МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики»

Расчётно-графическая работа
«Линейный оператор, спектральный анализ
и евклидово пространство»

по дисциплине
«МАТЕМАТИКА»

Команда № 1

Выполнил:
Москвитина Полина P3131
Деревягин Егор P3115
Хромов Даниил P3115
Гуменник Петр P3133
Ефремов Марк P3134

Преподаватель:
Савченко Татьяна Владимировна

Санкт-Петербург, 2023

Задание 1

А) Дано пространство геометрических векторов $\mathbb{R}^3$, его подпространства L_1 и L_2 и линейный оператор $\mathcal{A}$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Проведите исследование:

1) Изобразите на графике подпространства L_1 и L_2 .
2) Методами векторной алгебры составьте формулу для линейного оператора $\mathcal{A}$.
3) Составьте его матрицу в базисе $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ пространства $\mathbb{R}^3$.
4) Решите задачу о диагонализации полученной матрицы методом спектрального анализа.
5) На построенном ранее графике изобразите базис, в котором матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ имеет диагональный вид. Объясните его смысл.

А) $\mathcal{A}$ – оператор проектирования пространства $\mathbb{R}^3$ на подпространство L_1 параллельно подпространству L_2 , где L_1 определено системой уравнений $x - y + z = 0,\ 2x - 3y + 4z = 0,\ L_2$ – уравнением $2x + 3y - 4z = 0$.

Если $L_1 \cap L_2 = \{0\}, L_1 + L_2 = \mathbb{R}^3$ $(L_1 \oplus L_2 = \mathbb{R}^3)$

$\forall v \in \mathbb{R}^3\ \exists!\ v_1 \in L_1, v_2 \in L_2: v = v_1 + v_2, proj_{L_1 \| L_2} v = v_1$

$L_2: AX = 0$

Как найти проекцию: найти: $v_1 \in L_1: v_2 = v - v_1 \in L_2 \Rightarrow A(v - v_1) = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$L_1 = L\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$v_1 = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2 \quad 3 \quad -4)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow (2 \quad 3 \quad -4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4\lambda$$

$$v_1 = \frac{1}{4}\left((2 \quad 3 \quad -4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}(2 \quad 3 \quad -4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 6 & -8 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 6 & -8 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow |4A - 4\lambda E| = 0$

$$0 = \begin{vmatrix} 2 - 4\lambda & 3 & -4 \\ 4 & 6 - 4\lambda & -8 \\ 2 & 3 & -4 - 4\lambda \end{vmatrix} = 64\lambda^2 - 64\lambda^3 = 64\lambda^2(1 - \lambda)$$

$\lambda_{1,2} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 6 & -8 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = C_1, x_3 = C_2, x_1 = -\frac{3}{2}C_1 + 2C_2$$

$$X = \frac{1}{2}C_1\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = 1$:

$$\begin{pmatrix}-2 & 3 & -4\\4 & 2 & -8\\2 & 3 & -8\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\4 & 2 & -8\\2 & 3 & -8\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\0 & 8 & -16\\0 & 6 & -12\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

