Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики».

Дисциплина: Матанализ

Расчётно-графическая работа

Производная и дифференциал

Вариант №3

Выполнили:

Васильев Александр P3132

Глотов Егор P3132

Волков Григорий P3132

Мальков Павел P3132

Гуменник Пётр P3133

Проверила:

Филимонова Арина Николаевна

г. Санкт-Петербург

2022 год

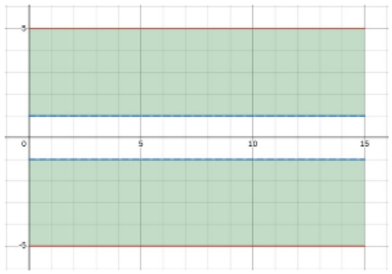
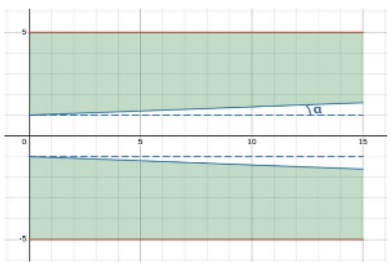
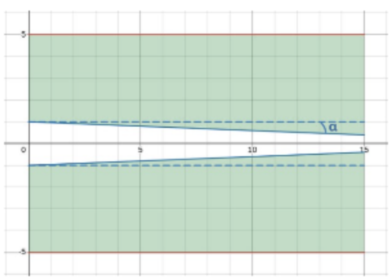
Задание 1. Дифференциал

0. Условие

Толстостенный цилиндр (т.е. фигура образованная двумя концентрическими цилиндрами одинаковой длины) имеет прецизионную длину L = 15 см. Внешний радиус R = 5 см, а средний внутренний r = 1 см, при этом внутренние стенки имеют равномерную конусность, т.е. их угол с секущей плоскостью симметрии составляет $(90\pm1)^o$. Вычислите абсолютную и относительную погрешности при вычислении объема фигуры.

1. Математическая модель

Рассмотрим 3 случая:

 α = 0	R, r - внешний и внутренний радиус h - длина $V_ц = \pi r^2 h$ $V_{трубы} = V_{внешний} - V_{внутренний}$
 α > 0	При α > 0 $V_{внутренний}$ - усечённый конус. r, R - внешний и внутренний радиус h - длина $V_{внутренний} = \frac{1}{3}\pi h\left(r^2 + r(r+l_1) + (r+l_1)^2\right)$, где l_1 - погрешность. $l_1 = tg(\alpha)\cdot h$
 α < 0	При α > 0 $V_{внутренний}$ - усечённый конус. r, R - внешний и внутренний радиус h - длина $V_{внутренний} = \frac{1}{3}\pi h\left(r^2 + r(r+l_2) + (r+l_2)^2\right)$, где l_1 - погрешность. $l_2 = tg(\alpha)\cdot h = -l_1$

2. Приближенные вычисления с помощью дифференциала

По формуле приближенных вычислений $f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\cdot\Delta x$ найдём $tg(x+\Delta x)$:

$$tg(x+\Delta x) \approx th(x) + tg'(x)\cdot\Delta x = tg(x) + \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\Delta x$$

подставим $tg(0^o + 1^o)$:

$$tg(0^o+1^o) \approx tg(0^o) + \frac{1}{\cos^2 0^o}\cdot 1^o = 0 + \frac{1}{1}\cdot\frac{\pi}{180} = 0.01745$$

$$V_{трубы} \approx \begin{cases} \pi h(R^2 - r^2),\ при\ \alpha \neq 0; \\ \pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi h\left(r^2 + r(r+l) + (r+l)^2\right),\ l = tg(\alpha) + \frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\Delta\alpha\cdot\pi}{180}. \end{cases}$$

