(p)$, то есть продолжимость вдоль любого пути на римановой поверхности $\tilde{u}_j(p)$, не проходящего через некоторое дискретное множество, зависящее от функции. Доказательство этого факта, как правило, представляло большую трудность при применении ресургентного анализа к построению асимптотик решений дифференциальных уравнений. Для уравнений с вырождениями, доказательство бесконечной продолжимости получено в работах В. Шаталова и М. Коровиной [5], [9], [10]. Этот результат позволяет применять методы ресургентного анализа к построению асимптотик решений линейных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами.

Благодаря этому результату в работах [5], [10] были построены равномерные асимптотики решений для случая, когда корни старшего символа $H_0\left(p\right) = H\left(0, p\right)$ имеют первый порядок.

Для решения проблемы кратных корней в последние годы был создан метод повторного квантования [11]. Этот метод применяется в том случае, когда интегро-дифференциальное уравнение в двойственном пространстве не решается методом последовательных приближений и сводится, в свою очередь, к уравнению с вырождениями типа клюва

Мы рассмотрим случай, когда основной символ дифференциального оператора имеет один корень. Без ограничения общности будем считать, что этот корень находится в нуле. В этом случае коэффициенты уравнения (2) представимы в виде $a_i\left(r\right) = \sum_{j=1}^{\infty} a_i^j r^j$. Пусть первые $l_i - 1$ коэффициенты степенного ряда $\sum_{j=1}^{\infty} a_i^j r^j, i = 0, ..., n$ равны нулю, то есть левая часть уравнения (2) представима в виде суммы слагаемых вида $\left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^n$и $\left(\sum_{j=l_i}^{\infty} a_i^j r^j\right)\left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^i$, $i = 0, ..., n-1$. Выберем среди этих слагаемых те для которых число $h = l_i + i$ минимально и в соответствующих степенных рядах обозначим коэффициент при минимальной степени r через $\tilde{a}_i, i = 0, ..., k$.

$$\left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^n u + \tilde{a}_0 r^m \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^k u + \tilde{a}_1 r^{m+1} \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^{k-1} u +$$
$$\tilde{a}_2 r^{m+2} \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^{k-2} u + ... + \tilde{a}_k r^{m+k} u + \tag{4}$$
$$+ \sum_{j=1}^{h} r^j \sum_{i=h_j}^{n-1} a_j^i\left(r\right)\left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^i u + r^{h+1} \sum_{i=0}^{n-1} a^i\left(r\right)\left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^i u = 0$$

Здесь $\tilde{a}_0 \neq 0$, через $a_j^i(r)$ обозначены соответствующие голоморфные функции. Числа h_j и j выбраны так, что выполнялось неравенство $h_j + j > m + k$. Назовем $h = m + k$ индексом сингулярности уравнения (2). Будем называть члены вида $a_j^i r^j \left(r^2 \frac{d}{dr}\right)^i$при условии, что $j + i > h$ младшими членами уравнения (4). Разделим младшие члены на два типа. К первому типу отнесем члены, для которых $h \geqslant j$ и ко второму такие, что $h < j$. В работе [12] построены асимптотики решения уравнения (4) в случае, когда индекс сингулярности равен $k+1$, иными словами рассмотрен случай, когда $m = 1$. В этой работе мы обобщим это результат.

Пусть основной симпол дифференциального оператора имеет один корень и выполнено условие $n > m + k$ (если оно не выплнено, то асимптотика решения является конормальной), тогда верна

Теорема. *Пусть* $h_i + i - h > (m - i)\frac{n-k-m}{m}$, *тогда любая асимптотика решения уравнения (1) в пространстве функций экспоненциального роста в окрестности бесконечности имеет вид*

$$u(x) \approx$$

$$\sum_{j=1}^{n-k} \exp\left(\sum_{i=1}^{n-k-m} \alpha_i^j x^{\frac{i}{n-k}}\right) x^{\sigma_j} \sum_{l}^{\infty} A_l^j x^{-\frac{l}{n-k}} + \sum_{j=0}^{k_0} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^j x^{\alpha_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j x^{-i},$$

где α_{n-k-m}^j, $j = 1, ..., n-k$ *корни полинома* $p^{n-k} + \left(\frac{n-k}{n-k-m}\right)^{n-k} a_0$.

Пусть $h_i + i - h < (m - i)\frac{n-k-m}{m}$, *тогда любая асимптотика решения имеет вид*

$$u(x) \approx$$

$$\sum_{j=1}^{\nu} \exp\left(\sum_{l=1}^{n-k-m-\beta_1} \beta_l^j x^{\frac{j}{n-k-m-\beta_1+i}}\right) x^{o_j^1} \sum_{j=0}^{\infty} A_i^j x^{-\frac{j}{n-k-m-\beta_1+i}} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\beta_1+m-i} \exp\left(\sum_{t=1}^{\beta_1} \alpha_t^j x^{\frac{t}{m-i+\beta_1}}\right) x^{\sigma_j^2} \sum_{l=1}^{\infty} B_t^j x^{-\frac{l}{m-i+\beta_1}} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{k_0} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^j x^{\alpha_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j x^{-i}.$$

Здесь введены обозначения: $v = n - k + i - m - \beta_1$, $\beta_{n-k-m-\beta_1}^j$, $j = 1, ..., v$ *являются корнями полинома* $p^v + c$, *где* $c = b_1\left(\frac{v}{v-i}\right)^v$. $\alpha_{\beta_1}^j$, $j = 1, ..., m - i + \beta_1$ *— корни полинома* $a_0 + b_1\left(\frac{1}{d-1}\right)^{i-m-\beta_1} p^{-i+m+\beta_1}$, *где* $d = \frac{\beta_1}{m-i+\beta_1}$. *Через* A_i^j, B_i^j, σ_j^1, σ_j^2, b_i^j, k_0 *обозначены некоторые числа,* $\sum_{t=0}^{\infty} A_t^j x^t$, $\sum_{t=0}^{\infty} B_t^j x^t$ *— асимптотические ряды.*

Литература

1. Poincare H. Sur les integrales irregulieres des equations lineaires / H. Poincare // Acta math. — 1886, — v. 8. — pp. 295–344.

2. Пуанкаре А. Избранные труды. Том 3 / А. Пуанкаре. — М. : Наука, 1974. — 772 с.

3. Thome L. W. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen / L. W. Thome // J. Reine Angew.Math. — 1872. — Vol. 1872, Iss. 74. — pp. 193–213

4. Кондратьев А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений в конических областях / В. А. Кондратьев // Докл. АН СССР. — 1963. — Т. 153, № 1. — С. 27–29.

5. Коровина М. В. Дифференциальные уравнения с вырождением и ресургентный анализ / М.В. Коровина, В.Е. Шаталов // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46, № 9. — С. 1259–1277.

6. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции / Ф. Олвер. Пер. с англ. под ред. А. П. Прудникова. — М. : Наука. Гл. ред. физ. -мат. лит, 1990. — 528 с.

7. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Л. Чезари. — М. : Мир, 1964. — 477 с.

8. Коддингтон Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н.М Левинсон. — М. : Иностранная литература, 1958. — 475 с.

9. Коровина М. В. Существование ресургентного решения для уравнений с вырождением высших порядков / М. В. Коровина // Дифференциальные уравнения. — 2011. — Т. 47, № 3. — С. 349–357.

10. Коровина М. В. Асимптотики решений уравнений с высшими вырождениями / М. В. Коровина // Доклады Академии наук. — 2011. — Т. 437, № 3. — С. 302–304.

11. Коровина М. В. Метод повторного квантования и его применения к построению асимптотик решений уравнений с вырождениями / М. В. Коровина // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52, № 1. — С. 60–77.

12. Korovina M. V. Application of the repeated quantization method to the problem of making asymptotic solutions of equations with holomorphic coefficients / M. V. Korovina // International Journal of Open Information Technologies. — 2019. — Vol. 7, no. 9. — P. 14–22.

МЫСЛИ Ю. В. ПОКОРНОГО О ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ

И.П. Костенко (Краснодар)

Главный вопрос, который волновал Ю.В.: почему "математика, ... превращаясь в учебный предмет, ... превращается в источник неприязни, раздражения и ненависти... слишком для многих" [1, с. 3]?

Его ответ в общих чертах можно сформулировать так: потому что абстракции и формализмы, которыми наполнены пореформанные программы и учебники, разрушают связи содержания учебного предмета с интуицией учащихся, с их опытом и, тем самым, обессмысливают обучение, делают его непонимаемым.

Первые большие затруднения у детей появляются при изучении дробей. Почему при сложении дробей они складывают числители с числителями, а знаменатели со знаменателями? Ответы Ю.В. искал в глубинной интуиции, в противоречиях между привычными детям смыслами слов и новыми смыслами тех же слов, навязываемыми обучением.

Например: что происходит в голове ребёнка, когда после арифметики натуральных чисел, где 2 на 3 не делится, ему говорят, что теперь делится и получится новое *дробное число* (запись!) – две третьих? Но исконный смысл слова "делить" состоит в разделении, распределении некоторого множества предметов поровну (или примерно поровну) между группой лиц. Теперь же этот смысл в голове учащегося уничтожается и заменяется отсутствием какого-либо смысла, как в действии деления, так и в результате. А раз нет смысла в понятии дроби, то нет смысла и в правилах действий с дробями. Современные учебники заставляют детей тупо заучивать правила, смысл которых скрыт.

Ю.В. не довольствуется психологическим анализом восприятия учеников, он идёт вглубь истории математический мысли и открывает там подобные исконные смыслы понятий и подобные противоречия. История преодоления этих противоречий совокупной математической мыслью человечества подсказывает ему, – что надо менять в школьной методике, в частности, в методике введения дробей: *вернуть в школу величины, пропорции, отношения, именованные числа.* Вернуть то, что выбросили реформаторы в 1970-х гг., повышая абстрактность преподавания, которую они выдавали за мнимую "научность".

Дробь надо *приложить* к чему-то (к яблоку, кругу и др.), *поименовать* её, тогда она обретёт понятный для ребёнка наглядно-действенный смысл. И тогда абстрактная дробь (запись) , которая

© Костенко И.П., 2018

у реформаторов получается псевдоделением 2 на 3, приобретает для детей новый, понятный им смысл: – третья часть *яблока* берётся два раза и получается две третьих *части* яблока.

Второй важный вопрос, который глубоко рассматривает Ю.В., – нужно ли изучать высшую математику в школе?

Начинает он с вопроса: в чём разница между высшей и элементарной математикой? Обращение к истории развития математических знаний позволяет определить эту разницу. До XVI в. математические понятия были абстракциями, возникающими непосредственно из опыта (натурально-интуитивная математика, или элементарная в нашем понимании). С XVI в. математики стали обращаться не к ощущениям, а к разуму и создавать понятия более высокой степени абстракции (например, понятие производной имеет совсем иную качественную природу, чем понятие треугольника). Отличительная черта этих абстракций – они плохо согласуются с обиходной интуицией. Этого, по-видимому, и не понимали "авторы перестройки" школьных программ 1960–70-х гг.

Далее мысль Юлия Витальевича обращается к психологической науке, где он находит подтверждение принципиальной порочности идей и деяний реформаторов 1960-70-х гг.

Он замечает сходство генетической теории эволюции интеллекта с Колмогоровской К-классификацией различных областей математической деятельности: 1) изучение реального мира и практическое воздействие на него; 2) содержательная математика; 3) формализованная математика; 4) метаматематика [2, с. 232]. Эти четыре области соответствуют четырём уровням развития мышления человека (ребёнка), содержание и внешние признаки которых детально описали Пиаже и Выготский: 1) сенсомоторный (практический) интеллект; 2) интуитивное дологическое мышление; 3) ассоциативное мышление; 4) понятийное мышление [3].

Учитывая К-классификацию математических знаний, Ю.В. решает вопрос о разумном содержании школьной математики и устанавливает его противоречие с современными программами: "Ясно, что любому взрослому человеку, если он не собирается стать профессиональным математиком, следует в юности овладеть, прежде всего, материалом из первых двух областей и понятийной средой из формализованной математики, но только в той мере, в какой это будет помогать освоению первых двух областей. Реально же современная школьная математика направлена на изучение сразу третьего и четвёртого этажей . . . , считая именно их сутью всей математики" [1, с. 30].

Психологи и антропологи установили, что на каждой ступени генетической "лестницы форм души" (Ψ-лестница – в терминологии Ю.В.) "есть своя языковая среда, свои понятийные структуры", и на каждой ступени формирование соответствующего уровня мышления требует около 5 лет. Ю.В. замечает, что эти структуры соответствуют ступеням К-классификации, и делает вывод: “пока не освоен и не обжит очередной этаж Ψ-эволюции, …ничего из более высокого уровня Ψ-лестницы не может быть даже воспринято, не то что освоено”[1, с. 266].

В частности, нельзя в начальную школу (арифметика, 2-й уровень) вносить элементы алгебры (3-й уровень), ни, тем более, элементы теории множеств (4-й уровень К-классификации). Что касается производных и интегралов (формализованная математика), то в приложении к обучению 3-й уровень, по-видимому, надо разбить ещё на два уровня, в соответствии с уровнем абстрактности понятий, установленным выше. Эту мысль Ю.В. явно не высказал, но, мне кажется, он к ней шёл (см. цитату [1, с. 30]).

Ю.В. отмечает, что “наиболее согласована с Ψ-лестницей методика учебников Киселёва” [1, с. 81]. Не следует ли отсюда, что для оздоровления математического образования надо возвратить детям понятные учебники А.П. Киселёва вместе с прежним содержанием школьных программ?

Думал Ю.В. и над проблемами преподавания математики в вузе. Одна из его ценных идей – возвращение актуально бесконечно малых в преподавание анализа. Это восстановит разрушенную формализацией связь понятий с интуицией, а значит, повысит качество преподавания и усвоения учебного предмета.

Но кто сегодня может эту мысль понять, оценить и реализовать? Как, впрочем, и все остальные его мысли.

Литература

1. Покорный Ю.В. Унижение математикой? – Воронеж: ОАО “Центрально-Чернозёмное книжное издательство, 2006.

2. Колмогоров А.Н. Математика – наука и профессия. М.: Наука. 1988.

3. Выготский Л.С. Мышление и речь. 5-е изд. – М.: Лабиринт. 1999.

О ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ЯЗЫКА

А.А. Кретов, М.В. Половинкина, И.П. Половинкин, М.В. Ломец (Воронеж, ВГУ), (Воронеж, ВГУИТ), (Воронеж, ВГУ), (Воронеж, ВГУ)

polovinkin@yandex.ru

В работе [1] предпринята попытка уточнения закона Хипса, согласно которому количество различных (уникальных) слов (N), как

© Кретов А.А., Половинкина М.В., Половинкин И.П., Ломец М.В., 2018

функция от общего количества слов в книге (M), имеет порядок роста $\Theta\left(M^{\alpha}\right)$, где $\alpha \in (0,1)$. Рассматривая закон Хипса не как асимптотическую оценку, а как точную формулу с переменным показателем α, авторы переписывают его в виде

$$\alpha = \alpha(M) = \ln N / \ln M. \tag{1}$$

Мы видим в этом повод обратиться к аппарату, развитому в теории фракталов. Фрактальные (самоподобные) проявления в языке замечены многими авторами. В основном речь идет о констатации и вербальном описании самоподобия в языке. Принимая во внимание формулу (1), мы пытаемся согласовать ее с подходом к введению фрактальной размерности основателя теории фракталов Бенуа Мандельброта [2]. Выберем в пространстве R^d совокупность конгруэнтных «атомарных» множеств, имеющих топологическую размерность d. Это множество либо d-мерных шаров, либо d-мерных кубов. Для определенности будем считать, что это шары. Пусть фрактальный объект находится в пространстве R^d. Зафиксируем достаточно малый радиус $l > 0$. Покроем целиком фрактальный объект шарами радиуса l. Предположим, что для этого потребовалось как минимум $N = N(l)$ шаров. Число

$$\alpha_0 = -\lim_{l \to 0}(\ln N / \ln l) = \lim_{l \to 0}(\ln N / \ln(1/l)) \tag{2}$$

называется фрактальной размерностью рассматриваемого объекта. В форме (2) это определение не подойдет для характеристики текста, поскольку мы не можем устремлять к нулю размер атомарного множества, которым естественно считать словоупотребление. В обозначениях [1] положим

$$l = 1/M. \tag{3}$$

Можно интерпретировать равенство (3) следующим образом. Считая словоупотребление «атомарным кирпичиком» для рассматриваемого текста, мы определяем его размер, соизмеряя этот «кирпичик» с самим же текстом, поскольку его больше нечем измерить. Иными словами, за размер «атома» мы принимаем долю, занимаемую им в целом. Под мощностью же покрытия текста мы понимаем количество уникальных слов (лемм), словоупотребления которых составили весь текст. Далее по определению положим

$$\alpha_0 = -\lim_{l \to 0}(\ln N / \ln l) = \lim_{M \to +\infty}(\ln N / \ln M) = \lim_{M \to +\infty} \alpha(M), \tag{4}$$

а число α_0, определенное формулой (4), назовем фрактальной размерностью языка. Здесь под языком мы подразумеваем как национальный язык, так и язык писателя или язык отрасли знаний.

В формуле (4) предполагается, что объем текста M, понимаемый как количество словоупотреблений в нем, может принимать сколь угодно большие значения. Разумеется, это не так. Авторы [1] вводят понятие метакниги писателя как объединения всех текстов, им написанных. Если писатель достаточно плодовит, то такая концепция позволяет считать, что $M \to +\infty$, хотя при практическом вычислении все равно приходится ограничиваться имеющейся длиной метакниги для вычисления приближенного значения α_0. Авторы [1] утверждают и иллюстрируют примерами текстов трех разных авторов (Гарди, Мелвилла и Лоуренса), что α убывает с возрастанием M. Наши наблюдения за текстами Л.Н. Толстого этот вывод не опровергают. Допустим возможность отправляться от этого положения (α является убывающей функцией переменной M). Тогда значение α при максимальном значении M в заданном диапазоне и следует считать наилучшим приближением фрактальной размерности метакниги.

Литература

1. Bernhardsson S. The meta book and size-dependent properties of written language / S. Bernhardsson, L.E. Correa da Rocha, P. Minnhagen // New Journal of Physics. —2009. — № 11. — 123015 (15pp). — Online at http://www.njp.org/ doi:10.1088/1367-2630/11/12/123015.

2. Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature / B.B. Mandelbrot. — San Francisco : W.H. Freeman, 1982. — 468 pp.

О КОРРЕКТНОСТИ ОДНОЙ НЕСТАНДАРТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ ОСРЕДНЕНИИ ЗАДАЧ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА[1]

Н.Е. Крымов, (Москва, НИУ МЭИ)
KrymovNY@mpei.ru

При гомогенизации ряда задач сложного теплообмена возникают новые нестандартные краевые и начально-краевые задачи. Для применения подобных асимптотических приближений возникающие задачи требуют исследования на разрешимость, а так же исследования их качественных свойств.

В настоящей работе рассматривается нестандартная краевая задача

$$-\varepsilon \Delta u = f, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon, \tag{1}$$

$$\varepsilon D_n u - \frac{\varepsilon^2}{2} D_s^2 u + g(u) = g_\Gamma + f_\Gamma, \quad x \in \Gamma_\varepsilon \setminus \gamma_\varepsilon, \tag{2}$$

[1] Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2020-0022).

© Крымов Н.Е., 2018

$$\varepsilon \widehat{D}_n u + g(u) = \widehat{g}_\Gamma + \widehat{f}_\Gamma, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \qquad 3$$

возникающая при гомогенизации некоторых задач радиационно-кондуктивного теплообмена в периодических средах, запакованных в квадрат $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. Здесь $0 < \varepsilon$ – малый параметр; Ω_ε – это квадрат $I_\varepsilon \times I_\varepsilon = (\varepsilon/2, 1-\varepsilon/2) \times (\varepsilon/2, 1-\varepsilon/2)$, с границей Γ_ε, а $\gamma_\varepsilon = \{A_\varepsilon, B_\varepsilon, C_\varepsilon, D_\varepsilon\}$ – множество его угловых точек. Здесь $D_1 = \partial/\partial x_1$, $D_2 = \partial/\partial x_2$; через D_n и D_s обозначены производные по внешней нормали и касательной к Γ_ε; в угловых точках

$$\widehat{D}_n u|_{x=A_\varepsilon} = -\frac{1}{2}(D_1 u + D_2 u)|_{x=A_\varepsilon}, \widehat{D}_n u|_{x=B_\varepsilon} = \frac{1}{2}(-D_1 u + D_2 u)|_{x=B_\varepsilon},$$

$$\widehat{D}_n u|_{x=C_\varepsilon} = \frac{1}{2}(D_1 u + D_2 u)|_{x=C_\varepsilon}, \widehat{D}_n u|_{x=D_\varepsilon} = \frac{1}{2}(D_1 u - D_2 u)|_{x=D_\varepsilon}.$$

Установлены существование обобщенного решения, его единственность и регулярность. Выведены оценки решения, включая оценки производных $D_1^2 u$, $D_2^2 u$, $D_1 D_2 u$ в $L^2(\Omega_\varepsilon)$ и $D_s^2 u$ в $L^2(\Gamma_\varepsilon)$ с квалифицированным порядком по ε.

Литература

1. Amosov A.A. On a nonstandard boundary value problem arising in homogenization of complex heat transfer problem / A.A. Amosov, N.E. Krymov // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 244, No. 3, January, 2020

2. Амосов А.А. Полудискретные и асимптотические приближения для нестационарной задачи радиацционно-кондуктивного теплообмена в периодическое системе серых экранов / А.А. Амосов // Пробл.мат. анал. 57, 69-110, 2011

3. Amosov A. A. Asymptotic approximations for the stationary radiative-conductive heat transfer problem in the two-dimensional system of plates / A.A. Amosov // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 32, No. 3, 173–185 (2017).

4. Kremkova A.A. Semidiscrete and asymptotic approximations for the radiative-conductive heat transfer problem in the two-dimensional periodic structure [in Russian] / A.A. Kremkova // Vestnik MEI, (2012), No. 6, 151–161.

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИФФУЗИИ

С.Ф. Кузнецов, А.Д. Чернышов, О.Ю. Никифорова, В.В. Горяйнов (Воронеж, ВГУИТ)
sfs134@mail.ru

Для решения краевых задач механики, основанных на уравнении Пуассона, хорошо разработаны, как правило, лишь численные методы, при этом аналитические решения всречаются редко. Рассматриваемая ниже многомерная задача диффузии представляет собой краевую задачу с граничными условиями 1-го рода. Используем один из вариантов пространства быстрых разложений $Ch2(\Omega)$ [1, с. 16-17] для граничных условий 1 рода при нахождении точных решений задачи диффузии в ограниченной области с внутренним источником вещества, зависящим от координат точек. В качестве ограниченной области рассмотрим тело (Ω), имеющее форму параллелепипеда $(x, y, z) \in \Omega, 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b, 0 \leqslant z \leqslant c$.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + F(x, y, z) = 0.$$

Для представления заданных и неизвестной функций воспользуемся полиномами, имеющими вид:

$$P_1(x) = 1 - \frac{x}{a}, P_2(x) = \frac{x}{a}, P_1(y) = 1 - \frac{y}{b},$$
$$P_2(y) = \frac{y}{b}, P_1(z) = 1 - \frac{z}{c}, P_2(z) = \frac{z}{c}.$$

Ищем неизвестную функцию $U(x, y, z)$ в виде разложения:

$$U(x, y, z) = \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} A_{i,j}(z) \cdot P_j(y) + A_{i,3}(z) \cdot \sin \frac{\pi y}{b} + \right.$$

$$\left. + A_{i,4}(z) \cdot \sin \frac{2\pi y}{b} \right) \cdot P_i(x) + \left(\sum_{j=1}^{2} A_{3,j}(z) \cdot P_j(y) + \right.$$

$$\left. + A_{3,3}(z) \cdot \sin \frac{\pi y}{b} + A_{3,4}(z) \cdot \sin \frac{2\pi y}{b} \right) \cdot \sin \frac{\pi x}{a} +$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^{2} A_{4,j}(z) \cdot P_j(y) + A_{4,3}(z) \cdot \sin \frac{\pi y}{b} + \right.$$

© Чернышов А.Д., Кузнецов С.Ф., Никифорова О.Ю., Горяйнов В.В., 2018

$$+A_{4,4}(z)\cdot\sin\frac{2\pi y}{b}\Bigg)\cdot\sin\frac{2\pi x}{a}.$$

Внутренний источник $F(x,y,z)$ концентрации вещества запишем конечной суммой, имеющий вид, аналогичный виду функции $U(x,y,z)$. Коэффициенты $F_{i,j,k}$ считаем известными. Используя методику [1, с. 16-17], представим быстрыми разложениями граничные условия. Все коэффициенты в разложениях также считаем известными. Подставим $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ и выражение для $F(x,y,z)$ в уравнение диффузии. Исходя из того, что на ребрах и в вершинах параллелепипеда должны выполняться условия согласования, вытекающие из независимости величины концентрации $U(x,y,z)$ от направления подхода к этим ребрам, получим систему алгебраических уравнений, из которой найдём часть неизвестных коэффициентов $A_{i,j,k}$. Из выполнения уравнения диффузии, приравнивая коэффициенты слева и справа перед линейно независимыми функциями, записываются уравнения для нахождения оставшихся коэффициентов $A_{i,j,k}$. Полученное решение можно использовать в дальнейших теоретических исследованиях.

Литература

1. Чернышов А.Д. Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений /А.Д. Чернышов. // Журнал вычислит. математики и матем. физики. —2014. — Т. 54, № 1. — С. 13–24.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИНДЕКСЫ В МЕХАНИКЕ РАЗРУШЕНИЯ

О.В. Кунаковская (Воронеж, ВГУ), Д.М. Долгополов (Воронеж, ВГУ)

ovk@math.vsu.ru

Topological indices in fracture mechanics Kunakovskaya O.V., Dolgopolov D.M.

При моделировании трещин в твердом теле учитываются их расположение, конфигурация и размеры. Возникающие при этом геометрические и топологические плоские и пространственные задачи все еще недостаточно изучены.

Условия появления и роста трещин часто формулируются с помощью локальных интегральных инвариантов. Они представляют собой интегралы специальных дифференциальных форм по подмногообразиям в подходящем ∂-многообразии. Существование "зародышей" трещин объясняется как правило наличием поверхностных и

© Кунаковская О.В., Долгополов Д.М., 2018

внутренних дефектов структуры материала. Их активация, т.е. развитие в микротрещину, может происходить по разным причинам. В первую очередь исследователи отмечают в качестве причины внешнее воздействие.

Однако, опираясь на понимание топологической структуры полей [2], [3], можно указать глобальные топологические причины существования особенностей рассматриваемых полей. Этот подход позволяет регулярно рассмотреть известные случаи и дает дополнительные условия существования особенностей. Здесь в качестве топологической аналогии можно указать широко известную "теорему о еже".

Литература

1. Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. — Самара: Издательство "Самарский университет", 2004. — 562 с.

2. Кунаковская О.В. Глобальные и локальные топологические индексы особенностей пар сечений векторных расслоений над многообразием с краем / О.В. Кунаковская // Математические модели и операторные уравнения. – Т. 7. – Воронеж: ВГУ, 2011. – С. 89-148.

3. Кунаковская О.В. Глобальные и локальные краевые и обобщенные индексы особенностей пары полей и их приложения / О.В. Кунаковская // Анализ и особенности: Междунар. конф., посвященная 70-летию В.И. Арнольда. Москва, МИАН, 20-24 августа 2007 г. - Москва: МИАН, 2007. - С. 81-82.

К ВОПРОСУ О РАСШИРЕНИИ ГРУППЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЕРЕНОСОВ

В.А. Кыров (Горно-Алтайск, ГАГУ)

kyrovVA@yandex.ru

Всем хорошо известна группа параллельных переносов на плоскости R^2, которая задается уравнениями

$$x' = x + \alpha,\ y' = y + \beta, \tag{1}$$

причем α и β — произвольные постоянные.

Найдены все локальные дважды транзитивные расширения группа параллельных переносов (1) плоскости R^2 [1]:

$$x' = ax + c,\ y' = bx + y + d,$$

$$x' = ax + c,\ y' = by + d,$$

$$x' = ax + by + c,\ y' = ya^r + d,$$

© Кыров В.А., 2018

$$x' = ax + by + c,\ y' = -bx + ay + d,$$

$$x' = a^r x + by + y^2(a^r - a^2)/(r-2) + c,\ y' = ay + d,$$

$$x' = ax + by,\ y' = cx + dy,$$

где $r \neq 0$, a, b, c, d — произвольные постоянные.

Каждая из найденных локально дважды транзитивных групп Ли преобразований плоскости R^2 задает двуметрическую феноменологически симметричную геометрию двух множеств R^2 и R^4 ранга (3,2) [1].

Литература

1. Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Вложение аддитивной двуметрической феноменологически симметричной геометрии двух множеств ранга (2,2) в двуметрические феноменологически симметричные геометрии двух множеств ранга (3,2) / В.А. Кыров, Г.Г. Михайличенко // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. — 2018. — Т. 28, № 3. — С. 305–327.

СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

В.В. Лийко (Москва, РУДН)
vikalijko@gmail.com

Задачи Дирихле, Неймана, и общие краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений в ограниченной области рассматривались в работах [1]-[4]. В настоящей работе для эллиптических дифференциально-разностных уравнений рассматриваются смешанные задачи. Такие задачи возникают при исследовании упругих деформаций многослойных пластин с гофрированным наполнителем [5].

Пусть R — регулярный разностный оператор, действующий в цилиндре Q. Было показано, что для такого оператора наличие «минимальной гладкости» функций из некоторого подпространства H_1 и его прообраза $R^{-1}(H)$ означает, что функции из $R^{-1}(H_1)$ имеют нулевые следы на основаниях цилиндра, а функции из H_1 удовлетворяют нелокальным краевым условиям. Поэтому при рассмотрении смешанных краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений естественно задавать однородные условия Дирихле на основаниях цилиндра и краевые условия второго рода на боковой поверхности цилиндра. Такие задачи

[1] Работа выполнена при поддержке Программы РУДН «5-100» и при финансовой поддержке РФФИ (гранта № 20-01-00288).

© Лийко В.В., 2018

эквивалентны смешанным нелокальным краевым задачам для сильно эллиптических дифференциальных уравнений.

Установлена взаимосвязь смешанных задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений с нелокальными смешанными задачами для сильно эллиптических дифференциальных уравнений. Доказаны теоремы об однозначной разрешимости и о гладкости обобщенных решений таких задач.

Литература

1. Skubachevskii A.L. The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations / A.L. Skubachevskii // J. Differential Equations. —1986. — 63:3. — C. 332–361.

2. Skubachevskii A.L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. / A.L. Skubchevskii. — Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997. — 298 p.

3. Скубачевский А.Л., Цветков Е.Л. Вторая краевая задача для эллиптических дифференциально-разностных уравнений / А.Л. Скубачевский, Е.Л. Цветков // Дифференц. уравнения. — 1989. — 25:10. — С. 1766–1776.

4. Скубачевский А.Л., Цветков Е.Л. Общие краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений / А.Л. Скубачевский, Е.Л. Цветков // Тр. С.-Петербург. мат. о-ва. — 1998. — 5. — С. 223–288.

5. Onanov G.G., Tsvetkov E.L. On the mininum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory / G.G. Onanov, E.L. Tsvetkov // Russian J. Math. Phys. — 1995. — 3:4. — C. 491–500.

РАЗВИТИЕ ФИНАНСОВОЙ ГРАМОТНОСТИ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Н.И. Лобанова (Зеленокумск, ЦВР)

lobantchik@yandex.ru

Финансовая грамотность населения – актуальная проблема нашего общества. Для решения поставленной проблемы Министерство финансов и Всемирный банк с 2011 года реализуют проект «Содействие повышению уровня финансовой грамотности населения и развитию финансового образования в РФ»; разработана Национальная стратегия повышения финансовой грамотности на 2017-2023 годы. Как известно, переход общества к рыночной экономике требует не только создания соответствующих экономических, финансовых, управленческих структур, но и формирования у людей финансовой

© Лобанова Н.И., 2018

грамотности. Экономически грамотные люди – это люди способные самостоятельно принимать грамотные финансовые решения. Знания о принятии экономических решений можно почерпнуть из специальной литературы, а умение грамотно экономически мыслить достигается только при решении практических задач. В связи с этим одной из важнейших задач современной школы является воспитание детей, как личности с развитым экономическим мышлением. Экономическое образование опирается на экономическое мышление. Первичная характеристика экономического образа мышления – это калькуляция затрат и выгод, на которой основывается экономическое поведение. Люди преследуют свои собственные цели и интересы, приспосабливаются к поведению друг друга, хотя и соблюдают при этом особые правила игры. Права собственности и другие правила игры определяют, какой выбор необходимо соблюдать. Вопрос о грамотном распоряжении финансами является одним из самых важных вопросов в жизни современного человека. Но в большинстве своем выпускники стандартной общеобразовательной школы не могут рассчитывать, оценивать и прогнозировать различные риски. Особая роль в экономическом образовании школьника принадлежит именно математике. Так, именно решение практико-ориентированных финансовых задач позволит адаптировать теоретические основы школьного курса математики и лишенные практического смысла задачи к жизненным ситуациям, с которыми учащимся придется сталкиваться в будущем. В учебниках по математике можно найти задачи, в которых используются такие математические понятия, как себестоимость, прибыль, рентабельность, доход, объем производства продукции (работ и услуг). Но школьники часто видят в задаче только повод для математических действий. Ее экономическое содержание проходит мимо внимания. Перед решением таких задач необходимо уяснить встречающиеся экономические понятия и то, как они связаны между собой, т.е. понять экономическую проблему [1].

Литература

1. Пучков Н.П. Математика в экономике / Н.П. Пучков. — Тамбов : ТГТУ, 2002. — 80 с.

О ГОЛОМОРФНО ОДНОРОДНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ СУБМАКСИМАЛЬНОГО ТИПА[1]

А.В. Лобода (Воронеж, ВГТУ)
lobvgasu@yandex.ru

Алгебра голоморфных симметрий вещественной сферы комплексного пространства $\mathbb{C}^n (n \geqslant 3)$ имеет, как известно, размерность n^2+2n. Аналогичные алгебры для однородных несферических строго псевдо-выпуклых (СПВ) гиперповерхностей имеют не более чем *субмаксимальную* размерность $(n-1)^2+3$ (см. [1]).

Примерами однородных СПВ-гиперповерхностей субмаксимального типа (имеющих алгебру симметрий субмаксимальной размерности) являются при любых $n \geqslant 3$ поверхности

$$Im\, z_n = \sum_{k=1}^{n-2} |z_k|^2 + \varepsilon \ln(1+\varepsilon|z_{n-1}|^2),\ \varepsilon = \pm 1. \tag{1}$$

На основе использования техники нормальных форм [2] в работе [3] получено полное описание семейства таких гиперповерхностей в пространстве $\mathbb{C}^3$ (включающее, в частности, поверхности (1)).

Теорема 1. *Любая голоморфно однородная СПВ-гиперповерхность субмаксимального типа в пространстве $\mathbb{C}^4$ голоморфно эквивалентна одной из двух поверхностей (1).*

В связи с теоремой 1 является естественной гипотеза об отсутствии отличных от (1) однородных СПВ-гиперповерхностей субмаксимального типа в пространствах $\mathbb{C}^n$ при $n \geqslant 4$.

Литература

1. Kruglikov, B. Submaximally Symmetric CR-Structures / B. Kruglikov // J. Geom. Anal. — 2016. — № 26. — P. 3090—3097.

2. Chern S.S. Real hypersurfaces in complex manifolds /S.S. Chern, J.K. Moser // Acta Math. — 1974. — V. 133. — P. 219–271.

3. Лобода А.В. Однородные строго псевдо-выпуклые гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии /А.В. Лобода // Мат. сб. — 2001. — Т. 192, № 12. — С. 3–24.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00497).

© Лобода А.В. , 2018

ОБОБЩЕННАЯ ФОРМУЛА ДАЛАМБЕРА ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ СУЩЕСТВЕННО НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА

И.С. Ломов (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
lomov@cs.msu.ru

Исследуется смешанная задача для телеграфного уравнения с регулярными, но не усиленно регулярными краевыми краевыми условиями. Методом А.П. Хромова построен ряд — обобщенная формула Даламбера. При минимальных условиях на данные задачи этот ряд дает ее обобщенное решение. При выполнении критерия существования (единственного) классического решения, этот ряд дает и классическое решение. Рассмотрен случай суммируемого потенциала уравнения. В случае нулевого потенциала полученный ряд переходит в обычную формулу Даламбера.

Рассматривается задача:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad (x,t) \in Q = (0,1) \times (0,\infty), \quad (1)$$

$$u(0,t) = 0, \quad u'_x(0,t) = u'_x(1,t), \quad t \geqslant 0, \quad (2)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \ u'_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \quad (3)$$

функции $q(x), \varphi(x) \in L(0,1)$ — комплекснозначные суммируемые функции.

Требуется решить две задачи:

1) показать, что при перечисленных выше условиях на данные задачи классическое решение переходит в обобщенное решение задачи;

2) найти точные условия существования и единственности классического решения задачи (1) — (3).

Классическим (или, точнее, почти классическим) решением задачи (1) — (3) назовем функцию $u(x,t)$, непрерывную и непрерывно дифференцируемую по x и t в полуполосе $\overline{Q} = [0,1] \times [0,\infty)$, причем функции $u'_x(x,t), u'_t(x,t)$ абсолютно непрерывны по $x \in [0,1]$ и $t \in [0,\infty)$ соответственно, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду в Q и условиям (2), (3).

Необходимыми условиями существования классического решения задачи (1) — (3) являются следующие условия на функцию $\varphi(x)$: $\varphi(x), \varphi'(x)$ абсолютно непрерывны на $[0,1]$, $\varphi''(x) \in L(0,1)$ и $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$.

© Ломов И.С., 2018

Особенностью рассматриваемой задачи является то, что соответствующая спектральная задача является существенно несамосопряженной — первое собственное значение задачи простое, остальные — двукратные. Каждому из двукратных собственных значений отвечает одна собственная и одна присоединенная функции, т. е. общее число присоединенных функций является бесконечным. Это вносит дополнительные сложности при исследовании задачи. Рассматриваемые краевые условия носят название условий Самарского—Ионкина.

Для исследования задачи применяем метод А.П. Хромова [1 — 3], модифицировавшего метод Фурье путем использования резольвентного метода, привлечения идеи А.Н. Крылова [4] об ускорении сходимости рядов Фурье, связанных с дифференциальными операторами и применившего идею Л. Эйлера о работе с расходящимися рядами.