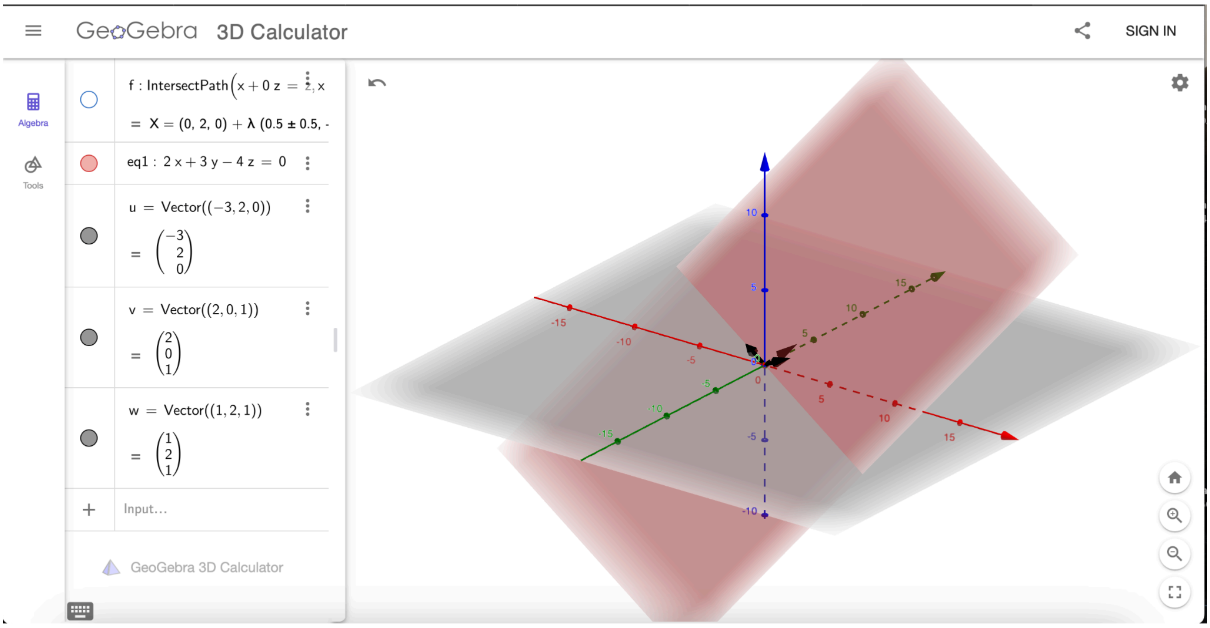
$$\sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

v_1, v_2 — базис L_2 — направляющие векторы плоскости, вдоль которой проекция

v_3 — базис L_1 — направляющий вектор прямой



Б) Дано множество функций L и отображение $\mathcal{A}\colon L \to L$.

Проведите исследование:

1) Проверьте, что L является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$.
2) Выберите в нём базис.
3) Убедитесь, что отображение $\mathcal{A}$ является линейным (оператором).
4) Найдите размерности ядра и образа оператора $\mathcal{A}$.
5) Решите задачу о диагонализации матрицы линейного оператора $\mathcal{A}$ в выбранном базисе методом спектрального анализа:
   - в случае, если $\mathcal{A}$ имеет скалярный тип, для диагонализации используйте собственный базис.
   - в случае, если $\mathcal{A}$ имеет общий тип, для диагонализации используйте жорданов базис (приведите матрицу в жорданову форму).
6) Выберите произвольно (и нетривиально) функцию $f(t)$ как элемент из L. Найдите её образ умножением на матрицу оператора. Проверьте результат непосредственным вычислением образа. Сравните результаты и трудоёмкость.

Б) L – множество функций вида $y = e^t(a_0 + a_1 t + a_2 t^2)$, где $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$,

$\mathcal{A} = \mathcal{D}^2 - 2\mathcal{D} + \mathcal{I}$, где $\mathcal{D}$ – дифференцирование, т.е. $\mathcal{D}(y(t)) = \frac{dy}{dt}$.

Б) $\mathcal{A} = \mathcal{D}^2 - 2\mathcal{D} + \mathcal{I}$, где $\mathcal{D}$ – дифференцирование, т.е. $\mathcal{D}(y(t)) = \frac{dy}{dt}$.

$$\mathcal{D}(y_1 + y_2) = \frac{d(y_1 + y_2)}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt} = \mathcal{D}y_1 + \mathcal{D}y_2$$

$$\mathcal{D}(\lambda y_1) = \frac{d(\lambda y_1)}{dt} = \lambda \frac{dy_1}{dt} = \lambda \mathcal{D}(y_1)$$

$\mathcal{D}$ – линейный оператор $\Rightarrow \mathcal{D}^2$ – линейный оператор $\Rightarrow \mathcal{A}$ – линейный оператор

$\mathcal{A} = (\mathcal{D} - \mathcal{I})^2 = \mathcal{B}^2$(так как $\mathcal{I}$ перестановочен с любым оператором)

$\mathcal{B}(e^t f(t)) = e^t f'(t) + e^t f(t) - e^t f(t) = e^t f'(t) \Rightarrow \mathcal{A}(e^t f(t)) = \mathcal{B}(e^t f'(t)) = e^t f''(t)$