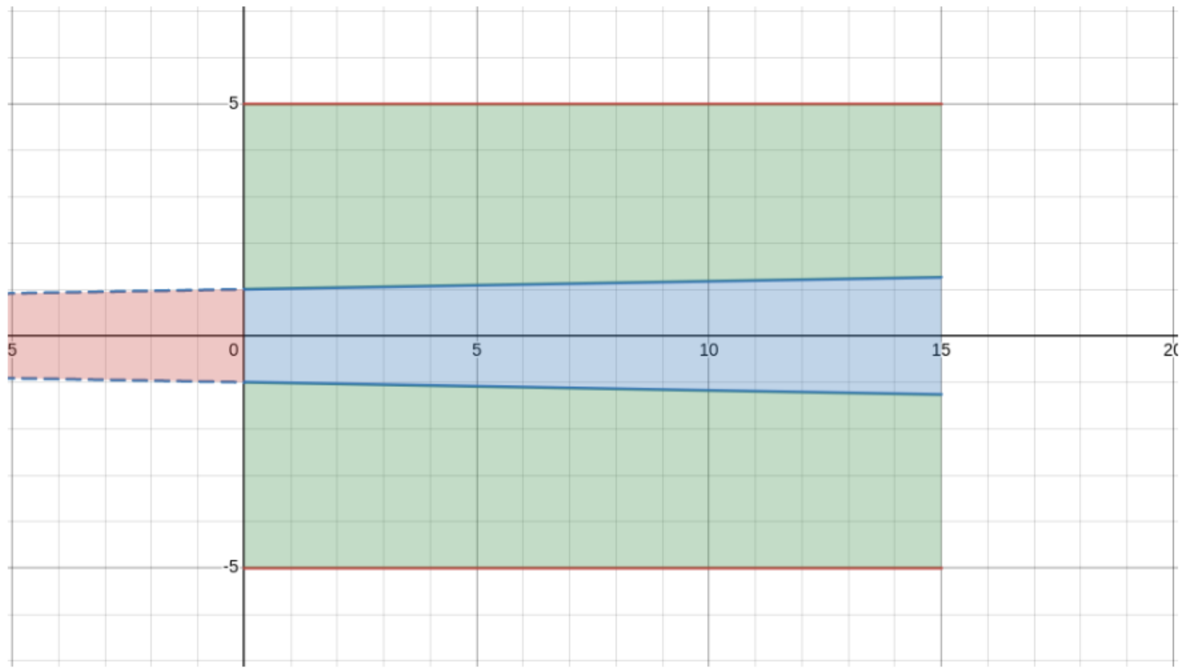
$$V_{трубы}(1^o)=\pi 5^2 15-\frac{1}{3}\pi 15(1^2+1(1+0.01745)+(1+0.01745)^2)=1130.1462$$

$$V_{трубы}(0^o)=\pi 15(5^2-1^2)=1130.9733(см^3)$$

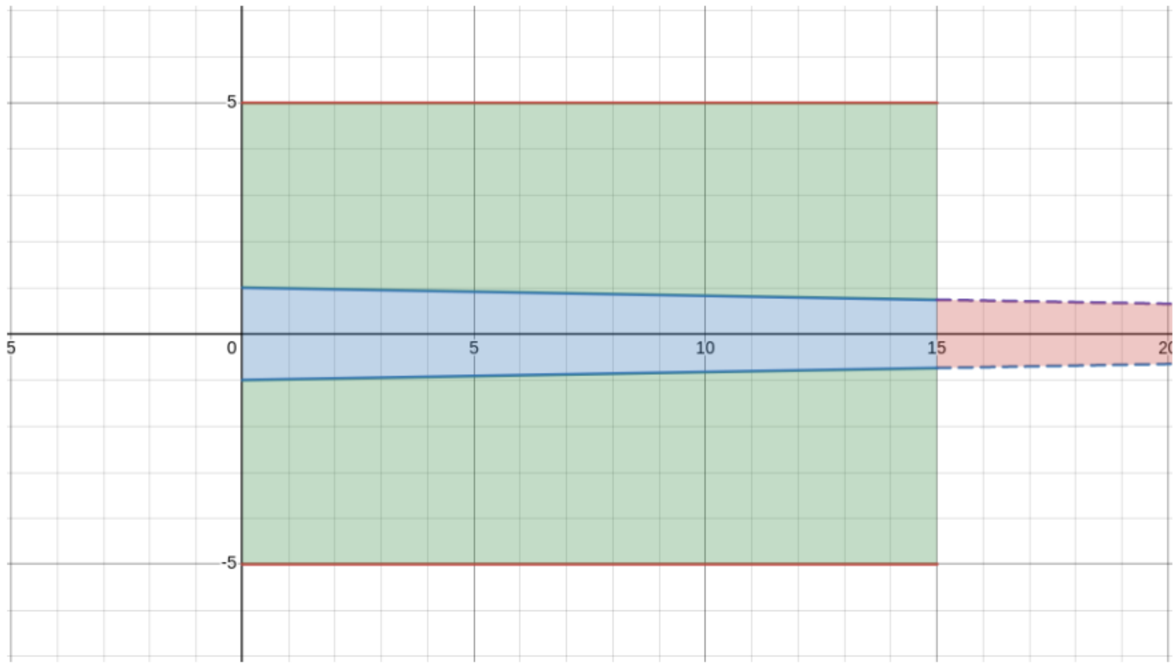
$$V_{трубы}(-1^o)=\pi 5^2 15-\frac{1}{3}\pi 15(1^2+1(1-0.01745)+(1-0.01745)^2)=1131.7908$$