Ранее А.П Хромовым и его учениками этот метод был применен к исследованию первой краевой задачи [1 — 3, 5, 6], при этом в работах [2, 3, 6] получен критерий существования классического решения задачи. Получены и условия существования обобщенного решения. В [5] исследована периодическая задача. В [3] впервые применен подход Эйлера использования расходящихся рядов.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. *Для того чтобы существовало единственное классическое решение $u(x,t)$ задачи (1) — (3), необходимо и достаточно, чтобы функции $\varphi(x), \varphi'(x)$ были абсолютно непрерывны на отрезке $[0,1]$ и $\varphi(0)=0,\ \varphi'(0)=\varphi'(1)$. Это решение дается формулой*

$$u(x,t) = A(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,t), \tag{4}$$

где

$$a_0(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t)+\tilde{\varphi}(x-t)],$$

$$a_n(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_{n-1}(\eta,\tau)\, d\eta, \quad n=1,2,\ldots,$$

функция $\tilde{\varphi}(x)=\varphi(x), x\in[0,1]$ и далее продолжена на всю прямую, функция $\tilde{f}_n(\eta,\tau) = f_n(\eta,\tau) \equiv -q(\eta)a_n(\eta,\tau)$ при $\eta\in[0,1]$ и далее продолжена по η на всю прямую, $n=0,1,2,\ldots$.

Теорема 2. *Если $\varphi \in L(0,1)$, то ряд (4) сходится абсолютно и равномерно (с экспоненциальной скоростью) в $Q_T, \forall T>0$.*

Обозначим через $\|\cdot\|_1$ норму в пространстве $L(0,1)$.

Теорема 3. *Если $\varphi\in L(0,1)$, а φ_h удовлетворяет условиям теоремы 1 и $\|\varphi_h-\varphi\|_1 \to 0$ при $h\to 0$, то соответствующие φ_h классические решения $u_h(x,t)$ задачи (1) — (3) сходятся по* *норме $L(Q_T)$ к $A(x,t)$, т. е. в этом случае $u(x,t) = A(x,t)$, ряд (4), является обобщенным решением задачи (1) — (3).*

Автор выражает искреннюю признательность А.П. Хромову за полезные обсуждения результатов работы.

Литература

1. Хромов А.П. О сходимости формального решения по методу Фурье волнового уравнения с суммируемым потенциалом / А.П. Хромов // ЖВМ и МФ. — 2016. — Т. 56, № 10. — С. 1795–1809.

2. Хромов А.П. Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала / А.П. Хромов // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 5. — С. 717–731.

3. Хромов А.П. О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью / А.П. Хромов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. серия. Серия Математика. Механика. Информатика. — 2019. — Т. 19, вып. 3. — С. 280–288.

4. Крылов А.Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах / А.Н. Крылов. — М. : ГИТТЛ, 1950. — 368 с.

5. Бурлуцкая М.Ш. Резольвентный подход для волнового уравнения / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // ЖВМ и МФ. — 2015. — Т. 55, № 2. — С. 229–241.

6. Корнев В.В. Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения / В.В. Корнев, А.П. Хромов // ЖВМ и МФ. — 2019. — Т. 59, № 2. — С. 286–300.

О МЕТОДЕ КОРРЕКТИРОВКИ ПРОБНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В КРИВОЛИНЕЙНОЙ ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ

Ф.Е. Ломовцев (Минск, БГУ)

lomovcev@bsu.by

В криволинейной первой четверти $\widetilde{G}_\infty = \{]\sigma(t), \infty[\times]\kappa(x), \infty[,\ t > 0,\ x > 0\}$ ищутся локальные классические решения уравнения

$$(\partial_t - a_2\partial_x)(\partial_t + a_1\partial_x)u(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in \widetilde{G}_\infty, \qquad (1)$$

где $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ и $t = \kappa(x)$, $x = \sigma(t)$ – заданные функции криволинейных осей координат первой четверти плоскости. Заменой переменных x и t всегда можно добиться того, чтобы $\kappa(0) = \sigma(0) = 0$.

© Ломовцев Ф.Е., 2018

Четверть $\widetilde{G}_\infty$ может содержать точки с отрицательными значениями x или t. Корректировка локальных пробных решений осуществлена с помощью корректирующей задачи Гурса и функций

$$\chi_i(x) = x + (-1)^i a_i \kappa(x),\ \ \sigma_i(t) = a_i t + (-1)^i \sigma(t),\ \ i = 1,\, 2,$$

в которых $\chi_i(0) = \sigma_i(0) = 0$, $i = 1, 2$. Пусть $C^k(\Omega)$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве Ω. Если криволинейные оси $\kappa(x), \sigma(t) \in C^2[0, +\infty[$ и производные

$$-1/a_2 < \kappa'(x) < 1/a_1,\, x \geqslant 0,\ -a_2 < \sigma'(t) < a_1,\, t \geqslant 0,\, i = 1, 2, \quad (2)$$

то существуют их дважды непрерывно дифференцируемые обратные функции χ_i^{-1}, σ_i^{-1}, $i = 1, 2$. Если оси $\kappa(x) < x/a_1$, $x > 0$, $\sigma(x) < a_1 t$, $t > 0$, то характеристика $x = a_1 t$ делит криволинейную первую четверть $\widetilde{G}_\infty$ на два непустые множества $\widetilde{G}_- = \{(x,t) \in \widetilde{G}_\infty : x > a_1 t > a_1\kappa(x),\, x > 0\}$ и $\widetilde{G}_+ = \{(x,t) \in \widetilde{G}_\infty : \sigma(t) \leqslant x \leqslant a_1 t,\, t \geqslant 0\}$.

Теорема 1. *Пусть* $\kappa(x) < x/a_1$, $x > 0$, $\sigma(t) < a_1 t$, $t > 0$, $\kappa(x), \sigma(t) \in C^2[0, \infty[$, *верны свойства (2) и* $\exists \varepsilon_0 > 0$, *что* $\kappa(x) = 0\ \ \forall\, x \in [0, \varepsilon_0]$, $\sigma(t) = 0\ \ \forall\, t \in [0, \varepsilon_0]$. *Тогда для каждой точки* $(x,t) \in \widetilde{G}_\infty$ *уравнение (1) имеет локальные классические решения:*

$$F_1^{(0)}(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2}\Bigg[\int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{a_1 t - x - a_2\tau + (a_1+a_2)t_0}^{x + a_2(t-\tau)} f(s,\tau)\,ds\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t_1(x)+t_0}^{t} \int\limits_{x - a_1(t-\tau)}^{a_1 t - x - a_2\tau + (a_1+a_2)t_0} f(s,\tau)\,ds\,d\tau\Bigg],\ t_1(x) = \frac{2(a_1 t - x)}{a_1 + a_2}, \quad (3)$$

$$F_2^{(0)}(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2}\Bigg[\int\limits_{t_0}^{t_2(x)+t_0} \int\limits_{a_2(t_2(x)-\tau)+(a_1+a_2)t_0}^{x + a_2(t-\tau)} f(s,\tau)\,ds\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t_2(x)+t_0}^{t} \int\limits_{x - a_1(t-\tau)}^{x + a_2(t-\tau)} f(s,\tau)\,ds\,d\tau\Bigg],\ t_2(x) = t - \frac{x}{a_1}\,,\ (x,t) \in \widetilde{G}_+, \quad (4)$$

где параметр t_0 *принимает значения* $t_0 \in [\max\limits_{x_2 \leqslant s \leqslant x_3} \kappa(s),\ t^*[$ *для* $\forall\, x > 0$ *и* $t_0 \in]\kappa(x_3),\ t^*]$ *для* $\forall\, x \leqslant 0$ *при* $x_2 = \chi_2^{-1}\big(\sigma_2\big(\sigma_1^{-1}(a_1 t - x)\big)\big)$, $x_3 = \chi_2^{-1}(x + a_2 t)$, $t^* = (x + a_2 t)/(a_1 + a_2)$.

Теорема 2. *В теореме 1 функции (3) и (4) являются классическими решениями уравнения (1) в* $\widetilde{G}_+$ *при необходимой гладкости*

$$f \in C(\widetilde{G}_\infty), \quad \int\limits_{t_0}^{t} f\big(x + a_2(t-\tau), \tau\big)\,d\tau \in C^1(\widetilde{G}_+)$$

и соответственно ещё одного из необходимых условий гладкости

$$-\int\limits_{t_0}^{t_1(x)+t_0} f\big(a_1t-x-a_2\tau+(a_1+a_2)t_0,\tau\big)d\tau+$$

$$+\int\limits_{t_1(x)+t_0}^{t} f\big(x-a_1(t-\tau),\tau\big)d\tau\in C^1(\widetilde{G}_+),$$

$$-\frac{a_2}{a_1}\int\limits_{t_0}^{t_2(x)+t_0} f\big(a_2(t_2(x)-\tau)+(a_1+a_2)t_0,\tau\big)d\tau+$$

$$+\int\limits_{t_2(x)+t_0}^{t} f\big(x-a_1(t-\tau),\tau\big)d\tau\in C^1(\widetilde{G}_+).$$

Теорема 3. *Пусть верны предположения теоремы 1. Тогда на $\widetilde{G}_-$ уравнение (1) имеет локальные классические решения*

$$F_k^{(0)}(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\Bigg[\int\limits_{t_0}^{t^{(k)}(x)+t_0}\int\limits_{k(x-a_1t)-a_2\tau+(a_1+a_2)t_0}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau+$$

$$+\int\limits_{t^{(k)}(x)+t_0}^{t}\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau\Bigg],\ k\geqslant 1,\ (x,t)\in\widetilde{G}_-,\qquad (5)$$

где $t^{(k)}(x)=(k-1)(x-a_1t)/(a_1+a_2)$ и параметр t_0 принимает значения $t_0\in[\max\limits_{x_0\leqslant s\leqslant x_3}\kappa(s),\ t_k^*[,\ k>1$, при $x_0=\chi_2^{-1}\big(k(x-a_1t)\big),\ x_3=\chi_2^{-1}(x+a_2t),\ t_k^*=[(ka_1+a_2)t-(k-1)x)]/(a_1+a_2)$. Для классических решений (5) необходима гладкость

$$f\in C(\widetilde{G}_-),\quad \int\limits_{t_0}^{t} f\big(x+a_2(t-\tau),\tau\big)d\tau\in C^1(\widetilde{G}_-),$$

$$k\int\limits_{t_0}^{t^{(k)}(x)+t_0} f\big(k(x-a_1t)-a_2\tau+(a_1+a_2)t_0,\tau\big)d\tau+$$

$$+\int\limits_{t^{(k)}(x)+t_0}^{t} f\big(x-a_1(t-\tau),\tau\big)d\tau\in C^1(\widetilde{G}_-),\ k\geqslant 1.$$

Замечания. В случае прямолинейной первой четверти плоскости, т.е. при $\kappa \equiv \sigma \equiv 0$, эти теоремы 1–3 при $t_0 = 0$ становятся теоремами 1–3 при $b_1 = b_2 = 0$ из статьи [1], так как в последних теоремах условия $a_1 \geqslant a_2$ и $a_1 \leqslant a_2$ можно убрать. Классические решения (3), (4) на $\widetilde{G}_+$ и (5) на $\widetilde{G}_-$ нужны для построения на $\widetilde{G}_\infty = \widetilde{G}_+ \cup \widetilde{G}_-$ общего интеграла уравнения (1), который ещё и дважды непрерывно дифференцируем на характеристике $x = a_1 t$.

Список литературы

1. Ломовцев Ф.Е. Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части. / Ф.Е. Ломовцев // Журн. Белорус. гос. ун-та. Мат-ка. Инфор-ка. — 2017. — № 3. — С. 38–52.

О ЧАСТНЫХ ИНТЕГРАЛАХ В $\mathbb{R}_n$ [1]

Л.Н. Ляхов, А.И. Иноземцев (Воронеж, ВГУ; Липецк, ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского)
levnlya@mail.ru; inozemcev.a.i@gmail.com

В работах [1,2] исследована задача о ограниченности линейного интегрального оператора с частными интегралами в $\mathbb{R}_2$ и $\mathbb{R}_3$ соответственно и частный случай таких операторов в $\mathbb{R}_n$. Данная заметка содержит результаты исследования ограниченности частных интегралов общего вида в $\mathbb{R}_n$, $n > 3$.

Введем следующие обозначения: $D_i^{(1)} = (a_i, b_i)$, $D = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$, $D_\alpha^{(m)} = \prod\limits_{i=1}^{m} D_{\alpha_i}^{(1)}$ — m-мерный параллелепипед в евклидовом пространстве точек $\mathbb{R}_n$, $m \leqslant n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ — целочисленный мультииндекс из номеров координат точки $x \in \mathbb{R}_n$ при этом $0 \leqslant m \leqslant n$. Рассматриваются частные интегралы в $\mathbb{R}_n$ следующего вида

$$(K_\alpha^{(m)} u)(x) = \int\limits_{D_\alpha^{(m)}} k_\alpha(x, t_\alpha)\ u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)\, dt_\alpha, \tag{1}$$

где мультииндексы α и $\overline{\alpha}$ составлены из не совпадающих номеров всех координат точки $x \in \mathbb{R}_n$.

Анизотропные классы Лебега (см. [2]) состоят из функций, определенных в конечном параллелепипеде $D = \prod\limits_{i=1}^{n} D_i^{(1)}$, для которых конечна норма

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-41-480002).

© Ляхов Л.Н., Иноземцев А.И., 2018

$$\|f(t)\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} =$$
$$= \left(\int\limits_{a_n}^{b_n}\left(\int\limits_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\dots\left(\int\limits_{a_1}^{b_1}|f(t)|^{p_1}\,dt_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\dots dt_{n-1}\right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}}dt_n\right)^{\frac{1}{p_n}}.$$

Пусть $D = D_\alpha^{(m)} \times D_{\bar\alpha}^{(n-m)}$ Введем классы $L_{\mathbf{p}_\alpha}(D_\alpha^{(m)})$-функций со значениями в $L_{\mathbf{p}_{\bar\alpha}} D_{\bar\alpha}^{(n-m)}$:
$f \in L_{\mathbf{p}_\alpha}\left(D_\alpha^{(m)}; L_{\mathbf{p}_{\bar\alpha}}(D_{\bar\alpha}^{(n-m)})\right)\,:\,\left\|\,\|f(t)\|_{L_{\mathbf{p}_{\bar\alpha}}(D_{\bar\alpha}^{(n-m)})}\right\|_{L_{\mathbf{p}_\alpha}(D_\alpha^{(m)})} < \infty\,.$
Здесь $0 \leqslant m \leqslant n$ причем случаи $m = 0$ и $m = n$ отвечают полной норме функции f.

Получено следующее утверждение.

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ $(p_i > 1)$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ *— сопряженные мультииндексы* $(\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1)$, $\mathbf{p}^2$ *и* $\mathbf{pq}$ *мультииндексы составленные из квадратов и произведений соответствующих координат. Справедливо следующее неравенство*

$$\|K_\alpha^{(m)}u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leqslant \|k_\alpha\|_{L_{\mathbf{q}_\alpha}\left(D_\alpha^{(m)}; L_{\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_{\bar\alpha}\mathbf{q}_{\bar\alpha}}(D)\right)} \|u\|_{L_{\mathbf{p}_\alpha;\mathbf{p}^{\mathbf{2}}_{\bar\alpha}}(D_\alpha^{(m)} \times D_{\bar\alpha}^{(n-m)})}. \tag{2}$$

Неравенство (2) надо понимать так: если существует его правая часть, то оно справедливо. Формально это неравенство остается справедливым при m=0 (ограниченность соответствующего оператора умножения на функцию $K_0 u = k_0(x)\,u(x)$) и при $m = n$ (ограниченность соответствующего интегрального оператора).

Литература

1. Ляхов Л.Н., Иноземцев А.И. Частные интегралы в анизотропных классах Лебега. II: Многомерный случай // Пробл. мат. анал. **102** 2020.

2. Ляхов Л.Н., Иноземцев А.И. Частные интегралы в анизотропных классах Лебега. II: Многомерный случай // Пробл. мат. анал. **102** 2020.

3. Бессов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О.В. Бессов, В.П. Ильин, С.М. Никольский. — М. : Наука, 1975. — 478 с.

УПРАВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫМИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ: МЕТОДЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ[1]

В.П. Максимов (Пермь, ПГНИУ)
maksimov@econ.psu.ru

В докладе дается обзор результатов исследования задач управления для непрерывно-дискретных функционально-дифференциальных уравнений. Рассматриваются линейные системы с последействием, включающие одновременно фазовые переменные с непрерывным временем и фазовые переменные с дискретным временем, – см., например, [1,2]. Общая постановка задачи управления позволяет рассматривать случаи управляющих воздействий различных классов: суммируемые с квадратом, импульсные, дискретные и смешанные. Цель управления задается с помощью конечной системы линейных целевых функционалов общего вида, что позволяет включить в рассмотрение широкие классы распространенных в актуальных прикладных задачах функционалов (многоточечные, интегральные и др.). Для задачи без ограничений на управление формулируются условия разрешимости и предлагаются конструкции для построения управлений и траекторий. При наличии геометрических полиэдральных ограничений на управления предлагается подход к исследованию задачи о достижимости заданных целевых значений. Дается описание ряда прикладных задач и алгоритмов их решения с использованием полученных результатов.

Литература

1. Максимов В.П. Об одном классе управлений для непрерывно-дискретной функционально-дифференциальной системы / В.П. Максимов // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий : сб. тр. междунар. конф. «ПМТУКТ-2018», — Воронеж : ИПЦ «Научная книга», 2018. — С. 155–159.

2. Максимов В.П. Достижимые значения целевых функционалов в задачах экономической динамики / В.П. Максимов // Прикладная математика и вопросы управления. — 2019. — № 4. — С. 124-135.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00332).

© Максимов В.П., 2018

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ЛАВРЕНТЬЕВА- БИЦАДЗЕ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ СОМНОЖИТЕЛЕЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ[1]

Н.В. Мартемьянова (Самара, Самарский университет)
ninamartem@yandex.ru

Рассмотрим уравнение смешанного эллиптико- гиперболического типа с неизвестной правой частью

$$Lu \equiv u_{xx} + sgny \cdot u_{yy} - b^2 u = F(x,y) = \begin{cases} f_1(x)g_1(y), & y > 0, \\ f_2(x)g_2(y), & y < 0, \end{cases}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y)|\ 0 < x < l,\ -\alpha < y < \beta\}$, где b, l, α, β — заданные действительные постоянные, $l, \alpha, \beta > 0$, $g_1(y)$, $g_2(y)$ — заданные функции.

Обратная задача. *Найти в области D функции $u(x,y)$ и $f_i(x)$, $i = 1, 2$, удовлетворяющие условиям:*

$$u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+),\ f_i(x) \in C(0,l) \cap L_2[0,l];$$

$$Lu = F(x,y), (x,y) \in D_- \cup D_+;$$

$$u(0,y) = u(l,y) = 0,\ -\alpha \leqslant y \leqslant \beta;$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x),\ u(x,-\alpha) = \psi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l;$$

$$u_y(x,-\alpha) = \psi_1(x), \quad u_y(x,\beta) = \varphi_1(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l,$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

В данной работе улучшены предыдушие результаты автора, опубликованные в статьях [1,2].

Литература

1. Сабитов К.Б. Обратная задача для уравнения Лаврентьева–Бицадзе, связанная с поиском элементов правой части / К.Б. Сабитов, Н.В. Мартемьянова // Изв. вузов. Матем. — 2017. — № 2. — С. 44–57.

2. Мартемьянова Н.В. Обратная задача для уравнения Лаврентьева–Бицадзе по определению сомножителей правой части / Н.В. Мартемьянова // Изв. вузов. Матем. — 2020. — № 1. — С. 46–63.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-31-50018, № 16-31-00421).

© Мартемьянова Н.В., 2018

КОНСТАНТА БЕРНШТЕЙНА–НИКОЛЬСКОГО ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВЕСОМ ГЕГЕНБАУЭРА[1]

И.А. Мартьянов (Тула, ТулГУ)
martyanow.ivan@yandex.ru

Пусть $\alpha \geqslant -1/2$, $L^p_\alpha(-\pi,\pi]$ — пространство комплекснозначных периодических функций с конечной нормой

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p \,|\sin x|^{2\alpha+1}\,dx\right)^{1/p}, \quad \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in(-\pi,\pi]} |f(x)|,$$

$\mathcal{T}_n$ — подпространство тригонометрических полиномов порядка n, $D_\alpha f(x) = f'(x) + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\frac{f(x)-f(-x)}{\operatorname{tg} x}$ — дифференциальный оператор Гегенбауэра первого порядка, $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n;r) = \sup_{T\in\mathcal{T}_n\setminus\{0\}} \frac{\|D^{2r}_\alpha T\|_\infty}{\|T\|_{p,\alpha}}$ — точная константа Бернштейна–Никольского. Задача $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n;r)$ имеет долгую историю, особенно в безвесовом случае $\alpha = -1/2$. Необходимые результаты из гармонического анализа в $L^p_\alpha(-\pi,\pi]$ получены Д.В. Чертовой (2009).

Теорема. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\alpha \geqslant -1/2$. Тогда найдется четный действительный полином $T_* \in \mathcal{T}_n$, такой что $\|T_*\|_{p,\alpha} = 1$ и $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n;r) = D^{2r}_\alpha T_*(0)$.*

Отметим в данном направлении результаты В.В. Арестова и М.В. Дейкаловой (2015), В.В. Арестова, А.Г. Бабенко, М.В. Дейкаловой и А. Хорват (2018), Д.В. Горбачева и Н.Н. Добровольского (2018).

К ГРАНИЧНЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ ФАКТОРИЗОВАННЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.Н. Миронов, Л.Б. Миронова (Елабуга, Елабужский институт Казанского федерального университета)
miro73@mail.ru

В работах [1, глава 4], [2], [3] рассмотрены задачи для факторизованных уравнений с операторами Бианки. Здесь рассматривается уравнение с переменными коэффициентами

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)(u_{xxy} + a_{20}u_{xx} + a_{11}u_{xy} + a_{10}u_x + a_{01}u_y + a_{00}u) = 0, \quad (1)$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-31-90152).

© Мартьянов И.А., 2018
© Миронов А.Н., Миронова Л.Б., 2018

дифференциальный оператор которого представляет собой произведение оператора первого порядка и псевдопараболического оператора третьего порядка.

Пусть $D = \{0 < x < x_1, 0 < y < y_1\}$, а X, Y — части ∂D, лежащие на осях x, y соответственно. Отрезок характеристики $y = x$, расположенный внутри D, обозначим M.

Задача 1. *Найти в D функцию, являющуюся в $D \setminus M$ регулярным решением уравнения* (1) *и удовлетворяющую условиям*

$$u\big|_{\overline{Y}} = \varphi_1(y),\ \ u\big|_{\overline{X}} = \varphi_2(x),\ \ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\overline{Y}} = \psi_1(y),\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\overline{X}} = \psi_2(x),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{\overline{Y}} = \lambda(y),\ \varphi_1,\ \psi_1,\ \lambda \in C^2([0, y_1]),\ \varphi_2,\ \psi_2 \in C^2([0, x_1]),$$
$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0),\ \psi_1(0) = \varphi_2'(0),\ \varphi_1'(0) = \psi_2(0),\ \lambda(0) = \varphi_2''(0).$$

Получены достаточные условия, обеспечивающие существование и единственность решения задачи 1.

Литература

1. Жегалов В.И. Уравнения с доминирующей частной производной / В.И. Жегалов, А.Н. Миронов, Е.А. Уткина. — Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2014. — 389 с.

2. Жегалов В.И. К пространственным граничным задачам для гиперболических уравнений / В.И. Жегалов, А.Н. Миронов // Дифференц. уравнения. —2010. — Т. 46, № 3. — С. 364–371.

3. Миронов А.Н. Применение метода Римана к факторизованному уравнению в n-мерном пространстве / А.Н. Миронов // Изв. вузов. Математика. — 2012. — № 1. — С. 54–60.

О МЕТОДЕ РИМАНА ДЛЯ ОДНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Л.Б. Миронова (Елабуга, Елабужский институт Казанского федерального университета)

lbmironova@yandex.ru

В работе [1] предложен вариант метода Римана для системы дифференциальных уравнений с кратными характеристиками, в терминах матрицы Римана построены решения задач Коши и Гурса. В статьях [2]–[4] также исследуются различные граничные задачи для гиперболических систем уравнений, в том числе с применением свойств

© Миронова Л.Б., 2018

матрицы Римана. Здесь рассматривается система

$$
\left\{
\begin{array}{l}
u_{xx} = a_1(x,y,z)v_x + b_1(x,y,z)w_x + c_1(x,y,z)u+ \\
\qquad +d_1(x,y,z)v + e_1(x,y,z)w + f_1(x,y,z), \\
v_{yy} = a_2(x,y,z)u_y + b_2(x,y,z)w_y + c_2(x,y,z)u+ \\
\qquad +d_2(x,y,z)v + e_2(x,y,z)w + f_2(x,y,z), \\
w_{zz} = a_3(x,y,z)u_z + b_3(x,y,z)v_z + c_3(x,y,z)u+ \\
\qquad +d_3(x,y,z)v + e_3(x,y,z)w + f_3(x,y,z).
\end{array}
\right. \tag{1}
$$

Для системы (1) с достаточно гладкими коэффициентами доказаны существование и единственность регулярного решения задачи Коши, построено решение в терминах матрицы Римана.

Литература

1. Миронова Л.Б. О методе Римана в R^n для одной системы с кратными характеристиками / Л.Б. Миронова // Изв. вузов. Математика. — 2006. — № 1. — С. 34–39.

2. Жегалов В.И. Об одной системе уравнений с двукратными старшими частными производными / В.И. Жегалов, Л.Б. Миронова // Изв. вузов. Математика. — 2007. — № 3. — С. 12–21.

3. Созонтова Е.А. О характеристических задачах с нормальными производными для системы гиперболического типа / Е.А. Созонтова // Изв. вузов. Математика. — 2013. — № 10. — С. 43–54.

4. Андреев А.А. Задача Коши для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа порядка n с некратными характеристиками / А.А. Андреев, Ю.О. Яковлева // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2017. — Т. 21, № 4. — С. 752–759.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ СЕНСОРНОЙ ФИЗИОЛОГИИ[1]

Г.Е. Мурзабекова, С. Мырзахмет,
А. Турсынмурат (Нур-Султан, КАТУ им. С.Сейфуллина, ЕНУ им Л.Н. Гумилева)
guldenmur07@mail.ru

Мы изучаем диффузионные процессы с точки зрения сенсорной физиологии. Болевые рецепторы – это свободные нервные окончания в соединительной тканевой оболочке мелких кровеносных и лимфатических сосудов, в соединительной тканевой оболочке отдельных нервных волокон. Рецепторы реагируют на механические, термические и химические стимулы. Внешнее воздействие могут оказать бактерии, проникающие в сустав, или неправильный кровоток через

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РК (МОН РК, проект AP05136197).

© Мурзабекова Г.Е., Мырзахмет С., Турсынмурат А., 2018

сердечную мышцу, сильные механические воздействия, жара или холод. Моделирование диффузионных процессов теплопроводности в сенсорной физиологии невозможно классическими задачами передачи тепла. Для учета ситуации, когда передача тепла не является немедленной, исследуется уравнение теплопроводности с памятью.

В статье [1] решена задача идентификации источника для уравнений с памятью на отрезке и графе-звезде. При изучении диффузионных процессов в сенсорной физиологии требуется исследование обратной задачи с памятью:

$$\theta_t(x,t) = \int_0^t Q(t-s)\theta_{xx}(x,s)ds, \quad t>0,\ x\in(0,L).$$

с начальным условием $\theta(x,0)=0$ и граничными условиями $\theta(0,t)=f(t)$, $\theta(L,t)=0$. Мы строим алгоритм восстановления ядра памяти $Q(t)$, который позволит решать задачи моделирования диффузионных процессов сенсорной физиологии.

Литература

1. Avdonin S.A., Murzabekova G.Y., Nurtazina K.B. Source Identification for the Differential Equation with Memory // Trends in Mathematics, Research Perspectives, 2017. – P. 111–120.

РЕШЕНИЕ НЕМОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭЙЛЕРА n-ГО ПОРЯДКА

Р. Мустафокулов (Душанбе, Таджикский национальный университет)
rmustaf@list.ru

Ключевые слова: –*уравнение типа Эйлера, модельное уравнение, функция Коши.*

Рассмотрим на отрезке (a,b) линейное дифференциальное уравнение вида

$$[\omega(x)]^n y^{(n)} + a_1[\omega(x)]^{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}\omega(x)y' + a_n y = f(x) \quad (1)$$

где a_i $(i=\overline{1,n})$ постоянные числа, $\omega(x)$ и $f(x)$ - непрерывные функции, причем $\omega(x)\neq 0$ при $x\in(a,b)$. Назовем это уравнение *уравнением типа Эйлера* и поставим вопрос о возможности приведения этого уравнения к уравнению с постоянными коэффициентами при помощи замены независимой переменной. Оказывается, для этого необходимо осуществить замену переменной по формуле

$$t=\mu(x)=\int\frac{dx}{\omega(x)}. \quad (2)$$

© Мустафокулов Р., 2018

Достаточным же условием, в случае постоянных a_i, является $\omega(x) = cx + d$. Это означает, что уравнение (1) при произвольной функции $\omega(x)$, отличной от линейной, заменой (2) не может приводиться к уравнению с постоянными коэффициентами.

Ниже, для решения уравнения (1), применяется другой метод - метод перехода к эквивалентному интегральному уравнению.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение с переменными коэффициентами

$$[\omega(x)]^n y^{(n)} + A_1(x)[\omega(x)]^{n-1} y^{(n-1)} +$$

$$... + A_{n-1}(x)\omega(x)y^{'} + A_n(x)y = f(x), \tag{3}$$

где коэффициенты $A_i(x)$ имеют вид

$$A_i(x) = a_i - \sum_{k=1}^{i-1} A_k(x)[\omega(x)]^{n-k} P_{n-k}^{n-i}(x)$$

$$(i = \overline{1, n-1}), \qquad A_n(x) = a_n.$$

Здесь a_i - коэффициенты уравнения (1), а функции $P_m^j(x)$, для каждого $m = 1, 2, ..., n-1$, определены равенствами

$$P_m^j(x) = \mu'(x) P_{m-1}^{j-1}(x) + (P_{m-1}^j(x))', (j = \overline{2, m-1}),$$

$$P_m^1(x) = \mu^{(m)}(x), P_m^m(x) = [\mu'(x)]^m.$$

Уравнение (3) называется *модельным уравнением, соответствующим уравнению* (1). Модельное уравнение заменой переменной по формуле (2) приводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + ... + a_{n-1} z' + a_n z = F(t), \tag{4}$$

где $F(t) = F[\mu(x)] = f(x)$. Решая уравнение (4), заменой $z(t) = z[\mu(x)] = y(x)$, определяем решение модельного уравнения (3):

$$\overline{y}(x) = \int_a^x K[\mu(x), \mu(\tau)] \mu'(\tau) f(\tau) d\tau,$$

где $K(t, s)$ - функция Коши уравнение (4). Обозначим

$$K_i(t, s) = K[\mu(x), \mu(\tau)][A_i(\tau) - a_i][\omega(x)]^{n-i-1} \qquad (i = \overline{1, n-1}),$$

$$\overline{K}(x, \tau) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \frac{\partial^{n-i}}{\partial \tau^{n-i}} K_i(x, \tau)$$

и введем в рассмотрении интегральный оператор типа Вольтерра с ядром $\overline{K}(x,\tau)$:

$$y(x) - \int_a^x \overline{K}(x,\tau)y(\tau)d\tau = \overline{y}(x). \qquad (5)$$

Теорема. *Пусть $\overline{y}(x)$ - решение модельного уравнения (3). Тогда решение уравнения (1) дается формулой*

$$y(x) = \overline{y}(x) + \int_a^x R(x,\tau)\overline{y}(\tau)d\tau,$$

где $R(x,\tau)$ - резольвента интегрального уравнения (5).

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Э. Мухамадиев, А.Н. Наимов (Вологда, ВоГУ)
emuhamadiev@mail.ru, nan67@rambler.ru

Рассмотрим следующую периодическую задачу:

$$x'(t) = \frac{\partial V}{\partial x}(t, x(t)) + f(t, x(t)), \quad x(t) \in R^3, \quad t \in R^1, \qquad (1)$$

$$x(0) = x(\omega). \qquad (2)$$

Здесь функция $V : R^1 \times R^3 \mapsto R^1$ и отображения $\partial V/\partial x, f : R^1 \times R^3 \mapsto R^3$ непрерывны и ω-периодичны по t. Кроме того, функция $V(t,x)$ по x положительно однородна порядка $m+1$, где $m > 1$, а отображение f удовлетворяет условию

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{-m} \max_{0\leqslant t\leqslant\omega} |f(t,x)| = 0. \qquad (3)$$

Периодическая задача вида (1)-(2) исследована в работах [1]-[4] при $x(t) \in R^n$, $n \geqslant 2$, а при $n \geqslant 3$ в основном исследована в случае, когда функция V не зависит от t. Из результатов этих работ следует, что периодическая задача

$$x'(t) = \frac{\partial V}{\partial x}(0, x(t)) + f(t, x(t)), \quad x(t) \in R^3, \quad t \in R^1, \qquad (4)$$

$$x(0) = x(\omega). \qquad (5)$$

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-47-350001р-а, № 19-01-00103а).

© Мухамадиев Э., Наимов А.Н., 2018

разрешима, если вращение векторного поля $(\partial V/\partial x)(0,x)$ на сфере $|x|=1$ определено и отлично от нуля. В настоящей работе доказано, что разрешимость задачи (1)-(2) можно свести к разрешимости задачи (4)-(5), если выполнены следующие два условия:

1) $\frac{\partial V}{\partial x}(t,x) \neq 0$ при всех $t \in R^1$, $x \in R^3 \setminus \{0\}$;

2) множество $O(V) = \{x : |x| = 1, V(0,x) = 0\}$ либо пусто, либо состоит из $p = p(V)$ последовательно вложенных замкнутых линий.

Из условия 1 вытекает, что если множество $O(V)$ не пусто, то оно состоит из конечного числа замкнутых линий, которые попарно не пересекаются. Положим $p(V) = 0$, если множество $O(V)$ пусто.

Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Если p - нечетно, то задача (1)-(2) разрешима при любом f, удовлетворяющем условию (3), тогда и только тогда, когда при любом таком f разрешима задача (4)-(5).*

Теорема 2. *Вращение векторного поля $(\partial V/\partial x)(0,x)$ на сфере $|x|=1$ равно одному из трех чисел* $0, -1, 1$. *Данное вращение равно нулю только в том случае, когда p - нечетно.*

Теорема 3. *Задача (4)-(5) разрешима при любом f, удовлетворяющем условию (3), если p - четно.*

Литература

1. Мухамадиев Э. К теории периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. Мухамадиев // ДАН СССР. — 1970. — Т. 194. № 3. — С. 510 - 513.

2. Красносельский М. А. Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. М.: Наука. — М. : Наука, 1975. — 511 с.

3. Мухамадиев Э. Формула для вычисления вращения одного класса векторных полей / Э. Мухамадиев // ДАН Тадж. ССР. — 1977. — Т. 20. № 5. — С. 11 - 14.

4. Мухамадиев Э. Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений / Э. Мухамадиев // Матем. заметки. — 1981. — Т. 30. № 3. — С. 443 - 460.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА НА ГРАФЕ В МОДЕЛИ ЛОКАЛЬНОГО РАЗДРАЖИТЕЛЯ КОЖИ[1]

К. Нуртазина, Ш. Кузембай, А. Нургали (Нур-Султан, ЕНУ им Л.Н. Гумилева)

knurtazina@mail.ru,sholpanai23@gmail.com, ainura.1799@mail.ru

В статье описывается математическая модель локального раздражителя на кожу. Дендритные разветвления нервных окончаний мы рассматриваем в виде графа-дерева. В нашем случае кабельное уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial V}{\partial T} = -V + \frac{\partial^2 V}{\partial X^2}.$$

Здесь $V = V_m - E_r$ – отвод мембранного потенциала V_m от его состояния покоя, E_r, V_m внутриклеточное напряжение B_i минус внеклеточное напряжение V_e. Кроме того, имеем:

$$X = \frac{x}{\lambda} \quad \lambda = \sqrt{r_m/r_i} = \sqrt{(R_m/R_i)(d/4)}$$

$$T = t/\tau_m,\ c\tau_m = r_m c_m = R_m C_m.$$

d - диаметр цилиндра, r_i – внутриклеточное сопротивление на единицу длины цилиндра и c_m – емкость мембраны, r_m^{-1} – проводимость мембраны на единицу длины мембранного цилиндра; R_m и C_m наносятся на единицу площади мембраны, R_i – объемное удельное сопротивление внутриклеточной среды. Для жестко закрепленных концов, означающих отсутствие тока с обоих концов, граничные условия $\frac{\partial V}{\partial X}$ для обоих концов $X = 0$ и $X = L$.

В нашей математической модели рецепторов кожи на дендритном графе-дереве мы решаем обратную задачу для параболического типа на графе-дереве, а именно задачу восстановления источника. Метод граничного управления [1] позволяет свести решение к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода. Для численного решения этого уравнения применяем метод последовательных приближений.

Литература

1. Avdonin S. Inverse problems for quantrum trees / S. Avdonin, P. Kurasov // Inverse Problems and Imaging, 2008, 1. – P. 1–21.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РК (МОН РК, проект AP05136197).

© Нуртазина К., Кузембай Ш., Нургали А., 2018

ОЦЕНКИ МНОЖЕСТВ ПЕРИОДОВ СУММ И ПРОИЗВЕДЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ[1]

С.С. Орлов, Г.К. Соколова (Иркутск, ИГУ)
orlov_sergey@inbox.ru, 98gal@mail.ru

Доклад посвящен результатам исследования основных свойств периодических функций нескольких действительных переменных. Ранее была изучена периодичность суммы и произведения таких функций и сформулирована следующая ниже теорема [1], в которой учитывается постоянство функций вдоль некоторого направления как вырожденный случай периодичности.

Теорема. *Сумма (произведение) непрерывных периодических функций* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *и* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *с множествами периодов* P_f *и* P_g *соответственно являются периодическими функциями тогда и только тогда, когда существуют такие периодические функции* f_1 *и* g_1*, что* $f + g = f_1 + g_1$ $(f \cdot g = f_1 \cdot g_1)$*, и* $\mathrm{P}_{f_1} \cap \mathrm{P}_{g_1} \neq \varnothing$.

