Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Научно-образовательная корпорация ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Отчёт по расчетно-графической работе №1

По дисциплине «Линейная геометрия»
По теме «Линейное пространство и СЛАУ», вариант 3

Выполнили:
Васильев Александр P3132
Глотов Егор P3132
Волков Григорий P3132
Мальков Павел P3132
Гуменник Петр P3133

Проверила:
Филимонова Арина Николаевна

Санкт-Петербург
2022 г.

1 СЛАУ и определители

Даны две системы линейных алгебраических уравнений: $a)\begin{cases}2x+y-5z=-1\\x+2y-4z=4\\x-y-z=-5\end{cases}$ $\quad b)\begin{cases}x+2y-3z=-7\\2x-y-z=1\\x+3y+4z=6\end{cases}$

1) Исследуйте системы на совместность/несовместность, определенность/неопределенность на основе теоремы Кронекера-Капелли и следствия из него (о количестве решений).

$$a)\begin{cases}2x+y-5z=-1\\x+2y-4z=4\\x-y-z=-5\end{cases} \quad A=\begin{pmatrix}2&1&-5\\1&2&-4\\1&-1&-1\end{pmatrix} \; A^*=\begin{pmatrix}2&1&-5&|&-1\\1&2&-4&|&4\\1&-1&-1&|&-5\end{pmatrix}$$

Найдём ранг матрицы A:

$$\text{A}=\left(\begin{array}{ccc}2&1&-5\\1&2&-4\\1&-1&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc}1&0.5&-2.5\\1&2&-4\\1&-1&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc}1&0.5&-2.5\\0&1.5&-1.5\\0&1.5&-1.5\end{array}\right)=>Rank(A)=2$$

Найдём ранг матрицы A^*:

$$\text{A}^*=\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-5&-1\\1&2&-4&4\\1&-1&-1&-5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0.5&-2.5&-0.5\\1&2&-4&4\\1&-1&-1&-5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0.5&-2.5&-0.5\\0&1.5&-1.5&4.5\\0&1.5&-1.5&4.5\end{array}\right)=>Rank(A^*)=2$$

По теореме Кронекера-Капелли о совместности СЛАУ, приходим к выводу, так как Rank(A)=Rank(A^*), то СЛАУ совместна. По следсвию о количестве решений, так как $Rank(A)=Rank(A^*)=2\neq$ n, где n - кол-во переменных СЛАУ, то она неопределена и имеет бесконечное количество решений.

$$b)\begin{cases}x+2y-3z=-7\\2x-y-z=1\\x+3y+4z=6\end{cases} \quad B=\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&-1&-1\\1&3&4\end{pmatrix} \; B^*=\begin{pmatrix}1&2&-3&|&-7\\2&-1&-1&|&1\\1&3&4&|&6\end{pmatrix}$$

Найдём ранг матрицы B:

$$\begin{vmatrix}1&2&-3\\2&-1&-1\\1&3&4\end{vmatrix}\neq 0=>Rank(B)=3$$

Определитель минора максимального 3 порядка не равен нулю, поэтому ранг матрицы равен порядку этого минора.

Найдём ранг матрицы B^*:

$$\begin{vmatrix}2&-3&-7\\-1&-1&1\\3&4&6\end{vmatrix}\neq 0=>Rank(B)=3$$

Определитель минора максимального 3 порядка не равен нулю, поэтому ранг матрицы равен порядку этого минора.

По теореме Кронекера-Капелли о совместности СЛАУ, приходим к выводу, так как Rank(B)=Rank(B^*), то СЛАУ совместна. По следсвию о количестве решений, так как Rank(B)=$Rank(B^*)$=3=n, где n - кол-во переменных СЛАУ, то она определена и имеет одно решение.