Отклонение в меньшую сторону: −0.8271
Отклонение в большую сторону: 0.8175

3. Иллюстрации



$\alpha=1^o$



$\alpha = -1^o$

4. Ответ

Отклонение в меньшую сторону: −0.8271

Отклонение в большую сторону: 0.8175

$$V_{трубы} \approx \begin{cases} \pi h(R^2 - r^2),\ при\ \alpha \neq 0; \\ \pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi h(r^2 + r(r+l) + (r+l)^2),\ l = tg(\alpha) + \frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\Delta\alpha\cdot\pi}{180}. \end{cases}$$

Шаг 1

Выведем функцию, по которой вычисляется цена одного часа пути в рублях в зависимости от скорости парохода.

Она будет иметь вид: $F(x) = \frac{x^3}{1000} * 30 + 480$

Шаг 2

Запишем функцию, которая будет отражать стоимость одного километра пути в зависимости от скорости

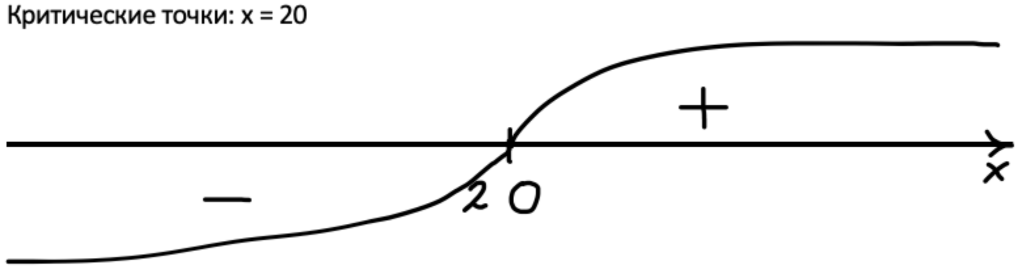
Она будет иметь вид:$G(x) = \frac{1}{x} * F(x)$

Шаг 3

Продифференцируем функцию G(x) и такое x, при котором функция будет принимать наименьшее значение.