$\mathcal{A}(e^t(a_0 + a_1 t + a_2 t^2)) = e^t(2a_2)$

$Ker\, \mathcal{A} = L\{e^t, te^t\}, Im\, \mathcal{A} = L\{e^t\}$

Перейдем в базис: e^t, te^t, t^2e^t, в нем оператор имеет матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3$$

Все 3 собственных значения – нули. Собственные векторы:

e_1, e_2

$$v_1 = e_1 = e^t, v_2 = \frac{e_3}{2} = \frac{t^2}{2}e^t, v_3 = e_2 = te^t$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$f = (2t^2 + 7t + 4)e^t \leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ в базисе e_1, e_2, e_3

$\mathcal{A}f \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow 4e^t \Rightarrow \mathcal{A}f = 4e^t$

$\mathcal{A}f = \left((2t^2 + 7t + 4)e^t\right)'' - 2\left((2t^2 + 7t + 4)e^t\right)' + (2t^2 + 7t + 4)e^t =$

$= |(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''| =$

$= 4e^t + 2(4t + 7)e^t + (2t^2 + 7t + 4)e^t - 2(4t + 7)e^t - 2(2t^2 + 7t + 4)e^t + (2t^2 + 7t + 4)e^t$

$= 4e^t$

Задание 2

Задание 2. Евклидовы пространства функций

А) Дано пространство многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше третьей, определенных на отрезке $[-1;1]$:

$$P_3(t) = t^3 - 2t^2 + t + 1$$

Провести исследование:

1. Проверить, что система векторов $B = \{1, t, t^2, t^3\}$ является базисом этого пространства. Ортогонализовать систему (построенный ортогональный базис обозначить B_H).
2. Выписать первые четыре (при $n = 0, 1, 2, 3$) многочлена Лежандра: $L_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}((t^2-1)^n)$, где $\frac{d^n}{dt^n}((y(t))$ – производная n-ого порядка функции $y(t)$.
3. Найти координаты полученных многочленов $L_n(t)$ в базисе B_H. Сделать вывод об ортогональности системы векторов $L_n(t)$.
4. Разложить многочлен $P_3(t)$, данный в варианте, по системе векторов $L_n(t)$.

Решение:

1. Рассмотрим систему векторов $B = \{1, t, t^2, t^3\}$, является ли она базисом заданного пространства?
   - Вектора системы B линейно независимы, поскольку (взято из конспектов лекций):
   $$\forall t \in R : \lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 \cdot t + \lambda_2 \cdot t^2 + \lambda_3 \cdot t^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0$$
   - Очевидно, что с помощью этого линейно независимого набора $B = \{1, t, t^2, t^3\}$ можно составить любой многочлен степени не выше трех, а значит эта система векторов является базисом этого пространства.
2. Ортогонализуем систему (построенный ортогональный базис обозначим B_H):
   Пусть $e_1 = 1$, тогда $e_2 = t + \alpha_2^1 \cdot e_1 = t + \alpha_2^1$, при этом $(e_2, e_1) = 0$, поскольку мы хотим получить ортогональный базис, то вектора из него должны быть попарно ортогональны, а следовательно их скалярное произведение должно равняться нулю.

$$(e_2, e_1) = \int_{-1}^{1}(t + \alpha_2^1)dt = \frac{t^2}{2} + \alpha_2^1 \cdot t\Big|_{-1}^{1} = 2 \cdot \alpha_2^1 = 0 \Rightarrow \alpha_2^1 = 0 \Rightarrow e_2 = t$$

$$e_3 = t^2 + \alpha_3^1 \cdot e_1 + \alpha_3^2 \cdot e_2 = t^2 + \alpha_3^1 + \alpha_3^2 \cdot t;\ (e_3, e_1) = 0, (e_3, e_2) = 0$$

$$(e_3, e_1) = \int_{-1}^{1}(t^2 + \alpha_3^1 + \alpha_3^2 \cdot t)dt = \frac{t^3}{3} + \alpha_3^1 \cdot t + \alpha_3^2 \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} + 2 \cdot \alpha_3^1 = 0 \Rightarrow \alpha_3^1 = -\frac{1}{3}$$