Важной задачей является нахождение множеств периодов сумм и произведений периодических функций нескольких переменных. Как показано в работе [1], множества P_{f+g} и $\mathrm{P}_{f\cdot g}$, вообще говоря, разные, и справедливы оценки снизу

$$\mathrm{P}_f \cap \mathrm{P}_g \subseteq \mathrm{P}_{f+g}, \ \ \mathrm{P}_f \cap \mathrm{P}_g \subseteq \mathrm{P}_{f\cdot g}.$$

Также P_{f+g} и $\mathrm{P}_{f\cdot g}$ могут содержать периоды суммы и произведения по направлениям, вдоль которых $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ вовсе не являются периодическими, т. е. имеют место оценки сверху

$$\mathrm{P}_{f+g} \subseteq \mathrm{P}_f \cap \mathrm{P}_g \cup (\overline{\mathrm{P}_f \cup \mathrm{P}_g}), \ \ \mathrm{P}_{f\cdot g} \subseteq \mathrm{P}_f \cap \mathrm{P}_g \cup (\overline{\mathrm{P}_f \cup \mathrm{P}_g}).$$

Литература

1. Соколова Г.К. Периодичность суммы и произведения периодических функций нескольких переменных / Г.К. Соколова // Сборник материалов Международной конференции «XXIX Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным эволюционным задачам» КРОМШ-20018. — Симферополь : Полипринт, 2018. — С. 28–31.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Иркутской области (проект № 20-41-385002 р_Наставник).

© Орлов С.С., Соколова Г.К., 2018

О КОРРЕКТНОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ[1]

В.В. Панков, А.Д. Баев (Воронежский государственный университет)

В настоящее время интенсивно исследуются процессы с вырождением, то есть процессы, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие вблизи границы. В этом случае на границе области может меняться как тип уравнения, так и его порядок. В данной работе рассматриваются краевые задачи для уравнений, являющихся эллиптическими внутри области, которые на границе области меняют порядок по одной из переменных. К таким уравнениям приводит математическое моделирование процессов фильтрации идеального баротропного газа в неоднородной анизотропной пористой среде, различных процессов гидродинамики с сингулярной особенностью у параметров. Подобные уравнения возникают при моделировании процесса распространения примеси в жидкокристаллическом растворе, находящемся во внешнем электрическом поле, при исследовании стационарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием, при расчете линейных стационарных магнитных осесимметричных полей в неоднородных анизотропных средах. Такие уравнения являются, например, обобщением сингулярно возмущенных уравнений конвекции – диффузии. В работе В.П. Глушко [1] были получены оценки решений общей краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка, вырождающегося а границе области в уравнение первого порядка по переменной t. В работе А.Д Баева [2] были получены априорные оценки и доказаны теоремы о существовании и единственности решения общей краевой задачи в полосе для одного вырождающегося уравнения высокого порядка, которое вырождается на границе области в уравнение второго порядка по переменной t. Уравнения, вырождающиеся в уравнения третьего порядка по переменной t, были изучены в [3], [4]. Некоторые другие вырождающиеся уравнения были рассмотрены в [5]-[7].

Рассмотрим в полосе $R^n_d = \{x \in R^{n-1},\ 0 < t < d\}$, где $d > 0$ — некоторое число, уравнение

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x,t) = F(x,t), \tag{1}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 19–11–00197).

© Панков В.В., Баев А.Д., 2018

где $A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v = L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t})v - b\partial_t^5 v$, $L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) = \sum\limits_{|\tau|+j\leqslant 2m} a_{\tau j} D_x^\tau D_{\alpha,t}^j$, b, $a_{\tau j}$ - комплексные числа, $Im\,\overline{b}a_{02m} = 0$, $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_x^\tau = i^{|\tau|}\partial_{x_1}^{\tau_1}\partial_{x_2}^{\tau_2}...\partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}$.

На границе $t = 0$ полосы R_d^n задаются условия вида

$$B_j(D_x)\, v|_{t=0} = \sum_{|\tau|\leqslant m_j} b_{\tau j} D_x^\tau \partial_t^{j-1}\, v|_{t=0} = G_j(x),\ j = 1, 2. \qquad (2)$$

с комплексными коэффициентами $b_{\tau j}$.

На границе $t = d$ полосы R_d^n задаются условия вида

$$v|_{t=d} = \partial_t\, v|_{t=d} = ... = \partial_t^{m-1}\, v|_{t=d} = 0. \qquad (3)$$

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 1. При всех $(\xi, \eta) \in R^n$ справедливо неравенство $Re\overline{b}L_{2m}(\xi, \eta) \geqslant c(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^m$, где постоянная $c > 0$ не зависит от (ξ, η).

Условие 2. Для некоторого $s \geqslant 2m + \max\limits_{1\leqslant j\leqslant 3}(m_j)$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0, d]$, причем $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$.

Условие 3. $\sum\limits_{|\tau|\leqslant m_j} b_{\tau j}\xi^\tau \neq 0$, $j = 1, 2$ при всех $\xi \in R^{n-1}$.

Рассмотрим интегральное преобразование F_α, которое на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ может быть записано в виде

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t)\exp(i\eta\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)})\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}.$$

Это преобразование было введено в [7]. Для этого преобразования можно построить обратное преобразование F_α^{-1}, которое можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F_{\eta\to\tau}^{-1}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$, где $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$, $F_{\eta\to\tau}^{-1}$ - обратное преобразование Фурье. Кроме того, для преобразования F_α доказан аналог равенства Парсеваля, что дает возможность рассмотреть это преобразование не только на функциях из $L_2(R_+^1)$, но и на некоторых классах обобщенных функций. Из определения преобразования F_α следует, что если $u\,(t) \in C^s\,[0, d]$ и удовлетворяет условиям $u\,(0) = \partial_t u\,(0) = ... = \partial_t^{s-1} u\,(0) = 0$, то справедливо равенство $F_\alpha\left[D_{\alpha,t}^j u\right](\eta) = \eta^j F_\alpha\,[u]\,(\eta)$ при всех $j = 0, 1, 2, ..., s$.

С помощью преобразования F_α были построены псевдодифференциальные операторы с вырождением. Исследование таких псевдодифференциальных уравнений позволило получить априорные оценки и теоремы о существовании граничных задач в полупространстве для новых классов вырождающихся уравнений.

Введем пространства, в которых будет изучаться задача (1)-(3).

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha,\frac{2m}{5}}(R^n_d)$ ($s \geqslant 0$ - целое число) состоит из тех функций $v(x,t) \in L_2(R^n_d)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{5}} =$$

$$=\{\sum_{l=0}^{[\frac{5s}{2m}]} \left\|F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha[(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac{1}{2}(s-\frac{2m}{5}l)}F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial^l_t v(x,t)]]\right\|^2_{L_2(R^n_d)}\}^{\frac{1}{2}},$$

где $[\frac{5s}{2m}]$ - целая часть числа $\frac{5s}{2m}$.

Здесь $F_{x\to\xi}$ $(F^{-1}_{\xi\to x})$ – прямое (обратное) преобразование Фурье

Если s - натуральное число такое, что число $\frac{5s}{2m}$ является целым числом, то эта норма эквивалентна следующей норме

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{5}} = \{\sum_{|\tau|+j+\frac{2m}{5}l\leqslant s} \left\|D^\tau_x D^j_{\alpha,t}\partial^l_t v\right\|_{L_2(R^n_d)}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим через $H_s(R^{n-1})$ пространство Соболева – Слободецкого, норму в котором обозначим через $\|\cdot\|_s$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $s \geqslant \max\{2m, \max\limits_{1\leqslant j\leqslant 3}(m_j+\frac{2m(j-1)}{5})+\frac{m}{5}\}$ - *целое число,* $m \geqslant 5$ *и выполнены условия 1 - 3. Пусть* $F(x,t) \in H_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{5}}(R^n_d)$, $G_j(x) \in H_{s-m_j-\frac{2m(j-1)}{5}-\frac{m}{5}}(R^{n-1})$, $j=1,2$. *Тогда существует единственное решение* $v(x,t)$ *задачи (1) - (3), принадлежащее пространству* $H_{s,\alpha,\frac{2m}{5}}(R^n_d)$.

Литература

1. Глушко, В. П. Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко; Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж, 1979. — 47 с. — Деп. в ВИНИТИ 27.03.79, № 1048–79.

2. Баев, А. Д. О корректности краевых задач для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев, В. П. Глушко // Дифференциальные уравнения в частных производных : сб. науч. тр. — Новосибирск : Наука, 1980. — С. 17–21.

3. Бунеев, С. С. Об одном классе краевых задач в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка

/ А. Д. Баев, С. С. Бунеев // Доклады Академии Наук. — 2013. — Т. 448, № 1. — С. 7–8.

4. Бунеев, С. С. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А. Д. Баев, С. С. Бунеев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 81–92.

5. Баев, А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

6. Баев, А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

7. Баев, А. Д. О вырождающихся эллиптических уравнениях высокого порядка и псевдодифференциальных операторах с вырождением / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский, П. А. Кобылинский // Доклады академии наук. — 2016. — Т. 471, № 4. — С. 387–390.

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ[1]

В.В. Панков, А.Д. Баев (Воронежский государственный университет)

В настоящее время интенсивно исследуются процессы с вырождением, то есть процессы, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие вблизи границы. В этом случае на границе области может меняться как тип уравнения, так и его порядок. В данной работе рассматриваются краевые задачи для уравнений, являющихся эллиптическими внутри области, которые на границе области меняют порядок по одной из переменных. К таким уравнениям приводит математическое моделирование процессов фильтрации идеального баротропного газа в неоднородной анизотропной пористой среде, различных процессов гидродинамики с сингулярной особенностью у параметров. Подобные уравнения возникают при моделировании процесса распространения примеси в жидкокристаллическом растворе, находящемся во внешнем электрическом поле, при исследовании стационарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием, при расчете линейных стационарных магнитных осесимметричных полей в неоднородных анизо-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 19–11–00197).

© Панков В.В., Баев А.Д., 2018

тропных средах. Такие уравнения являются, например, обобщением сингулярно возмущенных уравнений конвекции – диффузии. В работе В.П. Глушко [1] были получены оценки решений общей краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка, вырождающегося а границе области в уравнение первого порядка по переменной t. В работе А.Д Баева [2] были получены априорные оценки и доказаны теоремы о существовании и единственности решения общей краевой задачи в полосе для одного вырождающегося уравнения высокого порядка, которое вырождается на границе области в уравнение второго порядка по переменной t. Уравнения, вырождающиеся в уравнения третьего порядка по переменной t, были изучены в [3], [4]. Некоторые другие вырождающиеся уравнения были рассмотрены в [5]–[7].

Рассмотрим в полосе $R_d^n = \{x \in R^{n-1},\ 0 < t < d\}$, где $d > 0$- некоторое число, уравнение

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x,t) = F(x,t), \tag{1}$$

где $A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v = L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t})v + b\partial_t^5 v,\ L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) = \sum\limits_{|\tau|+j\leqslant 2m} a_{\tau j} D_x^\tau D_{\alpha,t}^j,\ b,\ a_{\tau j}$ - комплексные числа, $Im\,\overline{b}a_{02m} = 0$, $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)},\quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t},\ D_x^\tau = i^{|\tau|}\partial_{x_1}^{\tau_1}\partial_{x_2}^{\tau_2}...\partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}$.

На границе $t = 0$ полосы R_d^n задаются условия вида

$$B_j(D_x)\ v|_{t=0} = \sum_{|\tau|\leqslant m_j} b_{\tau j} D_x^\tau \partial_t^{j-1}\ v|_{t=0} = G_j(x),\ j = 1,2,3 \tag{2}$$

с комплексными коэффициентами $b_{\tau j}$.

На границе $t = d$ полосы R_d^n задаются условия вида

$$v|_{t=d} = \partial_t\ v|_{t=d} = ... = \partial_t^{m-1}\ v|_{t=d} = 0. \tag{3}$$

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 1. При всех $(\xi,\eta) \in R^n$ справедливо неравенство $Re\overline{b}L_{2m}(\xi,\eta) \geqslant c(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^m$, где постоянная $c > 0$ не зависит от (ξ,η).

Условие 2. Для некоторого $s \geqslant 2m + \max\limits_{1\leqslant j\leqslant k}(m_j)$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0,d]$, причем $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0,\ \alpha(t) > 0$ при $t > 0$.

Условие 3. $\sum\limits_{|\tau|\leqslant m_j} b_{\tau j}\xi^\tau \neq 0,\ j = 1,2,3$ при всех $\xi \in R^{n-1}$.

Рассмотрим интегральное преобразование F_α, которое на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ может быть записано в виде

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t)\exp(i\eta\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)})\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}.$$

Это преобразование было введено в [7]. Для этого преобразования можно построить обратное преобразование F_α^{-1}, которое можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F_{\eta\to\tau}^{-1}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$, где $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$, $F_{\eta\to\tau}^{-1}$ - обратное преобразование Фурье. Кроме того, для преобразования F_α доказан аналог равенства Парсеваля, что дает возможность рассмотреть это преобразование не только на функциях из $L_2(R_+^1)$, но и на некоторых классах обобщенных функций. Из определения преобразования F_α следует, что если $u\,(t) \in C^s\,[0,d]$ и удовлетворяет условиям $u\,(0) = \partial_t u\,(0) = ... = \partial_t^{s-1} u\,(0) = 0$, то справедливо равенство $F_\alpha\left[D_{\alpha,t}^j u\right](\eta) = \eta^j F_\alpha\,[u]\,(\eta)$ при всех $j = 0, 1, 2, ..., s$.

С помощью преобразования F_α были построены псевдодифференциальные операторы с вырождением. Исследование таких псевдодифференциальных уравнений позволило получить априорные оценки и теоремы о существовании граничных задач в полупространстве для новых классов вырождающихся уравнений.

Введем пространства, в которых будет изучаться задача (1)-(3).

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha,\frac{2m}{5}}(R_d^n)$ ($s \geqslant 0$ - целое число) состоит из тех функций $v(x,t) \in L_2(R_d^n)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{5}} =$$

$$= \{ \sum_{l=0}^{[\frac{5s}{2m}]} \left\| F_{\xi\to x}^{-1} F_\alpha^{-1} [(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac{1}{2}(s-\frac{2m}{5}l)} F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial_t^l v(x,t)]] \right\|_{L_2(R_d^n)}^2 \}^{\frac{1}{2}},$$

где $[\frac{5s}{2m}]$ — целая часть числа $\frac{5s}{2m}$.

Здесь $F_{x\to\xi}$ $(F_{\xi\to x}^{-1})$ – прямое (обратное) преобразование Фурье

Если s — натуральное число такое, что число $\frac{5s}{2m}$ является целым числом, то эта норма эквивалентна следующей норме

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{5}} = \{ \sum_{|\tau|+j+\frac{2m}{5}l \leqslant s} \left\| D_x^\tau D_{\alpha,t}^j \partial_t^l v \right\|_{L_2(R_d^n)} \}^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим через $H_s(R^{n-1})$ пространство Соболева – Слободецкого, норму в котором обозначим через $\|\cdot\|_s$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $s \geqslant \max\{2m, \max\limits_{1\leqslant j\leqslant 2}(m_j + \frac{2m(j-1)}{5}) + \frac{m}{5}\}$ - *целое число,* $m \geqslant 5$ *и выполнены условия 1 - 3. Пусть* $F(x,t) \in H_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{5}}(R_d^n)$, $G_j(x) \in H_{s-m_j-\frac{2m(j-1)}{5}-\frac{m}{5}}(R^{n-1})$, $j = 1,2,3..$ *Тогда существует единственное решение* $v(x,t)$ *задачи (1) - (3), принадлежащее пространству* $H_{s,\alpha,\frac{2m}{5}}(R_d^n)$.

Литература

1. Глушко, В. П. Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко; Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж, 1979. — 47 с. — Деп. в ВИНИТИ 27.03.79, № 1048–79.

2. Баев, А. Д. О корректности краевых задач для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев, В. П. Глушко // Дифференциальные уравнения в частных производных : сб. науч. тр. — Новосибирск : Наука, 1980. — С. 17–21.

3. Бунеев, С. С. Об одном классе краевых задач в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев, С. С. Бунеев // Доклады Академии Наук. — 2013. — Т. 448, № 1. — С. 7–8.

4. Бунеев, С. С. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А. Д. Баев, С. С. Бунеев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 81–92.

5. Баев, А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

6. Баев, А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

7. Баев, А. Д. О вырождающихся эллиптических уравнениях высокого порядка и псевдодифференциальных операторах с вырождением / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский, П. А. Кобылинский // Доклады академии наук. — 2016. — Т. 471, № 4. — С. 387–390.

ОБ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ[1]

В.В. Панков, А.Д. Баев (Воронежский государственный университет)

В настоящее время интенсивно развивается теория краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений. Это обусловлено тем, что такие краевые задачи используются при исследовании процессов с вырождением, то есть процессов, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 19–11–00197).

© Панков В.В., Баев А.Д., 2018

вблизи границы. В этом случае на границе области может меняться как тип уравнения, так и его порядок. В данной работе рассматриваются краевые задачи для уравнений, являющихся эллиптическими внутри области, которые на границе области меняют порядок по одной из переменных. К таким уравнениям приводит математическое моделирование процессов фильтрации идеального баротропного газа в неоднородной анизотропной пористой среде, различных процессов гидродинамики с сингулярной особенностью у параметров. Подобные уравнения возникают при моделировании процесса распространения примеси в жидкокристаллическом растворе, находящемся во внешнем электрическом поле, при исследовании стационарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием, при расчете линейных стационарных магнитных осесимметричных полей в неоднородных анизотропных средах. Такие уравнения являются, например, обобщением сингулярно возмущенных уравнений конвекции – диффузии. В работе В.П. Глушко [1] были получены оценки решений общей краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка, вырождающегося а границе области в уравнение первого порядка по переменной t. В работе А.Д Баева [2] были получены априорные оценки и доказаны теоремы о существовании и единственности решения общей краевой задачи в полосе для одного вырождающегося уравнения высокого порядка, которое вырождается на границе области в уравнение второго порядка по переменной t. Уравнения, вырождающиеся в уравнения третьего порядка по переменной t, были изучены в [3], [4]. Некоторые другие вырождающиеся уравнения были рассмотрены в [5]–[7].

Рассмотрим в полосе $R^n_d = \{x \in R^{n-1},\ 0 < t < d\}$, где $d > 0$ — некоторое число, уравнение

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x,t) = F(x,t), \tag{1}$$

где $A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v = L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t})v + b\partial_t^5 v$, $L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) = \sum\limits_{|\tau|+j\leqslant 2m} a_{\tau j} D_x^\tau D_{\alpha,t}^j$, b, $a_{\tau j}$ - комплексные числа, $Im\,\overline{b}a_{02m} = 0$, $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_x^\tau = i^{|\tau|}\partial_{x_1}^{\tau_1}\partial_{x_2}^{\tau_2}...\partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}$.

На границе $t = 0$ полосы R^n_d задаются условия вида

$$B_j(D_x)\ v|_{t=0} = \sum_{|\tau|\leqslant m_j} b_{\tau j} D_x^\tau \partial_t^{j-1}\ v|_{t=0} = G_j(x),\ j = 1,2,3 \tag{2}$$

с комплексными коэффициентами $b_{\tau j}$.

На границе $t = d$ полосы R^n_d задаются условия вида

$$v|_{t=d} = \partial_t\ v|_{t=d} = ... = \partial_t^{m-1}\ v|_{t=d} = 0. \tag{3}$$

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 1. При всех $(\xi,\eta) \in R^n$ справедливо неравенство $Re\overline{b}L_{2m}(\xi,\eta) \geqslant c(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^m$, где постоянная $c>0$ не зависит от (ξ,η).

Условие 2. Для некоторого $s \geqslant 2m + \max\limits_{1\leqslant j\leqslant k}(m_j)$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0,d]$, причем $\alpha(0)=\alpha'(0)=0$, $\alpha(t)>0$ при $t>0$.

Условие 3. $\sum\limits_{|\tau|\leqslant m_j} b_{\tau j}\xi^\tau \neq 0$, $j=1,2,3$ при всех $\xi \in R^{n-1}$.

Рассмотрим интегральное преобразование F_α, которое на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ может быть записано в виде

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t)\exp(i\eta\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)})\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}.$$

Это преобразование было введено в [7]. Для этого преобразования можно построить обратное преобразование F_α^{-1}, которое можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$, где $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$, $F^{-1}_{\eta\to\tau}$ - обратное преобразование Фурье. Кроме того, для преобразования F_α доказан аналог равенства Парсеваля, что дает возможность рассмотреть это преобразование не только на функциях из $L_2(R_+^1)$, но и на некоторых классах обобщенных функций. Из определения преобразования F_α следует, что если $u\,(t) \in C^s\,[0,d]$ и удовлетворяет условиям $u\,(0) = \partial_t u\,(0) = ... = \partial_t^{s-1}u\,(0) = 0$, то справедливо равенство $F_\alpha\left[D^j_{\alpha,t}u\right](\eta) = \eta^j F_\alpha\,[u]\,(\eta)$ при всех $j=0,1,2,...,s$.

С помощью преобразования F_α были построены псевдодифференциальные операторы с вырождением. Исследование таких псевдодифференциальных уравнений позволило получить априорные оценки и теоремы о существовании граничных задач в полупространстве для новых классов вырождающихся уравнений.

Введем пространства, в которых будет изучаться задача (1)-(3).

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha,\frac{2m}{5}}(R^n_d)$ ($s \geqslant 0$ — целое число) состоит из тех функций $v(x,t) \in L_2(R^n_d)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{5}} =$$

$$=\{\sum_{l=0}^{[\frac{5s}{2m}]}\left\|F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha[(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac{1}{2}(s-\frac{2m}{5}l)}F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial_t^l v(x,t)]]\right\|^2_{L_2(R^n_d)}\}^{\frac{1}{2}},$$

где $[\frac{5s}{2m}]$ — целая часть числа $\frac{5s}{2m}$.

Здесь $F_{x\to\xi}$ $(F^{-1}_{\xi\to x})$ — прямое (обратное) преобразование Фурье

Если s — натуральное число такое, что число $\frac{5s}{2m}$ является целым числом, то эта норма эквивалентна следующей норме

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{5}} = \{ \sum_{|\tau|+j+\frac{2m}{5}l\leqslant s} \left\| D_x^{\tau} D_{\alpha,t}^{j} \partial_t^{l} v \right\|_{L_2(R_d^n)} \}^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим через $H_s(R^{n-1})$ пространство Соболева – Слободецкого, норму в котором обозначим через $\|\cdot\|_{\ s}$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $s \geqslant \max\{2m, \max\limits_{1\leqslant j\leqslant 2}(m_j + \frac{2m(j-1)}{5}) + \frac{m}{5}\}$ *- целое число,* $m \geqslant 5$ *и выполнены условия 1 - 3. Тогда для любого решении я*$v(x,t) \in H_{s,\alpha,\frac{2m}{5}}(R_d^n)$ *задачи (1) –(3). Справедлива априорная оценка*

$$\|v(x,t)\|_{s,\alpha,\frac{2m}{5}} \leqslant c(\|A(D_x, D_{\alpha,t})v(x,t)\|_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{5}} + \sum_{j=1}^{3} \langle\langle B_j(D_x)\ v(x,t)|_{t=0}\rangle\rangle_{s-m_j-\frac{2m(j-1)}{5}-\frac{m}{5}})$$

с константой, не зависящей от $v(x,t)$.

Литература

1. Глушко, В. П. Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко; Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж, 1979. — 47 с. — Деп. в ВИНИТИ 27.03.79, № 1048–79.

2. Баев, А. Д. О корректности краевых задач для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев, В. П. Глушко // Дифференциальные уравнения в частных производных : сб. науч. тр. — Новосибирск : Наука, 1980. — С. 17–21.

3. Бунеев, С. С. Об одном классе краевых задач в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев, С. С. Бунеев // Доклады Академии Наук. — 2013. — Т. 448, № 1. — С. 7–8.

4. Бунеев, С. С. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А. Д. Баев, С. С. Бунеев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 81–92.

5. Баев, А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

6. Баев, А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка /

А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

7. Баев, А. Д. О вырождающихся эллиптических уравнениях высокого порядка и псевдодифференциальных операторах с вырождением / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский, П. А. Кобылинский // Доклады академии наук. — 2016. — Т. 471, № 4. — С. 387–390.

О КОРРЕКТНОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ[1]

В.В. Панков, А.Д. Баев (Воронежский государственный университет)

В настоящее время интенсивно исследуются процессы с вырождением, то есть процессы, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие вблизи границы. В этом случае на границе области может меняться как тип уравнения, так и его порядок. В данной работе рассматриваются краевые задачи для уравнений, являющихся эллиптическими внутри области, которые на границе области меняют порядок по одной из переменных. К таким уравнениям приводит математическое моделирование процессов фильтрации идеального баротропного газа в неоднородной анизотропной пористой среде, различных процессов гидродинамики с сингулярной особенностью у параметров. Подобные уравнения возникают при моделировании процесса распространения примеси в жидкокристаллическом растворе, находящемся во внешнем электрическом поле, при исследовании стационарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием, при расчете линейных стационарных магнитных осесимметричных полей в неоднородных анизотропных средах. Такие уравнения являются, например, обобщением сингулярно возмущенных уравнений конвекции – диффузии. В работе В.П. Глушко [1] были получены оценки решений общей краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка, вырождающегося а границе области в уравнение первого порядка по переменной t. В работе А.Д Баева [2] были получены априорные оценки и доказаны теоремы о существовании и единственности решения общей краевой задачи в полосе для одного вырождающегося уравнения высокого порядка, которое вырождается на границе области в уравнение второго порядка по переменной t. Уравнения, вырождающиеся в уравнения третьего порядка по переменной t, были изучены в [3], [4]. Некоторые другие вырождающиеся уравнения были рассмотрены в [5]–[7].

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 19–11–00197).

© Панков В.В., Баев А.Д., 2018

Рассмотрим в полосе $R^n_d = \{x \in R^{n-1},\ 0 < t < d\}$, где $d > 0$— некоторое число, уравнение

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x,t) = F(x,t), \tag{1}$$

где $A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v = L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t})v - b\partial_t^5 v,\ L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) = \sum\limits_{|\tau|+j\leqslant 2m} a_{\tau j} D_x^\tau D_{\alpha,t}^j$, $b,\ a_{\tau j}$ - комплексные числа, $Im\,\overline{b}a_{02m} = 0$, $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)},\quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_x^\tau = i^{|\tau|}\partial_{x_1}^{\tau_1}\partial_{x_2}^{\tau_2}...\partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}$.

На границе $t = 0$ полосы R^n_d задаются условия вида

$$B_j(D_x)\ v|_{t=0} = \sum_{|\tau|\leqslant m_j} b_{\tau j} D_x^\tau \partial_t^{j-1}\ v|_{t=0} = G_j(x),\ j = 1, 2. \tag{2}$$

с комплексными коэффициентами $b_{\tau j}$.

На границе $t = d$ полосы R^n_d задаются условия вида

$$v|_{t=d} = \partial_t\ v|_{t=d} = ... = \partial_t^{m-1}\ v|_{t=d} = 0. \tag{3}$$

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 1. При всех $(\xi, \eta) \in R^n$ справедливо неравенство $Re\overline{b}L_{2m}(\xi,\eta) \geqslant c(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^m$, где постоянная $c > 0$ не зависит от (ξ, η).

Условие 2. Для некоторого $s \geqslant 2m + \max\limits_{1\leqslant j\leqslant 3}(m_j)$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0,d]$, причем $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0,\ \alpha(t) > 0$ при $t > 0$.

Условие 3. $\sum\limits_{|\tau|\leqslant m_j} b_{\tau j}\xi^\tau \neq 0,\ j = 1, 2$ при всех $\xi \in R^{n-1}$.

Рассмотрим интегральное преобразование F_α, которое на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$ может быть записано в виде

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t)\exp(i\eta\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)})\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}.$$

Это преобразование было введено в [7]. Для этого преобразования можно построить обратное преобразование F_α^{-1}, которое можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$, где $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)},\quad F^{-1}_{\eta\to\tau}$ - обратное преобразование Фурье. Кроме того, для преобразования F_α доказан аналог равенства Парсеваля, что дает возможность рассмотреть это преобразование не только на функциях из $L_2(R^1_+)$, но и на некоторых классах обобщенных функций. Из определения преобразования F_α следует, что если $u\,(t) \in C^s\,[0,d]$

и удовлетворяет условиям $u(0) = \partial_t u(0) = ... = \partial_t^{s-1} u(0) = 0$, то справедливо равенство $F_\alpha \left[D^j_{\alpha,t} u\right](\eta) = \eta^j F_\alpha [u](\eta)$ при всех $j = 0, 1, 2, ..., s$.

С помощью преобразования F_α были построены псевдодифференциальные операторы с вырождением. Исследование таких псевдодифференциальных уравнений позволило получить априорные оценки и теоремы о существовании граничных задач в полупространстве для новых классов вырождающихся уравнений.

Введем пространства, в которых будет изучаться задача (1)-(3).

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha,\frac{2m}{5}}(R^n_d)$ ($s \geqslant 0$ - целое число) состоит из тех функций $v(x,t) \in L_2(R^n_d)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{5}} =$$

$$=\left\{\sum_{l=0}^{[\frac{5s}{2m}]} \left\| F^{-1}_{\xi\to x} F^{-1}_\alpha [(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac{1}{2}(s-\frac{2m}{5}l)} F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial_t^l v(x,t)]]\right\|^2_{L_2(R^n_d)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $[\frac{5s}{2m}]$ - целая часть числа $\frac{5s}{2m}$.

Здесь $F_{x\to\xi}$ $(F^{-1}_{\xi\to x})$ — прямое (обратное) преобразование Фурье

Если s — натуральное число такое, что число $\frac{5s}{2m}$ является целым числом, то эта норма эквивалентна следующей норме

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{5}} = \left\{\sum_{|\tau|+j+\frac{2m}{5}l\leqslant s} \left\| D^\tau_x D^j_{\alpha,t} \partial^l_t v\right\|_{L_2(R^n_d)}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим через $H_s(R^{n-1})$ пространство Соболева – Слободецкого, норму в котором обозначим через $\|\cdot\|_s$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $s \geqslant \max\{2m, \max\limits_{1\leqslant j\leqslant 3}(m_j + \frac{2m(j-1)}{5}) + \frac{m}{5}\}$ - *целое число,* $m \geqslant 5$ *и выполнены условия 1 - 3. Пусть* $F(x,t) \in H_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{5}}(R^n_d)$, $G_j(x) \in H_{s-m_j-\frac{2m(j-1)}{5}-\frac{m}{5}}(R^{n-1})$, $j = 1, 2$. *Тогда существует единственное решение* $v(x,t)$ *задачи (1) - (3), принадлежащее пространству* $H_{s,\alpha,\frac{2m}{5}}(R^n_d)$.

Литература

1. Глушко, В. П. Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко; Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж, 1979. — 47 с. — Деп. в ВИНИТИ 27.03.79, № 1048–79.

2. Баев, А. Д. О корректности краевых задач для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев, В. П. Глушко // Дифференциальные уравнения в

частных производных : сб. науч. тр. — Новосибирск : Наука, 1980. — С. 17–21.

3. Бунеев, С. С. Об одном классе краевых задач в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев, С. С. Бунеев // Доклады Академии Наук. — 2013. — Т. 448, № 1. — С. 7–8.

4. Бунеев, С. С. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А. Д. Баев, С. С. Бунеев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 81–92.

5. Баев, А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

6. Баев, А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

7. Баев, А. Д. О вырождающихся эллиптических уравнениях высокого порядка и псевдодифференциальных операторах с вырождением / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский, П. А. Кобылинский // Доклады академии наук. — 2016. — Т. 471, № 4. — С. 387–390.

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ДВУМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ТИПА ХАРТРИ ВБЛИЗИ ВЕРХНИХ ГРАНИЦ СПЕКТРАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ[1]

А.В. Перескоков (Москва, НИУ ВШЭ, НИУ МЭИ)
pereskokov62@mail.ru

Рассматривается задача на собственные значения для нелинейного оператора типа Хартри в $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$(\mathbf{H} - \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} (\ln|q-q'| + U(|q-q'|)) \mid \psi(q') \mid^2 dq')\psi = \lambda\psi, \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1,$$

где

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2}\right) + \frac{q_1^2+q_2^2}{2}$$

— двумерный осциллятор, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, а $U = U(z)$ — непрерывно дифференцируемая при $z \geqslant 0$ функция, для которой справедливо разложение $U(z) = U_0 + U_1 z^{-1} + U_2 z^{-2} + O(z^{-3})$, $z \to \infty$. Здесь U_0, U_1, U_2 — константы.

[1] Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2020-0022).

© Перескоков А.В. , 2018

Особенностью задачи является то, что она относится к классу резонансных. Для построения асимптотических решений воспользуемся тем, что в полярных координатах уравнение допускает разделение переменных. В работе найдена серия асимптотических собственных значений вблизи верхних границ спектральных кластеров, которые образуются около уровней энергии невозмущенного оператора:

$$\lambda_{n,k}(\varepsilon) = n+1-\frac{\varepsilon}{2}\ln n-\varepsilon U_0-\frac{\varepsilon U_1 \ln n}{2\pi\sqrt{n}}-\frac{2\varepsilon}{\sqrt{n}}\left(\frac{\delta_k}{\sqrt{\pi}}+\pi\sigma_k\right)+O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right),$$

$n \to \infty$. Здесь n имеет порядок ε^{-1}, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Формулы для чисел δ_k, σ_k приведены в [1]. Сответствующие асимптотические собственные функции локализованы вблизи окружности.

Литература

1. Pereskokov A.V. Asymptotics of the spectrum of a two-dimensional Hartree type operator near upper boundaries of spectral clusters. Asymptotic solutions located near a circle // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — Vol. 226, № 4. — PP. 517–530.

МОДЕЛЬ ГИДРОДИНАМИКО-СТАТИСТИЧЕСКОГО ПРОГНОЗА СИЛЬНЫХ И ОПАСНЫХ ЛЕТНИХ ОСАДКОВ ДЛЯ ТЕРРИТОРИИ УРАЛА И СИБИРИ. ОПЕРАТИВНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ПРОГНОЗА

Э.В. Переходцева (Российский технологический университет (МИРЭА), Гидрометцентр России)

1978fox@mail.ru, arcadiyram@rambler.ru

Территория Урала, Западной, Средней и Восточной Сибири значительно превышает территорию европейской части России и состоит из большого числа различных по своим географическим условиям регионов. Ущерб, причиняемый сильными в опасными осадками, очень велик. Продолжительные осадки приводят даже к наводнениям и наносят значительный ущерб и народному хозяйству, и населению. Прогнозирование этих явлений по территории Урала и Сибири является актуальной и еще более трудной задачей синоптической практики, чем прогнозирование по Европейской равнинной территории.

Российские и зарубежные гидродинамические модели, к сожалению, пока еще недостаточно успешно дают прогноз сильных летних полусуточных осадков количеством Q>14мм/12ч, и совсем неудовлетворительно прогнозируются опасные осадки количеством Q>45мм/12ч. Наиболее успешными методами объективизации прогноза таких явлений являются статистические методы, использую-

© Переходцева Э.В., 2018

щие зависимость возникновения сильных осадков от большого числа параметров атмосферы. С целью автоматизации статистического объективного прогноза в качестве входных параметров были использованы как предикторы значения прогностических полей различных гидродинамических моделей. Наша статистическая модель оказалась устойчивой для территории европейской части России к различным гидродинамическим моделям согласно результатам проведенных независимых испытаний [1]. О результатах этих испытаний были сделаны доклады на предыдущих воронежских весенних и зимних математических школах.

Для территории Урала и Сибири были адаптированы разработанные ранее для европейской части России методы оперативного гидродинамико-статистического прогноза сильных полусуточных осадков свыше 14мм/12ч и свыше 45мм/12ч,. Статистические решающие правила прогноза этих явлений были получены с использованием статистической модели прогноза на основе байесовского подхода распознавания векторов, принадлежащих выборкам двух классов. Задаче распознавания векторов разных классов предшествовала задача сжатия пространства признаков без значительной потери информации с помощью эмпирико-статистического метода отбора наиболее информативных и слабо зависимых признаков (параметров атмосферы).

В качестве критериев информативности были использованы расстояние Махаланобиса и критерий минимума энтропии Вапника-Червоненкиса.

Таким образом, удалось из 38 исследуемых потенциальных признаков оставить семь наиболее информативных и слабо зависимых, которые и составили вектор-предсказатель. В докладе будет дано подробное описание статистической модели прогноза сильных летних осадков.

В настоящее время оперативной моделью Гидрометцентра России является региональная модель с горизонтальным разрешением 75x75км. Выходные прогностические поля этой модели используются в нашей модели гидродинамико-статистического прогноза сильных осадков. В течение 2016-2017гг после проведения авторских испытаний проводились испытания в трех Управлениях по гидрометслужбе по территории Сибири. Результаты испытаний метода прогноза сильных осадков по станциям Сибири оказались существенно лучше аналогичных результатов зарубежных моделей и российской мезомасштабной модели COSMO.RU-13, несмотря на небольшое горизонтальное разрешение (13км) этой модели. Предупрежденность явлений сильных осадков составила от 75% до 89%, в то время как по мезомасштабной модели и по зарубежным моделям эта величина не превысила 25%.. Критерий Пирси-Обухова также оказался выше. Для территории Урала схема оценок такая же. В докладе будут представлены подробные таблицы результатов.

С 2016 года и для территории Сибири, и для территории ЕТР и Урала разработана новая технология представления прогнозов заблаговременностью 12-24-36-48ч в виде цветных карт, которые выкладываются на сайт и доступны синоптикам. Карты прогноза поступают на сайт 2 раза в сутки из системы АСООИ Гидрометцентра России, и в настоящее время синоптики используют их в оперативной работе. В докладе будут приведены примеры прогнозов сильных осадков, в частности, в Иркутской области 25-27 июня 2019 года, когда выпадало от 25 до 67мм осадков, приведших к сильному наводнению. С целью уточнения территории прогноза в дальнейшем предполагается использование в статистической модели выходных прогностических полей гидродинамических мезомасштабных моделей, которые пока сами еще не дают успешного прогноза этих сложных опасных явлений.

Литература

1. Переходцева Э.В. Гидродинамико-статистический метод прогноза сильных летних осадков по ЕТР на основе выходных данных региональной модели Гидрометцентра России // Информационный сборник. — 2014. — Вып. 41. — С. 74–88.

МЕТОД ЗАМОРОЖЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В УСЛОВИЯХ ГЕЛЬДЕРА[1]

А.И. Перов, И.Д. Коструб, В.К. Каверина (Воронеж, ВГУ; Москва, Финансовый университет при правительстве РФ)
anperov@mail.ru, ikostrub@yandex.ru, vkkaverina@fa.ru

Рассмотрим систему $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, где $\mathbf{A}$ – постоянная матрица. В [1] приводится оценка

$$||e^{t\mathbf{A}}|| \leqslant e^{t\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\rho + h)^k}{k!} t^k.$$

где α – спектральная абсцисса и ρ – спектральный радиус матрицы $\mathbf{A}$, $||\mathbf{A}|| = h$. Заменяя в ней ρ на h, $\rho \leqslant h$, приходим к оценке Гельфанда-Шилова [2]. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, $0 \leqslant t < \infty$, причем выполнено $||\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(s)|| \leqslant H|t - s|^\sigma$, где H и σ – положительные постоянные, причем $0 < \sigma < 1$ (условие Гельдера). Отметим, что при выполнении условия Липшица, указанная выше система была изучена в работе А.Ю.Левина [3].