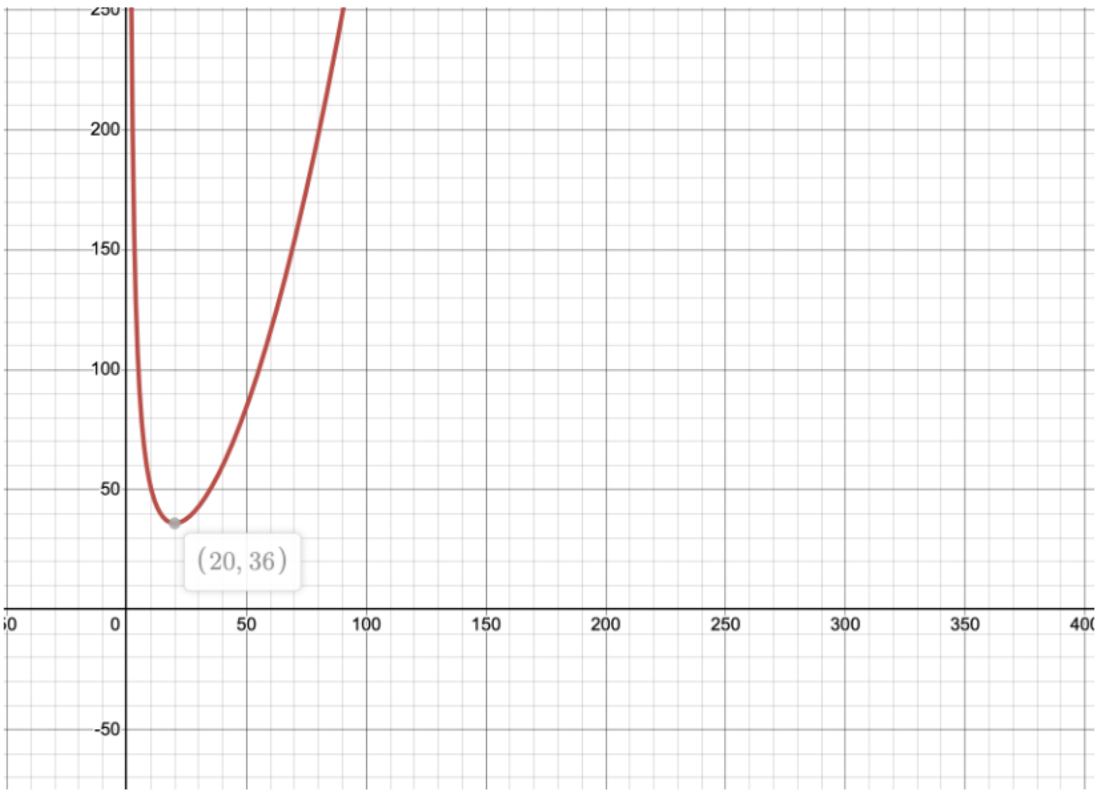
$$G'(x) = \frac{3x^3 - 24000}{50x^2}$$

Критические точки: x = 20



Так как 20 – единственная критическая точка, то в этой точке функция принимает наименьшее или наибольшее значение. X= 20 – точка минимума, следовательно в ней цена за 1 километр пути будет минимально.

График изменения цены:



Ответ: при скорости 20 километров в час будет достигнута минимальная цена в 36 рублей за километр

③

$f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x-3}$

1) $x \in R \setminus \{-3; 1\}$

2) Если $f(x)$ четн, то

$f(x) \neq f(-x)$

$$f(-x) = \frac{-x+1}{(-x)^2-2x-3} = \frac{-x+1}{x^2-2x-3}$$

$f(-x) \neq -f(x)$

$\Rightarrow$ ф-ция ни четная, ни нечетная

Такую ф-цию называют ф-цией общего вида

3) Исследуем на нули и пром-тки знакопост-ва

$$\frac{x+1}{x^2+2x-3} = 0$$

$$\frac{x+1}{(x+3)(x-1)} = 0$$

В (.) $x=-1$ ф-ция принимает $f(x)=0$. Точки $x=-3; x=1$ не подходят т.к не входят в область опр

− + − +

−3 −1 1 x

$(-\infty; -3) \cup (-1; 1)$ $f(x) < 0$

$(-3; -1) \cup (1; +\infty)$ $f(x) > 0$

4) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x-3}$

$$f'(x) = \frac{(x+1)'(x^2+2x-3) - (x+1)(x^2+2x-3)'}{(x^2+2x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+2x-3 - (x+1)(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+2x-3 - (2x^2+2x+2x+2)}{(x^2+2x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+2x-3-2x^2-4x-2}{(x^2+2x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2-2x-5}{(x^2+2x-3)^2}$$

Найдем экстремумы:

$\frac{-x^2-2x-5}{(x^2+2x-3)^2} = 0$ $x \notin R$

$x \neq -3$ $x \neq 1$

Интервалы монотонности:

− − −

−3 1

$g(x) = \sqrt[3]{1-\cos x}$

1) $x \in R$

2) $f(x) = f(-x)$

$f(-x) = \sqrt[3]{1-\cos(-x)} = \sqrt[3]{1-\cos x}$

ф-ция четная

Четность влияет на то как будет выглядеть график ф-ции. График будет симметричен относительно оси O_x.