$$(e_3, e_2) = \int_{-1}^{1}(t^3 + \alpha_3^1 \cdot t + \alpha_3^2 \cdot t^2)dt = \frac{t^4}{4} + \alpha_3^1 \cdot \frac{t^2}{2} + \alpha_3^2 \cdot \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \cdot \alpha_3^2 = 0 \Rightarrow \alpha_3^2 = 0$$

$$\Rightarrow e_3 = t^2 - \frac{1}{3}$$

$$e_4 = t^3 + \alpha_4^1 \cdot e_1 + \alpha_4^2 \cdot e_2 + \alpha_4^3 \cdot e_3 = t^3 + \alpha_4^1 + \alpha_4^2 \cdot t + \alpha_4^3 \cdot (t^2 - \frac{1}{3});\ (e_4, e_1) = 0, (e_4, e_2) = 0, (e_4, e_3) = 0$$

$$(e_4, e_1) = \int_{-1}^{1}(t^3 + \alpha_4^1 + \alpha_4^2 \cdot t + \alpha_4^3 \cdot (t^2 - \frac{1}{3}))dt = \frac{t^4}{4} + \alpha_4^1 \cdot t + \alpha_4^2 \cdot \frac{t^2}{2} + \alpha_4^3 \cdot (\frac{t^3}{3} - \frac{1}{3} \cdot t)\Big|_{-1}^{1} = 2 \cdot \alpha_4^1 = 0 \Rightarrow \alpha_4^1 = 0$$

$$(e_4, e_2) = \int_{-1}^{1}(t^4 + \alpha_4^1 \cdot t + \alpha_4^2 \cdot t^2 + \alpha_4^3 \cdot (t^3 - \frac{1}{3} \cdot t)dt = \frac{t^5}{5} + \alpha_4^1 \cdot \frac{t^2}{2} + \alpha_4^2 \cdot \frac{t^3}{3} + \alpha_4^3 \cdot (\frac{t^4}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{t^2}{2})\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \cdot \alpha_4^2 = 0 \Rightarrow \alpha_4^2 = -\frac{3}{5}$$

$$(e_4, e_3) = \int\limits_{-1}^{1} (t^3 + \alpha_4^1 + \alpha_4^2 \cdot t + \alpha_4^3 \cdot (t^2 - \frac{1}{3})) \cdot (t^2 - \frac{1}{3}) dt = \frac{8}{45} \cdot \alpha_4^3 = 0 \Rightarrow \alpha_4^3 = 0$$

$$\Rightarrow e_4 = t^3 - \frac{3}{5} \cdot t$$

Таким образом, получившийся ортогональный базис имеет вид:

$$B_H = \{1, t, t^2 - \frac{1}{3}, t^3 - \frac{3}{5} \cdot t\}$$

3. Посчитаем первые четыре (при $n = 0, 1, 2, 3$) многочлена Лежандра: $L_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n}((t^2 - 1)^n)$, где $\frac{d^n}{dt^n}((y(t))$ – производная n-ого порядка функции $y(t)$:

$$L_0(t) = 1$$

$$L_1(t) = \frac{1}{2} \cdot (t^2 - 1)' = t$$

$$L_2(t) = \frac{1}{2^2 \cdot 2!} \cdot ((t^2 - 1)^2)'' = \frac{1}{8} \cdot (t^4 - 2 \cdot t^2 + 1)'' = \frac{3 \cdot t^2 - 1}{2}$$

$$L_3(t) = \frac{1}{2^3 \cdot 3!} \cdot ((t^2 - 1)^3)''' = \frac{1}{48} \cdot (t^6 - 3 \cdot t^4 + 3 \cdot t^2 - 1)''' = \frac{1}{2} \cdot (5 \cdot t^3 - 3 \cdot t)$$