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00732)

© Перов А.И., Коструб И.Д., Каверина В.К., 2018

Предположим, что спектральная абсцисса spa $\mathbf{A}(t) \leqslant -\gamma$, спектральный радиус spr $\mathbf{A}(t) \leqslant \rho$ и $||\mathbf{A}(t)|| \leqslant h$, где γ, ρ, h – некоторые постоянные. Тогда согласно методу замороженных коэффициентов В.М.Алексеева [4] условие асимптотической устойчивости изучаемой системы принимает вид

$$\int\limits_0^\infty e^{-t\gamma} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\rho+h)^k}{k!} t^k H t^\sigma dt < 1,$$

Вычисление написанного интеграла приводит к оценке

$$0 < H < \frac{\gamma^{1+\sigma}}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\rho+h}{\gamma}\right)^k \frac{(k+\sigma)(k-1+\sigma)\dots(\sigma)}{k!} \Gamma(\sigma)},$$

где использована гамма-функция.

Литература

1. Перов А.И. Оценка Гельфанда–Шилова и метод замороженных коэффициентов / А.И. Перов, И.Д. Коструб // Международная конференция "Соболевские чтения": тезисы докладов. — Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2018. — С. 139.

2. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз, 1958. — 476 с.

3. Левин А. Ю. Теорема Харитонова для слабостационарных систем / А. Ю. Левин // УМН. — 1995. — Т. 50, № 6 (306). — С. 189–190.

4. Алексеев В. М. Оценка погрешности численного интегрирования / В. М. Алексеев // ДАН СССР. — 1960. — Т. 134, № 2. — С. 247–250.

РАЗРЕШИМОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ И ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ[1]

Г.Г. Петросян (Воронеж, ВГУИТ)

garikpetrosyan@yandex.ru

Рассматривается задача типа Коши для полулинейного дифференциального включения в сепарабельном банаховом пространстве E следующего вида

$$^C D^q x(t) \in Ax(t) + F(t/\epsilon, x(t), x(t-h)), t \in [0,T], T > h > 0, \quad (1)$$

$$x(s) = \varphi(s), s \in [-h, 0]. \quad (2)$$

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-60011.

© Петросян Г.Г., 2018

Символом ${}^{C}D^{q}$ обозначается дробная производная Капуто порядка $q \in (0,1)$, $\epsilon > 0$ - малое число, A - линейный замкнутый (не обязательно ограниченый) оператор в E удовлетворяющий условию:

(A) $A : D(A) \subseteq E \to E$ порождает ограниченную C_0–полугруппу $\{U(t)\}_{t \geqslant 0}$ линейных операторов в E.

Мы полагаем, что многозначное нелинейное отображение $F : \mathbb{R} \times E \times E \to Kv(E)$, где $Kv(E)$ - совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств E, подчиняется следующим условиям:

$(F1)$ для каждой пары $(\xi, \eta) \in E \times E$ мультифункция $F(\cdot, \xi, \eta) : [0,T] \to Kv(E)$ допускает измеримое сечение;

$(F2)$ для п.в. $t \in \mathbb{R}$, и всех пар $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E \times E$ мультиоператор F удовлетворяет условию Липшица:

$$\|F(t, x_1, y_1) - F(t, x_2, y_2)\|_E \leqslant L\left(\|x_1 - x_2\|_E + \|y_1 - y_2\|_E\right), L > 0;$$

$(F3)$ существует константа $k > 0$ такая, что для любых ограниченых множеств $\Omega, \Delta \subset E$:

$$\chi(F([0,T] \times \Omega \times \Delta) \leqslant k(\chi(\Omega) + \chi(\Delta)), \text{ для п.в. } t \in [0,T];$$

(F_T) мультиотображение F является T-периодическим по первому аргумету, т.е. для любого $t \in \mathbb{R}$ и для каждой пары $(\xi, \eta) \in E \times E$

$$F(t + T, \xi, \eta) = F(t, \xi, \eta).$$

Литература

1. Obukhovskii V. Multivalued Maps and Differential Inclusions. Elements of Theory and Applications / V. Obukhovskii, B. Gelman. — Singapore : World Scientific, 2020. — 220 p.

2. Kamenskii M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. — Berlin — New-York : Walter de Gruyter, 2001. — 231 p.

3. Kamenskii M. Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J.-C. Yao // Applicable Analysis. — 2017. — Vol. 96, №4. — P. 571-591.

4. Kamenskii M. On approximate solutions for a class of semilinear fractional-order differential equations in Banach spaces / M. Kamenskii, V. Obukhoskii, G. Petrosyan, J.-C. Yao // Fixed Point Theory and Applications. — 2017. — Vol. 28, №4. — P. 1-28.

5. Kamenskii M. Existence and Approximation of Solutions to Nonlocal Boundary Value Problems for Fractional Differential Inclusions / M. Kamenskii, V. Obukhoskii, G. Petrosyan, J.-C. Yao // Fixed Point Theory and Applications. — 2019. — Vol. 30, №2.

6. Kamenskii M.I. The Semidiscretization method for differential inclusions of fractional order / M. Kamenskii, V. Obukhoskii, G. Petrosyan, J.-C. Yao // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2018. — Т. 23, №122. — С. 125-130.

7. Афанасова М.С. О краевой задаче для функционально-дифференциального включения дробного порядка с общим начальным условием в банаховом пространстве / М.С. Афанасова, Г.Г. Петросян // Известия вузов. Математика. — 2019. — №9. — С. 3-15.

8. Петросян Г.Г. О формальном представлении решений дифференциальных уравнений дробного порядка /Г.Г. Петросян // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2018. — Т. 23, №123. — С. 524-530.

9. Петросян Г.Г. Об одной задаче управляемости для дифференциального включения с дробной производной Капуто / Г.Г. Петросян, О.Ю. Королева // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2018. — Т. 23, №124. — С. 679-684.

АППРОКСИМАЦИЯ ДРОБНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С.И. Пискарев (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)
piskarev@gmail.com

В банаховом пространстве E рассматривается задача Коши

$$(\mathbf{D}_t^\alpha u)(t) = Au(t) + f(t), \quad t \in [0,T], u(0) = u^0,$$

с оператором A, который порождает аналитические и компактные α-раз резольвентное семейство $\{S_\alpha(t,A)\}_{t\geqslant 0}, 0 < \alpha < 1$, $\mathbf{D}_t^\alpha$ — производная по Капуто, а функция $f(\cdot) \in C^k([0,T];E)$.

Мы приводим результаты по аппроксимации задач Коши [1–3], а также обратных задач по пространству и времени [4].

Литература

1. Li Miao. Iverses of generators of integrated fractional resolvent operator functions /Li M., Pastor J., Piskarev S. // Fract. Calc. Appl. Anal. — 2018. —V. 21. — N. 6, — C. 1542–1564.

2. Siegmund S. Approximations of stable manifolds in the vicinity of hyperbolic equilibrium points for fractional differential equations / Siegmund S., Piskarev S. // Nonlinear Dynamics (NODY). — 2019. — V. 95. — Issue 1, — C. 685–697.

3. Li Liu, Zhenbin Fan, Gang Li, and Sergey Piskarev. Maximal Regularity for Fractional Cauchy Equation in Holder Space and its

© Пискарев С.И., 2018

Approximation /Li Liu, Zhenbin Fan, Gang Li, and Sergey Piskarev // Comput. Methods Appl. Math. — 2019. — V.19.— Issue 2, — C. 160–178.

4. Orlovsky Dmitry. On Approximation of Coefficient Inverse Problems for Differential Equations in Functional Spaces / Dmitry Orlovsky, Sergey Piskarev // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. —V. 133.—C. 3–80.

О ВОССТАНОВЛЕНИИ СТЕПЕНЕЙ B-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ПО НЕПОЛНЫМ ДАННЫМ

М.В. Половинкина (Воронеж, ВГУИТ)

polovinkin@yandex.ru

Пусть $R_+^N = \{x = (x', x''), x'{=}(x_1, \ldots, x_n), x''{=}(x_{n+1}, \ldots, x_N), x_1{>}0, \ldots, x_n{>}0\}$. Мы распространяем некоторые результаты работы [1] на случай B-эллиптического оператора, задаваемого формулой (см. [2])

$$\Delta_B u = \sum_{k=1}^{n} \left(\partial^2 u/\partial x_k^2 + \gamma_k/x_k \ \partial u/\partial x_k\right) + \sum_{k=n+1}^{N} \partial^2 u/\partial x_k^2 \,,$$

и преобразования Фурье-Бесселя, определяемого формулой
$F_B[\varphi(x', x'')](\xi) = \int_{R_+^N} \varphi(x) \prod_{k=1}^n j_{\nu_k}(\xi_k x_k) e^{-ix''\cdot\xi''} (x')^\gamma \, dx$,
где $j_{\nu_k}(z_k) = 2^{\nu_k}\Gamma(\nu_k+1)/z_k^{\nu_k} J_{\nu_k}(z_k)$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера, $J_{\nu_k}(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода порядка $\nu_k = (\gamma_k - 1)/2$, $k = 1, \ldots, n$.

Для любого $\alpha > 0$ равенство $(-\Delta_B)^{\alpha/2} f(x) = F_\gamma^{-1}(|\xi|^\alpha F_\gamma f(\xi))(x)$ определяет α-ю степень оператора Δ_B.

Через Ω^+ обозначим конечную область, прилегающую к гиперплоскостям $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$. Граница области Ω^+ состоит из двух частей: Γ^+, расположенной в части пространства R_+^N и Γ_0, принадлежащей гиперплоскостям $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$. Пусть $\Omega = \Omega^+ \bigcup \Omega^- \bigcup \Gamma_0 \subseteq \mathbb{R}^N$, где множество Ω^- получено из Ω^+ симметрией относительно пространства $x' = 0$.

Рассмотрим следующее подпространство функций в $L_{2,\gamma}(R_+^N)$:
$W_2^\alpha(R_+^N) = \{f(\cdot) \in L_{2,\gamma}(R_+^N) : ||(-\Delta_B)^{\alpha/2} f(\cdot)||_{L_{2,\gamma}(R_+^N)} \leqslant 1\}$.

Пусть $0 < \beta < \alpha$, $\delta > 0$. Мы хотим восстановить β-ю степень оператора Δ_B функции $f(\cdot) \in W_2^\alpha(R_+^N)$ по следующей информации: известна некоторая функция $g(\cdot) \in L_{2,\gamma}(\Omega^+)$, удовлетворяющая условию $\| \ F_\gamma f(\cdot) - g(\cdot) \ \|_{L_{2,\gamma}(\Omega^+)} \leqslant \delta$. Положим $U(\alpha, \Omega^+, \delta) {=} \left\{\left(f(\cdot) \in W_2^\alpha(R_+^N), g(\cdot) \in L_{2,\gamma}(\Omega^+)\right) : \| \ F_\gamma f(\cdot) - g(\cdot) \ \|_{L_{2,\gamma}(\Omega^+)} \leqslant \delta\right\}$.

Задача OR. Под задачей оптимального восстановления β-й степени оператора Δ_B функции $f(\cdot)$ по вышеописанной информации понимается нахождение величины $E\left((-\Delta_B)^{\beta/2}, W_2^\alpha(R_+^N), \Omega^+, \delta\right) =$

© Половинкина М.В., 2018

$\inf\limits_{m} \sup\limits_{U(\alpha,\Omega^+,\delta)} \| \ (-\Delta_B)^{\beta/2} f(\cdot) - m(g(\cdot))(\cdot) \ \|_{L_{2,\gamma}(R_+^N)}$, где точная нижняя грань берется по всем отображениям $m : L_{2,\gamma}(\Omega^+) \longrightarrow L_{2,\gamma}(R_+^N)$, которые мы называем методами, следуя [1], а также и тех методов m, на которых инфимиум достигается. Величину $E\left((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(R_+^N), \Omega^+, \delta\right)$ называем *погрешностью оптимального восстановления*, а отображения m, на которых нижняя грань достигается — *оптимальными методами восстановления*.

Пусть $B(a,r)$ — шар с центром в точке a и радиусом r в пространстве R_+^N, $r_\Omega = \sup\{r > 0 : B(0,r) \in \Omega\}, \widehat{r} = \widehat{r}(\alpha,\beta,\delta) = (\alpha/\beta)^{1/2(\alpha-\beta)} \left(\mathbf{\Pi}\,\delta^2\right)^{-1/(2\alpha)}, \mathbf{\Pi} = (2\pi)^{N-n} 2^{2|\nu|} \prod\limits_{k=1}^{n} \Gamma^2(\nu_k + 1), r_0 = \min\{r_\Omega, \widehat{r}\}$.

Теорема. Пусть Ω – выпуклая область, $0 \in \Omega$, $\delta > 0$. Тогда $E\left((-\Delta_B)^{\beta/2}, W_{2,\gamma}^\alpha(R_+^N), \Omega^+, \delta\right) =$

$$= \begin{cases} \sqrt{\alpha - \beta/\alpha \ (\beta/\alpha)^{\beta/(\alpha-\beta)}\, \delta^2 \mathbf{\Pi}^{-1} r_\Omega^{2\beta} + (1/r_\Omega)^{(2\alpha-2\beta)}}, & r_\Omega < \widehat{r}, \\ \left(\delta^2 \mathbf{\Pi}^{-1}\right)^{(\alpha-\beta)/(2\alpha)}, \ r_\Omega \geqslant \widehat{r}. \end{cases}$$

При этом для каждого $r \in \left[0; (1-\beta/\alpha)^{1/(2\beta)} \,(\beta/\alpha)^{1/(2\alpha-2\beta)}\right]$ метод

$$\widehat{m}(g(\cdot)|_{\Omega^+})(t) = \mathbf{\Pi}^{-1} \int\limits_{|\xi|\leqslant r_0} \xi^\gamma \, |\xi|^\beta g(\xi) \prod_{k=1}^{n} j_{\nu_k}(t_k\xi_k) \prod_{k=n+1}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i} t_k \xi_k}\, d\xi +$$

$$+ \mathbf{\Pi}^{-1} \int\limits_{r\geqslant|\xi|\leqslant r_0} \xi^\gamma \, |\xi|^\beta \left(1 + \tfrac{\alpha}{\alpha-\beta} \left(\tfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta/(\alpha-\beta)} \left(\tfrac{|\xi|}{r_0}\right)^{2\alpha}\right)^{-1} \times$$

$$\times g(\xi) \prod_{k=1}^{n} j_{\nu_k}(t_k\xi_k) \prod_{k=n+1}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i} t_k \xi_k}\, d\xi$$

является оптимальным.

Литература

1. Магарил-Ильяев Г.Г. Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру / Г.Г. Магарил-Ильяев, Е.О. Сивкова // Матем. сб. —2012. — Т. 203, № 4. — С. 119–130.

2. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И.А. Киприянов. — М. : Наука, 1997. — 199 с.

ОБ ОПЕРАТОРЕ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПО ВЕЙЛЮ

Н.В. Попов (Москва, МГУ)
popov.niikita@gmail.com

Рассмотрим функционал $\|\cdot\|_p$, $0 \leqslant p \leqslant +\infty$. Для $0 < p < +\infty$ считаем, что он определён формулой

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Для крайних p полагаем

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to+\infty}\|f\|_p = \|f\|_C = \max_{x\in\mathbb{T}}|f(t)|,$$
$$\|f\|_0 = \lim_{p\to 0+}\|f\|_p = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(t)|\,dt\right).$$

Исследуется задача о нахождении наилучшей константы $\varkappa(\alpha,n,p)$ в неравенстве

$$\|D^\alpha t_n\|_p \leqslant \varkappa(\alpha,n,p)\,\|t_n\|_p, \quad p\in[0,\infty],$$

где t_n — тригонометрический полином степени не выше n и D^α — оператор дробно-линейного дифференцирования по Вейлю. Т.е. будем исследовать величину

$$\varkappa(\alpha,n,p) = \sup_{t_n\in\tau_n, t_n\not\equiv 0}\frac{\|D^\alpha t_n\|_p}{\|t_n\|_p}.$$

Исследованию данной величины посвящено много работ. Отметим среди них [1] – [5].

Определение. *Определим класс функций Арестова. Будем писать $\varphi\in A$, если $\varphi\in AC[a,b], \forall[a,b]\subset(0,\infty)$, и $\varphi(s), s\cdot\varphi'(s)$ — неубывающие функции.*

Рассмотрим наименьшую положительную константу $\tilde{\varkappa} = \tilde{\varkappa}(\alpha,n,\varphi)$ для которой справедливо неравенство

$$\int_{\mathbb{T}}\varphi(|D^\alpha t_n(x)|)dx \leqslant \int_{\mathbb{T}}\varphi(\tilde{\varkappa}\cdot|t_n(x)|)dx. \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть $\varphi\in A$, $t\in T_n$. При $n=1$ справедливо следующее равенство $\tilde{\varkappa}(\alpha,1,\varphi)=1$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$. При $n=2, 3, 4, 5, 6, 7,$*

© Попов Н.В., 2018

8, 9, 10 *для любого* $\alpha \in \{1, 2, \ldots, 2n-3\} \cup [2n-2, \infty)$, $p \in [0; +\infty]$ *справедливо* $\tilde{\varkappa}(\alpha, n, \varphi) = n^\alpha$.

Следствие. *Пусть либо* $n = 1$ *и* $\alpha \in \mathbb{R}$, *либо* $n = 2$, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 *и* $\alpha \in \{1, 2, \ldots, 2n-3\} \cup [2n-2, \infty)$. *Тогда справедливо* $\|D^\alpha t_n\|_p \leqslant n^\alpha \|t_n\|_p, \quad p \in [0, \infty]$.

Отметим, что случай $n = 2$ получен другим способом в работе [6], причём в работе [6] доказано, что $\varkappa(\alpha, 2, p) > 2^\alpha$ при всех $\alpha \in [0; 1) \cup (1; 2)$.

Автором ранее анонсировался результат при $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ в работе [7].

Литература

1. Арестов В. В. О неравенствах С.Н.Бернштейна для алгебраических и тригонометрических полиномов // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246, вып. 6. — С. 1289–1292.

2. Арестов В. В. Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Том 45, вып. 1. — С. 3—22

3. Kozko A. I. The exact constants in the Bernstein-Zygmund-Szego inequalities with fractional derivatives and the Jackson-Nikolskii inequality for trigonometric polynomials// East J. Approx. 1998. Vol. 4, no. 3. — P. 391–416.

4. Glazyrina P. Y. Necessary conditions for metrics in integral Bernstein-type inequalities// Journal of Approximation Theory. 162. (2010) 1204–1210.

5. Козко А. И. О неравенстве Арестова–Бернштейна–Сеге для тригонометрических полиномов.// В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения Материалы XIII Международной конференции. Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого. 2015. — С. 150–153.

6. Арестов В. В., Глазырина П. Ю., Неравенство Бернштейна–Сеге для дробных производных тригонометрических полиномов // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Том 20, вып. 1. — С. 17–31

7. Попов Н. В. О неравенстве С.Н. Бернштейна. // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 19 Международной Саратовской зимней школы, посвящённой 90-летию со дня рождения академика П.Л. Ульянова. Саратов: ООО Изд-во "Научная книга 2018. 380с.

ДИСПЕРСИЯ ЧИСЛА ЗАЯВОК В СМО С ДИФФУЗИОННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА И НУЛЕВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ СНОСА

Д.Б. Прокопьева, Ю.И. Коробецкая,
Н.И. Головко (Владивосток, ТОВВМУ, ДВФУ)
prokopievad@yandex.ru, korobetskaya.yui@dvfu.ru, golovko.ni@dvfu.ru

Исследование и моделирование систем массового обслуживания (СМО) в информационных сетях является актуальным научным вопросом. Анализ потока заявок, поступающих на web-серверы, показывает диффузионный характер изменения интенсивности входного потока. Работы [1,2] посвящены изучению диффузионных процессов.

Рассмотрим СМО с экспоненциальным обслуживанием с параметром μ на одном приборе и дважды стохастическим пуассоновским входным потоком заявок с бесконечным накопителем. Интенсивность входного потока $\lambda(t)$ изменяется на промежутке $[\alpha, \beta]$, представляет собой диффузионный процесс с нулевым коэффициентом сноса $a = 0$ и коэффициентом диффузии b, упругими границами α, β. Предполагаем, что выполняется условие отсутствия перегрузок в стационарном режиме $\beta < \mu$.

Обозначим через $q_n(x)$, $n \geqslant 0$, совместное стационарное распределение числа заявок ν и интенсивности λ входного потока в стационарном режиме: $q_n(x) = \mathsf{P}\{\nu = n, x \leqslant \lambda < x + dx\}/dx$; через $f(x) = \mathsf{P}\{x \leqslant \lambda < x + dx\}/dx$ плотность распределения интенсивности λ входного потока.

В [3] построена краевая задача (1-я модель СМО) относительно стационарных характеристик числа заявок $q_n(x), n \geqslant 0$, с условием нормировки $\sum\limits_{n\geqslant 0} q_n(x) = f(x)$.

Введем производящую функцию $R(x,z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} q_n(x) z^n, \quad z \in \mathbb{C}$. Тогда $R(x,1) = f(x)$.

В работе [4] с помощью производящей функции $R(x,z)$ найдено $\mathsf{M}\nu$ — математическое ожидание числа заявок в стационарном режиме и плотность распределения математического ожидания

$$\mathsf{M}(x) = \sum_{n\geqslant 1} n q_n(x) = R'_z(x,1),\ \mathsf{M}\nu = \int_\alpha^\beta \mathsf{M}(x)\,dx.$$

Обозначим через $\mathsf{D}\nu$ — дисперсию числа заявок в стационарном режиме, $\mathsf{D}(x)$ — плотность распределения дисперсии числа заявок по интенсивности λ в стационарном режиме:

$$\mathsf{D}(x)\,dx = \sum_{n\geqslant 0} (n - \mathsf{M}\nu)^2 \mathsf{P}\{\nu = n, dx < \lambda < x + dx\} =$$

© Прокопьева Д.Б., Коробецкая Ю.И., Головко Н.И., 2018

$$= \sum_{n \geqslant 0} (n - \mathsf{M}\nu)^2 q_n(x)\, dx.$$

Дисперсия выражается через плотность дисперсии следующим образом: $\mathsf{D}\nu = \int_\alpha^\beta \mathsf{D}(x)\, dx$.

С помощью производящей функции $R(x, z)$ в работе доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Плотность распределения дисперсии числа заявок* $\mathsf{D}(x)$ *по интенсивности* λ *в стационарном режиме в СМО с рассмотренным дважды стохастическим входным потоком заявок равна*

$$\mathsf{D}(x) = \sum_{n \geqslant 1} n^2 q_n(x) - 2\mathsf{M}\nu\mathsf{M}(x) + (\mathsf{M}\nu)^2 f(x).$$

Литература

1. Баруча - Рид А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения / А. Т. Баруча - Рид ; Пер. с англ. В. В. Калашникова; под ред. А. Н. Ширяева. — М. : Наука, 1969. — 511 с.

2. Бекман И.Н. Математика диффузии / И.Н. Бекман. — М. : Издательство «ОнтоПринт», 2016. —400 с.

3. Прокопьева Д.Б. Вывод уравнений для систем массового обслуживания с диффузионной интенсивностью входного потока и нулевым коэффициентом сноса / Д.Б. Прокопьева, Т.А. Жук, Н.И. Головко // Известия КГТУ. — 2017. — № 46. — С. 184–193.

4. Прокопьева Д.Б. Среднее число заявок в СМО с диффузионной интенсивностью входного потока и бесконечным накопителем / Д.Б. Прокопьева, Т.А. Жук, Н.И. Головко // Фундаментальные и прикладные вопросы естествознания: материалы 62-й Всероссийской научной конференции — Владивосток : ТОВВМУ им. С.О. Макарова, 2019. — С. 159–162.

ПОЛУГРУППЫ ДЛЯ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ [1]

Н.А. Раутиан (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, Московский Центр фундаментальной и прикладной математики)

nrautian@mail.ru

Исследуются абстрактные интегро-дифференциальные уравнения, которые являются операторными моделями задач теории вязкоупругости. Будут представлены результаты, базирующиеся на классическом подходе, связанном с исследованием однопараметрических

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00288).

© Раутиан Н.А., 2018

полугрупп для линейных эволюционных уравнений. Представленный подход может быть также использован для исследования других интегро-дифференциальных уравнений, содержащих интегральное слагаемые вида вольтеррой свертки.

Приводится схема сведения исходной начальной задачи для модельного интегро-дифференциального уравнения с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Доказывается существование сжимающей и экспоненциально устойчивой полугруппы, с известными предположениями для ядер интегральных операторов. На основе полученных результатов доказывается теорема о существовании и единственности сильного решения исходной задачи. Приводятся примеры для экспоненциальных и дробно-экспоненциальных ядер (функций Работнова) интегральных операторов (см. [1]–[3]).

Литература

1. Власов В.В. Спектральный анализ функционально-дифферен -циальных уравнений / В.В. Власов, Н.А. Раутиан — М. : МАКС Пресс, 2016. – 488 с.

2. Власов В.В. Корректная разрешимость и спектральный анализ вольтерровых интегродифференциальных уравнений с сингулярными ядрами / Власов В.В., Раутиан Н.А. // Доклады Академии наук. — 2018. — Т. 482, № 6. — С. 635–638.

3. Vlasov V.V., Rautian N.A. A Study of Operator Models Arising in Problems of Hereditary Mechanics / Vlasov V.V., Rautian N.A. // Journal of Mathematical Sciences (N. Y.). — 2020. — V. 244, no.2. — P. 170–182.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ДИНАМИЧЕСКИМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

С.О. Рустамова (Баку, ИММ НАН Азербайджана)
samira.rustamova.1979@mail.ru

Рассмотрим смешанную задачу для одномерного волнового уравнения с динамическим граничным условием:

$$u_{tt} - u_{xx} + B_1(u_t) + B_2(u) = f(t,x)\ t > 0,\ x \in (0,1) \tag{1}$$

$$u(t,0) = 0,\ t > 0, \tag{2}$$

$$\varepsilon u_{tt}(t,1) + u_x(t,1) + b_1(u_t(t,1)) + b_2(u(t,1)) = g(t), t > 0, \tag{3}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), u_t(0,x) = \psi(x), \tag{4}$$

© Рустамова С.О., 2018

где $B_1(s) = \mu|s|^{(q-1)}s$, $B_2(s) = \eta|s|^{(p-1)}s$, $b_1(s) = \mu_1|s|^{(q_1-1)}s$, $b_2(s) = \eta_1|s|^{(p_1-1)}s$, $f(t,x) \in W_2^1([0,T] \times (0,1))$, $g(t) \in W_2^1(0,T)$.

В случае когда $\varepsilon > 0$ доказано существование и единственность решений $u_\varepsilon(t,x)$, а случае когда $q = q_1 = 1$ доказано, что при $\varepsilon \to 0$ $u_\varepsilon(t,x)$ имеет предел и предельная функция $u(t,x)$ является решением следующей задачи

$$u_{tt} - u_{xx} + \mu u_t + B_2(u) = f(t,x),\ t > 0,\ x \in (0,1),$$

$$u(t,0) = 0,\ t > 0,$$

$$u_x(t,1) + \mu u_t(t,1) + b_2 u(t,1) = g(t),\ t > 0,$$

$$u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x),\ x \in (0,1).$$

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ ГЕОМЕТРИИ ПОЧТИ $C(\lambda)$-МНОГООБРАЗИЙ

А.Р. Рустанов, Е.А. Полькина, С.В. Харитонова (Москва, ИФО НИУ МГСУ; Москва ИФТИС МПГУ; Оренбург, ОГУ)
aligadzhi@yandex.ru, polkina.ea@mail.ru hcb@yandex.ru

Определение 1. [1] [2] *Почти контактное метрическое многообразие называется почти $C(\lambda)$-многообразием, если его тензор римановой кривизны удовлетворяет соотношению*

$$\langle R(Z,W)Y,X\rangle = \langle R(\Phi Z,\Phi W)Y,X\rangle - \lambda\{g(X,W)g(Y,Z) -$$

$$-g(X,Z)g(Y,W) - g(X,\Phi W)g(Y,\Phi Z) + g(X,\Phi Z)g(Y,\Phi W)\},$$

где $X,Y,Z,W \in \mathcal{X}(M)$, а λ – вещественное число.

Теорема 1. *Риччи-плоское почти $C(\lambda)$-многообразие является косимплектическим многообразием. А значит, Риччи-плоское почти $C(\lambda)$-многообразие локально эквивалентно произведению Риччи-плоского келерова многообразия на вещественную прямую.*

Предложение 1. *Для того чтобы почти $C(\lambda)$-многообразие являлось многообразием точечно постоянной кривизны необходимо и достаточно, чтобы на пространстве присоединенной G-структуры компоненты тензора кривизны удовлетворяли соотношению $R_{\hat{a}bc\hat{d}} = \lambda\delta^a_c\delta^d_b$.*

Теорема 2. *Почти $C(\lambda)$-многообразие является многообразием точечно постоянной кривизны λ, тогда и только тогда, когда его тензор римановой кривизны удовлетворяет тождеству*

$$R(\Phi^2X,\Phi^2Y)\Phi^2Z + R(\Phi^2X,\Phi Y)\Phi Z - R(\Phi X,\Phi^2Y)\Phi Z +$$

© Рустанов А.Р., Полькина Е.А. Харитонова С.В., 2018

$+R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2 Z = 2\lambda\{\Phi^2 X\langle\Phi Y,\Phi Z\rangle + \Phi X\langle Y,\Phi Z\rangle\};\ \forall X,Y,Z\in X(M)$

Предложение 2. *Если почти $C(\lambda)$-многообразие является многообразием Эйнштейна с космологической константой ϵ, то $\epsilon = 2\lambda n$ и $R^b_{ca\hat{c}} = \lambda n\delta^b_a$.*

Теорема 3. *Полное почти $C(\lambda)$-многообразие Эйнштейна либо голоморфно изометрично накрывается произведением вещественной прямой на Риччи-плоское келерово многообразие, либо компактно и имеет конечную фундаментальную группу.*

Теорема 4. *Если почти $C(\lambda)$-многообразие является η-Эйнштейновым многообразием типа (α,β), тогда на пространстве присоединенной G-структуры справедливо $\alpha = \frac{1}{n}R^a_{cb\hat{c}} + \lambda n$, $\beta = -\frac{1}{n}R^a_{cb\hat{c}} + \lambda n$.*

Определение 2. *Скажем, что почти контактное метрическое многообразие имеет Φ-инвариантный тензор Риччи, если $\Phi S = S\Phi$.*

Теорема 5. *Почти контактное метрическое многообразие имеет Φ-инвариантный тензор Риччи тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры справедливы равенства 1) $S_{0a} = S_{0\hat{a}} = S_{a0} = S_{\hat{a}0} = 0$; 2) $S_{ab} = S_{\hat{a}\hat{b}} = 0$.*

Теорема 6. *Почти $C(\lambda)$-многообразие имеет Ф-инвариантный тензор Риччи.*

Теорема 7. *Почти $C(\lambda)$-многообразие является многообразием постоянной Φ-голоморфной секционной кривизны $c = 0$ тогда и только тогда, когда оно локально эквивалентно комплексному евклидову пространству C^n, снабженному стандартной эрмитовой метрикой $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle = ds^2$, в каноническом атласе задаваемом соотношением $ds^2 = \sum_{i=1}^n z^a d\bar{z}^a$.*

Литература

1. Janssen D. Almost contact structures and curvature tensors / D. Janssen, L. Vanhecke // Kodai Math. J. —1981. —Vol. 4. — P. 1-27.

2. Olszak Z. Normal locally confomal almost cosymplectic manifolds / Z. Olszak, R. Rosca // Publ. Math. Debrecen. —1991. —Vol. 39. —P. 315-323.

О РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ОТСУТСТВИИ ПОЛНОТЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В.С. Рыхлов (Саратов, СГУ)

RykhlovVS@yandex.ru

Рассмотрим следующую смешанную задачу

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = 0, \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,+\infty), \tag{1}$$

$$\alpha_1 u_x(0,t) + \alpha_0 u_t(0,t) = 0, \quad \beta_1 u_x(1,t) + \beta_0 u_t(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = f_0(x), \quad u_t(x,0) = f_1(x), \tag{3}$$

где $p_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$.

Предположим, что уравнение (1) есть уравнение гиперболического типа, то есть $p_1^2 - 4p_2 > 0$, и корни $\{\omega_j\}$ характеристического многочлена $\omega^2 + p_1\omega + p_2$ удовлетворяют неравенствам

$$0 < \omega_1 < \omega_2, \quad 2\omega_1 < \omega_2. \tag{4}$$

Требуется найти классическое решение задачи (1)–(3), то есть функцию $u(x,t)$, которая в области $Q = \{(x,t) \big| x \in [0,1], t \in [0,+\infty)\}$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, удовлетворяет краевым условиям (2) и начальным условиям (3).

Метод позволяет рассматривать любые распадающиеся краевые условия вместо условий (2). Но для этого нужно предварительно найти условия двукратной разложимости вектор-функции в биортогональный ряд Фурье по корневым функциям соответствующей спектральной задачи для пучка обыкновенных дифференциальных операторов. В данной статье используется ранее полученный результат о разложении из [1], что объясняет вид краевых условий (2). Случай других, нераспадающихся, краевых условий был рассмотрен автором в [2].

Для нахождения классического решения задачи (1)–(3) используется метод контурного интеграла Пуанкаре-Коши. В последние годы большой вклад в обоснование этого метода, но для классических смешанных задач, уравнение которых не содержит смешанных частных производных, но допускающих наличие младших и свободного членов при самых общих предположениях и новых подходах внесли А. П. Хромов и его ученики [3].

© Рыхлов В.С., 2018

Задаче (1)–(3) сопоставим спектральную задачу $L(\lambda)y = 0$ для пучка $L(\lambda)$ вида:

$$\ell(y, \lambda) := y'' + p_1\lambda y' + p_2\lambda^2 y, \tag{5}$$

$$\alpha_1 y'(0) + \lambda\alpha_0 y(0) = 0, \quad \beta_1 y'(1) + \lambda\beta_0 y(1) = 0. \tag{6}$$

Обозначим $v_i = \alpha_1\omega_i + \alpha_0$, $w_i = \beta_1\omega_i + \beta_0$, $i = 1, 2$. Положим $e_1 := -v_1/v_2$, $e_2 = w_2/w_1$, $d_1 = -e_1 e_2$.

Характеристический определитель пучка имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2\bigl(-v_2 w_1 e^{\lambda\omega_1} + v_1 w_2 e^{\lambda\omega_2}\bigr), \tag{7}$$

то есть пучок является устойчиво сильно нерегулярным [4,5] и, как известно [6], система собственных функций этого пучка не является двукратно полной в $L_2[0, 1]$.

Из (7) следует, что уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ имеет счетное число корней $\lambda_k = (2k\pi i + d_0)/(\omega_2 - \omega_1)$, $k \in \mathbb{Z}$, где $d_0 := \ln_0(-d_1)$ ($\ln_0$ есть фиксированная ветвь натурального логарифма такая, что $\ln_0 1 = 0$). Обозначим $\Lambda := \{\lambda_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Очевидно, $\Lambda \setminus \{0\}$ есть множество ненулевых собственных значений (с.з.) пучка $L(\lambda)$. Точка $\lambda = 0$ может быть с.з., а может и не быть, даже если $0 \in \Lambda$.

Обозначим через R_λ резольвенту пучка $L(\lambda)$ и пусть $G(x, t, \lambda)$ есть функция Грина этого пучка, то есть ядро резольвенты. Обозначим

$$z(x, \lambda; f) := R_\lambda f(\cdot, \lambda) \equiv \int_0^1 G(x, t, \lambda) f_\lambda(t)\, dt,$$

где $f_\lambda(t) := -p_2 f_1(t) - p_1 f_0'(t) - \lambda p_2 f_0(t)$, $f = (f_0, f_1)^T$.

Известно, что

$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_{\gamma_\nu}\bigl(z(x, \lambda; f), \lambda z(x, \lambda; f)\bigr)^T d\lambda,$$

где γ_ν есть простой замкнутый контур, окружающий только одну точку λ_ν, есть разложение вектор-функции f в биортогональный ряд Фурье по производным цепочкам пучка $L(\lambda)$, построенным по системе его собственных функций [7].

Рассмотрим функцию

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_{\gamma_\nu} e^{\lambda t}\bigl(z(x, \lambda; f), \lambda z(x, \lambda; f)\bigr)^T d\lambda, \tag{8}$$

которая является формальным решением задачи (1)–(3), если не заботиться о сходимости ряда (8).

Обозначим для краткости $\tau = \omega_2/\omega_1$, $\alpha_x = 1-(1-x)/\tau$, $\beta_x = \tau x$, $\gamma_x = x+1-1/\tau$, $\tilde{\alpha}_x = 1-\tau(1-x)$, $\tilde{\beta}_x = x/\tau$, $\tilde{\gamma}_x = x-1+1/\tau$, $\theta = 1/(\omega_2-\omega_1)$, $Q_T = \{(x,t)\big| x\in[0,1], t\in[0,T]\}$, где $T>0$ есть любое фиксированное число.