3) $\sqrt[3]{1-\cos x} = 0$

Т.к ф-ция периодическая, то в (.) $x = 2\pi k$, $k \in Z$ ф-ция принимает значение 0

$\sqrt[3]{1-\cos x} > 0$

$1-\cos x > 0$

$\cos x < 1$

$x \in (2\pi n; 2\pi + 2\pi n), n \in Z$

$\sqrt[3]{1-\cos x} < 0$

$1-\cos x < 0$

$-\cos x < -1$

$\cos x > 1$ $\varnothing$

4) $f'(x) = \sqrt[3]{1-\cos x} = (1-\cos x)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(1-\cos x)^{-\frac{2}{3}} \cdot \sin x = \frac{\sin x}{3 \cdot \sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$

Найдем экстремумы

$\frac{\sin x}{3 \cdot \sqrt[3]{(1-\cos x)^2}} = 0$

$\sin x = 0$

$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$

$3 \cdot \sqrt[3]{(1-\cos x)^2} \neq 0$

$(1-\cos(x))^2 \neq 0$

$1 - 2\cos x + \cos x^2 \neq 0$

Пусть $\cos x = t$

$t^2 - 2t + 1 \neq 0$

$t = 1$

$\cos x = 1$

$x \neq 2\pi k, k \in Z$

Найдем интервалы монотонности

− −

$\searrow$ π $\searrow$ x

Ф-ция монотонно убывает

5) Найдем $f''(x)$

$$f''(x) = \left(\frac{\sin x}{3\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}\right)'$$

$$f''(x) = \frac{3\cos x - 3\cos x^2 - 2\sin x^2}{9(1-\cos x)\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$$

5) $f''(x) = \left(\frac{-x^2-2x-5}{(x^2+2x-3)^2}\right)' =$

$$= \frac{(-x^2-2x-5)'(x^2+2x-3)^2 - (-x^2-2x-5)((x^2+2x-3)^2)'}{(x^2+2x-3)^4}$$

$$= \frac{(-2x-2)(x^2+2x-3)^2 + (x^2+2x+5)(2(x^2-2x-3)(2x+2))}{(x^2+2x-3)^4}$$

$$= \frac{(x^2+2x-3)\left((-2x-2)(x^2+2x-3) + (x^2+2x+5)2(2x+2)\right)}{(x^2+2x-3)^4}$$

$$= \frac{(-2x-2)(x^2+2x-3) + 2(x^2+2x+5)(2x+2)}{(x^2+2x-3)^3}$$

$$= \frac{-2x^3-4x^2+6x-2x^2-4x+6+(2x^2+4x+10)(2x+2)}{(x^2+2x-3)^3}$$

$$= \frac{-2x^3-4x^2+6x-2x^2-4x+6+4x^3+4x^2+8x^2+8x+20x+20}{(x^2+2x-3)^3}$$

$$= \frac{2x^3+6x^2+30x+26}{(x^2+2x-3)^3}$$

$$\frac{2x^3+6x^2+30x+26}{(x^2+2x-3)^3} = 0$$

$2x^3+6x^2+30x+26=0$ при $x \neq -3$ $x \neq 1$

$2(x^3+3x^2+15x+13)=0$

$2(x^3+x^2+2x^2+2x+13x+13)=0$

$2(x^2(x+1)+2x(x+1)+13(x+1))=0$

$2((x+1)(x^2+2x+13))=0$

$\underbrace{x=-1}$ $\quad x^2+2x+13=0$

$\uparrow$ $\quad D=4-4\cdot13<0 \quad \varnothing$

критическая точка

$+ \quad -1 \quad -$ (x)

$\Rightarrow$ график ф-ции является выпуклым на интервале $(-1;+\infty)$ и вогнутым на интервале $(-\infty;-1)$