2) Для совместной определенной системы (если она есть):
Найдите определитель основной матрицы методом разложения по 3-й строке и затем по 2-му столбцу (без предварительного упрощения элементарными преобразованиями). Решите её, проверьте решение подстановкой.

$$b)\begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ 2x-y-z=1 \\ x+3y+4z=6 \end{cases} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$det(B)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (-3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3\cdot(-1)^3\cdot(-1)+(-1)(-1)^4\cdot 2+(-3)((-3)(-1)^3\cdot 2+(-1)(-1)^4\cdot 1)+4(2\cdot(-1)^3\cdot 2+(-1)(-1)^4\cdot 1) = -40$$

Решим СЛАУ методом Гаусса:

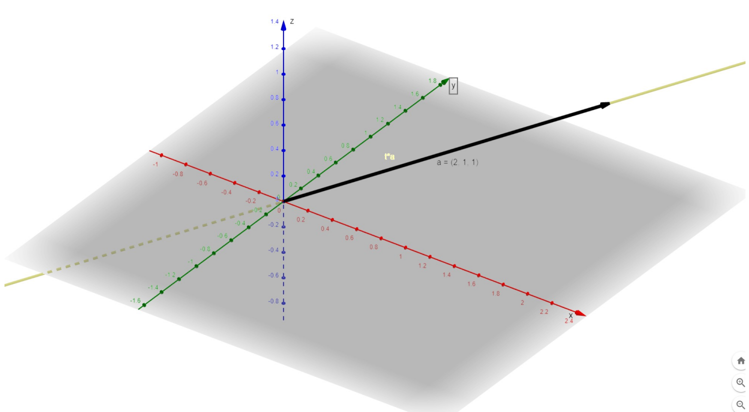
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & -7 \\ 2 & -1 & -1 & | & 1 \\ 1 & 3 & 4 & | & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & -7 \\ 0 & -5 & 5 & | & 15 \\ 0 & 1 & 7 & | & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & -7 \\ 0 & 1 & -1 & | & -3 \\ 0 & 0 & 8 & | & 16 \end{pmatrix} => \begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ y-z=-3 \\ 8z=16 \end{cases} => \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases}$$

3) Для неопределенной или несовместной системы (если она есть): Запишите её как однородную. Найдите базис подпространства, которое задаётся этой системой. Изобразите подпространство решений на графике. Найдите множество всех решений неопределённой системы, изобразите его на том же графике.

Размерность подпространства равна: n - Rank(A) = 3 - 2 = 1
Пусть базисные переменные: x, y
Свободная: z
Тогда, воспользовавшись преобразованной матрицой из первого пункта, получаем:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} => \begin{cases} x=2z \\ y=z \\ z=z \end{cases}$$

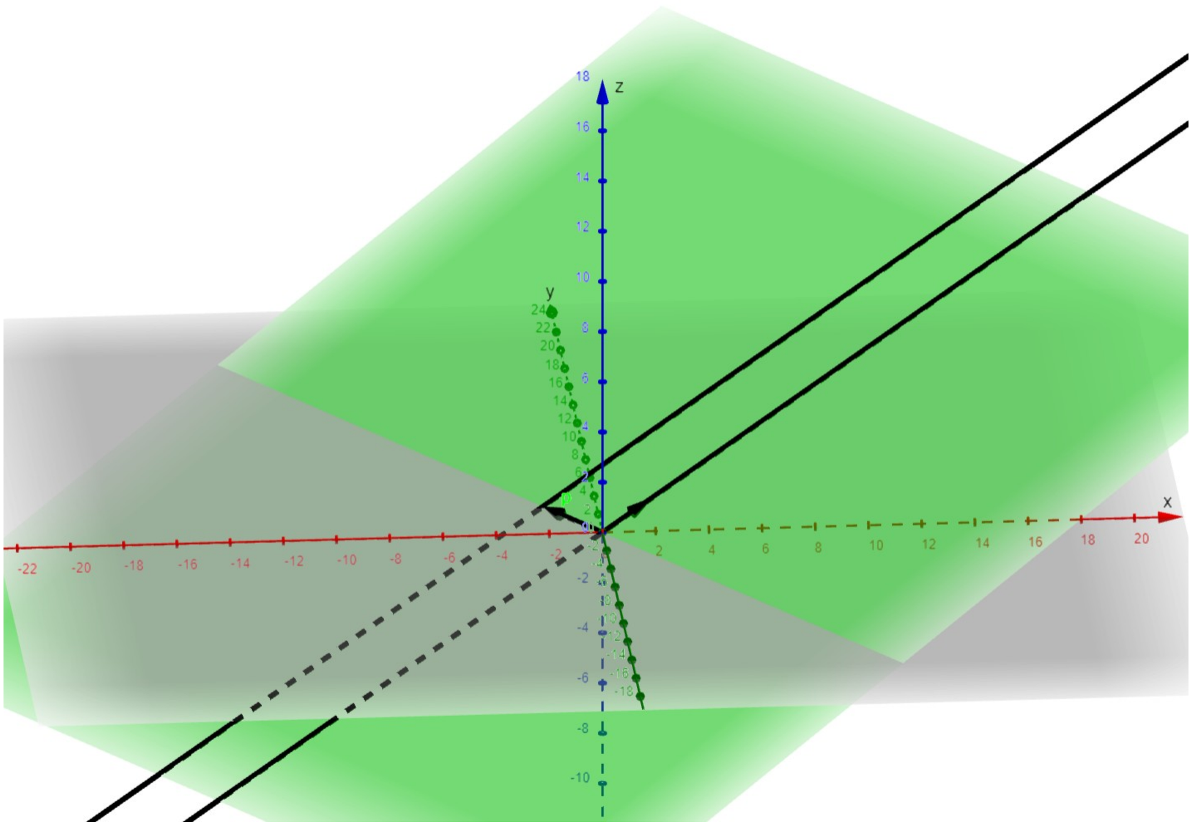
Так как базис пространства решений однородной системы линейных уравнений называется ФСР (фундаментальной системой решений), то найдём её.
Для этого свободную переменную z приравняем к 1, тогда x=2, y=1. Изобразим подпространство решений на графике.