4. Найдем координаты полученных многочленов $L_n(t)$ в базисе B_H. Первые два многочлена Лежандра очевидно раскладываются по базису B_H:

$$L_0(t) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$$

$$L_1(t) = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$$

Следующие два полинома Лежандра:

$$L_2(t) = \beta_1 \cdot e_1 + \beta_2 \cdot e_2 + \beta_3 \cdot e_3 + \beta_4 \cdot e_4 = \beta_1 + \beta_2 \cdot t + \beta_3 \cdot (t^2 - \frac{1}{3}) + \beta_4 \cdot (t^3 - \frac{3}{5} \cdot t) = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot t^2 - 1)$$

$$\Rightarrow \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 0,\ \beta_3 = \frac{3}{2},\ \beta_4 = 0 \Rightarrow L_3(t) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \frac{3}{2} \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$$

$$L_3(t) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + \frac{5}{2} \cdot e_4$$

Таким образом, координаты полученных многочленов $L_n(t)$ в базисе B_H:

$$L_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_3(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Становится очевидно, что система векторов $L_n(t)$ ортогональна, поскольку попарные скалярные произведения векторов равны нулю.

5. Разложим многочлен $P_3(t) = t^3 - 2t^2 + t + 1$ по системе векторов $L_n(t)$:

$$P_3(t) = \gamma_0 \cdot L_0(t) + \gamma_1 \cdot L_1(t) + \gamma_2 \cdot L_2(t) + \gamma_3 \cdot L_3(t) = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot t + \gamma_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot t^2 - 1) + \gamma_3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (5 \cdot t^3 - 3 \cdot t)$$

$$\Rightarrow t^3 - 2t^2 + t + 1 = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot t + \gamma_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot t^2 - 1) + \gamma_3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (5 \cdot t^3 - 3 \cdot t)$$

$$\Rightarrow \gamma_0 = \frac{1}{3},\ \gamma_1 = \frac{8}{5},\ \gamma_2 = -\frac{4}{3},\ \gamma_3 = \frac{2}{5}$$

Таким образом, разложение исходного многочлена по системе векторов $L_n(t)$:

$$P_3(t) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{8}{5} \cdot t + \frac{-4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot t^2 - 1) + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot (5 \cdot t^3 - 3 \cdot t)$$

$$\Rightarrow P_3(t) = \frac{1}{3} \cdot L_0(t) + \frac{8}{5} \cdot L_1(t) + \frac{-4}{3} \cdot L_2(t) + \frac{2}{5} \cdot L_3(t)$$

Также разложение можно получить с помощью ортогонального проектора:

$$\Rightarrow P_3(t) = \frac{(L_0(t), P_3(t)) \cdot L_0(t)}{(L_0(t), L_0(t))} + \frac{(L_1(t), P_3(t)) \cdot L_1(t)}{(L_1(t), L_1(t))} + \frac{(L_2(t), P_3(t)) \cdot L_2(t)}{(L_2(t), L_2(t))} + \frac{(L_3(t), P_3(t)) \cdot L_3(t)}{(L_3(t), L_3(t))}$$

Для удобства распишем и посчитаем каждое из слагаемых отдельно:

$$(L_0(t), P_3(t)) = \int_{-1}^{1} L_0(t) \cdot P_3(t) dt = \int_{-1}^{1} (t^3 - 2t^2 + t + 1) dt = \frac{2}{3}$$

$$(L_0(t), L_0(t)) = \int_{-1}^{1} L_0(t) \cdot L_0(t) dt = \int_{-1}^{1} 1 dt = 2$$

$$\Rightarrow \frac{(L_0(t), P_3(t)) \cdot L_0(t)}{(L_0(t), L_0(t))} = \frac{\frac{2}{3} \cdot L_0(t)}{2} = \frac{1}{3} \cdot L_0(t)$$

$$(L_1(t), P_3(t)) = \int_{-1}^{1} L_1(t) \cdot P_3(t) dt = \int_{-1}^{1} t \cdot (t^3 - 2t^2 + t + 1) dt = \frac{16}{15}$$

$$(L_1(t), L_1(t)) = \int_{-1}^{1} L_1(t) \cdot L_1(t) dt = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{(L_1(t), P_3(t)) \cdot L_1(t)}{(L_1(t), L_1(t))} = \frac{\frac{16}{15} \cdot L_1(t)}{\frac{2}{3}} = \frac{8}{5} \cdot L_1(t)$$

$$(L_2(t), P_3(t)) = \int_{-1}^{1} L_2(t) \cdot P_3(t) dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot t^2 - 1) \cdot (t^3 - 2t^2 + t + 1) dt = \frac{-8}{15}$$