Точка $(-1;0)$ - точка перегиба графика

6) Вертикальное асимптоты

$\underbrace{x \neq -3 \quad x \neq 1}_{\text{точки разрыва}}$ $\quad \lim\limits_{x\to-3+0} \frac{x+1}{x^2+2x-3} = \frac{-2}{9-6-3} = \frac{-2}{0} = -\infty$

$\Rightarrow$ предел справа $+\infty$

Аналогично с $x=1$

$\Rightarrow x=-3$ и $x=1$ - вертикальные асимптоты т.к график терпит бесконечный разрыв

Наклонные асимптоты

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\frac{x+1}{x^2+2x-3}\right)^{\to 0}}{x_{\to\infty}} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{x^2+2x-3} = 0$$

При $x\to\pm\infty$ наклонная (горизонтальная) асимптота $y=0$

$x \notin \mathbb{R}$

Критических точек нет

$- \quad 0 \quad -$ (x)

На всем интервале ф-ция является вогнутой

Точек перегиба нет

6) Т.к область определения $x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ вертикальных асимптот нет

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \left(\frac{\sqrt[3]{1-\cos x}}{x}\right) = 0$$

$1 \le -\cos x \le -1$

$2 \le 1-\cos x \le 0$

$\frac{\sqrt[3]{2}}{x} \le \frac{\sqrt[3]{1-\cos x}}{x} \le 0$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$0 \qquad\qquad 0$

При $x\to\pm\infty$ $y=0$ - горизонтальная асимптота

7) $\sqrt[3]{1-\cos x} = 0$

$1-\cos x = 0$

$\cos x = 1$

$x = 2\pi k$ - пересечение с Ox

$f(0) = \sqrt[3]{1-1} = 0$ - пересечен с Oy

7) $\frac{x+1}{x^2+2x-3} = 0$

$x = -1$ при $x \neq -3$ $x \neq 1$

↑
точка пересечения с осью O_x

$f(0) = -\frac{1}{3}$ - точка пересечения с O_y

График 1: $y = \frac{x+1}{x^2+2x-3}$

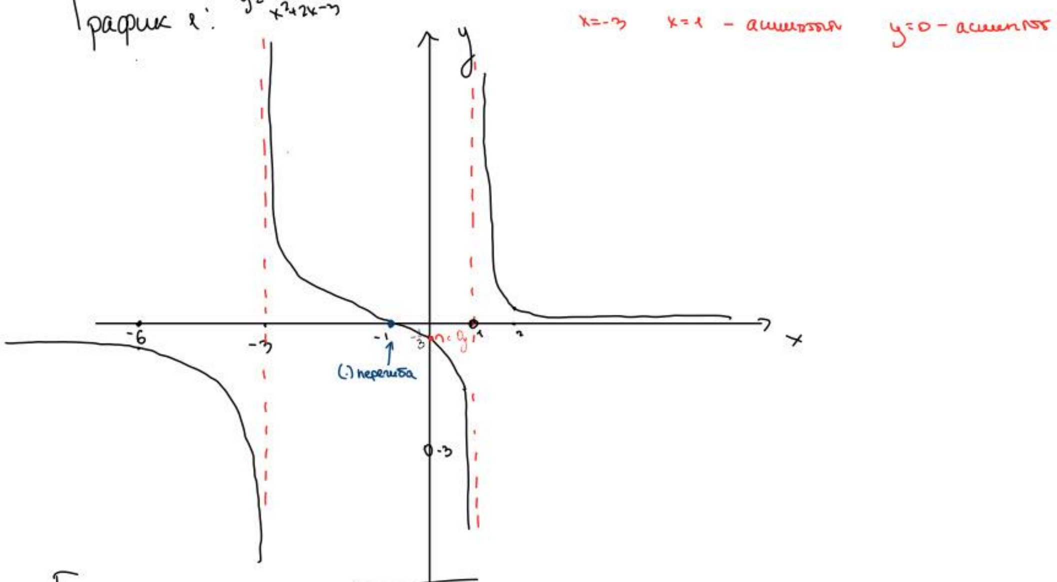


График 2 $y = \sqrt[3]{1-\cos x}$