Найдём множество всех решений неопределённой системы и изобразим его на том же графике. Для этого воспользуемся преобразованной матрицей из первого пункта.
Пусть базисные переменные: x, y
Свободная: z

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1.5 & -1.5 & 4.5 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 1 & -5 \\ 0 & 1 & | & 1 & 3 \end{pmatrix} => \begin{cases} x - y = -5 + z \\ y = 3 + z \\ z = z \end{cases} => \begin{cases} x = 2z - 2 \\ y = 3 + z \\ z = z \end{cases}$$

Присвоим z значение 0 $=> x_0 = (-2, 3, 0)^T$



2 Координаты вектора в базисе

Докажите, что система A является базисом в соответствующем линейном пространстве L. Найдите в этом базисе координаты элемента x.
a)L – пространство матриц второго порядка:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Составим линейную комбинацию векторов, если они являются базисом, то она будет обращаться в 0, только если все λ_n будут 0

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4 = 0 \quad \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & \lambda_1 \\ 3\lambda_1 & 2\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 & 3\lambda_2 \\ -2\lambda_2 & -\lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\lambda_3 & -3\lambda_3 \\ \lambda_3 & \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\lambda_4 & \lambda_4 \\ -\lambda_4 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + 4\lambda_4 & \lambda_1 + 3\lambda_2 - 3\lambda_3 + \lambda_4 \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 & 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix} = 0 \ => \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 - 3\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\det\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = 6 \neq 0$$ – невырожденная матрица и определитель

Запишем в виде расширенной матрицы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)_{I-2II} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)_{I-III} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)_{3I-2IV}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 14 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 14 & 0 \end{array}\right)_{II-8III} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -21 & -30 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 14 & 0 \end{array}\right)_{II-2IV} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -21 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & -19 & -26 & 0 \end{array}\right)_{19III-21IV} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -399 & -570 & 0 \\ 0 & 0 & -399 & -546 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -21 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -24 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_3 + \lambda_2 + 4\lambda_4 = 0 \\ 8\lambda_3 - 5\lambda_2 + 2\lambda_4 = 0 \\ -21\lambda_2 - 30\lambda_4 = 0 \\ -24\lambda_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Координаты вектора x – это $a_1; a_2; a_3; a_4$ удовлетворяющие уравнению:

$$a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + a_4A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a_1 & a_1 \\ 3a_1 & 2a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 3a_2 \\ -2a_2 & -a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a_3 & -3a_3 \\ a_3 & a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4a_4 & a_4 \\ -a_4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 + 2a_3 + 4a_4 = -1 \\ a_1 + 3a_2 - 3a_3 + a_4 = 3 \\ 3a_1 - 2a_2 + a_3 - a_4 = 8 \\ 2a_1 - a_2 + a_3 = 4 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)_{I-2II} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & 2 & -7 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)_{3I-2III} \sim \left(\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & 2 & -7 \\ 0 & 7 & 4 & 14 & -19 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)_{I-IV} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & 2 & -7 \\ 0 & 7 & 4 & 14 & -19 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & -5 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_3 & a_2 & a_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 4 & 7 & 14 & -19 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -5 \end{array}\right)_{II-2III} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -19 & -26 & 31 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -5 \end{array}\right)_{II-8IV} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -19 & -26 & 31 \\ 0 & 0 & -21 & -30 & 33 \end{array}\right)_{21III-19IV} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -399 & -546 & 651 \\ 0 & 0 & -399 & -570 & 627 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_3 & a_2 & a_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -19 & -26 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 24 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 2a_3 + a_2 + 4a_4 = -1 \\ 8a_3 - 5a_2 + 2a_4 = -7 \\ -19a_2 - 26a_4 = 31 \\ 24a_4 = 24 \end{cases} \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_3 = -3 \\ a_2 = -3 \\ a_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) $e_1 = 1+t^2$ $\qquad x = t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$