Пусть $F_1(x) := \int_0^x f_1(t)\,dt$. Положим

$$H_1(x,F_1) := -2F_1(x) + e_2F_1(\alpha_x) - e_1F_1(\beta_x) + d_1F_1(\gamma_x) - \\ - \frac{1}{e_2}F_1(\tilde{\alpha}_x) + \frac{1}{e_1}F_1(\tilde{\beta}_x) + \frac{1}{d_1}F_1(\tilde{\gamma}_x),$$

$$H_2(x,f_0) := 2\omega_1 f_0(x) - e_2\omega_2 f_0(\alpha_x) + e_1\omega_1 f_0(\beta_x) - d_1\omega_2 f_0(\gamma_x) + \\ + \frac{\omega_1}{e_2}f_0(\tilde{\alpha}_x) - \frac{\omega_2}{e_1}f_0(\tilde{\beta}_x) - \frac{\omega_2}{d_1}f_0(\tilde{\gamma}_x),$$

$$H_3(x,f_1) := -\frac{2}{\omega_1}f_1(x) + \frac{e_2}{\omega_2}f_1(\alpha_x) - \frac{e_1}{\omega_1}f_1(\beta_x) + \frac{d_1}{\omega_2}f_1(\gamma_x) - \\ - \frac{1}{\omega_1 e_2}f_1(\tilde{\alpha}_x) + \frac{1}{\omega_2 e_1}f_1(\tilde{\beta}_x) - \frac{1}{\omega_2 d_1}f_1(\tilde{\gamma}_x),$$

$$H_4(x,f_0') := 2f_0'(x) - e_2f_0'(\alpha_x) + e_1f_0'(\beta_x) - d_1f_0'(\gamma_x) + \\ + \frac{1}{e_2}f_0'(\tilde{\alpha}_x) - \frac{1}{e_1}f_0'(\tilde{\beta}_x) - \frac{1}{d_1}f_0'(\tilde{\gamma}_x).$$

Теорема 1. *Пусть выполняется условие (4), $f_0^{(4)}, f_1^{(3)} \in L_1[0,1]$, $f_j^{(s)}(0) = f_j^{(s)}(1) = 0$, $j=0,1$, $s=\overline{0,3-j}$, и, кроме того, функции f_0, f_1 удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{cases} p_2H_1(x,F_1) + \theta H_2(x,f_0) = 0, \\ p_2H_3(x,f_1) + \theta H_2(x,f_0') = 0, \end{cases}$$

при $x\in[0,1]$ (функции здесь считаются продолженными нулем, если их аргументы выходят за отрезок $[0,1]$). Тогда в области Q существует классическое решение $u(x,t)$ задачи (1)–(3), определяемое формулой (8). Ряд в формуле (8), а также почленно продифференцированный ряд до второго порядка включительно по x и t являются равномерно сходящимися во всякой области Q_T.

Литература

1. Рыхлов В.С. Разложение по собственным функциям нерегулярного пучка дифференциальных операторов второго порядка с распадающимися краевыми условиями / В.С. Рыхлов // Современ. методы теории краевых задач: матер. Междун. конфер.: Воронеж.

весен. матем. школа «Понтрягинские чтения XXX» (3 мая -– 9 мая 2019 г.). — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2020. — С. 240-–242.

2. Рыхлов В.С. О разрешимости смешанной задачи для одного класса гиперболических уравнений при отсутствии полноты корневых функций / В.С. Рыхлов // Современ. проблемы теории функций и их приложения: Матер. 20-й междунар. Сарат. зимн. школы (Саратов, 28 января — 1 февраля 2020 г.). — Саратов : ООО «Изд-во «Научная книга», 2020. — С. 347—351.

3. Хромов А.П., Корнев В.В. Классическое и обобщенное решение смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения / А.П. Хромов, В.В. Корнев // ДАН. — 2019. — Т. 484, № 1. — С.18–20.

4. Шкаликов А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях / А.А. Шкаликов // Тр. семин. им. И.Г. Петровского. Т. 9. —М. : Изд-во Моск. ун-та, 1983. — С. 190–229.

5. Рыхлов В.С. О полноте корневых функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами / В.С. Рыхлов // Таврический вестник информатики и математики. —2015. — № 1(26). — С. 69–86.

6. Рыхлов В.С. О кратной неполноте собственных функций пучков обыкновенных дифференциальных операторов / В.С. Рыхлов // Математика. Механика. Вып. 3. — Саратов : Изд-во Саратовского университета, 2001. — С. 114–117.

7. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 528 с.

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА[1]

С.Н. Сидоров (Стерлитамак, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований РБ)
stsid@mail.ru

Рассмотрим уравнение параболо-гиперболического типа

$$Lu = F(x, y, t), \tag{1}$$

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} - u_{yy} + bu, \\ u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} + bu, \end{cases} \qquad F(x, y, t) = \begin{cases} f_1(x, y)g_1(t), & t > 0, \\ f_2(x, y)g_2(t), & t < 0, \end{cases}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-31-60016).

© Сидоров С.Н., 2018

в области $Q = \{(x, y, t) | \, (x, y) \in D, \, t \in (-\alpha, \beta)\}$, $D = \{(x, y) | \, 0 < x < p, \, 0 < y < q\}$, α, β, p, q – заданные положительные действительные числа, b – заданное любое действительное число, и поставим следующие задачи.

Задача 1. *Найти функцию $u(x, y, t)$, определенной в области Q и удовлетворяющую следующим условиям: $u(x, y, t) \in C(\overline{Q}) \cap C_t^1(Q) \cap C_{x,y}^1(\overline{Q}) \cap C_{x,y}^2(Q_+) \cap C^2(Q_-)$; $Lu(x, y, t) \equiv F(x, y, t)$, $(x, y, t) \in Q_+ \cup Q_-$; $u(x, y, t)\big|_{x=0} = u(x, y, t)\big|_{x=p} = 0$, $-\alpha \leqslant t \leqslant \beta$; $u(x, y, t)\big|_{y=0} = u(x, y, t)\big|_{y=q} = 0$, $-\alpha \leqslant t \leqslant \beta$; $u(x, y, t)\big|_{t=-\alpha} = \psi(x, y)$,$(x, y) \in \overline{D}$, где $F(x, y, t)$ и $\psi(x, y)$ – заданные достаточно гладкие функции, $Q_- = Q \cap \{t < 0\}$, $Q_+ = Q \cap \{t > 0\}$.*

Задача 2. *Найти функции $u(x, y, t)$ и $g_2(t)$, удовлетворяющие условиям задачи 1 и $g_2(t) \in C[0, \beta]$; $u(x_0, y_0, t) = h(t)$, $(x_0, y_0) \in D$, $0 \leqslant t \leqslant \beta$, где $f_i(x, y)$, $i = 1, 2$, $g_1(t)$ и $h(t)$ – заданные достаточно гладкие функции.*

Начально-граничные задачи для двумерного однородного и неоднородного уравнений смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области были изучены в работах [1 – 5]. В работах [6 – 8] были изучены обратные задачи для двумерного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа.

В данной работе установлен критерий единственности решения начально-граничной задачи 1. Решение построено в виде суммы ортогонального ряда. При обосновании сходимости ряда возникла проблема малых знаменателей от двух натуральных аргументов. Установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей с соответствующей асимптотикой. На основе решения прямой задачи поставлена и изучена обратная задача по отысканию сомножителя правой части, зависящей от времени, только из гиперболической части уравнения. Решение обратной задачи эквивалентно редуцировано к разрешимости нагруженного интегрального уравнения. На основании теорию интегральных уравнений доказаны теоремы единственности и существования решения обратной задачи 2.

Литература

1.Сабитов К.Б. Начально-граничная и обратные задачи для неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического уравнения // Матем. заметки. — 2017. — Т. 102, вып. 3. — С. 415–435.

2. Сидоров С.Н. Нелокальная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения // Доклады АМАН. — 2012. — Т. 14, №3. — С. 34–44.

3. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Об одной нелокальной задаче для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 3. — С. 356–365.

4. Сидоров С.Н. Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа со степенным вырождением // Известия вузов. Математика. — 2015. — №12. — С. 55–64.

5. Sabitov K.B., Sidorov S.N. Initial-Boundary-Value Problem for Inhomogeneous Degenerate Equations of Mixed Parabolic-Hyperbolic Type // Journal of Mathematical Sciences. — 2019. — V. 236, Issue 6. — P. 603–640.

6. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием // Известия Вузов. Математика. — 2015. — № 1. — С. 46–59.

7. Сидоров С.Н. Обратные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с вырождающейся параболической частью // Сиб. электрон. матем. изв. — 2019. — Т. 16. — С. 144–157.

8. Сидоров С.Н. Обратные задачи для вырождающегося смешанного параболо-гиперболического уравнения по нахождению сомножителей правых частей, зависящих от времени // Уфимский матем. журнал. — 2019. — Т. 11, № 1. — С. 72–86.

О ГОМОТОПИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ НА МНОГООБРАЗИЯХ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ КОНЦАМИ[1]

А.Ю. Савин (Москва, РУДН)
antonsavin@mail.ru

Классификация эллиптических операторов с точностью до стабильных гомотопий играет важную роль в теории индекса эллиптических операторов (см. классические работы Атьи и Зингера). Для этого есть несколько причин. Во-первых, фредгольмов индекс эллиптического оператора не меняется при таких гомотопиях, т.е. является стабильным гомотопическим инвариантом. Во-вторых, абелева группа стабильных гомотопических классов эллиптических операторов является важным топологическим инвариантом многообразия, на котором рассматривается эллиптический оператор. Ранее гомотопические классификации эллиптических операторов были получены на гладких замкнутых многообразиях, на многообразиях с краем, на стратифицированных многообразиях (подробнее об истории вопроса см., например, [1]).

В настоящее время имеется актуальная задача нахождения классификации в случае нелокальных задач. Трудность получения гомотопической классификации в этом случае состоит в том, что символы

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-008392).

© Савин А.Ю., 2018

таких задач образуют существенно некоммутативные алгебры и для нахождения классификации применяются методы некоммутативной геометрии Конна.

Рассматривается некомпактное многообразие M с цилиндрическими концами. Это означает, что вне некоторого компакта многообразие диффеоморфно цилиндру $\Omega \times (0, \infty)$, где Ω — гладкое компактное многообразие без края. На таком многообразии M определяются:

- класс римановых метрик, которые на цилиндре имеют вид $g_\Omega + dt^2$, где $t \in (0, \infty)$, а g_Ω — гладкая метрика на Ω;

- весовые пространства Соболева $H^{s,\gamma}(M)$ (ср. [2]), отвечающие метрике;

- класс псевдодифференциальных операторов на M (далее ПДО), порождённых дифференциальными операторами с коэффициентами, стабилизирующимися при $t \to \infty$;

- рассматривается класс допустимых диффеоморфизмов $g : M \to M$, которые на бесконечности имеют вид $g(\omega, t) = (g_0(\omega), t - a)$, т.е. являются композицией сдвига по t и диффеоморфизма $g_0 : \Omega \to \Omega$;

- для дискретной группы G допустимых диффеоморфизмов многообразия M рассматриваются нелокальные операторы вида:
$$D = \sum_{g \in G} D_g T_g : H^{s,\gamma}(M) \longrightarrow H^{s-m,\gamma}(M), \qquad (1)$$
где D_g — ПДО на M (и только конечное число из них отлично от нуля), а $T_g u(x) = u(g^{-1}x)$ — оператор сдвига на M

- для операторов (1) даются условия эллиптичности, обеспечивающие фредгольмовость этих операторов (пользуясь подходами из [3]). Подробнее см. [4].

Через $\mathrm{Ell}(M, G)$ обозначим группу стабильных гомотопических классов эллиптических операторов вида (1). Чтобы описать эту группу в топологических терминах, мы определим специальную компактификацию многообразия M — компактное топологическое пространство $\overline{M}$, которое получается, если к каждому цилиндрическому концу (число которых равно числу компонент связности многообразия Ω) добавить точку на бесконечности. Действие группы G на M продолжается до действия на компактификации $\overline{M}$ по непрерывности.

Был получен следующий результат.

Теорема 1. *1. Для конечной группы G имеет место изоморфизм абелевых групп*

$$\mathrm{Ell}(M, G) \simeq K_0^G(\overline{M}),$$

где через $K_0^G(\overline{M})$ обозначена группа G-эквивариантных K-гомологий Каспарова пространства $\overline{M}$. 2. Для группы $G = \mathbb{Z}^N$ имеет место изоморфизм групп:

$$\mathrm{Ell}(M, \mathbb{Z}^N) \simeq K_0((\overline{M} \times \mathbb{R}^N)/\mathbb{Z}^N),$$

где компактное стратифицированное пространство $(\overline{M} \times \mathbb{R}^N)/\mathbb{Z}^N$ определяется как факторизация произведения $\overline{M} \times \mathbb{R}^N$ по диагональному действию группы $\mathbb{Z}^N$.

Литература

1. Назайкинский В. Е., Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. О гомотопической классификации эллиптических операторов на стратифицированных многообразиях // Изв. РАН. Сер. матем. — 2007. — Т. 71, № 6, — С. 91–118.

2. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Труды ММО. — 1967. — Т. 16, — С. 209–292.

3. Antonevich A., Belousov M., Lebedev A., Functional differential equations, Part 1, 2, v. II, C^*-applications / Longman, Harlow, 1998.

4. Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Эллиптические G-операторы на многообразиях с изолированными особенностями // СМФН, 2016. — Т. 59, — С. 173–191.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТРУНЫ С ПРИСОЕДИНЁННЫМ ГРУЗОМ[1]

А.А. Самсонов, Л.Н. Коронова, Д.М. Коростелева, С.И. Соловьёв (Казань, КФУ)

anton.samsonov.kpfu@mail.ru

Исследуется обыкновенная дифференциальная задача на собственные значения второго порядка, описывающая поперечные собственные колебания закреплённой струны с присоединённым во внутренней точке грузом. Задача имеет возрастающую последовательность положительных простых собственных значений с предельной точкой на бесконечности. Последовательности собственных значений соответствует полная ортонормированная система собственных функций. В данной работе изучаются асимптотические свойства собственных значений и собственных функций при неограниченном

[1] Работа поддержана РФФИ (проекты 19-31-90063, 20-08-01154).

© Самсонов А.А., Коронова Л.Н., Коростелева Д.М., Соловьёв С.И., 2018

увеличении массы присоединённого груза. Исходная дифференциальная задача на собственные значения аппроксимируется сеточной схемой метода конечных разностей на неравномерной сетке. Устанавливаются оценки погрешности приближённых собственных значений и приближённых собственных функций в зависимости от размеров сетки. Полученные результаты развивают и обобщают результаты работ [1–3]. Выводы работы могут быть перенесены на случаи более сложных и важных прикладных задач расчёта собственных вибраций балок, пластин и оболочек с присоединёнными грузами.

Литература

1. Samsonov A.A. Eigenvibrations of a bar with load / A.A. Samsonov, S.I. Solov'ev, P.S. Solov'ev // MATEC Web of Conferences. — 2017. — V. 129, 06013. — P. 1–4.

2. Samsonov A.A. Eigenvibrations of a beam with load / A.A. Samsonov, S.I. Solov'ev // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2017. — V. 38, No. 5. — P. 849–855.

3. Solov'ev S.I. Eigenvibrations of a bar with elastically attached load / S.I. Solov'ev // Differential Equations. — 2017. — V. 53, No. 3. — P. 409–423.

О ФУНКЦИОНАЛЕ ДЕЙСТВИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ГРУППЕ ПЕТЕЛЬ В $SO(3)$

Т.Ю. Сапронова, О.В. Швырева (Воронеж, ВГУ)
tsapr@mail.ru

Рассмотрим гладкий функционал (интеграл Дирихле)
$V(f) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 |\dot{f}(t)|^2\,dt$ на банаховом многообразии C^2–петель
$f : [0,1] \longrightarrow SO(3)$, $f(0) = f(1) = I$, в группе Ли $SO(3)$.

Многие функционалы энергии из классической механики (например, из динамики твердого тела) можно исследовать как возмущения функционала V. Отличительным свойством таких функционалов является их фредгольмовость. Функционалы типа интеграла Дирихле обладают разнообразными симметриями, и это накладывает отпечаток на их аналитические и топологические свойства. Например, большинство их критических точек появляется не изолированно, а в виде континуумов, представляющих собой орбиты действий групп Ли. В таких критических точках теряется морсовость (невырожденность второго кодифференциала).

Экстремали функционала V описывают вращения свободного твердого тела, имеющего неподвижную точку (совпадающую с началом подвижной и неподвижной систем отсчета). В данном случае

© Сапронова Т.Ю., Швырева О.В., 2018

твердое тело «достаточно симметричное»: его эллипсоид инерции — сфера; при этом в моменты времени $t = 0$ и $t = 1$ подвижная система (связанная с телом) совпадает с неподвижной. В более сложных случаях (когда тело «менее симметричное» и находится в поле действия каких–либо внешних сил) исследуются функционалы, которые можно рассматривать как возмущения функционала V.

Литература

1. Даринский Б.М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов, С.Л. Царев // Современная математика. Фундаментальные направления. — М.: МАИ. — 2004. — Т. 12. — С. 3–140.

2. Сапронова Т.Ю. Использование разрушения сферических симметрий и краевых особенностей функций в вариационных задачах / Т.Ю. Сапронова, О.В. Швырева // Матем. модели и операторные уравнения. — Воронеж. гос. ун-т. — 2011. — Т. 7. — С. 178–192.

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДИНИ-НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С.И. Сахаров (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
ser341516@yandex.ru

В полосе $D = \mathbb{R} \times (0, T)$ рассматриваются области $\Omega_{1(2)} = \{(x, t) \in D : x < (>) g(t)\}$, разделенные негладкой границей Σ. Пусть $\omega_{1(0)}$ — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини (дважды). Предполагается, что $|\Delta_t g(t)| \leqslant C|\Delta t|^{1/2}\omega_1(|\Delta t|^{1/2})$. В Ω_i рассматриваются равномерно параболические операторы $L_i u = \partial_t u - \sum\limits_{k=0}^{2} a_k^i(x, t)\partial_x^k u$, где a_k^i ограничены в $\overline{D}$, $a_2^i \geqslant \delta > 0$, $|\Delta_{x,t} a_k^i(x, t)| \leqslant C\omega_0(|\Delta x| + |\Delta t|^{1/2})$.

Ставится следующая задача

$$L_i u_i(x, t) = 0, (x, t) \in \Omega_i, \qquad (1)$$

$$u_1(x, 0) = 0, x \leqslant g(0), u_2(x, 0) = 0, x \geqslant g(0), \qquad (2)$$

$$(u_1 - u_2)(g(t), t) = \psi_1(t), \partial_x(u_1 - u_2)(g(t), t) = \psi_2(t), 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad (3)$$

где $\psi_i \in \underset{0}{C}[0, T]$, ψ_1 имеет дробную производную порядка $1/2$ $\partial^{1/2}\psi_1 \in \underset{0}{C}[0, T]$. Классическая разрешимость задачи (1)- (3) устанавливается методом потенциалов.

Теорема 1. *При заданных условиях на a_k^i и g*
1) существует единственное классическое решение (u_1, u_2) задачи

© Сахаров С.И., 2018

(1)- (3);
2) это решение принадлежит пространству $\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega}_1) \times \underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega}_2)$
и выполнены оценки
$\|u_i;\Omega_i\|^{1,0} \leqslant C(\|\psi_1;[0,T]\|^{1/2} + \|\psi_2;[0,T]\|^0), i = 1,2.$
Дополнительно устанавливается характер гладкости решения и его производных.

Литература

1. Бадерко Е.А., Черепова М.Ф. Смешанная задача для параболической системы на плоскости и граничные интегральные уравнения / Е.А. Бадерко, М.Ф. Черепова // СМФН. —2018. — Т. 64, № 1. — С. 20–36.

ПОЛУЧЕНИЕ АСИМПТОТИКИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛА ФЕЙНМАНА В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Т.Ю. Семенова (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)
station@list.ru

Одним из полезных инструментов исследования в квантовой теории поля являются интегралы Фейнмана. В определенном классе задач интеграл Фейнмана, соответствующий данному графу, может быть записан через представление Ли–Померанского (см. [1]) в виде $\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (U(x_1,\ldots,x_n) + V(x_1,\ldots,x_n,\ldots))^{-\alpha}\,dx_1\ldots dx_n$, где U и V — многочлены с положительными коэффициентами, однородные по переменным интегрирования, степени их однородности равны h и $h+1$ соответственно и связаны с числом петель (независимых циклов) графа. При этом многочлен U зависит только от переменных интегрирования, а многочлен V — от переменных интегрирования и физических параметров задачи. В качестве одного из возможных вариантов исследования этих интегралов рассматривают получение нескольких первых членов их асимптотического разложения по одному из параметров (см. [2]).

Если V линейно зависит от двух параметров, причём один существенно меньше другого, задача сводится к задаче с одним параметром $t \to 0+$ и изучению асимптотитки интеграла

$$\mathcal{F}(t,\alpha) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (U(x_1,\ldots,x_n) + V(x_1,\ldots,x_n,t))^{-\alpha}\,dx_1\ldots dx_n.$$

В работе [3] при $n = 1$ и в случае $\mathcal{F}(t,\alpha) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} (P(x,t))^{-\alpha}\,dx$ с произвольным многочленом $P(x,t)$ в подынтегральной функции (без требований однородности) доказано, что

© Семенова Т.Ю., 2018

$$\mathcal{F}(t,\alpha) \sim \sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i \ln t) t^{\beta_i},$$

описано множество, которому принадлежат показатели степеней β_i. Оказывается, что значения β_i, а также наличие или отсутствие в сумме слагаемых с логарифмом связаны с простыми геометрическими параметрами многогранника Ньютона многочлена $P(x,t)$. Всё это позволяет по заданному порядку приближения определять необходимое количество первых слагаемых разложения интеграла и оптимизировать практические вычисления.

Рассмотрим двумерный случай с однородными относительно переменных интегрирования многочленами $U(x_1,x_2)$ и $V(x_1,x_2,t)$. Сделаем замену переменных $x_1 = y_1$, $x_2 = y_1 \cdot y_2$, тогда

$$\mathcal{F}(t,\alpha) = \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} y_1^{1-h\alpha} \left[U(1,y_2) + y_1 \cdot V(1,y_2,t)\right]^{-\alpha} dy_1 dy_2.$$

Обозначим $\hat{U}(x) = U(1,x)$, $\hat{V}(x) = V(1,x)$. После интегрирования по переменной y_1 получаем:

$$B\left(2-h\alpha,(h+1)\alpha-2\right) \cdot \int\limits_{\mathbb{R}_+} \left[\hat{U}(x)\right]^{2-(h+1)\alpha} \cdot \left[\hat{V}(x,t)\right]^{h\alpha-2} dx.$$

Необходимым условием сходимости интеграла является выполнение неравенства $\frac{2}{h} < \alpha < \frac{2}{h+1}$ (см. [4]). Если α – произвольное рациональное число, принадлежащее данному промежутку, тогда $\alpha = \frac{2}{h+\frac{r}{r+q}}$ при некоторых натуральных r и q, и подынтегральная функция в последнем интеграле представляется в виде

$$\left(\left[\hat{U}(x)\right]^q \cdot \left[\hat{V}(x,t)\right]^r\right)^{\frac{h\alpha-2}{r}}.$$

Теперь мы можем использовать теоремы об асимптотическом разложении, доказанные для одномерного случая в работе [3].

Литература

1. Lee R.N., Pomeransky A. A. Critical points and number of master integrals / R.N. Lee, A. A. Pomeransky // Journal of High Energy Physics, Institute of Physics Publishing (United Kingdom) — 2013. — Т. 165, С. 1311–1326.

2. Beneke M., Smirnov V.A. Asymptotic expansion of Feynman integrals near threshold / M. Beneke, V. A. Smirnov // Nuclear Physics B, Elsevier BV (Netherlands) — 1998. — Т. 522, С. 321–344.

3. Semenova T.Yu. Asymptotic Series for a Feynman Integral in the One-Dimensional Case / T.Yu. Semenova // Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation) — 2020. —Т. 27, № 1, С. 126-136.

4. Semenova T.Yu., Smirnov A.V., Smirnov V.A. On the status of expansion by regions / T.Yu. Semenova, A.V. Smirnov, V.A. Smirnov // European Physical Journal C, Springer Verlag (Germany) — 2019. — T. 79, C. 136–147.

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ГИБРИДНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ[1]

П.М. Симонов (Пермь, ПГНИУ)
simpm@mail.ru

Запишем абстрактную СЛГФДУП в виде

$$\mathcal{L}_{11}x+\mathcal{L}_{12}y = \dot{x}-F_{11}x-F_{12}y = f,\ \mathcal{L}_{21}x+\mathcal{L}_{22}y = \Delta x-F_{21}x-F_{22}y = g. \quad (1)$$

Здесь и ниже $\mathbb{R}^n$ — пространство векторов $\alpha = \mathrm{col}\{\alpha^1, ..., \alpha^n\}$ с действительными компонентами и с нормой $\|\alpha\|_{\mathbb{R}^n}$. Пусть пространство L локально суммируемых $f, g, y : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ с полунормами $\|f\|_{L[0,T]} = \int_0^T \|f(t)\|_{\mathbb{R}^n}\,dt$ для всех $T > 0$. Пространство D локально абсолютно непрерывных функций $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ с полунормами $\|x\|_{D[0,T]} = \|\dot{x}\|_{L[0,T]} + \|x(0)\|_{\mathbb{R}^n}$ для всех $T > 0$. Операторы $\mathcal{L}_{11}, F_{11} : D \to L$, $\mathcal{L}_{12}, F_{12} : L \to L$, $\mathcal{L}_{21}, F_{21} : D \to L$, $\mathcal{L}_{22}, F_{22} : L \to L$ предполагаются линейными непрерывными и вольтерровыми. Обозначим $(\Delta y)(t) = y(t) - y(t - h)$, где $t \geqslant h > 0$, и $(\Delta y)(t) = y(t)$, $t \in [0, h)$.

Пусть модельное уравнений $\mathcal{L}_{11}x = z$ и банахово пространство B с элементами из пространства L ($B \subset L$) выбраны так, что решения этого уравнения обладают интересующими нас асимптотическими свойствами. Пусть оператор Коши W_{11} для уравнения $\mathcal{L}_{11}x = z$ непрерывно действует из пространства B в пространство B и вольтерров, и пусть столбцы матрицы фундаментальных решений X принадлежат пространству B. Кроме того, пусть производная решения $\dot{x}$ непрерывно лежит в B в зависимости от $z \in B$. Можно для банахова пространства $B \subset L$ ввести банахово пространство $D(\mathcal{L}_{11}, B)$ с нормой $\|x\|_{D(\mathcal{L}_{11},B)} = \|\mathcal{L}_{11}x\|_B + \|x(0)\|_{\mathbb{R}^n}$. Это пространство линейно изоморфно пространству С.Л. Соболева $W_B^{(1)}([0, \infty))$ с нормой $\|x\|_{W_B^{(1)}}([0, \infty)) = \|\dot{x}\|_B + \|x\|_B$. Дальше будем это пространство обозначать как W_B. При этом, $W_B \subset D$, и это вложение непрерывно. Операторы $\mathcal{L}_{11}$, $\mathcal{L}_{21}$, F_{11}, $F_{21} : D \to L$ рассматриваются как приведения на пару (W_B, B): $\mathcal{L}_{11}$, $\mathcal{L}_{21}$, F_{11}, $F_{21} : W_B \to B$. Операторы Δ,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00332 А).

© Симонов П.М., 2018

$\mathcal{L}_{12}, \mathcal{L}_{22}, F_{12}, F_{22} : L \to L$ также рассматриваются как приведения на пару (B, B): Δ, $\mathcal{L}_{12}$, $\mathcal{L}_{22}$, F_{12}, $F_{22} : B \to B$ предполагаются линейные вольтерровые и ограниченные.

Поставим задачу, когда для уравнения (1) при любом $\{f, g\} \in B \times B$ ее решения $\{x, y\} \in W_B \times B$. Рассмотрим второе уравнения $\mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}y = g$. Будем считать, что оператор $\mathcal{L}_{22} : B \to B$ вольтеррово обратим, то есть, существует $\mathcal{L}_{22}^{-1} : B \to B$ и оператор $\mathcal{L}_{22}^{-1} : B \to B$ вольтерров. Тогда это уравнение запишется в виде $\mathcal{L}_{22}^{-1}\mathcal{L}_{21}x+y = \mathcal{L}_{22}^{-1}g$. Выразим y: $y = -\mathcal{L}_{22}^{-1}\mathcal{L}_{21}x+\mathcal{L}_{22}^{-1}g$, и подставим в первое уравнение $\mathcal{L}_{11}x+\mathcal{L}_{12}y = f$: $(\mathcal{L}_{11}-\mathcal{L}_{12}\mathcal{L}_{22}^{-1}\mathcal{L}_{21})x = f-\mathcal{L}_{12}\mathcal{L}_{22}^{-1}g$. Обозначим $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12}\mathcal{L}_{22}^{-1}\mathcal{L}_{21}$ и $f_1 = f - \mathcal{L}_{12}\mathcal{L}_{22}^{-1}g$. Получили уравнение $\mathcal{L}_1 x = f_1$. Предположим, что вольтерров оператор $\mathcal{L}_1 : W_B \to B$ вольтеррово обратим, то есть, если для уравнения $\mathcal{L}_1 x = f_1$ при любом $f_1 \in B$ его решения $x \in W_B$ и оператор ${\mathcal{L}_1}^{-1} : B \to W_B^0$ вольтерров, где $W_B^0 = \{x \in W_B, x(0) = 0\}$. Таким образом, мы решили задачу, когда для уравнения (1) при любом $\{f, g\} \in B\times B$ его решение $\{x, y\} \in W_B \times B$. То же самое получим для уравнения $\mathcal{L}_2 x = g_1$, где $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{21}\mathcal{L}_{11}^{-1}\mathcal{L}_{12}$ и $g_1 = g - \mathcal{L}_{21}\mathcal{L}_{11}^{-1}f$.

Исследованию по устойчивости решений СЛГФДУП в случае $n = 1$ посвящены работы [1, 2]. В статье [3] приведен пример для $n = 2$. В предлагаемом докладе получено достаточное условия устойчивости решений СЛГФДУП для $n \geqslant 2$.

Литература

1. Ларионов А.С. Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП) /А.С. Ларионов, П.М. Симонов // Вестник РАЕН . Темат. номер «Дифференциальные уравнения». — 2013. — Т. 13, № 4. — С. 34–37.

2. Ларионов А.С. Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП). II. /А.С. Ларионов, П.М. Симонов // Вестник РАЕН. Темат. номер «Дифференц. уравнения». — 2014. — Т. 14, № 5. — С. 38–45.

3. Симонов П.М. Об устойчивости системы двух линейных гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ЛГФДСП) /П.М. Симонов // Материалы Междунар. конфер. «Воронеж. зимняя математ. школа С.Г. Крейна–2020» / под ред. В.А. Костина. — Воронеж : ИПЦ «Научная книга», 2020. — С. 256–263.

МЕТОД ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ О ВЫТЕКАЮЩИХ ВОЛНАХ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОДА[1]

М.О. Снегур, Е.Ю. Смолькин (Пенза, ПГУ)

snegur.max15@gmail.com

Рассматривается задача вытекающих волнах открытой регулярной неоднородной волноведущей структуры кругового сечения, которая сведена к краевой задаче для продольных компонент электромагнитного поля $\Pi \in H_0^1(\Omega)$, $\Phi \in H^1(\Omega)$ в пространствах Соболева: найти такие $\gamma \in \mathbb{C}$, при которых существуют нетривиальные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \Delta\Pi + \widetilde{\kappa}^2\Pi = \dfrac{\gamma^2}{\widetilde{\varepsilon}\widetilde{\kappa}^2}\nabla\widetilde{\varepsilon}\nabla\Pi + \dfrac{\gamma}{\widetilde{\varepsilon}\widetilde{\kappa}^2}J(\widetilde{\varepsilon},\Phi), \\ \Delta\Phi + \widetilde{\kappa}^2\Phi = \dfrac{1}{\widetilde{\kappa}^2}\nabla\widetilde{\varepsilon}\nabla\Phi - \dfrac{\gamma}{\widetilde{\kappa}^2}J(\widetilde{\varepsilon},\Pi), \end{cases}$$

и

$$\widetilde{\kappa}^2 = \widetilde{\varepsilon}_i - \gamma^2,\ i = 1,2,\ J(u,v) := \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x},\ \mathrm{x} = (x,y);$$

удовлетворяющие условиям сопряжения на Γ

$$[\Pi]|_\Gamma = 0,\ [\Phi]|_\Gamma = 0,$$

$$\gamma\left.\left[\frac{1}{\widetilde{\kappa}^2}\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}\right]\right|_\Gamma - r\left.\left[\frac{1}{\widetilde{\kappa}^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right]\right|_\Gamma = 0,$$

$$\gamma\left.\left[\frac{1}{\widetilde{\kappa}^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right]\right|_\Gamma + r\left.\left[\frac{\widetilde{\varepsilon}}{\widetilde{\kappa}^2}\frac{\partial\Pi}{\partial\rho}\right]\right|_\Gamma = 0;$$

условию ограниченности энергии в любом конечном объеме

$$\int\limits_\Omega \Big(|\nabla\Pi|^2 + |\nabla\Phi|^2 + |\Pi|^2 + |\Phi|^2\Big)dx < \infty,$$

и условию излучения на бесконечности

$$\Pi(\rho,\varphi) \to \infty, \quad \Phi(\rho,\varphi) \to \infty, \quad \rho \to \infty, \text{равномерно по } \varphi.$$

Для определения решения использована вариационная формулировка задачи. Задача сведена к изучению оператор-функции[1,2]

$$\mathrm{N}(\gamma)\mathbf{u} = 0,\ \mathrm{N}(\gamma) : H \to H,$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-31-70010).

© Снегур М.О., Смолькин Е.Ю., 2018

где $\mathbf{u} = (\Pi, \ \Phi)^T$. Исследованы свойства операторов входящих в оператор-функцию, необходимых для анализа ее спектральных свойств.

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. *Оператор-функция* $\mathrm{N}(\gamma) : H \to H$ *является ограниченной, голоморфной и фредгольмовой в области* $\Lambda = \mathbb{C} \backslash \widetilde{\Lambda}$ *и* $\widetilde{\Lambda} := \Lambda_0 \cup \{\gamma : \Im\gamma^2 = 0, \ \gamma^2 \leqslant \varepsilon_2\} \cup \{\gamma : \Im\gamma = 0, \ \gamma_* \leqslant |\gamma| \leqslant \gamma^*\}$, *где*

$$\gamma_* = \frac{-1/2 + \sqrt{1/4 + 4\varepsilon_2 \left(\max\limits_{\rho \in \Omega} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \right)^{-2}}}{2 \left(\|\mathrm{A}_0\| + \epsilon_1 \|\widetilde{\mathrm{P}}\| \right)}$$

и

$$\gamma^* = \frac{1/2 + \sqrt{1/4 + 4\varepsilon_2 \left(\|\mathrm{A}_0\| + \epsilon_2 \|\widetilde{\mathrm{P}}\| \right) \left(\|\mathrm{A}_0\| + \epsilon_1 \|\widetilde{\mathrm{P}}\| \right)}}{2 \left(\max\limits_{\rho \in \Omega} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \right)^{-1}}.$$

Теорема 2. *Спектр оператор-функции* $\mathrm{N}(\gamma) : H \to H$ *является дискретным в* Λ, *т.е. имеет конечное число характеристических точек конечной алгебраической кратности в любом компакте* $\mathrm{K}_0 \subset \Lambda$.

Литература

1. Смирнов, Ю.Г. О дискретности спектра в задаче о нормальных волнах открытого неоднородного волновода / Ю. Г. Смирнов, Е.Ю. Смолькин // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 10. — С. 1298–1309.

2. Смирнов, Ю.Г. Исследование спектра в задаче о нормальных волнах закрытого регулярного неоднородного диэлектрического волновода произвольного сечения / Ю.Г. Смирнов, Е.Ю. Смолькин // Доклады академии наук. — 2018. — Т. 478, № 6. — С. 627–630.

СЕТОЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ САМОСОПРЯЖЁННОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ[1]

П.С. Соловьёв, Д.М. Коростелева, С.И. Соловьёв (Казань, КФУ)

pavel.solovev.kpfu@mail.ru

Моделирование баланса электронов высокочастотного индукционного разряда пониженного давления сводится к нахождению минимального собственного значения и соответствующей положительной собственной функции дифференциальной задачи на собственные значения второго порядка с коэффициентами, нелинейно зависящими от спектрального параметра. Получены условия существования решений дифференциальной задачи. Эта задача аппроксимируется сеточной схемой метода конечных элементов с лагранжевыми конечными элементами произвольного порядка и численным интегрированием. Получены оценки погрешности приближённых собственных значений и приближённых собственных функций в зависимости от шага сетки и точности квадратурной формулы. Установленные результаты обобщают результаты работ [1–4].

Литература

1. Желтухин В.С. Вычисление минимального собственного значения нелинейной задачи Штурма–Лиувилля / В.С. Желтухин, С.И. Соловьев, П.С. Соловьев, В.Ю. Чебакова // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2013. — Т. 155, № 3. — С. 91–104.

2. Zheltukhin V.S. Third type boundary conditions for steady state ambipolar diffusion equation / V.S. Zheltukhin, S.I. Solov'ev, P.S. Solov'ev, V.Yu. Chebakova, A.M. Sidorov // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. — 2016. — V. 158, 012102. — P. 1–4.

3. Zheltukhin V.S. Existence of solutions for electron balance problem in the stationary high-frequency induction discharges / V.S. Zheltukhin, S.I. Solov'ev, P.S. Solov'ev, V.Yu. Chebakova // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. — 2016. — V. 158, 012103. — P. 1–6.

4. Dautov R.Z. The bisection method for symmetric eigenvalue problems with a parameter entering nonlinearly / R.Z. Dautov, A.D. Lyashko, S.I. Solov'ev // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 1994. — V. 9, № 5. — P. 417–427.

[1] Работа поддержана РФФИ (проекты 18-41-160029, 20-08-01154).

© Соловьёв П.С., Коростелева Д.М., Соловьёв С.И., 2018

К ВОПРОСУ О СТРУКТУРЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЛИНЕЙНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

О.Д. Соломатин, Д.Е. Ломакин, Т.Н. Можарова (Орёл, ОГУ имени И.С. Тургенва)

denislomakin@rambler.ru

Пусть H — полное топологическое векторное пространство над полем $\mathbb{C}$, топология которого задается счетной системой полунорм $\{\|\cdot\|_p\}, p \in \mathbb{N}$. Пусть A — линейный оператор, действующий в H, вообще говоря, неограниченный, но замкнутый, с непустой областью определения $\mathcal{D}_\infty(A) = \cap_{k\geqslant 0}\mathcal{D}_\infty(A_k)$.

Рассмотрим неоднородное дифференциально-операторное уравнение (задачу Коши)

$$\frac{d^m u(t,x)}{dt^m} = A(u(t,x)) + f(t,x),$$

$$\frac{d^k u(0,x)}{dt^k} = x_k \in \mathcal{D}_\infty(A), k = 0,\ldots,m, m \geqslant 1,$$

где производные $d^m u(t,x)/dt^m$ векторнозначной функции $u(t,x)$ понимаются в сильном смысле, то есть по топологии пространства H, $f(t)$ — фиксированная непрерывная функция со значениями в H.

Задача рассматривается на определенном множестве M_0, обеспечивающем существование и единственность решения. Выбор пространства H осуществляется достаточно произвольно. Необходимо лишь, чтобы начальные данные x_k принадлежали H, и в этом пространстве оператор A был определен.

