Максимально правдоподобная оценка для Пуассоновского распределения

Рассмотрим выборку $X_1, X_2, \ldots, X_n$ из Пуассоновского распределения с параметром λ. Функция вероятности для данного распределения имеет вид:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Функция правдоподобия для независимых наблюдений из этого распределения:

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}$$

Логарифмическая функция правдоподобия

Логарифмируем функцию правдоподобия для упрощения вычислений:

$$\ln L(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}\right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i \ln(\lambda) - \lambda - \ln(x_i!))$$

Нахождение максимума функции правдоподобия

Для нахождения максимума, берем производную по λ и приравниваем ее к нулю:

$$\frac{d}{d\lambda} \ln L(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\lambda} - 1\right) = 0$$

Отсюда находим оценку максимального правдоподобия для λ:

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$