$e_2 = t + t^3$

$e_3 = t^2 + t^4$

$e_4 = 1 + t^3$

$e_5 = t + t^4$

$e_1 = (0, 0, 1, 0, 1)$

$e_2 = (0, 1, 0, 1, 0)$

$e_3 = (1, 0, 1, 0, 0)$

$e_4 = (0, 1, 0, 0, 1)$

$e_5 = (1, 0, 0, 1, 0)$

Л.н. $\quad a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5 = 0$

Если базис, то тривиальная

$$(0, 0, a_1, 0, a_1) + (0, a_2, 0, a_2, 0) + (a_3, 0, a_3, 0, 0) + (0, a_4, 0, 0, a_4) + (a_5, 0, 0, a_5, 0) = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0\\ 1&0&0&1&0&0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&1&0 \end{array}\right)\text{II-I} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&1&0&0&0\\ 0&0&-1&1&0&0\\ 0&1&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&1&0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0\\ 0&0&-1&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&1&0 \end{array}\right)\text{IV-II} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0\\ 0&0&-1&1&0&0\\ 0&0&0&-1&1&0\\ 0&0&1&0&1&0 \end{array}\right)-1\cdot\text{III} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&-1&0&0\\ 0&0&0&-1&1&0\\ 0&0&1&0&1&0 \end{array}\right)\text{I-III} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&-1&0&0\\ 0&0&0&-1&1&0\\ 0&0&1&0&1&0 \end{array}\right)\text{V-III} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&-1&0&0\\ 0&0&0&-1&1&0\\ 0&0&0&1&1&0 \end{array}\right)-1\cdot\text{IV} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&-1&0&0\\ 0&0&0&1&-1&0\\ 0&0&0&1&1&0 \end{array}\right)\text{I-IV} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&-1&0&0\\ 0&0&0&1&-1&0\\ 0&0&0&1&1&0 \end{array}\right)\text{II-IV} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&-1&0&0\\ 0&0&0&1&-1&0\\ 0&0&0&1&1&0 \end{array}\right)\text{III+IV} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&-1&0\\ 0&0&0&1&-1&0\\ 0&0&0&1&1&0 \end{array}\right)\text{V-IV} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&-1&0\\ 0&0&0&1&-1&0\\ 0&0&0&0&2&0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_5 = 0\\ a_2 + a_5 = 0\\ a_3 - a_5 = 0\\ a_4 - a_5 = 0\\ -2a_5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 0\\ a_2 = 0\\ a_3 = 0\\ a_4 = 0\\ a_5 = 0 \end{cases}$$

$x = t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$

$x = (1; -1; 1; -1; 1) \qquad a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5 = (1; -1; 1; -1; 1)$