В работе [2] В.П. Громовым установлено, что для любого вектора $x_k \in M_0, k = 0,\ldots,m-1$ задача имеет единственное решение, которое является аналитической векторнозначной функцией $u(t,x)$ со значениями в пространстве H, и представляется в виде

$$u(t,x) = u_0(t,x_0) + u_1(t,x_1) + \cdots + u_{m-1}(t,x_{m-1}) + u_r(t,f),$$

где

$$u_k(t,x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(x_k)}{(nm+k)!} t^{nm+k},\ k = 0,\ldots,m-1,$$

$$u_r(t,f) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{(t-\xi)^{nm+m-1}}{(nm+m-1)!} A^n f(\xi,x)d\xi.$$

© Соломатин О.Д., Ломакин Д.Е., Можарова Т.Н., 2018

В основе доказательства лежат понятия операторных порядков и типов (см [1]). Из определений этих понятий следуют точные двусторонние оценки, позволяющие доказать необходимую сходимость рядов, представляющих решение рассматриваемой задачи. Далее прямой проверкой показывается, что построенные функции являются искомыми решениями. Аналогичная задача решена и для неоднородного уравнения. Открытым оставался вопрос о явном виде решений.

В настоящей работе ставилась цель рассмотреть структуру решений и показать способ формирования слагаемых $u_k(t, x_k)$ и $u_r(t, f)$.

Литература

1. Громов В.П. Порядок и тип линейного оператора и разложение в ряд по собственным функциям, Докл. АН СССР, 288:1 (1986), 27–31

2. Gromov V.P. Analytic solutions to differential operator equations in locally convex spaces. (English. Russian original) Zbl 1135.34329 Dokl. Math. 69, No. 1, 64-67 (2004); translation from Dokl. Akad. Nauk, Ross. Akad. Nauk 394, No. 3, 305-308 (2004).

СИНГУЛЯРНЫЙ ОПЕРАТОР ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ С КРИТИЧЕСКИМИ ТОЧКАМИ НА ГРАНИЦАХ БЕСКОНЕЧНОГО ИНТЕРВАЛА

В.В. Старинец (Москва, ВШПиМ МПУ)

vstarinets@mail.ru

$\Pi = \sum_{\sigma=\pm\nu, \varkappa=\pm\mu}^{[\dot{+}]} \Pi_{(\sigma,\varkappa)}$ $(\sigma, \mu \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}, \nu \pm \mu \notin \mathbb{Z})$, $\Pi_{(\sigma,\varkappa)}$ π-пространство ранга $r_\sigma + r_\varkappa$ $(r_\tau = [\frac{|\tau|-\tau}{2}] - [\frac{|\tau|-\tau}{4}])$, возникающее пополнением $\{\beta^{(\sigma,\varkappa)} Q(x^2)\}$ $\big(Q(z)$ — все полиномы, $\beta^{(\sigma,\varkappa)} = x^{\sigma+1/2}(1+x^2)^{\varkappa/2}\big)$. $[f, g] = \frac{\operatorname{Reg} \lim\limits_{t \to +\infty}}{\sin^2 \pi\nu} \fint_{-t}^{t} f\overline{g}\, dx$ — J-метрика в Π, Reg означает регуляризацию границ $x = \pm\infty$ регуляризатором $R_\gamma(x) = \frac{-\cos((2\gamma+1)\operatorname{arctg} x)}{(1+1/x^2)^{-\gamma-1/2} \sin \pi\gamma}$, $\fint$ — point-интеграл ([1],[2]). Выражение $l(y) = \big[(x^2+1)\, y'\big]' + \big[\frac{\mu^2}{x^2+1} - \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2}\big]\, y$ порождает оператор $\mathrm{L} = \sum_{\sigma=\pm\nu, \varkappa=\pm\mu}^{[\dot{+}]} \mathrm{L}_{(\sigma,\varkappa)} (= \mathrm{L}^c)$. Множество $\lambda_n^{(\sigma,\varkappa)} = (\sigma + \varkappa + 2n + 1)^2 - \frac{1}{4}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ образует спектр оператора $\mathrm{L}_{(\sigma,\varkappa)}$: $\mathrm{L}_{(\sigma,\varkappa)} p_n^{(\sigma,\varkappa)} = \lambda_n^{(\sigma,\varkappa)} p_n^{(\sigma,\varkappa)}$, $p_n^{(\sigma,\varkappa)} = \beta^{(\sigma,\varkappa)} P_{2n}^{(\sigma,\varkappa)}$ $\big(P_{2n}^{(\sigma,\varkappa)}$ — полиномы ([1], §6.5)$\big)$ — базис в $\Pi_{(\sigma,\varkappa)}$: $[p_n^{(\sigma,\varkappa)}, p_k^{(\sigma,\varkappa)}] = J_n^{(\sigma,\varkappa)} \delta_{n,k}$, $J_n^{(\sigma,\varkappa)} = \operatorname{sgn}\Big(\frac{A_{\sigma,\varkappa}\, \Gamma(\sigma+n+1)\, \Gamma(\varkappa+n+1)}{(\sigma+\varkappa+2n+1)\, \Gamma(\sigma+\varkappa+n+1)}\Big)$, и $\sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(\sigma,\varkappa)J}(x) p_n^{(\sigma,\varkappa)}(y) = \delta^{(\sigma,\varkappa)}(x; y)$ — δ-функция из $\Pi'_{(\sigma,\varkappa)}$ оснащения $\Pi^\circ_{(\sigma,\varkappa)} \subset \Pi_{(\sigma,\varkappa)} \subset \Pi'_{(\sigma,\varkappa)}$. Для оператора $\mathrm{X}_{(\sigma,\varkappa)} = \mathrm{X}^c_{(\sigma,\varkappa)}$ умножения на x^2 имеем $[\mathrm{X}_{(\sigma,\varkappa)} - \lambda]\Delta_\lambda^{(\sigma,\varkappa)} = 0$,

© Старинец В.В., 2018

$\Delta_\lambda^{(\sigma,\varkappa)}(x) = \sum_{n=0}^\infty P_{2n}^{(\sigma,\varkappa)J}(\sqrt{\lambda})\, p_n^{(\sigma,\varkappa)}(x)$; $[\mathrm{X}_{(\sigma,\varkappa)} - \lambda_\tau]\Delta_{\lambda_\tau(i)}^{(\sigma,\varkappa)} = \Delta_{\lambda_\tau(i-1)}^{(\sigma,\varkappa)}$, $\Delta_{\lambda_\tau(i)}^{(\sigma,\varkappa)} = \frac{\partial_\lambda^i \Delta_\lambda^{(\sigma,\varkappa)}}{i\,!}|_{\lambda=\lambda_\tau} \in \Pi_{(\sigma,\varkappa)}$, $[f, \Delta_{\lambda_\tau(i)}^{(\sigma,\varkappa)}] = \sum_{k=0}^\infty \xi_k \frac{\partial_\lambda^i P_{2k}^{(\sigma,\varkappa)}(\sqrt{\lambda})}{i\,!}|_{\lambda=\lambda_\tau}$ $(f = \sum_{k=0}^\infty \xi_k p_k^{(\sigma,\varkappa)})$, $[\Delta_{\lambda_\tau(i)}^{(\sigma,\varkappa)}, \Delta_{\lambda_{\tau'}(i')}^{(\sigma,\varkappa)}] = 0$ $(i, i' \in \mathbb{Z}_{0,r_\tau - 1})$, $\lambda_\sigma = 0$, $\lambda_\varkappa = -1$; $\mathrm{Lin}\big\{\{\Delta_{\lambda_\tau(i)}^{(\sigma,\varkappa)}\}_{i=0}^{r_\tau - 2}\big\}_{\tau\in\{\sigma,\varkappa\}} \subset \big\{\sum_{k=0}^\infty \xi_k p_k^{(\sigma,\varkappa)} : \sum_{k=0}^\infty |\lambda_k^{(\sigma,\varkappa)} \xi_k|^2 < \infty\big\}$, $[\mathrm{L}_{(\sigma,\varkappa)} - \lambda_i^{(\sigma,\varkappa)}]\Delta_{\lambda_\tau(i)}^{(\sigma,\varkappa)} = (-1)^{\lambda_\tau} 4(i+1)(\tau+i+1)\Delta_{\lambda_\tau(i+1)}^{(\sigma,\varkappa)}$ $(i \in \mathbb{Z}_{0,r_\tau - 2})$.

Литература

1. Старинец В. В. Обобщенно классические ортогональные многочлены. — М.: МГУП. 2000. — 462 с. (www.vladimirstarinets.com).

2. Старинец В. В. Сингулярные операторы Штурма—Лиувилля в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: МГУП. 2010. — 1000 с.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ КАЧЕСТВЕННЫХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИФФУЗИИ НЕРАВНОВЕСНЫХ НЕОСНОВНЫХ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА, ГЕНЕРИРОВАННЫХ ШИРОКИМ ПУЧКОМ ЭЛЕКТРОНОВ В ПЛАНАРНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ СТРУКТУРАХ[1]

М.А. Степович*, Д.В. Туртин, В.В. Калманович***, Е.В. Серегина****** (*, ***Калуга, КГУ им. К.Э. Циолковского, **Иваново, ИФ РЭУ им. Г.В. Плеханова, ****Калуга, КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана)

**m.stepovich@rambler.ru*, ***turtin@mail.ru*, ****v572264@yandex.ru*, *****evfs@yandex.ru*

Ранее нами получены некоторые результаты анализа дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих математические модели диффузии неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ) [1] и их последующей излучательной рекомбинации [2] в однородных прямозонных полупроводниках. В настоящей работе подобное изучение проведено для случая возбуждения вышеуказанных процессов широким электронным пучком. Использование качественных методов математического анализа позволило получить оценки результатов диффузии ННЗ, которые могут быть использованы при проведении практических расчётов.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19–03–00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18–41–400001).

© Степович М.А., Туртин Д.В., Калманович В.В., Серегина Е.В., 2018

Литература

1. Polyakov A.N. Qualitative properties of a mathematical model of the diffusion of excitons generated by electron probe in a homogeneous semiconductor material / A.N. Polyakov, A.N. Smirnova, M.A. Stepovich, D.V. Turtin // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2018. — Vol. 39, no. 2. — pp. 259–262.

2. Stepovich Mikhail A. On the correctness of mathematical models of time–of–flight cathodoluminescence of direct–gap semiconductors / Mikhail A. Stepovich, Dmitry V. Turtin, Elena V. Seregina, Veronika V. Kalmanovich // ITM Web of Conferences. — 2019. — Vol. 30. — 07014 (7 pp.).

К РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.С. Сырых, Д.Г. Усков (Воронеж, ВГУ)

zsyryhz@mail.ru, uskov.dan@mail.ru

В методе подобных операторов [1]-[4] важными являются вопросы разрешимости соответствующих операторных уравнений. Рассмотрим уравнение, возникающее при применении метода К.О. Фридрихса подобных операторов (см. [1]).

Пусть $\mathcal{X}$ — банахово пространство и $BL(\mathcal{X})$ — банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathcal{X}$ с нормой $\|X\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Xx\|$, $x \in \mathcal{X}$, $X \in BL(\mathcal{X})$. В банаховом пространстве $\mathcal{X}$ рассматривается уравнение

$$x = Ax + b, \tag{1}$$

где $A \in BL(\mathcal{X})$, $x \in \mathcal{X}$, $b \in \mathcal{X}$. Уравнение метода Фридрихса подобных операторов [1] относится к уравнению рассматриваемого типа.

Теорема 1. *Пусть выполнено одно из следующих двух условий:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\|A^{n+1}y\|}{\|A^n y\|} = 0$, *для любого* $y \in \mathcal{X}$*;*

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n y\|^{\frac{1}{n}} = 0$, *для любой* $y \in \mathcal{X}$*;*

Тогда оператор $I - A$ *обратим и обратный к нему оператор определяется формулой*

$$(I - A)^{-1}y = \sum_{k=1}^{\infty} A^k y,$$

для любого $y \in \mathcal{X}$*, причем выписанный ряд является абсолютно сходящимся рядом, и уравнение (1) имеет решение, определяемое формулой* $x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k b$*.*

© Сырых А.С., Усков Д.Г., 2018

Заметим, что выполнение условий Теоремы 1 не гарантирует единственность решения уравнения (1).

Литература

1. Friederichs K.O. Lectures on advanced ordinary differential questions / K.O. Friederichs. — New York : Gordon and Breach Science Publishers, 1965. — 205 p.

2. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов / А.Г. Баскаков. — Воронеж : Издательство ВГУ, 1987. — 165 с.

3. Баскаков А.Г. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов / А.Г. Баскаков // Сиб. матем. журн. — 1983. — Т. 24, № 1. — С. 21–39.

4. Баскаков А.Г. Замена Крылова-Боголюбова в теории возмущений линейных операторов / А.Г. Баскаков // Укр. матем. журн. — 1983. — Т. 36, № 5. — С. 606–611.

ОБ АНАЛИТИЧНОСТИ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ[1]

Тихонов Ю.А. (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)

yurytik@yandex.ru

Малые поперечные колебания вязкоупругого трубопровода единичной длины в безразмерных переменных без учёта внешнего трения описываются интегро-дифференциальным уравнением, которое в операторном виде задаётся следующим образом [1], [2]:

$$\ddot{u}(t)+\alpha A\dot{u}(t)+C^2u(t)+\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{c_j}{\gamma_j}Au(t)-\int_0^t c_j e^{-\gamma_j(t-s)}Au(s)ds=0,\ t>0 \tag{1}$$

$$u(+0)=\varphi_0,\ \dot{u}(+0)=\varphi_1. \tag{2}$$

Операторы A и C – самосопряжёные операторы, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H, A и C строго положительны. Оператор A^{-1} — компактный, $Dom(C)=Dom(A^{1/2})$. Параметр α — положителен и пропорционален коэффициенту внутреннего трения вязкоупругой среды Кельвина–Фойгхта [2], параметры $c_j>0$, $0<\gamma_j<\gamma_{j+1}\to+\infty$ и при этом:

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{c_j}{\gamma_j}<1$$

[1] Работа выполнена при поддержке Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (грант «Современные проблемы фундаментальной математики и механики»).

© Тихонов Ю.А., 2018

Рассмотрев новые неизвестные функции, удовлетворяющие уравнениям:

$$\dot{\rho}(t) = -Cu(t),$$

$$\dot{u}_j(t) = \sqrt{\frac{c_j}{\gamma_j}} A^{1/2} u(t) - \gamma_j u_j(t),\ j = 1, 2, \dots$$

и начальным условиям

$$\rho(+0) = \rho_0 = -C^{-1}(\varphi_1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} \varphi_0),$$

$$u_j(+0) = 0,\ j = 1, 2, \dots$$

задачу (1) – (2) можно записать в виде

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A} x(t),$$

$$x(+0) = x_0,$$

где $x(t) = (u(t), \rho(t), u_1(t), \dots)^T$, $x_0 = (u_0, \rho_0, 0, \dots)^T$. $\mathcal{A}$ — матрица с операторными коэффциентами [4]:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\alpha A & -C & -\sqrt{\frac{c_1}{\gamma_1}} A^{1/2} & \dots & -\sqrt{\frac{c_j}{\gamma_j}} A^{1/2} & \dots \\ C & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \sqrt{\frac{c_1}{\gamma_1}} A^{1/2} & 0 & -\gamma_1 I & 0 & \dots & \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \dots \\ \sqrt{\frac{c_j}{\gamma_j}} A^{1/2} & 0 & 0 & \dots & -\gamma_j I & \dots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

Сформулируем теперь основной результат:

Теорема 1. *$\mathcal{A}$ является диссипативным оператором с плотной областью определения в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$. Более того, этот оператор является генератором сжимающей сильно непрерывной полугруппы операторов.*

Если дополнительно выполняется условие

$$\left\| A^{-1/2} C h \right\| < c \left\| h \right\|$$

для некотрого $c > 0$ и любого $h \in Dom(A^{1/2})$, то $\mathcal{A}$ является генератором аналитической полугруппы.

Литература

1. Милославский А.И. О спектре неустойчивости операторного пучка. / А.И. Милославский// Мат. заметки. — 1991. — Т. 49, № 4. — С. 88–94

2. Власов В.В., Раутиан Н.А. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений /В.В. Власов, Н.А. Раутиан. — М. : Макс Пресс, 2016. —488 с.

3. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости /А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря. — М. : Наука, 1970. —279 с.

4. Закора Д.А. Экспоненциальная устойчивость одной полугруппы и приложения. / Д.А. Закора// Мат. заметки. — 2018. — Т. 103, № 5. — С. 702–719

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ РЭЛЕЯ

В.Б. Тлячев, А.Д. Ушхо, Д.С. Ушхо (Майкоп, Адыгейский госуниверситет)
tlyachev@adygnet.ru

Рассматривается уравнение Рэлея в виде

$$CL\frac{d^2x}{dt^2} + F\left(\frac{dx}{dt}\right) + x = 0. \tag{1}$$

Оно возникает при анализе работы схемы электронного триода с обратной связью. Автор монографии [1] отмечает, что легко построить автоколебательные системы, имеющие любое число предельных циклов. Однако, по его же утверждению, доказательство единственности предельного цикла для какого-либо конкретного случая является не простой задачей.

Уравнение (1) представим в виде системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\omega^2 x - yf(y). \end{cases} \tag{2}$$

В данной заметке находятся достаточные условия существования периодического решения, а также условия существования и единственности такого решения системы (2). Доказательство существования хотя бы одного предельного цикла системы (2) основано на применении кривых топографической системы Пуанкаре [2]. Единственность предельного цикла доказывается с использованием результатов монографии [3].

Литература

1. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах / Дж. Стокер. — М. : Изд-во иностр. литературы, 1952. — 264 с.

© Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С., 2018

2. Андронов А.А. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. — М. : Наука, 1966. — 568 с.

3. Отроков Н.Ф. Аналитические интегралы и предельные циклы / Н.Ф. Отроков. — Горький: Волго-Вятское книжное изд-во, 1972. — 216 с.

ОЦЕНКИ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В $C(D)$[1]

Н.И. Трусова (Липецк, ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского)
trusova.nat@gmail.com

Через $D=(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n)$ обозначим конечный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$. Линейным оператором с частными интегралами (ЧИ) является оператор (см. [1]) вида

$$(Ku)(x)=\sum_{\alpha}(K_{\alpha}^{(m)}u)(x), \tag{1}$$

$$(K_{\alpha}^{(m)}u)(x)=\sum_{\alpha}\int\limits_{D_{\alpha}^{(m)}} k_{\alpha}(x;t_{\alpha})u(x_{\overline{\alpha}},t_{\alpha})dt_{\alpha},$$

где α — номера переменных интегрирования, а $\overline{\alpha}$ — номера свободных переменных в ЧИ K_{α}, m - размерность области интегрирования.

Получены оценки для операторов с ЧИ в пространстве непрерывных функций $C(D)$.

При $\alpha=0$ ($\Rightarrow m=0$) в (1) оператор $K_0^{(0)}$ — оператор умножения на функцию. Для этого оператора получена оценка

$$\|K_0^0u\|_{C(D)}\leqslant C_0\|u\|_{C(D)},\ C_0=\|k_0\|_{C(D)}. \tag{2}$$

Для частных интегралов в (1) (т.е. при $0<m<n$) имеем оценку

$$\|K_{\alpha}^{(m)}u\|_{C(D)}\leqslant C_{\alpha}\|u\|_{C\left(D_{\overline{\alpha}}^{(n-m)};L_p(D_{\alpha}^{(m)})\right)},$$

$$C_{\alpha}=\|k_{\alpha}\|_{C\left(D_{\overline{\alpha}}^{(n-m)};L_q(D_{\alpha}^{(m)})\right)}. \tag{3}$$

При $\alpha=(1,2,\ldots,n)$ (т.е. при $m=n$) получена оценка

$$\|K_{1,\ldots,n}^{(n)}u\|_{C(D)}\leqslant C_{1,\ldots,n}\|u\|_{L_p\left(D^{(n)}\right)},$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-41-480002).

© Трусова Н.И., 2018

$$C_{1,\dots,n} = \|k_\alpha\|_{C\left(D^{(n)};L_q(D^{(n)})\right)}. \tag{4}$$

Литература

1. Appell J.M. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / J.M. Appell, A.S. Kalitvin, P.P. Zabrejko. — New York : Marcel Dekker, 2000. — 560 p.p.

О РЕШЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ[1]

Д.В. Туртин*, М.А. Степович, В.В. Калманович***, Е.В. Серегина****** (*Иваново, ИФ РЭУ им. Г.В. Плеханова, **, ***Калуга, КГУ им. К.Э. Циолковского, ****Калуга, КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана)

**turtin@mail.ru, **m.stepovich@rambler.ru, ***v572264@yandex.ru, ****evfs@yandex.ru*

Ранее описано использование метода Фурье в сочетании с матричным методом для моделирования процессов диффузии [1] и процесса остывания [2] в многослойной планарной структуре с произвольным числом слоёв. В настоящей работе проведено сравнение этого подхода с результатами решения такой задачи методом интегральных представлений. Показано, что метод интегральных представлений для данной задачи позволяет также получить решение, которое может быть использовано для дальнейшего изучения рассматриваемой математической модели.

Литература

1. Серегина Е.В. Сравнительный анализ матричного метода и метода конечных разностей для моделирования распределения неосновных носителей заряда в многослойной планарной полупроводниковой структуре / Е.В. Серегина, В.В. Калманович, М.А. Степович // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2019. — Т. 172. — С. 108–116. http://mi.mathnet.ru/into549

2. Гладышев Ю.А. О применении матричного метода для математического моделирования процессов теплопереноса / Ю.А. Гладышев, В.В. Калманович, М.А. Степович // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 20–й международной Саратовской зимней школы (Саратов, 28 января–1 февраля 2020 г.). — Саратов: Изд–во „Научная книга“, 2020. — С. 118–121. http://school-20.sgu.ru/sbornik.pdf

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19–03–00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18–41–400001).

© Туртин Д.В., Степович М.А., Калманович В.В., Серегина Е.В., 2018

ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ ЭНТРОПИЙНЫМ МОДЕЛИРОВАНИЕМ И КОРРЕЛЯЦИОННЫМ АНАЛИЗОМ[1]

А.Н. Тырсин (Екатеринбург, УрФУ)
at2001@yandex.ru

Определение. *Пусть заданы два непрерывных случайных вектора* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_m), \mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_l), m \geqslant 1, l \geqslant 1$. *Энтропия взаимосвязи между* $\mathbf{X}$ *и* $\mathbf{Y}$ *определяется как*

$$H(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) = H(\mathbf{X}) + H(\mathbf{Y}) - H(\mathbf{Z}) = H(\mathbf{X})_R + H(\mathbf{Y})_R - H(\mathbf{Z})_R,$$

где $\mathbf{Z} = \mathbf{X} \cup \mathbf{Y} = (X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_l)$, $H(\mathbf{X})_R$, $H(\mathbf{Y})_R$, $H(\mathbf{Z})_R$ — *энтропии самоорганизации стохастических систем* $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ *[1].*

Теорема. *Пусть у всех компонент векторов* $\mathbf{X}$ *и* $\mathbf{Y}$ *существуют дисперсии. Тогда*

$$H(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) = -\frac{1}{2} \ln d_e(\mathbf{X}, \mathbf{Y}),$$

где $d_e(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 1 - \frac{1-d_e(\mathbf{Z})}{(1-d_e(\mathbf{X}))(1-d_e(\mathbf{Y}))}$ — *коэффициент тесноты корреляционной взаимозависимости между* $\mathbf{X}$ *и* $\mathbf{Y}$, $d_e(\mathbf{X}) = 1 - \prod\limits_{k=2}^{m} (1 - R^2_{X_k/X_1X_2\ldots X_{k-1}})$, $d_e(\mathbf{Y})$, $d_e(\mathbf{Z})$ — *коэффициенты тесноты совместной корреляционной связи в случайных векторах* $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ *[2].*

Следствие 1. *Пусть* U *и* V – *непрерывные случайные величины, у которых существуют дисперсии. Тогда энтропии взаимосвязи между* U *и* V *и между* $\mathbf{X}$ *и* V *равны*

$$H(U \cap V) = -\frac{1}{2} \ln(1 - R^2_{V/U}), H(\mathbf{X} \cap V) = -\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1 - d_e(\mathbf{X} \cup V)}{1 - d_e(\mathbf{X})}\right).$$

Следствие 2. *Для гауссовских случайных векторов* $\mathbf{X}$ *и* $\mathbf{Y}$

$$H(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) = -\frac{1}{2} \ln \frac{|\mathbf{R_Z}|}{|\mathbf{R_X}| \cdot |\mathbf{R_Y}|},$$

где $\mathbf{R_X}$, $\mathbf{R_Y}$, $\mathbf{R_Z}$ — *корреляционные матрицы.*

Литература

1. Тырсин А.Н. Энтропийное моделирование многомерных стохастических систем / А.Н. Тырсин. — Воронеж : Научная книга, 2016. — 156 с.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-41-660008).

© Тырсин А.Н., 2018

2. Тырсин А.Н. Скалярная мера взаимозависимости между случайными векторами / А.Н. Тырсин // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2018. — Т. 84. — № 7. — С. 76–82.

ОБ АСИМПТОТИЧНОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ

В.И. Усков (Воронеж, ВГЛТУ им. Г.Ф. Морозова)
vum1@yandex.ru

Рассматривается задача:

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = (A + \varepsilon I)x(t, \varepsilon) + F(t), \tag{1}$$

$$x(0, \varepsilon) = x^0 \in E, \tag{2}$$

где A — линейный ограниченный фредгольмов оператор [1] (далее, Ф-оператор), действующий в банаховом пространстве E, $\operatorname{dom} A = E$, $x(t, \varepsilon)$ — искомая вектор-функция из E, $F(t)$ — заданная достаточно гладкая вектор-функция со значениями в E, $t \in [0, T]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Системами с малым параметром при старшей производной описывается движение вязкого потока [2], поведение тонких и гибких пластин и оболочек, процесс обтекания затупленного тела сверхзвуковым потоком вязкого газа, процессы в социально-экономических системах [3] и др.

В настоящей работе построено асимптотическое разложение решения по степеням параметра ε, для чего применяется метод Васильевой-Вишика-Люстерника [4]. Определены условия, при которых имеет место явление погранслоя.

Задача Коши для уравнения (1) с Ф-оператором A без возмущения εI решена в работе [5] (случай одномерного ядра) и в работе [6] (случай многомерного ядра).

Подробное решение задачи отправлено в печать в [7].

Литература

1. Никольский С.М. Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах / С.М. Никольский // Известия АН СССР. Серия математическая. — 1943. — Т. 7, вып. 3. — С. 147–166.

2. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса / Ф.Л. Черноусько // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1965. — Т. 5, № 6. — С. 1049–1070.

© Усков В.И., 2018

3. Грибковская И.В. Управляемость в больших социально-экономических системах с позиции разделения движений / И.В. Грибковская, М.Г. Дмитриев // Теория активных систем. Труды международной научно-практической конференции «Управление большими системами-2011». — Т. 2 ИПУ РАН Москва, Россия, 2011. — С. 93–96.

4. Васильева А.Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. — М. : Наука, 1973. — 272 с.

5. Треногин В.А. Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника-Вишика / В.А. Треногин // Успехи математических наук. — 1970. — Т. 25, вып. 4 (154). — С. 123–156.

6. Зубова С.П. Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения первого порядка в банаховом пространстве / С.П. Зубова, В.И. Усков // Вестник Воронежского госуниверситета. Серия : Физика. Математика. — 2016. — № 3. — С. 147–155.

7. Усков В.И. Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с возмущенным фредгольмовым оператором / В.И. Усков // Вестник Тамбовского университета. Серия : Естественные и технические науки. — Отпр. в печать.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.И. Усков (Воронеж, ВГЛТУ им. Г.Ф. Морозова)
vum1@yandex.ru

Рассматривается задача Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = D\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{1}$$

$$u(0, y) = \varphi(y) \in E, \tag{2}$$

где D — линейный ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве E, $\overline{\operatorname{dom} D} = E$, $\varphi(y)$ — заданная функция; $x \in [0, X]$, $y \in [0, Y]$.

Под решением задачи (1), (2) подразумевается функция $u(x, y)$, дифференцируемая по x при каждом $y \in [0, Y]$ и дифференцируемая по y при каждом $x \in [0, Y]$.

Исследуется случай: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения оператора D единичной алгебраической кратности. Пусть $h_1, h_2, \ldots, h_n$ — собственные векторы, отвечающие этим собственным значениям.

© Усков В.И., 2018

Методом невырожденного преобразования подобия $u = Kv$ система (1) приводится к жордановой форме [1]. Преобразованная таким образом система решается методом характеристик.

Пусть начальное условие $\varphi(y)$ разложено по базису $h_1, h_2, \ldots, h_n$:

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(y) h_k. \tag{3}$$

Получено следующее утверждение.

Теорема. *Решение задачи* (1)-(3) *равно*

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(y + \lambda_k x) h_k.$$

Литература

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. — М. : Физматлит, 2004. — 560 с.

2. Усков В.И. Решение уравнения в частных производных первого порядка с операторным коэффициентом / В.И. Усков // Материалы XVII молодежной школы-конференции «Лобачевские чтения – 2018». — Казань: Изд-во Казанского матем. общ-ва, Изд-во Академии наук РТ 2018. — Т. 56. — С. 292–293.

СТУДЕНЧЕСКИЕ ГОДЫ ПРОФЕССОРА ПОКОРНОГО Ю.В.

О.Ф. Ускова (Воронеж, ВГУ)
sunny.uskova@list.ru

Юлий Витальевич Покорный — выдающийся ученый, замечательный педагог, неутомимый организатор науки и математического просвещения, энергичный, доброжелательный, общительный, душевно щедрый человек.

Впервые я познакомилась с Юлием Витальевичем, будучи ученицей 9 класса средней женской школы № 32 г. Воронежа, в 1955 году в университете на занятиях математического кружка. Занятия проходили в старом корпусе ВГУ на Проспекте Революции отдельно для учеников седьмых, восьмых, девятых и десятых классов. Наш руководитель И.Б. Руссман отмечал быстроту и оригинальность решения заданий, выполненных Покорным Ю.В. На весенних каникулах была организована олимпиада отдельно для 7, 8, 9 и 10 классов. Ю.В. Покорный опоздал на открытие олимпиады и ошибочно зашел в аудиторию, где соревновались десятиклассники (хотя сам учился в

© Ускова О.Ф., 2018

9-ом классе). На очередном занятии кружка, где разбирались результаты олимпиады девятиклассников, Покорный Ю.В. получил замечание за отсутствие на олимпиаде. Когда работа Покорного Ю.В. была найдена, оказалось, что он — девятиклассник показал лучший результат среди десятиклассников.

После окончания средней школы и успешной сдачи экзаменов Покорный Ю.В. поступил на физико-математический факультет ВГУ, а я, завоевав золотую медаль, в педагогический институт. Знаменитый ученый и педагог М.А. Красносельский способствовал переводу нашей группы после окончания 2 курса пединститута на математико-механический факультет ВГУ, после чего мы оказались в одном потоке с Ю.В. Покорным, который был самым сильным студентом в нашем потоке [1]. Он старался понять весь теоретический материал, решить все задания. Однажды на лекции по дифференциальным уравнениям профессор Перов А.И. спросил у Покорного Ю.В.: "Почему Вы записываете только формулировку теоремы, а пропускаете доказательства?" . На что студент Покорный ответил: "Если условие теоремы сформулировано верно, я без проблем смогу ее доказать". После такого ответа Перов А.И. несколько раз вызывал студента Покорного к доске, чтобы проверить сможет ли он доказать новую теорему и Покорный справлялся с доказательствами успешно.

Занятие математикой, учеба только на отличные отметки не мешали Покорному Ю.В. быть всесторонне развитой личностью. Он с удовольствием посещал концерты "Университетской весны" , принимал участие в лыжных соревнованиях, посещал баскетбольные и шахматные игры. Летом 1959 года после успешной сдачи летней сессии 3 курса Покорный Ю.В. в составе группы студентов физического и математико-механического факультетов работал по проведению электричества в университетском спортлагере Веневитиново от хутора Маклок.

В заключение отметим, что Покорный Ю.В. полностью разделял слова ректора МГУ академика В.А. Садовничего: "Математическое образование — один из важнейших факторов, определяющих уровень экономического и общественно-политического развития страны. Неслучайно годы расцвета нашей математической школы стали годами космического приоритета нашей страны. Именно тогда была построена система математического образования, достижения которой признаны во всем мире"[2].

Литература

1. Ускова О.Ф. Марк Александрович Красносельский — выдающийся профессор и любимый педагог / О.Ф. Ускова // Современные методы теории функций и смежные вопросы : материалы Воронеж.

зимней мат. школы. — Воронеж : ИПЦ «Научная книга», 2020. — С. 282–285.

2. Садовничий В.А. О математике и ее преподавании в школе / В.А. Садовничий // Доклад на Всероссийском съезде учителей математики в МГУ им. М.В. Ломоносова. — М. : Изд-во Моск. ун-та. — 2010. — 24 с.

О ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ОБЛАСТИ С НЕГЛАДКИМИ БОКОВЫМИ ГРАНИЦАМИ

К.Д. Федоров (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
konstantin-dubna@mail.ru

В полосе $D = \mathbb{R} \times (0, T)$, $0 < T < \infty$ рассматривается область $\Omega = \{(x,t) \in D : g_1(t) < x < g_2(t)\}$ с боковыми границами $\Sigma_k = \{(x,t) \in \overline{D} : x = g_k(t)\}$, $k = 1, 2$, $g_2(t) - g_1(t) \geqslant d > 0$, $t \in [0, T]$.

Функции $g_k \in C^1(0, T]$ и справедливы оценки: $\left|g_k'(t)\right| \leqslant C\frac{\omega(t^{\frac{1}{2}})}{t^{\frac{1}{2}}}$, $k = 1, 2, t \in (0, T]$, где ω – некоторый модуль непрерывности.

Пусть $a \in C[0, T]$ и $\delta \leqslant a(t) \leqslant \dfrac{1}{\delta}$, $t \in [0, T]$ для некоторого $\delta > 0$. В области Ω рассматривается первая начально-краевая задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u\Big|_{t=0} = 0,\ g_1(0) \leqslant x \leqslant g_2(0), \tag{2}$$

$$u\Big|_{\Sigma_1} = \psi_1, u\Big|_{\Sigma_2} = \psi_2. \tag{3}$$

Если коэффициент a дополнительно удовлетворяет условию Дини, граничные функции ψ_k – условию Дини-Гельдера, и модуль непрерывности ω – условию Дини, то классическая разрешимость задачи (1)–(3) в классе $C^{1,0}_{x,t}(\overline{\Omega})$ следует из [1]. При таких условиях на данные задачи из [2] следуют оценки, характеризующие рост старших производных решения при стремлении к «боковым» границам области Ω.

В настоящей работе методом граничных интегральных уравнений доказывается, что если $\psi_1, \psi_2 \in \underset{0}{C}{}^1[0, T]$, то существует (единственное) классическое решение задачи (1)–(3). Это решение принадлежит классу $C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$ и справедливы соответствующие оценки корректности.

© Федоров К.Д., 2018

Отдельно рассматривается случай с ненулевым начальным условием, при этом функции g_k, задающие боковые границы области, имеют кусочно-непрерывные производные на $[0, T]$.

Метод настоящей работы отличается от метода из [1] выбором потенциала для представления решения.

Литература

1. Камынин Л.И. О решении методом потенциалов основных краевых задач для одномерного параболического уравнения второго порядка / Л.И. Камынин // Сибирский математический журнал. — 1974. — Т. 15. №4. — С. 806–834.

2. Бадерко Е.А., Черепова М.Ф. Смешанная задача для параболической системы на плоскости и граничные интегральные уравнения / Е.А. Бадерко, М.Ф. Черепова // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2018. — Т. 64, №1. — С. 20–36.

О КОММУТИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРАХ

В.И. Фомин (Тамбов)

vasiliyfomin@bk.ru

Пусть E — нормированное пространство; $\Phi(E)$ и $L(E)$ — соответственно пространство линейных операторов и пространство ограниченных линейных операторов, действующих в пространстве E.

Лемма 1. *Пусть $A, B \in \Phi(E)$; $BAx = ABx$, $x \in \Omega$, где $\Omega = D(AB) \cap D(BA)$; существует $A^{-1} \in L(E)$. Тогда $BA^{-1}y = A^{-1}By$, $y \in A(\Omega)$, где $A(\Omega) = \{y = Ax | x \in \Omega\}$.*

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1 и, кроме того, существует $B^{-1} \in L(E)$. Тогда $A^{-1}B^{-1}z = B^{-1}A^{-1}z$, $z \in B(A(\Omega))$, где $B(A(\Omega)) = \{z = By | y \in A(\Omega)\} = \{z = BAx | x \in \Omega\}$.*

Заметим, что в силу коммутируемости A и B на Ω $B(A(\Omega)) = A(B(\Omega))$.

Лемма 3. *Пусть $A, B \in \Phi(E)$; $\rho(A) \neq \varnothing$, где $\rho(A)$ — резольвентное множество оператора A; $BAx = ABx$, $x \in \Omega$. Тогда $BR_A(\lambda)y = R_A(\lambda)By$, $\lambda \in \rho(A)$, $y \in \Gamma_A(\lambda)(\Omega)$, где $R_A(\lambda) = (A - \lambda \mathrm{I})^{-1}$ — резольвента оператора A, $\Gamma_A(\lambda) = A - \lambda \mathrm{I}$ — генератор резольвенты оператора A, $\Gamma_A(\lambda)(\Omega) = \{y = \Gamma_A(\lambda)x | x \in \Omega\} =$
$\{y = Ax - x | x \in \Omega\}$.*

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы 3 и, кроме того, $\rho(B) \neq \varnothing$. Тогда $R_A(\lambda)R_B(\mu)z = R_B(\mu)R_A(\lambda)z$, $\lambda \in \rho(A)$, $\mu \in \rho(B)$, $z \in \Gamma_B(\mu)(\Gamma_A(\lambda)(\Omega))$, где $\Gamma_B(\mu)(\Gamma_A(\lambda)(\Omega)) = \{z = \Gamma_B(\mu)y |$
$y \in \Gamma_A(\lambda)(\Omega)\} = \{z = (B - \mu \mathrm{I})(A - \lambda \mathrm{I})x | x \in \Omega\}$.*

Заметим, что в силу коммутируемости A и B на Ω
$\Gamma_B(\mu)(\Gamma_A(\lambda)(\Omega)) = \Gamma_A(\lambda)(\Gamma_B(\mu)(\Omega))$.

© Фомин В.И., 2018

Естественно, предполагается, что рассматриваемые в леммах 1 — 4 множества содержат ненулевые элементы.

Аналоги лемм 1, 3 в случае $B \in L(E)$ приведены в [1, с. 218, с. 220].

Литература

1. Т. Като. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. — М. : Мир, 1972. — 740 с.

О ЛИНЕЙНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.И. Фомин (Тамбов)

vasiliyfomin@bk.ru

В банаховом пространстве E рассматривается уравнение (1) $x''(t) + Bx'(t) + Cx(t) = f(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, и соответствующее ему однородное уравнение (2) $x''(t) + Bx'(t) + Cx(t) = 0$, $0 \leqslant t < \infty$, где $B, C \in P(E)$; $P(E)$ — множество замкнутых неограниченных линейных операторов, действующих в E, с плотными в E областями определения; $f(t) \in C([0, \infty); E)$. Предполагается, что $\overline{D(B^2) \cap D(C)} = E$; $BCx = CBx$, $x \in D(BC) \cap D(CB)$. Пусть операторный дискриминант $\Delta = B^2 - 4C$ характеристического операторного уравнения (3) $Z^2 + BZ + C = O$ имеет вид $\Delta = -F^2$, $F \neq O$. Тогда уравнение (3) имеет комплексно сопряжённые корни $Z_{1,2} = B_1 \pm \mathrm{J}F_1$, где $B_1 = -2^{-1}B$, $F_1 = 2^{-1}F$. Пусть 1) оператор B_1 является генератором полугруппы $U(t)$ класса C_0; 2) оператор $Q = 4^{-1}\Delta = B_1^2 - C$ с оператором B_1, удовлетворяющим условию 1), является производящим оператором сильно непрерывной косинус оператор-функции $C(t)$; 3) $f(t) \in \Omega$ при каждом $t \in [0, \infty)$, где $\Omega = D(B^3) \cap D(BC) \cap D(CB)$; $Bf(t)$, $B^2 f(t)$, $Cf(t) \in C([0, \infty); E)$.

Теорема 1. *При выполнении условий 1), 2) уравнение (2) имеет комплексные решения вида $x(t) = (U(t)C(t)x, U(t)S(t)y)$, где $S(t)$ — синус оператор-функция, ассоциированная с $C(t)$; x, y — произвольные фиксированные элементы соответственно из множеств D_1,$D_2 \subset E(D_1$,D_2 имеют конкретный вид).*

Теорема 2. *При выполнении условий 1) — 3) уравнение (1) имеет частное решение $x_*(t) = \int\limits_0^t U(t-\tau)S(t-\tau)f(\tau)d\tau$.*

Следствие. *При выполнении условий 1) — 3) уравнение (1) имеет двупараметрическое семейство решений $x(t) =$*

© Фомин В.И., 2018

$U(t)[C(t)x+S(t)y]+x_*(t)$, *где* x,y *— произвольные элементы соответственно из множеств* D_1,D_2.

ОБ УРАВНЕНИЯХ ВОЛЬТЕРРА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ И L^p - НЕПРЕРЫВНЫМИ и L^p - ОГРАНИЧЕННЫМИ ЯДРАМИ[1]

Е.В. Фролова (Липецк, ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского)
lsnn48@mail.ru

Задачи переноса излучения в атмосферах звезд и планет приводятся к уравнениям Вольтерра с частными интегралами вида

$$x(t,s)=(Kx)(t,s)+f(t,s),$$

где $K=L+M+N$, $(Lx)(t,s)=\int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)\,d\tau$, $(Mx)(t,s)=\int_c^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)\,d\sigma$, $(Nx)(t,s)=\int_a^t\int_c^s n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)\,d\sigma d\tau$; $t,\tau\in[a,+\infty)$, $s,\sigma\in[c,+\infty)$; $l(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma)$ — заданные измеримые функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

В данной заметке уравнение Вольтерра изучается в пространстве $C(D)$ равномерно непрерывных и ограниченных функций на $D=[a,+\infty)\times[c,+\infty)$.

Пусть $\Omega\in\big\{[a,+\infty),[c,+\infty),D\big\}$ и $\omega\in\{\tau,\sigma,(\tau,\sigma)\}$. Измеримая на $D\times\Omega$ функция $u(t,s,\omega)$ называется L^p - непрерывной, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что $\|u(t_1,s_1,\cdot)-u(t_2,s_2,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}<\varepsilon$ при $|t_1-t_2|<\delta$, $|s_1-s_2|<\delta$, и L^p - ограниченной, если $\|u(t,s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}\leqslant U<\infty$.

Теорема *Оператор* K *с* L^p *- непрерывными и* L^p *- ограниченными ядрами* l,m,n *действует в пространстве* $C(D)$ *и непрерывен. Если дополнительно существуют такие числа* q,v, *что при* $t>q$, $s>v$ $\|l(t,s,\cdot)\|_{L^p([a,\infty))}\leqslant\varepsilon$, $\|m(t,s,\cdot)\|_{L^p([c,\infty))}\leqslant\varepsilon$, $\|n(t,s,\cdot,\cdot)\|_{L^p(D)}\leqslant\varepsilon$, *где* $\varepsilon<1$, *то уравнение* $x=Kx+f$ *равносильно в* $C(D)$ *уравнению* $x(t,s)=g(t,s)+\int_a^t\int_c^s h(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)\,d\sigma\,d\tau$, *где* $h(t,s,\tau,\sigma)$ *—* L^p *- непрерывное и* L^p *- ограниченное ядро оператора* $H=(I-M)^{-1}(I-L)^{-1}(LM+N)$, *а* $g=(I-M)^{-1}(I-L)^{-1}f$. *При этом исходное уравнение однозначно разрешимо в* $C(D)$, *и его решение имеет вид*

$$x(t,s)=f(t,s)+\int_a^t r_1(t,s,\tau)f(\tau,s)\,d\tau+\int_c^s r_2(t,s,\sigma)f(t,\sigma)\,d\sigma+\int_a^t\int_c^s r(t,s,\tau,\sigma)f(\tau,\sigma)\,d\sigma d\tau,$$

где r_1,r_2,r — L^p - непрерывные и L^p - ограниченные резольвентные ядра оператора K.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-41-480002).

© Фролова Е.В., 2018

ФОРМУЛЫ РАЗЛОЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ГАУССА ОТ ЧЕТЫРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

А. Хасанов, А.С. Бердышев, А.Р. Рыскан (Ташкент, Институт математики АН РУз; Алматы, КазНПУ им. Абая)
anvarhasanov@mail.ru, berdyshev@mail.ru, ryskan.a727@gmail.com

С помощью взаимно обратных операторов $H(a,c)$ и $\bar{H}(a,c)$ получены операторные тождества и формулы разложения для следующих гипергеометрических функций от четырех переменных $F_1^{(4)}$, $F_3^{(4)}$, $F_4^{(4)}$, $F_5^{(4)}$, $F_6^{(4)}$, $F_8^{(4)}$, $F_{11}^{(4)}$, $F_{13}^{(4)}$ [1].

В работах [2-4] были введены взаимно обратные операторы для изучения свойств гипергеометрических функций от двух переменных. Однако возникла небходимость изучения свойств гипергеометрических функций многих переменных, так в статьях [5-6] были введены формулы разложения для многомерных гипергеометрических функций, на основе которых были получены многомерные взаимно обратные операторы [7-8]:

$$H_{x_1,\dots x_r}(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\delta_1+\dots+\delta_r)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+\delta_1+\dots+\delta_r)} = \sum_{k_1,\cdots,k_r=0}^{\infty} \frac{(\beta-\alpha)_{k_1+\dots+k_r}(-\delta_1)_{k_1}\cdots(-\delta_r)_{k_r}}{(\beta)_{k_1+\dots+k_r}k_1!\cdots k_r!}, \quad (1)$$

$$\bar{H}_{x_1,\dots x_r}(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+\delta_1+\dots+\delta_r)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\delta_1+\dots+\delta_r)} = \sum_{k_1,\dots k_r=0}^{\infty} \frac{(\beta-\alpha)_{k_1+\dots+k_r}(-\delta_1)_{k_1}\cdots(-\delta_r)_{k_r}}{(1-\alpha-\delta_1-\dots-\delta_r)_{i+j}i!j!}, \quad (2)$$

где $\delta_{x_j} = x_j\frac{\partial}{\partial x_j}$, $j=1,...,r$, $r\in\mathbb{N}=\{1,2,...\}$; $(\lambda)_n = \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)}$, $\lambda\neq 0,-1,-2,...$ — символ Похгаммера;

$$\Gamma(z) = \begin{cases} \int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt, & \mathrm{Re}(z)>0, \\ \frac{\Gamma(z+1)}{z}, & \mathrm{Re}(z)<0;\ z\neq -1,-2,-3,... \end{cases}$$

— Гамма функция Эйлера.

Рассмотрим гипергеометрическую функцию четырех переменных

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта КазНПУ имени Абая.
© Хасанов А., Бердышев А.С., Рыскан А.Р., 2018

$$F_1^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right) = \sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n+p}(a_2)_q(b)_{m+n+p+q}}{(c_1)_m(c_2)_n(c_3)_p(c_4)_q} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!}.$$

Используя формулы (1) и (2), запишем операторные тождества для функции $F_1^{(4)}$:

$$F_1^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right) = H_t\left(a_2,c_4\right)(1-t)^{-b}F_C^{(3)}\left(a_1,b;c_1,c_2,c_3;\frac{x}{1-t},\frac{y}{1-t},\frac{z}{1-t}\right), \quad (3)$$

$$(1-t)^{-b}F_C^{(3)}\left(a_1,b;c_1,c_2,c_3;\frac{x}{1-t},\frac{y}{1-t},\frac{z}{1-t}\right) = \bar{H}_t\left(a_2,c_4\right)F_1^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right), \quad (4)$$

где $F_C^{(3)}$ — функция Лауричелла [9].

Применяя операторные тождества (3) и (4), выведем формулы разложения для гипергеометрической функции $F_1^{(4)}$:

$$F_1^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right) = (1-t)^{-b}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i(b)_i(c_4-a_2)_i}{(c_4)_i i!} \times\left(\frac{t}{1-t}\right)^i F_C^{(3)}\left(a_1,b+i;c_1,c_2,c_3;\frac{x}{1-t},\frac{y}{1-t},\frac{z}{1-t}\right), \quad (5)$$

$$(1-t)^{-b}F_C^{(3)}\left(a_1,b;c_1,c_2,c_3;\frac{x}{1-t},\frac{y}{1-t},\frac{z}{1-t}\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(c_4-a_2)_i(b)_i}{(c_4)_i i!}t^i F_1^{(4)}\left(a_1,a_2,b+i;c_1,c_2,c_3,c_4+i;x,y,z,t\right). \quad (6)$$

Аналогично выводятся операторные тождества и формулы разложения и для функций: $F_3^{(4)}$, $F_4^{(4)}$, $F_5^{(4)}$, $F_6^{(4)}$, $F_8^{(4)}$, $F_{11}^{(4)}$, $F_{13}^{(4)}$.

Литература

1. Sharma C. Hypergeometric functions of four variables (I)/ C. Sharma, C.L. Parihar // J. Indian Acad. Math. — 1989. — V. 11, № 2. — C. 99–115.

2. Burchnall J.L. Expansions of Appell's double hypergeometric functions / J.L. Burchnall, T.W. Chaundy // Quart. J. Math. Oxford Ser. — 1940. № 11. — C. 249–270.

3. Burchnall J.L. Expansions of Appell's double hypergeometric functions. II / J.L. Burchnall, T.W. Chaundy // Quart. J. Math. Oxford Ser. — 1941. № 12. — C. 112–128.

4. Chaundy T.W. Expansions of hypergeometric functions / T.W. Chaundy // Quart. J. Math. Oxford Ser. —1942. № 13. —C. 159–171.

5. Hasanov A. Decomposition Formulas Associated with the Lauricella Multivariable Hypergeometric Functions / A. Hasanov, H.M. Srivastava // Comp. Math. Appl. —2007. — V. 53, № 7. — C. 1119–1128.

6. Hasanov A. Decomposition Formulas for some triple hypergeometric functions / A. Hasanov, H.M. Srivastava, M. Turaev // J. Math. Anal. Appl. — 2006. — V. 324, № 2. — C. 955–969.

7. Choi J. Applications of the operator to the Humbert double hypergeometric functions / J. Choi, A. Hasanov // Comp. Math. Appl. — 2011. — № 61. — C. 663–671.

8. Hasanov A. Decomposition formulas for the generalized hypergeometric function / A. Hasanov, M. Turaev, J. Choi // Honam Math. J. — 2010. — V. 32, № 1. — C. 1–16.

9. Appell P. Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques / P. Appell, J. Kampe de Feriet. — P. : Polynomes d'Hermite, Gauthier - Villars, 1926. — 440 c.

СРЕДНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЧЕТКО-СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ИХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

В.Л. Хацкевич (Воронеж, ВУНЦ ВВС ВВА)

vlkhats@mail.ru

В работе рассмотрены экстремальные свойства средних характеристик нечетко-случайных величин, а именно нечетких ожиданий и ожиданий. Вводится новая средняя характеристика - усредненная скалярная случайная величина, и изучаются ее свойства.

Приведем необходимые термины и обозначения (ср. [1]). Рассмотрим пространство R^2 с координатами ξ, η. Множество $\tilde{z} \subseteq R^2$, лежащее в полосе $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, называется нечетким числом, если существуют монотонные, непрерывные слева функции $z^L : [0,1] \to R$ и $z^R : [0,1] \to R$, где z^L не убывает, z^R не возрастает, причем

© Хацкевич В.Л., 2018

$z^L(1) \leqslant z^R(1)$ такие, что для любого $\eta_0 \in [0,1]$ пересечение множества $\tilde{z}$ с прямой $\eta = \eta_0$ представляет собой множество

$$\{(\xi, \eta) : z^L(\eta_0) \leqslant \xi \leqslant z^R(\eta_0), \eta = \eta_0\}.$$

Функции $z^L(\eta)$ и $z^R(\eta)$ называются, соответственно, левым и правым индексом нечеткого числа $\tilde{z}$.

Пусть (Ω, Σ, P) - вероятностное пространство, где Ω - множество элементарных событий, Σ- σ-алгебра, состоящая из подмножеств множества Ω, P - вероятностная мера.

Измеримое отображение $\tilde{X} : \Omega \to J$ называется нечетко-случайной величиной, если при любом $\omega \in \Omega$ множество $\tilde{X}(\omega)$ является нечетким числом (ср. [2]).

Индексы нечеткого числа $\tilde{X}(\omega)$ будем обозначать $X^L(\omega, \eta)$ и $X^R(\omega, \eta)$. Функции $X^L(\omega, \eta)$ и $X^R(\omega, \eta)$ называются, соответственно, левым индексом и правым индексом нечетко-случайной величины $\tilde{X}(\omega)$.

В дальнейшем будем предполагать, что индексы всех рассматриваемых нечетко-случайных величин являются ограниченными функциями.

Скалярным произведением нечетко-случайных величин $\tilde{X}(\omega)$ и $\tilde{Y}(\omega)$ называется величина

$$\left\langle \tilde{X}, \tilde{Y} \right\rangle_\omega = 0,25 \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega (X^L(\omega,\eta) + X^R(\omega,\eta))(Y^L(\omega,\eta) + Y^R(\omega,\eta)) dp d\eta,$$

а полунормой $||\tilde{X}||_\omega = \left\langle \tilde{X}, \tilde{X} \right\rangle_\omega$. Ожиданием $E(\tilde{X})$ нечетко-случайной величины $\tilde{X}$ называется число, определяемое формулой

$$E\tilde{X} = 0.5 \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega (X^L(\omega,\eta) + X^R(\omega,\eta)) dP d\eta.$$

Для нечетко-случайной величины $\tilde{X}(\omega)$ с индексами $X^L(\omega, \eta)$ и $X^R(\omega, \eta)$ определим усредненную случайную величину $\hat{x}(\omega)$ равенством

$$\hat{x}(\omega) = 0.5 \int\limits_0^1 (X^L(\omega,\eta) + X^R(\omega,\eta)) d\eta.$$

Утверждение 1. *Для нечетко-случайной величины $\tilde{X}(\omega)$ математическое ожидание усредненной случайной величины $\hat{x}(\omega)$ совпадает с ожиданием $E\tilde{X}$ нечетко-случайной величины $\tilde{X}(\omega)$.*

Утверждение 2. *Для нечетко-случайной величины* $\tilde{X}(\omega)$ *ожидание* $E\tilde{X}$ *является решением экстремальной задачи*

$$E|\hat{x}(\omega) - y|^2 \to \min \ (\forall y \in R).$$

Усредненная случайная величина $\hat{x}(\omega)$ является оценкой для нечетко-случайной величины $\tilde{X}(\omega)$ в следующем смысле:

Теорема 1. *Для нечетко-случайной величины* $\tilde{X}(\omega)$ *усредненная случайная величина* $\hat{x}(\omega)$ *является решением экстремальной задачи*

$$||\tilde{X}(\omega) - y(\omega)||^2_\omega \to \min \ \ (\forall y \in \mathfrak{H}).$$

Здесь $\mathfrak{H}$ - множество скалярных случайных величин с конечным вторым моментом.

Литература

1. Шведов А.С. Оценивание средних и ковариаций нечетко-случайных величин. Прикладная эконометрика, 2016, т. 42. с. 121-138

2. Nguyen H. T., Wu B. Fundamentals of statistics with fuzzy data, Berlin: Springer, 2006, 196 p.

ПРИМЕР НЕ B-СВЯЗНОГО СОЛНЦА В 4-Х МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

И.Г. Царьков (Москва)

tsar@mech.math.msu.su

Через $B(x,r)$ и $\mathring{B}(x,r)$ обозначим соответственно замкнутый и открытый шар в линейном нормированном пространстве $\mathcal{X} = (X, \|\cdot\|)$ с центром x радиуса r, т.е. соответственно множества $\{y \in X \mid \|y - x\| \leqslant r\}$ и $\{y \in X \mid \|y - x\| < r\}$. Напомним, что множество $M \subset X$ называется B-связным ($\mathring{B}$-связным), если пересечение его с произвольным замкнутым (открытым) шаром либо пусто, либо связно. Отметим, что для замкнутых множеств в конечномерных пространствах свойства B-связности и $\mathring{B}$-связности равнозначны. Для произвольного множества M в некотором полунормированном пространстве $\mathcal{X}$ через $\varrho(y, M)$ ($y \in X$, $M \subset X$) обозначим расстояние до множества M, т.е. величину $\inf\limits_{z \in M} \|z - y\|$. Через $P_M x$ обозначим множество всех ближайших точек из M для $x \in X$, т.е. множество $\{y \in M \mid \|y - x\| = \varrho(x, M)\}$.

Пусть $\varnothing \neq M \subset X$. Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности*, если существует точка $y \in P_M x \neq \varnothing$ (называемая *точкой светимости*) такая, что $y \in P_M((1-\lambda)y + \lambda x)$ для всех $\lambda \geqslant 0$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00332-а).

© Царьков И.Г., 2018

(это геометрически означает, что из точки y исходит луч (солнечный луч), проходящий через x, для каждой точки которого y является ближайшей из M.

Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой строгой солнечности*, если $P_M x \neq \varnothing$ и каждая точка $y \in P_M x$ является точкой светимости. Если все точки из $K \subset X \setminus M$ являются точками солнечности (строгой солнечности), то множество M называют солнцем (строгим солнцем) относительно множества K. В случае, когда $K = X \setminus M$, говорят, что M – солнце (строгое солнце).

Теорема 1. *Существует полиэдральное четырехмерное банахово пространство X и не B-связное солнце в нем.*

Отсюда в частности вытекает, что такое солнце нельзя в хаусдорфовой метрике приблизить строгим солнцем или чебышевским множеством. И для малых $\varepsilon > 0$ не существует непрерывной ε-выборки на это множество.

О ТОЧНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С МАКСИМАЛЬНЫМ МОНОТОННЫМ ОПЕРАТОРОМ

А.В. Чернов (Нижний Новгород, ННГУ, НГТУ)
chavnn@mail.ru

Пусть X — вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $[.,.]_X$, $Z = L_2\big([0;T];X\big)$, $E = L_\infty\big([0;T];X\big)$, $Y = \mathbb{C}_w\big([0;T];X\big)$ $(Y \subset E)$; $x_0 \in X$; $G : X \to X$ — линейный оператор с областью определения $D(G) \subset X$, удовлетворяющий условию: **G**) оператор $B = -G$ является максимальным монотонным. По теореме Хилле–Иосиды, оператор G является инфинитезимальным генератором сильно непрерывной полугруппы сжатий $S(t)$, $t \in [0;T]$. Сделаем предположение: $\mathbf{G}'$) $\big\|S(t)^* x\big\|_X \geqslant a(t)\,\|x\|_X$ $\forall\, x \in X$, п.в. $t \in [0;T]$, при $a \in L_2^+[0;T]$, $a \neq 0$. Достаточные условия его выполнения см., напр., [1, следствие 4.3.1]. Пусть $u \in E$ — управление; $f : [0;T] \times X \to X$ — функция такая, что: $\mathbf{F}_1$) $\forall\, x \in E$ отображение $[0;T] \ni t \to f\big(t, x(t)\big)$ принадлежит Z; $\mathbf{F}_2$) $\exists$ $\mathcal{N} = \mathcal{N}(t,M) : [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, суммируемая по $t \in [0;T]$ и неубывающая по $M \in \mathbb{R}_+$ такая, что $\big\|f(t,x) - f(t,y)\big\|_X \leqslant \mathcal{N}(t,M)\,\big\|x-y\big\|_X$ $\forall\, x,y \in X$, $\|x\|_X$, $\|y\|_X \leqslant M$, п.в. $t \in [0;T]$; $\mathbf{F}_3$) $\exists\, r_0 > 0$ и непрерывная функция $\mathcal{N}_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, не убывающая на $[r_0; +\infty)$ такая, что $\Big\|f(t,\xi)\Big\|_X \leqslant \mathcal{N}_0(M)$ для всех $M > 0$, $\xi \in X$, $\|\xi\|_X \leqslant M$, п.в. $t \in [0;T]$; $\max\limits_{r \in [0;r_0]} \mathcal{N}_0(r) = \mathcal{N}_0(r_0)$; $\mathbf{F}_4$) $\exists\, \nu > 0$ и $\lim\limits_{r \to +\infty} \big\{\gamma(r) - \nu \mathcal{N}_0(r)\big\} > 0$. Положим $\alpha = \int\limits_0^T a^2(t)\,dt$, $\alpha_1 = \dfrac{\alpha}{\nu}$, $\psi(\nu,T) = \dfrac{e^{\alpha_1 T} - 1}{\alpha_1} - T$. *Задача управле-*

© Чернов А.В., 2018

ния. Для $x_1 \in X$ найти $u \in Y$: $\lim\limits_{t \to T-0} \bigl[x(t;u), z\bigr]_X = [x_1, z] \; \forall\, z \in D(G^*)$, где $x = x(.;u)$ — решение задачи

$$x'(t) = Gx(t) + f\bigl(t, x(t)\bigr) + u(t), \quad t \in [0;T]; \quad x(0) = x_0. \qquad (1)$$

Теорема 1. *Пусть выполнены* $\mathbf{F}_1)$ *–* $\mathbf{F}_4)$, $\mathbf{G})$. *Тогда* $\forall\, u \in E$ $\exists$ *единственное* $x = x(.;u)$. *Если, кроме того,* $\mathbf{G}')$, $\psi(\nu, T) < \alpha$, *то* $\forall\, x_1 \in X$ *задача управления имеет решение* $u = S(T-t)^* z$, $z \in X$.

Литература

1. Балакришнан А.В. Прикладной функциональный анализ / А.В. Балакришнан. — М. : Наука, 1980. — 383 с.

КОМПАКТНОЕ РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СИСТЕМ С ВОЗМОЖНОСТЬЮ ИХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

А.Д. Чернышов, М.И. Попов (Воронеж, ВГУИТ)
mihail_semilov@mail.ru

Исследования по тригонометрической интерполяции с возможностью дифференцирования пока неизвестны, что является особенно важным при рассмотрении дифференциальных задач. Тригонометрическую интерполяцию с различными базисными функциями в гильбертовом пространстве будем рассматривать в прикладных целях. Особенно удобно применять тригонометрическую интерполяцию при рассмотрении нелинейных, а также многомерных краевых задачах, для криволинейной области.

Пусть $f(x) \in L_p^{q+2}([0;a])$ — классы функций Соболева-Лиувилля. Для определения быстрого разложения $f(x)$ на отрезке $[0;a]$ используем понятия: граничной функции $M_q(x) = \sum\limits_{i=1}^{q+2} A_i P_i(x)$, быстрых полиномов P_i и ряда Фурье для разности $f(x) - M_q(x) = \psi(x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} f_m R_m(x)$ по некоторым базисным функциям $R_m(x)$. Здесь q — порядок граничной функции $M_q(x)$, равный порядку старшей производной, используемой в определении специальной конструкции $M_q(x)$. От граничных условий для данной $f(x)$ на концах отрезка $[0;a]$ зависят: выбор быстрых полиномов $P_i(x)$, конструкция граничной функции $M_q(x)$ и выбор базисных функций $R_m(x)$, используемых в ряде Фурье $\psi(x)$.

Название $M_q(x)$ — граничной функцией обосновано тем, что коэффициенты A_i в определении $M_q(x)$ находятся из значений $f(x)$ и

© Чернышов А.Д., Попов М.И., 2018

её производных до q-го порядка включительно на границах отрезка $[0;a]$.

Тригонометрическую синус-интерполяцию удобно применять, когда в дифференциальных уравнениях и граничных условиях некоторой задачи используются производные четного порядка.

Пусть существует некоторая функция $f(x) \in L_p^{q+2}([0;a])$, значения которой известны только в дискретных точках отрезка $[0;a]$ при его равномерном делении на $2K$ отрезков точками $x_j = ja/2K$, $j = \overline{0, 2K-1}$.

Для примера представим $f(x), x \in [0;a]$ быстрым синус-разложением в виде суммы граничной функции $M_2(x)$ второго порядка и некоторой $\psi(x)$, которую будем представлять синус-рядом Фурье:

$$\begin{gathered} f(x) = M_2(x) + \psi(x), \psi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \\ f(x) \in L_p^4([0;a]), M_2(x) = f(0)\left(1 - \frac{x}{a}\right) + f(a)\frac{x}{a} + \\ + f''(0)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) + f''(a)\left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right). \end{gathered} \tag{1}$$

Теорема 1. *Если $f(x) \in L_p^4([0;a])$, то быстрое разложение по синусам $f(x)$ из (1) можно почленно дифференцировать 2 раза, оставаясь в пространстве быстрых разложений, и всего дифференцировать 4 раза.*

Быстрая синус-интерполяция дается формулой

$$f(x) = M_2(x) + \frac{1}{K} \sum_{m=0}^{2K-1} \left(\sum_{j=0}^{2K-1} (f(x_j) - M_2(x_j)) \sin \frac{m\pi j}{2K} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

Подобным образом получаем и формулу для быстрой косинус-интерполяции, допускающий q-кратное дифференцирование

$$\begin{gathered} f(x) = f(0) + M_q(x) - M_q(0) + \\ + \frac{a}{K\pi} \sum_{n=1}^{2K-1} \left(\frac{1}{n}\left(1 - \cos \frac{n\pi x}{a}\right) \sum_{j=0}^{2K-1} \left(f'(x_j) - M_q'(x_j)\right) \sin \frac{n\pi j}{a} \right). \end{gathered}$$

Наименьшая погрешность достигается в окрестности нуля, при удалении от этой точки погрешность увеличивается. Рассматриваемые быстрые интерполяции допускают дифференцирование, но с увеличением порядка производной точность падает. Высокая точность быстрых тригонометрических интерполяций при небольшом количестве интерполяционных точек позволяет с минимальными численными затратами на ЭВМ и высокой точностью в аналитическом виде решать различные интегро-дифференциальные инженерные задачи.

О КОРРЕКТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СТРУКТУР

Д.А. Чечин (Воронежский государственный университет)

Рассмотрена задача расчёта сопротивления структуры "металл – молекула – металл" при несимметричном расположении молекулы относительно электродов (асимметричный контакт) на основе подхода Ландауэра (Landauer) в рамках точно решаемой модели одномерного переноса. Показано, что хотя асимметрия расположения молекулы приводит к увеличению сопротивления структуры, тем не менее существует принципиальная возможность достижения квантового предела и в этом случае при определённом соотношении параметров структуры. Детально проанализировано влияние геометрических параметров контакта и энергетического строения молекулы на величину сопротивления исследуемой системы.

Рассматривается математическая модель одномерного переноса заряда через структуру "металл – молекула – металл". Влияние энергетической структуры молекулы на перенос заряда через структуру "металл – молекула – металл" моделируем потенциалом$U_{mol}(x) = \alpha\delta(x)$,где $\alpha = \pm\hbar\sqrt{2E_{HOMO}/m}$ (знак "+" задаёт потенциальный барьер, а знак "-"– потенциальную яму), E_{HOMO} – энергия верхней заполненной молекулярной орбитали, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.В данной работе основное внимание будет обращено на зависимость сопротивления структуры при асимметричном расположении центра рассеяния (молекулы) в контакте,которая может быть вызвана разными причинами. Влияние асимметрии расположения молекулы между электродами учтём выбором потенциала в виде

$$U(x) = \begin{cases} U_0 + \alpha\delta(x), x \in [-a, b] \\ 0,\ x \notin [-a, b] \end{cases} \quad (1)$$

где $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$. Частный случай симметричного расположения молекулы между электродами получается при$a = b$.

Сопротивление структуры в подходе Ландауэра (Landauer) имеет вид:

$$R = R_0/T(E_F) \quad (2)$$

где $R_0 = \pi\hbar/e^2$, а $T(E_F)$ – коэффициент прохождения электрона с энергией Ферми через структуру при нулевой температуре. Для

© Чечин Д.А., 2018

нахождения $T(E_F)$ решается стационарное одномерное уравнение Шрёдингера:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+U(x)-E_F\right)\psi(x)=0 \quad (3)$$

с модельным потенциалом. Получаем коэффициент прохождения $T(E_F)$ в виде:

$$T(E_F)=\left[1+\left(shk_FL+\frac{k_{mol}}{k_F}chk_FL\right)^2+\left(\frac{k_{mol}}{k_F}shk_Fl\right)^2\right]^{-1} \quad (4)$$

где $L=a+b$, $l=b-a$, $k_F=\sqrt{2mE_F}/\hbar$, $U_0=2E_F$. Таким образом, сопротивление структуры “металл – молекула – металл” имеет вид:

$$R=R_0\left[1+\left(shk_FL+\frac{k_{mol}}{k_F}chk_FL\right)^2+\left(\frac{k_{mol}}{k_F}shk_Fl\right)^2\right] \quad (5)$$

Литература

1. J. Reichert, R. Ochs, D. Beckmann, H.B. Weber, M. Mayor, H.V. Lohneysen // Phys.Rev.Lett. 2002. Vol. 88. N 17.P. 176804(4).

2. C. Kergueris, J.-P.Bourgoin, S. Palacin, D. Esteve, C. Urbina, M. Magoga, C. Joachim // Phys. Rev. B. 1999. Vol. 59. N 19. P. 12505 – 12512.

3. Y. Xue, S. Datta, M.A. Ratner // Chemical Physics. 2002. Vol. 281. N 2. P. 151 – 170.

4. M.Di Ventra, N.D. Lang, S.T. Pantelides // Chemical Physics. 2002. Vol. 281. N 2. P. 189 – 198.

5. J. Taylor, H. Guo, J. Wang // Phys.Rev. B.2001. Vol. 63. N 24.P. 245407(13).

О КОРРЕКТНОСТИ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МАГНИТОСОПРОТИВЛЕНИЯ

Д.А. Чечин (Воронежский государственный университет)

В классической физике явления электропроводности определяются видом неравновесной функции распределения f в фазовом пространстве $(\vec{p},\vec{r})$, которая находится из решения кинетического уравнения Больцмана:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}\frac{d\vec{r}}{dt}+\frac{\partial f}{\partial \vec{p}}\frac{d\vec{p}}{dt}=I(f), \quad (1)$$

© Чечин Д.А., 2018

где $I(f)$ – интеграл столкновений. Замена производных $d\vec{r}/dt$на$\vec{v}$ и $d\vec{p}/dt$, с использованием второго закона Ньютона, на силу $\vec{F}$, приводит к уравнению вида:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{F}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = I(f). \qquad (2)$$

Интеграл столкновений $I(f)$ связан с конкретными процессами рассеяния. В изотропной модели с упругим рассеянием электронов, когда происходит релаксация импульса без релаксации энергии, обычно применяется релаксационное приближение для интеграла столкновений:

$$I(f) = -(f - f_0)/\tau,$$

где f_0 – равновесная функция распределения, а τ – среднее время между столкновениями. Величина плотности тока выражается в этом случае через функцию распределения следующим образом:

$$\vec{j} = 2e\int \vec{v}f\frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3}. \qquad (3)$$

Уравнение движения электрона в магнитном поле имеет вид:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H} = \vec{F}. \qquad (4)$$

Интегралами движения являются энергия $\varepsilon = const$, так как

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\vec{p}}\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v}\vec{F} = 0, \qquad (5)$$

и проекция импульса $p_z = const$, если магнитное поле направлено по оси Oz. Учитывая уравнения движения (4) в форме

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{e}{c}v_yH, \quad \frac{dp_y}{dt} = -\frac{e}{c}v_xH, \qquad (6)$$

получаем:

$$\frac{dp_x^2 + dp_y^2}{dt^2} = \left(\frac{e}{c}H\right)^2(v_x^2 + v_y^2).$$

Так как $\sqrt{dp_x^2 + dp_y^2} = dl$ есть элемент длины в импульсном пространстве, то

$$\frac{dl}{dt} = \frac{e}{c}Hv_\perp, \quad v_\perp = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Иначе говоря,

$$dt = \frac{c}{eH}\frac{dl}{v_\perp}, \quad t = \frac{c}{eH}\int\frac{dl}{v_\perp}. \qquad (7)$$

Если траектория электрона замкнутая, то этот интеграл можно вычислять по всему контуру, и при этом мы получим период движения:

$$T = \frac{c}{eH} \oint \frac{dl}{v_\perp}. \tag{8}$$

Площадь плоскости $p_z = const$ изображается интегралом $S = \int dp_x dp_y$.

Вместо того, чтобы вычислять такой интеграл непосредственно, можно изобразить в плоскости $p_z = const$ кривые $\varepsilon = const$ и интегрировать вдоль этих контуров и по нормали к ним. Кольцо, образованное двумя контурами с ε, отличающимися на $d\varepsilon$, имеет в данном месте ширину:

$$d\varepsilon \left|\partial\varepsilon/\partial\vec{p}_\perp\right|^{-1} = d\varepsilon/v_\perp.$$

Площадь кольца равна $d\varepsilon \oint dl/v_\perp$ (интеграл берётся вдоль контура), а площадь плоскости $p_z = const$ изображается интегралом

$$S = \int d\varepsilon \oint \frac{dl}{v_\perp}.$$

Сравнивая с (8), находим, что период движения равен

$$T = \frac{c}{eH}\frac{\partial S}{\partial \varepsilon}. \tag{9}$$

Введём так называемую “циклотронную массу”

$$m_c = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial S}{\partial \varepsilon}. \tag{10}$$

С учётом последней формулы период выражается в виде

$$T = \frac{2\pi c m_c}{eH}. \tag{11}$$

Угловая частота $\Omega = 2\pi/T = eH/(m_c c)$ называется ларморовской или циклотронной частотой. Циклотронная масса может быть определена лишь для замкнутых орбит. В присутствии магнитного поля удобно ввести, вместоp_x и p_y, две новые переменные: энергию ε и “время движения по траектории”

$$t_1 = \frac{c}{eH} \int \frac{dl}{v_\perp}.$$

Надо иметь ввиду, что в данном случае это не истинное время, а некоторая функция p_x и p_y, связанная с ними уравнениями (6). Таким образом, получаем

$$\int dp_x dp_y = \int d\varepsilon \frac{dl}{v_\perp}.$$

Но так как $(c/eH)\, dl/v_\perp = dt_1$, то в новых переменных интеграл по импульсам приобретает вид

$$\frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\int dp_x dp_y dp_z = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\frac{eH}{c}\int dp_z dt_1 d\varepsilon. \qquad (12)$$

Кинетическое уравнение при наличии постоянных электрического и магнитного полей может быть написано в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t_1}\dot{t}_1 + \frac{\partial f}{\partial p_z}\dot{p}_z + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\dot{\varepsilon} = I(f). \qquad (13)$$

Для $\dot{\varepsilon}$ имеем

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{p}}\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v}\frac{d\vec{p}}{dt}.$$

В присутствии электрического и магнитного полей

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H} + e\vec{E}, \qquad (14)$$

поэтому

$$\dot{\varepsilon} = e\vec{v}\vec{E}, \qquad (15)$$

$$\dot{p}_z = eE_z. \qquad (16)$$

Переменная t_1 определяется из уравнений (6), которые отличаются от(14)отсутствием электрического поля. Но в металлах для не слишком слабых магнитных полей $(v/c)H$ всегда больше E. Поэтому разница междуt_1 и t мала и $dt_1/dt \approx 1$. Итак, мы получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial p_z}eE_z + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}e\vec{v}\vec{E} = I(f). \qquad (17)$$

Будем искать f в виде

$$f = f_0 - \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\psi. \qquad (18)$$

Так как ε, p_z и t_1 – независимые переменные, то надо считать f_0 не зависящим от p_z. Ввиду этого подстановка (18) в (17) даёт в низшем порядке по ψ

$$\frac{\partial \psi}{\partial t_1} - I(\psi) = e\vec{v}\vec{E}. \qquad (19)$$

Это общее уравнение, которое решается в разных конкретных случаях. Его надо дополнить граничными условиями по t_1: для замкнутых траекторий функция ψ должна периодически зависеть отt_1. Если же траектория открытая, то функция ψ не обязана быть периодической, но должна быть везде конечной. Эти условия дают однозначное решение уравнения (19).

Литература

1. J. Reichert, R. Ochs, D. Beckmann, H. B. Weber, M. Mayor, and H. v. Lohneysen. Driving Current through Single Organic Molecules // Phys. Rev. Lett., **88**, 176804 (2002).

2. Matthew R. Sullivan, Douglas A. Boehm, Daniel A. Ateya, Susan Z. Hua, and Harsh Deep Chopra. Ballistic magnetoresistance in nickel single-atom conductors without magnetostriction // Phys. Rev. B, **71**, 024412 (2005).

3. А. А. Абрикосов. Основы теории металлов. “Наука”, 1987.

4. Квантовый эффект Холла. “Мир”, 1989.

5. R. Landauer. IBM J. Res. Dev., **1**, 223 (1957).

6. B. J. van Wees, H. van Houten, C. W. J. Beenakker, J. G. Williamson, L. P. Kouwenhoven, D. van der Marel, and C. T. Foxon. Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas // Phys. Rev. Lett., **60**, 848 (1988).