Запишем в виде расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0&0&1&0&1&1\\ 0&1&0&1&0&-1\\ 1&0&1&0&0&1\\ 0&1&0&0&1&-1\\ 1&0&0&1&0&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&1&0&0&1\\ 1&0&0&1&0&-2\\ 0&1&0&1&0&1\\ 0&1&0&0&1&-1\\ 0&0&1&0&1&1 \end{array}\right)\text{II-I} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&1&0&0&1\\ 0&0&-1&1&0&1\\ 0&1&0&1&0&-2\\ 0&1&0&0&1&-1\\ 0&0&1&0&1&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&1&0&0&1\\ 0&1&0&1&0&1\\ 0&0&-1&1&0&-2\\ 0&1&0&0&1&-2\\ 0&0&1&0&1&1 \end{array}\right)\text{IV-II} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&1&0&0&1\\ 0&1&0&1&0&1\\ 0&0&-1&1&0&2\\ 0&0&0&-1&1&-2\\ 0&0&1&0&1&1 \end{array}\right)-1\cdot\text{III} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&1&0&0&-1\\ 0&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&-1&0&2\\ 0&0&0&-1&1&-2\\ 0&0&1&0&1&1 \end{array}\right)\text{I-III} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&1&0&-1\\ 0&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&-1&0&2\\ 0&0&0&-1&1&-2\\ 0&0&1&0&1&-1 \end{array}\right)\text{V-III} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&1&0&-1\\ 0&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&-1&0&2\\ 0&0&0&-1&1&-2\\ 0&0&0&1&1&-1 \end{array}\right)-1\cdot\text{IV} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&1&0&-1\\ 0&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&-1&0&2\\ 0&0&0&1&-1&2\\ 0&0&0&1&1&-1 \end{array}\right)\text{I-IV} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&1&-3\\ 0&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&-1&0&2\\ 0&0&0&1&-1&2\\ 0&0&0&1&1&-1 \end{array}\right)\text{II-IV} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&1&-3\\ 0&1&0&0&1&-1\\ 0&0&1&-1&0&2\\ 0&0&0&1&-1&2\\ 0&0&0&1&1&-1 \end{array}\right)\text{III+IV} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&1&-3\\ 0&1&0&0&1&-1\\ 0&0&1&0&-1&4\\ 0&0&0&1&-1&2\\ 0&0&0&1&1&-1 \end{array}\right)\text{V-IV} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&1&-3\\ 0&1&0&0&1&-1\\ 0&0&1&0&-1&4\\ 0&0&0&1&-1&2\\ 0&0&0&0&2&-3 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} a_1 + a_5 = -3\\ a_2 + a_5 = -1\\ a_3 - a_5 = 4\\ a_4 - a_5 = 2\\ a_5 = -3 \end{matrix} \qquad \begin{cases} a_1 = -1{,}5\\ a_2 = 0{,}5\\ a_3 = 2{,}5\\ a_4 = 0{,}5\\ a_5 = -1{,}5 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -1{,}5\\ 0{,}5\\ 2{,}5\\ 0{,}5\\ -1{,}5 \end{pmatrix}$$

3 Линейная оболочка и СЛАУ

Найдите систему линейных уравнений, подпространство решений которой совпадает с линейной оболочкой системы векторов A.

$a_1 = \begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 2\\ -3 \end{pmatrix}$; $a_2 = \begin{pmatrix} 3\\ -5\\ 4\\ 1 \end{pmatrix}$; $a_3 = \begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 0\\ 7 \end{pmatrix}$; Рассмотрим СЛАУ из трёх уравнений с n=4 незвестными: $Ax = 0$; $\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3 \end{pmatrix} x = 0$;

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3\\ 3 & -5 & 4 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 0$; Найдём ФСР системы: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 & 0\\ 3 & -5 & 4 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 7 & 0\\ 1 & -2 & 2 & -3 & 0\\ 3 & -5 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 7 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -10 & 0\\ 0 & -2 & 4 & -20 & 0 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 7 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -10 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 7 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -10 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 17 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -10 & 0 \end{array}\right)$; ФСР будет иметь $n - rank(A) = 2$ решений

rank(A)=2; Пусть x_1, x_2 - базисные переменные, а x_3, x_4 - свободные переменные $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -17\\ 0 & -1 & -2 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -17\\ 0 & 1 & 2 & -10 \end{array}\right)$

$\begin{cases} x_1 = \quad 2x_3 - 17x_4\\ x_2 = 2x_3 - 10x_4\\ x_3 = x_3\\ x_4 = x_4 \end{cases}$ Пусть $x_3 = 1,\ x_4 = 0 \ => \ x_1 = \quad 2;\ x_2 = 2, \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} 2\\ 2\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}$;

Пусть $x_3 = 0,\ x_4 = 1 \ => \ x_1 = -17; x_2 = -10, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} -17\\ -10\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}$;

Составим систему линейных уравнений, подпространство решений которой совпадает с линейной оболочкой системы векторов A.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -17x_1 - 10x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

4 Координаты при смене базиса

В линейном пространстве со стандартным базисом $E = (e_1, e_2, e_3)$, где заданы системы векторов $A = (a_1, a_2, a_3)$ и $B = (b_1, b_2, b_3)$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ a_1 = \begin{pmatrix} 0.433 \\ -0.8995 \\ 0.058 \end{pmatrix};\ a_2 = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.058 \\ -0.9665 \end{pmatrix};\ a_3 = \begin{pmatrix} 0.866 \\ 0.433 \\ 0.25 \end{pmatrix};$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 2.2901 \\ -0.8325 \end{pmatrix};\ b_2 = \begin{pmatrix} 2.6651 \\ 2.3146 \\ -1.241 \end{pmatrix};\ b_3 = \begin{pmatrix} 2.1651 \\ -0.0335 \\ 0.558 \end{pmatrix};\ x_B = \begin{pmatrix} 1.8 \\ -2.4 \\ 3.2 \end{pmatrix}$$

Для проверки на базис определитель матрицы, составленной из системы векторов, не должен быть равен нулю.

$$A = \begin{vmatrix} 0.433 & -0.8995 & 0.058 \\ 0.25 & 0.058 & -0.9665 \\ 0.866 & 0.433 & 0.25 \end{vmatrix} = 0,9958945495 \quad B = \begin{vmatrix} 0.25 & 2.2901 & -0.8325 \\ 2.6651 & 2.3146 & -1.241 \\ 2.1651 & -0.0335 & 0.558 \end{vmatrix} = -5,000150956915$$

A-образует базис; B-образует базис

Проверим на ортогональность базисы через скалярное произведение. Если $(x_i, x_j) = 0$ при $i \neq j$, то система ортогональна.

$(a_1, a_2) = 0.433 \cdot 0.25 + (-0.8995) \cdot 0.058 + 0.058 \cdot (-0.9665) = 0.10825 - 0.052171 - 0.056057 = 0.000022 \neq 0$ (базис A не ортогонален)

$(b_1, b_2) = 0.25 \cdot 2.6651 + 2.2901 \cdot 2.3146 + (-0.8325) \cdot (-1.241) = 0.666275 + 5.30066546 + 1.0331325 = 7.00007296 \neq 0$ (базис B не ортогонален)

Ортонормированность базиса проверяется через длины векторов, по формуле:

$$|q| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ (должно быть равно единице)}$$

Для ортонормированности нам требуется ортогональность, поэтому нет смысла проверять базисы.

Следующим шагом найдём матрицу перехода T из базиса A в базис B.

(Матрица, столбцы которой равны координатам векторов из B в базисе A.