О КОРРЕКТНОСТИ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ

С.А. Шабров, Д.А. Литвинов (Воронеж, ВГУ,ВГУИТ)

shaspoteha@mail.ru,d77013378@yandex.ru

Рассматривается математическая модель малых вынужденных поперечных колебаний системы, состоящей из сетки из растянутых струн, расположенных вдоль графа Γ [1], [2]

$$\begin{cases} m(x)u''_{tt}(x,t) = (p(x)u'_x(x,t))'_\Gamma - u(x,t)Q'_\Gamma + F'_\Gamma(x,t); \\ K_i u(b,t) + (-1)^{\nu(b)} p(b)u'_x(b,t)|_{b\in\partial\Gamma} = 0; \\ u(x,0) = \psi_0(x); \\ u'_t(x,0) = \psi_1(x). \end{cases} \tag{1}$$

Под графом Γ мы понимаем геометрическую сеть из R^n, реализованную в виде открытого геометрического графа. Считается, что Γ состоит из некоторого набора непересекающихся интервалов

$$\gamma_i = (a_i, b_i) = \{x = a_i + \lambda(b_i - a_i) : 0 < \lambda < 1\}, (i = 1, 2, ..., N),$$

называемых ребрами и некоторой совокупности их концов. Множество этих концов обозначается через $I(\Gamma)$, а точки $I(\Gamma)$ называются внутренними вершинами графа Γ. Концы интервалов γ_i, не включенные в $I(\Gamma)$, называются граничными вершинами, их множество

© Шабров С.А., Литвинов Д.А., 2018

обозначается через $\partial\Gamma$, т.е. $\partial\Gamma = \{b_i, i = 1, 2, \dots, r\}$, где r — количество граничных вершин. На ребрах графа Γ задается ориентация в зависимости от наблюдаемого процесса.

Под производной по Γ мы понимаем в следующем смысле

$$\frac{d}{d\Gamma}(pu_x) = \begin{cases} (pu'_x)'_\sigma, x \in R(\Gamma); \\ \sum\limits_i \sum\limits_{a_k \in I(\Gamma)} (-1)^{\mu_i(a_k)} p_i(a_k) u_i(a_k), x = a_k \in I(\Gamma), \end{cases}$$

где σ — мера, заданная на каждом ребре, индекс i у функции означает ее сужение на соответствующее ребро,

$$\mu(b) = \begin{cases} 1, & \text{если ориентация выбрана от граничной вершины } b; \\ 0, & \text{если ориентация выбрана к граничной вершине } b, \end{cases}$$

внешнее суммирование осуществляется по всем ребрам, примыкающим к $a_k \in I(\Gamma)$.

Функция $p(x)$ — сила натяжения струны в точке $x \in \Gamma$, $Q'_\Gamma(x)$ характеризует упругость внешней среды в точке x, а именно, если в этой точке имеется локализованная особенность, то $Q'_\Gamma(x)$ — коэффициент упругости, в противном случае — плотность; аналогично $F'_\Gamma(x,t)$ сосредоточенная сила, приложенная в точке x в момент времени t, в противном случае — плотность силы, $u(x,t)$ — отклонение точки x от положения равновесия в момент времени t, произошедший под воздействием силы $F'_\Gamma(x,t)$, $K_i : i = \overline{1,r}$ — жесткости пружин, установленных в граничных точках b_i, $m(x)$ — функция, равная плотности массы, распределенной на графе, в точке $x \in \Gamma \backslash I(\Gamma)$ и массе в точке $x \in I(\Gamma)$, $\psi_0(x)$ и $\psi_1(x)$ — начальные отклонение точки x от положения равновесия и скорость соответственно.

Решение системы (1) ищется в классе равномерно непрерывных на Γ функций, каждая из которых на всяком ребре имеет производную по пространственной переменной, являющуюся σ–абсолютной непрерывной относительно меры σ; дважды дифференцируема по временной переменной.

При вполне физических условиях на функции $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ получены достаточные условия корректности математической модели (1).

Литература

1. *Покорный Ю. В., Бахтина Ж. И., Зверева М. Б., Шабров С. А.,* Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах / Ю. В. Покорный.– Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 192 с.

2. *Лылов, Е. В.* Математическое моделирование процессов с локализованными особенностями на геометрическом графе// Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук по специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплекс программ–Воронеж:ВГУ, 2015. – 140 с.

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ШЕСТОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ[1]

С.А. Шабров, М.В. Шаброва, О.М. Ильина

(Воронеж, ВГУ)

shabrov_s_a@math.vsu.ru

В представленной работе изучается граничная задача

$$\begin{cases} M'_\mu \ddot{u} = \left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\mu} - (ru''_{xx})''_{x\mu} + (gu'_x)'_\mu - Q'_\mu u; \\ u(0,t) = u'_x(0,t) = u'''_{xx\mu}(0,t) = 0; \\ u(\ell,t) = u'_x(\ell,t) = u'''_{xx\mu}(\ell,t) = 0; \\ u(x,0) = \varphi_0(x); \\ \dot{u}(x,0) = \varphi_1(x), \end{cases} \tag{1}$$

с производными по мере, которая возникает при моделировании малых деформаций, происходящих в одной плоскости перпендикулярно оси Ox — положению равновесия системы, растянутой стержневой системы, помещенной на «двойную» упругую опору с локализованными особенностями, приводящими к потере гладкости; коэффициент $p(x)$ характеризует материал из которого сделан материал, $r(x)$ — сила натяжения в точке x; $g(x)$ и Q'_μ — параметры «двойной» упругой опоры; $M(x)$ суммарная масса участка $[0;x)$; $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ — начальные отклонения и скорость соответственно.

Решение (1) мы будем искать в классе E — дважды непрерывно дифференцируемых функций $u(x,t)$ (при каждом фиксированном t), у которых: $u''_{xx}(x,t)$ — μ–абсолютно непрерывна на $[0,\ell]$; $pu'''_{xx\mu}(x,t)$ — дважды непрерывно дифференцируема; $\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(x,t)$ — μ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; $u(x,t)$ — дважды непрерывно дифференцируемы по t при каждом фиксированном x.

В точках ξ, принадлежащих множеству точек разрыва $\mu(x)$, уравнение в (1) понимается как равенство $\Delta M(\xi) = \Delta\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(\xi) - \Delta(ru''_{xx})'_x(\xi) + \Delta\left(gu'_x\right)(\xi) - u(\xi)\Delta Q(\xi)$, где $\Delta u(\xi)$ — полный скачок функции $u(x)$ в точке ξ.

Будем предполагать, что функции $p(x)$, $r(x)$, $g(x)$ и $Q(x)$ μ-абсолютно непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}$ (описание построения множества $\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}$ см. [2]), $\min\limits_{x\in\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}} p(x) > 0$, $Q(x)$ не убывает.

Получены достаточные условия возможности применения метода Фурье для доказательства существования решения (1).

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта РНФ (проект 19–11–00197), выполняемого в Воронежском госуниверсите.

© Шабров С.А., Шаброва М.В., Ильина О.М., 2018

Литература

1. Покорный, Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Докл. АН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

2. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

3. Pokornyi, Yu. V. Toward A Sturm-Liouville Theory for an Equation with Generalized Coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, No. 6. — P. 769–787.

4. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

5. Шабров, С. А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса / С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

6. Баев, А. Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

7. Шабров, С. А. Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2015. — № 2. — С. 168–179.

8. Баев, А. Д. Дифференциал Стилтьеса в импульсных нелинейных задачах / А. Д. Баев, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Доклады Академии наук. — 2014. — Т. 458, № 6. — С. 627–629.

9. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма–Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

10. Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для решения граничной задачи с дифференциалами Стилтьеса на геометрическом графе / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Е. В. Лылов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 97–105.

11. Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для задачи с разрывными решениями / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Ж. О. Залукаева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2016. — № 4. — С. 112–120.

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ФУРЬЕ К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МАЛЫХ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С ЛОКАЛИЗОВАННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

Е.А. Шайна (Воронеж, ВГУ)

katerinashaina@mail.ru

В данной работе получены достаточные условия, при выполнении которых, к математической модели

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \\ = -\dfrac{\partial}{\partial \sigma}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\dfrac{\partial}{\partial \mu}\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial \sigma}\left(r(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - \dfrac{dQ}{d\sigma}u + f(x,t), \\ \left(pu''_{x\mu}\right)(0,t) - \gamma_1 u'_x(0,t) = 0, \\ \left(pu''_{x\mu}\right)'_x(0,t) - \left(ru'_x\right)(0) + \gamma_2 u(0,t) = 0, \\ \left(pu''_{x\mu}\right)(\ell,t) + \gamma_3 u'_x(\ell,t) = 0, \\ \left(pu''_{x\mu}\right)'_x(\ell,t) - \left(ru'_x\right)(\ell,t) - \gamma_4 u(\ell,t) = 0; \\ u(x,0) = \varphi_0(x); \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_1(x), \end{cases} \tag{1}$$

возможно применение метода Фурье. Отметим, что это модель возникает при моделировании малых вынужденных поперечных колебаний системы, состоящей из растянутых стержней, которые соединены шарнирно; в каждой точке шарнирного соединения имеется пружина, реагирующая исключительно на поворот; система находится во внешней среде, локальный коэффициент упругости которой равен dQ; коэффициент $p(x)$ характеризует материал из которого сделан стержень и отвечает за изгибную жесткость; $r(x) \geqslant 0$ — сила натяжения стержневой системы в точке x; функция $\mu(x)$ имеет особенности (ввиде скачков) в точках шарнирного соединения; $f(x,t)$ — сосредоточенная сила (если таковая присутствует), приложенная в точке шарнира в момент времени t, или плотность силы во всех остальных точках; мера σ, порождаемая строго возрастающей функцией $\sigma(x)$, содержит в себе все особенности модели — это и точки шарнирного соединения, и точки в которых локализованы особенности внешней среды, и присутствуют сосредоточенные массы; $M(x)$ — распределение масс на системе, причем скачки $M(x)$ соответствуют случаю сосредоточенных масс. К каждой точке $x = 0$ и $x = \ell$ присоединены еще по две пружины жесткостью γ_1, γ_2 и γ_3, γ_4 соответственно. Первая пружина, присоединенная к левому концу системы, реагирует

© Шайна Е.А., 2018

на крутящий момент, возникающий в точке $x = 0$, а вторая — на смещение левого конца. Аналогично для пружин, находящихся на правом конце.

Через $S(\sigma)$ — обозначим точки разрыва функции $\sigma(x)$; σ-мера каждой точки $\xi \in S(\sigma)$ равна $\sigma\{\xi\} = \sigma(\xi+0) - \sigma(\xi-0)$. В точках, принадлежащих $S(\sigma)$, уравнение в (1) принимает вид

$$\Delta M(\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi,t) = \\ = -\Delta\left(\left(p(x)u''_{x\mu}\right)'_x\right)(\xi,t) + \Delta\left(ru'_x\right)(\xi,t) - u(\xi,t)\Delta Q(\xi) + f(\xi,t), \tag{2}$$

где $f(\xi,t)$ характеризует сосредоточенную силу, приложенную в точке ξ в момент времени t. Помимо (2) в точке ξ «присутствуют» еще три условия:

$$u(\xi-0,t) = u(\xi+0,t),$$

$$p(\xi)\frac{\Delta u'_x(\xi,t)}{\Delta\mu(\xi)} = p(\xi-0)u''_{x\mu}(\xi-0,t) = p(\xi+0)u''_{x\mu}(\xi+0,t).$$

Случай, когда $S(\sigma) = S(\mu)$, т. е. дополнительных особенностей, порождаемые внешней средой и силой, не возникает, был изучен в работе [5]. Если $S(\sigma) \supset S(\mu)$, то в точках $x \in S(\sigma)\setminus S(\mu)$ «присутствуют» три условия:

$$u(\xi-0,t) = u(\xi+0,t),$$

$$u'_x(\xi-0,t) = u'_x(\xi+0,t),$$

$$p(\xi-0)u''_{x\mu}(\xi-0,t) = p(\xi+0)u''_{x\mu}(\xi+0,t).$$

Решение математической модели (1) мы ищем в классе E функций $u(x,t)$, каждая из которых непрерывна на $[0;\ell]\times[0;T]$; имеет непрерывные производные по переменной t до второго порядка включительно при фиксированном x; при постоянном t $u(x,t)$ абсолютно непрерывна по x на $[0;\ell]$; $u'_x(x,t)$ — μ-абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; $p(x)u''_{x\mu}(x,t)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; $\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x,t)$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; производные $u'''_{tx\mu}(x,t)$ и $u'''_{x\mu t}(x,t)$ равны почти всюду (в смысле меры $[\mu\times t]$ заданной на прямоугольнике $[0;\ell]\times[0;T]$); производные $u''_{tx}(x,t)$ и $u''_{xt}(x,t)$ равны почти всюду в смысле меры Лебега заданной на $[0;\ell]\times[0;T]$.

Литература

1. Баев, А. Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

2. О единственности классического решения математической модели вынужденных колебаний стержневой системы с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Ф. В. Голованёва, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 74–80.

3. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

4. Шабров С.А. О скорости роста собственных значений одной спектральной задачи четвертого порядка с производными по мере / С.А. Шабров, Н.И. Бугакова, Е.А. Шайна // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 206–214.

5. Шайна, Е. А. О возможности применения метода Фурье к математической модели малых вынужденных колебаний стержневой системы / Е. А. Шайна // Современные методы теории краевых задач : материалы международной конференции Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения—XXX» (3–9 мая 2019 г.). — Воронеж, 2019. — С. 310–312.

К ПРОДОЛЖЕНИЮ C^∞-РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.А. Шананин (Москва, ГУУ)
nashananin@inbox.ru

В квазилинейном уравнении

$$u_{ttt} + \sum_{l,j=1}^{n} a_{l,j}(t,x,u,u_t,u_{tt},u_x)u_{x_l x_j} + \sum_{j=1}^{n} a_j(t,x,u,u_t,u_{tt},u_x)u_{x_j} = f(t,x,u,u_t,u_{tt},u_x), \quad (t,x) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

с вещественнозначными коэффициентами $a_{l,j}$, $a_j \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^{n+3})$ и правой частью $f \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^{n+3})$ введем взвешивание производных, присвоив операции однократного дифференцирования по переменной t вес 2, а операциям дифференцирования по x_j - 3. Пусть $g \in C^\infty(U)$, где $U \subset \Omega$ - открытое множество. Определенный на функции g взвешенный главный символ

$$p_g^w = -i\tau^3 - \sum_{l,j=1}^{n} a_{l,j}(t,x,g(t,x),g_t(t,x),g_{tt}(t,x),g_x(t,x))\xi_l\xi_j$$

назовем *квазиэллиптическим* на g в точке $(t^0,x^0) \in U$, если из равенства $p_g^w(t^0,x^0,\tau,\xi) = 0$ следует, что $\tau = 0$ и $\xi = 0$. Гиперповерхность S, определенная в окрестности U точки (t^0,x^0) уравнением $\varphi(t,x) = 0$ с C^∞-функцией φ, удовлетворяющей условию: $\varphi_t(t^0,x^0) \neq 0$, называют *нехарактеристической.*

© Шананин Н.А., 2018

Теорема 1. *Пусть u и v - C^∞-решения, определенные в окрестности $U \subset \Omega$ точки (t^0, x^0) нехарактеристической в точке гиперповерхности S, причем символ p_u^w является квазиэллиптическим в (t^0, x^0) на решении u. Тогда из равенств начальных данных Коши $(\partial^k(u-v))|_{S\cap U} = 0$, $k = 0,1,2$, следует, что $u = v$ в некоторой окрестности точки (t^0, x^0).*

Теорема 2. *Пусть u и v - C^∞-решения, определенные в Ω, причем в каждой точке отрезка $\{(t, x^0)\,|\,\alpha < t < \beta\} \subset \Omega\}$ символ p_u^w является квазиэллиптическим на решении u. Тогда из равенств ростков $u_{(t^0,x^0)} \cong v_{(t^0,x^0)}$ в одной из точек отрезка следует равенство ростков решений во всех точках этого отрезка.*

Литература

1. Шананин Н.А. О слоевой структуре множеств симметрийной инвариантности решений квазилинейных уравнений./ Н.А. Шананин // Матем. заметки — 2010. — Т. 88, вып. 6. — С. 924–934.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА С АКУСТИЧЕСКИМ УСЛОВИЕМ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С СИЛЬНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Г.Х. Шафиева (Баку, ИММ НАНА; БГУ)

gulshan.shafiyeva@mail.ru

Рассматривается смешанная задача для одномерных волновых уравнений с сильной диссипацией и динамическим условием сопряжения:

$$u_{tt} - a_1 u_{xxt} - b_1 u_{xx} = f(t,x),\ (t,x) \in [0,T] \times [0,1], \tag{1}$$

$$v_{tt} - a_2 v_{xxt} - b_2 v_{xx} = g(t,x),\ (t,x) \in [0,T] \times [1,2], \tag{2}$$

$$u(t,0) = 0,\ v(t,2) = 0,\ u(t,1) = v(t,1) = \varphi(t), t > 0, \tag{3}$$

$$\varphi_{tt}(t) + u_{xt}(t,1) - v_{xt}(t,1) = h(t),\ t > 0, \tag{4}$$

$$u(0,x) = \varphi_1(x), u_t(0,x) = \psi_1(x), 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{5}$$

$$v(0,x) = \varphi_2(x), v_t(0,x) = \psi_2(x), 1 \leqslant x \leqslant 2, \tag{6}$$

где $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, b_1, $b_2 \in R$, $f(t,x) \in W_p^1(0,T; L_p(0,1))$,

$$f(t,0) = 0,\ g(t,x) \in W_p^1(0,T; L_p(0,1)),\ g(t,2) = 0,$$

$$h(t) \in W_p^1(0,T), \varphi_1(\cdot) \in W_p^2(0,1),\ \psi_1(\cdot) \in W_p^2(0,1),$$

$$\varphi_2(\cdot) \in W_p^2(1,2),\ \psi_2(\cdot) \in W_p^2(1,2),\ \varphi_1(0) = 0, \varphi_2(2) = 0,$$

© Шафиева Г.Х., 2018

$$\varphi_1(1) = \varphi_2(1),\ \psi_1(0) = 0,\ \psi_2(2) = 0,\ \psi_1(1) = \psi_2(1).$$

Доказывается, что задача (1) - (6) имеет единственное решение:

$$(u, v, \varphi) \in C([0, T]; W_p^2(0, 1) \times W_p^2(1, 2) \times R) \cap$$

$$\cap C^1([0, T]; W_p^1(0, 1) \times W_p^1(1, 2) \times R) \cap C^2([0, T]; L_p(0, 1) \times L_p(0, 1) \times R).$$

ФУНКЦИЯ ГРИНА В ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ О ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ ТЯЖЁЛЫХ СТЕРЖНЕЙ[1]

А.Н. Шелковой (Воронеж, ВГТУ)
shelkovoj.aleksandr@mail.ru

Определение критической нагрузки P при продольном изгибе стержня длины l постоянного сечения при учёте его собственного веса приводит к задаче на собственные значения

$$y^{IV} - \varepsilon(xy')' = -\lambda y'',\ y(0) = y''(0) = y(l) = y''(l) = 0. \qquad (1)$$

В гильбертовом пространстве $L_2[0, l]$ введём оператор $Ay = y''$ с областью определения $D(A)$, определяемой краевыми условиями $y(0) = y(l) = 0$, тогда $A^2 y = y^{IV}$. Дифференциальное уравнение в задаче (1) приобретёт вид: $A^2 y - \varepsilon(xy')' = -\lambda Ay$. Применив к обеим частям оператор A^{-1}, получим краевую задачу $Ay - \varepsilon A^{-1} xAy - \varepsilon A^{-1} xAy' = -\lambda y,\ y(0) = y(l) = 0$. Оператор A^{-1} имеет вид: $(A^{-1}y)(x) = \int\limits_0^l K(x, s) y(s) ds$, где $K(x, s) = G(x, s)$ — функция Грина для краевой задачи $y'' = 0,\ y(0) = y(l) = 0$. Показано, что исходное дифференциальное уравнение в задаче (1) приводится к операторному уравнению $Ly = -\lambda y$, где

$$(Ly)(x) = y''(x) + \varepsilon x y(x) - \varepsilon l(x - l) y'(l) +$$

$$+\varepsilon \left(\int\limits_x^l y(s) ds - x \int\limits_0^l y(s) ds \right) / l.$$

К данному оператору применим метод подобных операторов, то есть оператор L можно представить в виде $A - B$, где $(Ay)(x) = y''(x)$ — невозмущённый оператор, а

$$(By)(x) = \varepsilon \left(l(x - l) y'(l) - xy - \left(\int\limits_x^l y(s) ds - x \int\limits_0^l y(s) ds \right) / l \right)$$

— возмущение.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00732).

© Шелковой А.Н., 2018

РЕЗОНАНСНОЕ РАССЕЯНИЕ И СПЕКТРЫ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Ю.В. Шестопалов (Университет г. Евле, Швеция)
yuyshv@hig.se

При исследовании рассеяния или распространения электромагнитных волн в волноведущих структурах с неоднородным заполнением возникают краевые задачи на собственные значения (с.з.) для систем уравнений Максвелла или Гельмгольца [1]. При анализе открытых структур, неограниченных в поперечном сечении, когда спектральный параметр входит в условия на бесконечности нелинейным образом, задача становится несамосопряженной и требует разработки специальных постановок и методов решения [1-3]. Центральным вопросом здесь является доказательство существования и изучение распределения с.з. на комплексной плоскости. Резонансное рассеяние связано с аномальным поведением решений (волновых полей) в окрестностях особых точек аналитических продолжений соответствующих операторов краевых задач в комплексную область спектрального параметра (например, частоты) [1]. Для структур с круговой симметрией, эти особые точки являются [1, 2] с.з. и одновременно сингулярностями (полюсами) коэффициентов разложений рассеянного поля в дальней зоне. Нахождение с.з. сводится к расчету нулей определенного семейства функций (обобщенных цилиндрических полиномов) [4], и эти нули можно эффективно вычислять численно-аналитическими методами [2-4].

Литература

1. Shestopalov Y. Spectra of Nonselfadjoint Eigenvalue Problems for Elliptic Systems in Mathematical Models of the Wave Propagation in Open Waveguides /Y. Shestopalov, E. Smolkin, E. Kuzmina // Lobachevskii J. Math. —2018. — T. 39, № 8. C. 1117–1129.

2. Shestopalov Y. Complex waves in a dielectric waveguide / Y. Shestopalov //Wave Motion. —2018. — T. 57. C. 16–19.

3. Shestopalov Y. Singularities of the transmission coefficient and anomalous scattering by a dielectric slab / Y. Shestopalov //J. Math. Phys. —2018. — T. 59, № 3. ID 033507.

4. Shestopalov Y. Trigonometric and cylindrical polynomials and their applications in electromagnetics / Y. Shestopalov //Applicable Analysis. —2019. — 16 c.

© Шестопалов Ю.В., 2018

THE SURJECTIVITY CRITERIA FOR CONVOLUTION OPERATORS ON WEIGHTED SPACES OF FUNCTIONS HOLOMORPHIC IN BOUNDED CONVEX DOMAINS

T.M. Andreeva (Rostov-on-Don, SFEDU; Vladikavkaz, SMI of VSC RAS)
metzi@yandex.ru

Let G be a domain in $\mathbb{C}$ and $H(G)$ the space of all holomorphic functions in G. For a continuous function (a weight) $v : G \to \mathbb{R}$ define the Banach space

$$H_v(G) := \Big\{ f \in H(G) : ||f||_v := \sup_{z\in G} |f(z)| e^{-v(z)} < \infty \Big\}.$$

For an increasing sequence of weights $V = (v_n)$ define the inductive limit $\mathcal{V}H(G) := \mathrm{ind} H_{v_n}(G)$.

Let μ be an analytic functional on $\mathbb{C}$ carried by a convex compact set K. With some restrictions on weight sequence which are equal to those used by V.V. Napalkov [1] we study the continuity and surjectivity problem of the convolution operator

$$\mu * f(z) : f \mapsto \mu_w f(z+w)$$

that maps $\mathcal{V}H(G+K)$ into (onto) $\mathcal{V}H(G)$. We establish the surjectivity criteria for convolution operator in terms of its Laplace (Fourier-Borel) transform $\hat{\mu}(\zeta) := \mu_z e^{\langle z \cdot \rangle}$ via the appropriate description of functional weighted spaces that are conjugated to $\mathcal{V}H(G+K)$ and $\mathcal{V}H(G)$.

The main results are the following:

1) We obtain a criterion of continuity for the convolution operator

$$\mu* : \mathcal{V}H(G+K) \to \mathcal{V}H(G);$$

2) We establish a functional criterion of surjectivity for convolution operator in terms of the closure of an image of the multiplication operator $f \mapsto \hat{\mu} f$ that is conjugate to $\mu*$;

3) For the case $v_n(z) = n|z|^\alpha, \alpha > 0$ we find out the criterion of surjectivity for convolution operator in terms of regular growth of $\hat{\mu}$ (the lower estimate on $|\hat{\mu}|$ outside some exceptional sets).

Similar research was presented in [2] for the spaces of functions that are holomorphic in convex domains and have a polynomial growth near the boundary (the weight sequence $v_n(z) = n \ln(1+|z|)$).

Литература

1. Napalkov V.V. Spaces of analytic functions of prescribed growth near the boundary / V.V. Napalkov // Mathematics of the USSR-Izvestiya. —1988. —Vol. 30. —№ 2. —P. 263.

© Andreeva T.M., 2018

2.Abanin A.V.. Convolution operators in $A^{-\infty}$ for convex domains / A.V. Abanin, R. Ishimura, L.H. Khoi // Arkiv för matematik. —2012. — Vol. 50. —№ 1. —P. 1–22.

PSEUDOCONVEX HYBRIDIZATION OF THREE DESCENT VECTORS TO BUILD A NEW METHOD OF THE CONJUGATE GRADIENT

M. Hannachi, I. Hafaidia, M. Ghiat, H. Guebbai (Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Modélisation, Université 8 Mai 1945 Guelma, BP 4001, 24000 Guelma, Algeria)
hannachi.marwa77@gmail.com; hafaidia.imane@yahoo.com; imane.hafaidia@univ-guelma.dz; mourad.ghi24@gmail.com; mourad.ghiat@univ-guelma.dz; guebaihamza@yahoo.fr; guebbai.hamza@univ-guelma.dz

The objective of the conjugate gradient methods is to approach the minimum of a continuously differentiable function $f:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, supposed to be bounded from below. To achieve this objective, we build the following iterative sequence: x_0 chosen in $\mathbb{R}^N$, $x_{k+1} = x_k + \delta_k d_k$, $k \geqslant 0$. d_k is a descent vector, $\delta_k > 0$ is the step size obtained using a line search method.

To solve optimization problems without constraints, it is proven that if the descent vector satisfies the conjugation condition i.e. $y_k^t d_k = (g_{k+1} - g_k)^t d_k = 0$, the method used becomes faster in execution time. To obtain this condition, researchers used convex hybridization between two descent vectors. But, the descent vectors obtained verify the conjugation condition partially and the convexity is not completely verified. In our work, we are interested in solving this type of problems by using a new method of the conjugate gradient where we leaned on the hybridization of three descent vectors in the following form:

$$d_k^{PCH} = (1-\beta_k)d_k^{PRP} + \beta_k d_k^{DY} + \alpha_k d_k^{LS},$$

where, β_k, α_k are calculated in order that d_k^{PCH} satisfies the condition of conjugation and the condition of sufficient descent.

References

1. Andrei N. Hybrid Conjugate Gradient Algorithm for Unconstrained Optimization / N. Andrei // J Optim Theory Appl. — 2009. — T. 141. — C. 249–264. https://doi.org/10.1007/s10957-008-9505-0

© Hannachi M., Hafaidia I., Ghiat M., Guebbai H., 2018

MIXED VOLUMES/AREAS AND COMPLETENESS OF EXPONENTIAL AND OTHER SYSTEMS[1]

B.N. Khabibullin, R.R. Muryasov (Ufa, BashSU)
Khabib-Bulat@mail.ru , *romrumur@yandex.ru*

Let $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$. Let f be an *entire function* in the n-dimensional complex Euclidean space $\mathbb{C}^n$, $\mathsf{Z} \subset \mathbb{C}^n$, $S \subset \mathbb{C}^n$. For a broad class of distribution densities of the set Z, a scale of sufficient conditions for the completeness of the system of functions $\{f(\mathsf{z} \times s)\colon \mathsf{z} \in \mathsf{Z}\}$, $s \in S$, where $\mathsf{z} \times s := (\mathsf{z}_1 s_1, \mathsf{z}_2 s_2, \dots, \mathsf{z}_n s_n)$, in the space $\mathrm{Hol}(S)$ of holomorphic functions on S with respect to the topology of uniform convergence on compact subsets is given in terms of the *mutual indicator* of the function f and the set Z, and also in terms of *mixed volumes*between the convex hull of S and classes of convex sets (see special cases in [1; § 4], [2;Ch. 3, 4.2]). Our conditions are new already for $n = 1$ and each $S \subset \mathbb{C}$.

We present a typical result for the *exponential function* $f := \exp$, a *convex bounded domain* $S \subset \mathbb{C}$, and a sequence $\mathsf{Z} = (\mathsf{z}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. Let K be a convex compact subset in $\mathbb{C}$. We denote by $\mathsf{S}(K, S)$ the *mixed area* of the pair K, S and denote by k the *support function* of K [2].

Theorem. *If $g \geqslant 0$ be a $(x, 1/x)$-convex* (see [3; Ch. I, § 1]) *integrable function on the positive semiaxis $\mathbb{R}^+$ and*

$$\limsup_{a \to +\infty} \limsup_{r \to +\infty} \frac{1}{\int_r^{ar} g(x)\, dx} \sum_{r < |\mathsf{z}_k| \leqslant ar} \mathsf{k}\bigl(\mathsf{z}_k / |\mathsf{z}_k|\bigr) g\bigl(|\mathsf{z}_k|\bigr) \geqslant \frac{1}{2\pi} \mathsf{S}(K, S),$$

then the closure of the linear hull of $\left\{e^{\mathsf{z}_k s}\colon k \in \mathbb{N}\right\}$ is equal to $\mathrm{Hol}(S)$.

Литература

1. Khabibullin B.N. Completeness of systems of entire functions in spaces of holomorphic functions / B.N. Khabibullin // Mat. Zametki. — 1999. — vol. 66, no. 4. — p. 603–616; Math. Notes — 1999. — vol. 66, no. 4. — p. 495–506.

2. Хабибуллин Б.Н. Полнота систем экспонент и множества единственности / Б.Н. Хабибуллин. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2012. — xvi+176 с. `http://www.researchgate.net/publication/271841461`

3. Ибрагимов И.И. Методы интерполяции функций и некоторые их применения / И.И. Ибрагимов. — М. : Наука, 1971. — 520 с.

[1] The research was supported by a Grant of the Russian Science Foundation, Project No. 18-11-00002.

© Khabibullin B.N., Muryasov R.R., 2018

ON ASYMPTOTIC OF DECOUPLING TRANSFORMATION FOR TIME-INVARIANT SINGULARLY PERTURBED SYSTEMS WITH DELAY[1]

C.A. Naligama, O.B. Tsekhan (Grodno, YaKSUG)
naligama_ ch_ 19@student.grsu.by, tsekhan@grsu.by

The decoupling transformation that decomposes a singularly perturbed linear time-invariant system with multiple delays (SPLTISD) onto two independent subsystems with different tempo leads to solving equations with respect to function matrices $L(\mu,\lambda)$, $H(\mu,\lambda)$, $\mu \in (0,\mu^0], \mu^0 \ll 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$. These matrices can be found in asymptotic series form [1].

With relevant examples, in this work it is proved that for any integer $k \geqslant 0$ the terms of the asymptotic series can be represented in the form of finite sums

$$L^k(\lambda) = \sum_{j=0}^{(k+1)l} L_j^k \lambda^j,\ H^{k+1}(\lambda) = \sum_{j=0}^{kl} H_j^{(k+1)} \lambda^j,$$

where $l \geqslant 0$, matrices L_j^k, H_j^k, $j,k \in \mathbb{Z}$, are solutions of the following recurrence matrix equations

$$L_j^{k+1} = A_4^{-1} \sum_{s=j-(k+1)l}^{j} \left(L_s^k A_{1,j-s} - \sum_{i=0}^{k} L_s^{k-i} A_2 L_{j-s}^i \right),\ k = 0,1,2,\ldots,$$
$$H_j^{k+1} = A_4^{-1} \sum_{s=j-kl}^{j} \left(A_{1,j-s} H_s^k - \sum_{i=0}^{k} \left(A_2 L_{j-s}^i H_s^{k-i} + H_{j-s}^i L_s^{k-i} A_2 \right) \right),$$

with initial conditions $H_0^0 = A_2 A_4^{-1}$, $H_j^k = 0$, $j < 0 \vee j > kl$, $L_j^0 = A_4^{-1} A_{3j}$, $j = \overline{0,l}$, $L_j^k = 0$, $j < 0 \ \vee \ j > (k+1)\,l$. Here $A_{ij}, i = 1,3$, $j = \overline{0,l}$, A_2, A_4 are constant matrices of SPLTISD, $det A_4 \neq 0$.

Among the consequences is that although the resulting decoupled subsystems are systems with infinite delay, for any fixed $k \geqslant 0$ they are approximated with accuracy $\mathcal{O}(\mu^k)$ by systems with finite delays.

Литература

1. Tsekhan O. Complete controllability conditions for linear singularly perturbed time-invariant systems with multiple delays via Chang-type transformation / O.B. Tsekhan // Axioms. — 2019. — Vol. 8. — Issue 71. — P. 1-19.

[1] The work of O.B. Tsekhan was partially supported under the State research program "Convergence-2020"of Republic of Belarus: Task 1.3.02.

© Naligama C.A., Tsekhan O.B., 2018

BLOCK-BY-BLOCK APPROXIMATION FOR VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH WEAKLY SINGULAR KERNEL

I. Saioudi, M. Ghiat, H. guebbai (Laboratoire des Mathématiques Appliquées et Modélisation, Université 8 Mai 1945 Guelma, BP 4001, 24000 Guelma, Algeria)
saioudi.ilhem96@gmail.com; mourad.ghi24@gmail.com; mourad.ghiat@univ-guelma.dz; guebaihamza@yahoo.fr; hamza.guebbai@univ-guelma.dz

In this work, we present a numerical study for Volterra integro-differential equation with weakly singular kernel, presented in the following form: For $\alpha \in]0,1[\,,\ T > 0$ and $g \in C^1(0,T)$, to find $\varphi \in C^1(0,T)$,

$$\forall t \in [0,T], \quad \varphi(t) = \int_0^t (t-x)^\alpha L(t,x,\varphi(x),\varphi'(x))dx + g(t). \qquad (1)$$

Using generalized Lipschitz conditions, Ghiat et al [1] have shown that the equation (1) has a unique solution. In addition, they built a new version of the Product integration method to approach this one.

Our objective is to build a new version of the block-by-block method to approach the unique solution of our equation. This method was developed initially for Volterra classical integral equations(see [2]). In the classic case, the block-by-block method has shown great efficiency since it provides a convenient and efficient way for solving the equation over the whole interval. We obtain similar results in the integrro-differential case.

References

1. Ghiat M. Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear volterra equation with weakly singular kernel / M. Ghiat, H. Guebbai // Computational and Applied Mathematics. — 2018. — T. 37, № 4. — C. 4661–4674. Doi: 10.1007/s40314-018-0597-3

2. Linz P. Analytical and numerical methods for Volterra equations / P. Linz. — SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia.

© Saioudi I., Ghiat M., Guebbai H., 2018

MULTIPOTENT NUMBER SETS

Yu.P. Virchenko (Belgorod, BelGU)
virch@bsu.edu.ru

The concept of multipotent sets in monoids is proposed in the communication and it is proved some statements about their properties. Most attention is devoted to monoids having one noncyclic forming element. Properties of multipotent sets in such monoids have direct connection with the so-called binary Goldbach problem [1].

The commutative monoid $\mathfrak{A}$ with the unique noncyclic forming element e consists of an infinite set of elements. It is isomorphic to the set $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. The unit of the monoid $\mathfrak{A}$ is connected with 0, the forming element e is connected with $1 \in \mathbb{N}$ and elements $n \cdot \mathsf{e}$ with $n \in \mathbb{N}$.

The set $\mathfrak{N}_0 \subset \mathbb{N}$ is named the k-potent one, $k \in \mathbb{N}$ if $\mathfrak{N}_0^k \cup \mathfrak{N}_0 = \mathbb{N}$ where $\mathfrak{N}_0^l$ are defined by the induction: $\mathfrak{N}_0^1 = \mathbb{N}_0$, $\mathfrak{N}_0^{l+1} = \mathfrak{N}_0^l + \mathfrak{N}_0$. There is the unique 1-potent set $\mathbb{N}$. However, there are some nontrivial k-potent sets at $k \geqslant 2$ which are proper subsets of $\mathbb{N}$. They possess some general properties: 1 is included in any k-potent set; the expanding of any k-potent set is the k-potent one.

Theorem 1. *If the set $\mathfrak{N}_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{N}(n)$ defined by the expanding sequence $\langle \mathfrak{N}(n); n \in \mathbb{N}\rangle$ then it is the k-potent one in that and only in that case when the inclusion $\mathfrak{N}^k(n) \supset I_n \backslash \mathfrak{N}(n)$ is fulfilled for each $n \in \mathbb{N}$.*

Sequences $\langle \mathfrak{N}(n); n \in \mathbb{N}\rangle$ satisfying the theorem condition are named the *generating* ones.

Теорема 2. *It is necessary that the sequence $\langle |\mathfrak{N}(n)|; n \in \mathbb{N}\rangle$ should be satisfied to the condition $|\mathfrak{N}(n)|/n \geqslant 1/(k+1)$ for any $n \in \mathbb{N}$ and $1 \in \mathfrak{N}(1)$ in order the sequence $\langle \mathfrak{N}(n); n \in \mathbb{N}\rangle$ is the generating one for the k-potent set $\mathfrak{N}_0$.*

On the basis of this theorem it can prove that the binary Goldbach conjecture [1] (The Euler conjecture) is fulfilled for all sufficiently large even numbers, i.e. all numbers $2n > N$ are represented in the form $2n = p + q$ with two primes p and q.

Литература

1. Correspondance mathematique (Band 1)/ St.-Petersbourg, 1843.— S.125–129.

© Virchenko Yu.P., 2018

Именной указатель

З

И

К

Л

М

Н

О

П

Н а у ч н о е и з д а н и е

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Материалы Международной конференции
Воронежская весенняя математическая школа
Понтрягинские чтения — XXXI
Посвящается памяти Юлия Витальевича Покорного
(80-летию со дня рождения)

(3–9 мая 2020 г.)

Издано в авторской редакции

Верстка и подготовка оригинал-макета *С. А. Шаброва*

Подписано в печать 30.04.2020. Формат 60×84/16.
Усл. п.л. 12,4. Уч.–изд. л. 12,0. Тираж 150 экз. Заказ 254.

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии
АНО «Наука-Юнипресс»
394024 Воронеж, ул. Ленина, 86Б, 2