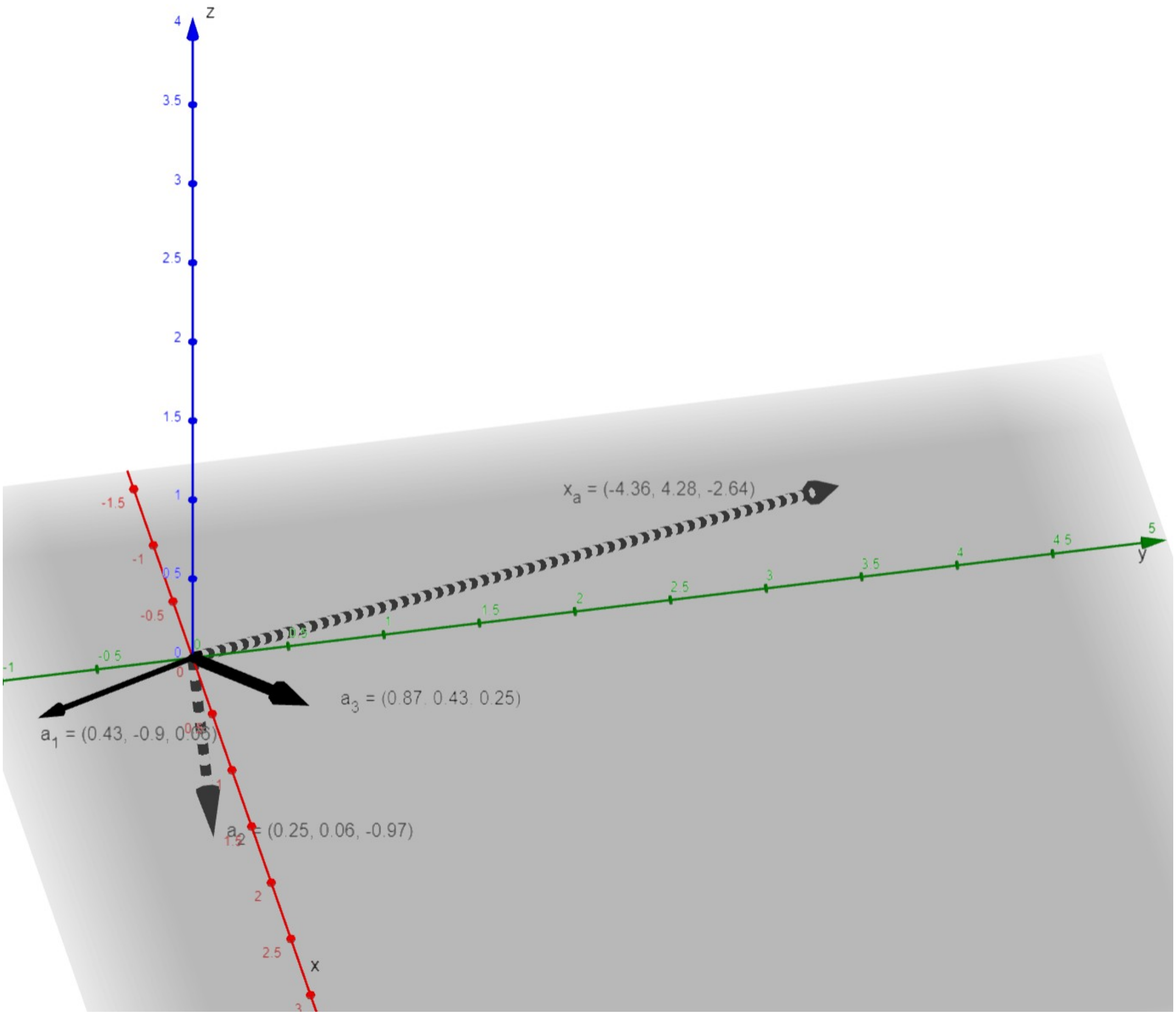
$$B = AT,\ det(T) \neq 0,\ T = A^{-1} \cdot B,\ A^{-1} = \frac{A^T}{det(A)} = \begin{pmatrix} 0,433019507 & -0,899540948 & 0,058025351 \\ 0,250003438 & 0,058025351 & -0,966511816 \\ 0,866052765 & 0,433019507 & 0,250003438 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -2,000089954 & -1,000046652 & 1,000043302 \\ 1,000005803 & 2,000030803 & 2,500031005 \\ 1,000043302 & 3,000129907 & 2,000086605 \end{pmatrix} = T$$

Найти координаты x_A в базисе A, если:

$$x_B = \begin{pmatrix} 1.8 \\ -2.4 \\ 3.2 \end{pmatrix} \qquad x_A \cdot T = x_B \ => \ x_A = T^{-1} \cdot x_B;\ T^{-1} = \frac{T^T}{det(T)} = \begin{pmatrix} -0,466648154 & 0,666663998 & -0,599980171 \\ 0,06666601 & -0,666663998 & 0,799971243 \\ 0,133325062 & 0,666663998 & -0,399988429 \end{pmatrix}$$

$$x_A = \begin{pmatrix} -0,466648154 & 0,666663998 & -0,599980171 \\ 0,06666601 & -0,666663998 & 0,799971243 \\ 0,133325062 & 0,666663998 & -0,399988429 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.8 \\ -2.4 \\ 3.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4,3599233964 \\ 4,27993919112 \\ -2,63995764084 \end{pmatrix}$$


z
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
x_a = (-4.36, 4.28, -2.64)
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
y
-1
-0.5
a_3 = (0.87, 0.43, 0.25)
a_1 = (0.43, -0.9, 0.06)
a_2 = (0.25, 0.06, -0.97)
x

Вывод: *во время выполнения расчётно графической работы мы потренировались исследовать системы на совместность/несовместность, определенность/неопределенность на основе теоремы Кронекера-Капелли и следствия из него. Научились находить базис подпространства, которое задаётся этой системой, а также множество всех решений неопределённой системы, доказывать, что система является базисом в соответствующем линейном пространстве и находить координаты вектора в нём.*
Вспомнили, как составлять матрицу перехода. В ходе исследований проверяли базисы на ортогональность и ортонормированность.

Оценка участников

Васильев Александр	**100%**
Глотов Егор	**100%**
Волков Григорий	**100%**
Мальков Павел	**100%**
Гуменник Петр	**100%**