$$(L_2(t), L_2(t)) = \int_{-1}^{1} L_2(t) \cdot L_2(t) dt = \int_{-1}^{1} (\frac{1}{2} \cdot (3 \cdot t^2 - 1))^2 dt = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{(L_2(t), P_3(t)) \cdot L_2(t)}{(L_2(t), L_2(t))} = \frac{\frac{-8}{15} \cdot L_2(t)}{\frac{2}{5}} = \frac{-4}{3} \cdot L_2(t)$$

$$(L_3(t), P_3(t)) = \int_{-1}^{1} L_3(t) \cdot P_3(t) dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \cdot (5 \cdot t^3 - 3 \cdot t) \cdot (t^3 - 2t^2 + t + 1) dt = \frac{4}{35}$$

$$(L_3(t), L_3(t)) = \int_{-1}^{1} L_3(t) \cdot L_3(t) dt = \int_{-1}^{1} (\frac{1}{2} \cdot (5 \cdot t^3 - 3 \cdot t))^2 dt = \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{(L_3(t), P_3(t)) \cdot L_3(t)}{(L_3(t), L_3(t))} = \frac{\frac{4}{35} \cdot L_3(t)}{\frac{2}{7}} = \frac{2}{5} \cdot L_3(t)$$

Таким образом, получившееся разложение:

$$\Rightarrow P_3(t) = \frac{1}{3} \cdot L_0(t) + \frac{8}{5} \cdot L_1(t) + \frac{-4}{3} \cdot L_2(t) + \frac{2}{5} \cdot L_3(t)$$

Вывод:
Таким образом, было получено, что система векторов $B = \{1, t, t^2, t^3\}$ является базисом пространства многочленов степени не выше третьей, впоследствии эта система была ортогонализована. Кроме того, были получены первые четыре многочлена Лежандра и их координаты в базисе B_H, вследствие чего было установлено, что система векторов $L_n(t)$ ортогональна. В заключение, мы разложили многочлен $P_3(t)$, данный в варианте, по системе векторов $L_n(t)$.

А) Дано пространство многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше третьей, определенных на отрезке [– 1; 1].

$P_3(t) = t^3 - 2t^2 + t + 1$

1) Проверка базиса:

Для того, чтобы система векторов B = {1, t, t^2, t^3} была базисом пространства многочленов степени не выше третьей на отрезке [-1; 1], нужно убедиться в ее линейной независимости и том, что она охватывает все многочлены данной степени.

Линейная независимость:
Пусть c1, c2, c3, c4 - произвольные вещественные числа. Если c1 * 1 + c2 * t + c3 * t^2 + c4 * t^3 = 0 для всех t в [-1; 1], то все коэффициенты должны быть равны нулю. Таким образом, система векторов B линейно независима. Охват всех многочленов степени не выше третьей: Для любого многочлена P(t) степени не выше третьей можно подобрать такие коэффициенты c1, c2, c3, c4, что P(t) = c1 * 1 + c2 * t + c3 * t^2 + c4 * t^3. Следовательно, система векторов B охватывает все многочлены данной степени.

Найдем коэффициенты c1, c2, c3, c4, такие что $P_3(t)$ будет ровно этой линейной комбинации: c1 = 1, c2 = -2, c3 = 1, c4 = 1

Таким образом, система векторов B является базисом пространства многочленов

Ортагонализируем систему векторов методом Грама-Шмидта:

Ортогонализация первого вектора:

$e_1 = 1$

Ортогонализация второго вектора:

$e_2 = t - \frac{(e_1 * (t, e_1))}{||e_1||^2}$,

где (t, e_1) - скалярное произведение между векторами t и e_1,

$||e_1||$ - норма вектора e_1.

Ортогонализация третьего вектора:

$e_3 = t^2 - \frac{(e_1 * (t^2, e_1))}{||e_1||^2} - \frac{(e_2 * (t^2, e_2))}{||e_2||^2}$, где (t^2, e_1) - скалярное произведение между векторами t^2 и e_1,

(t^2, e_2) - скаляр

Получаем ортогонализованную систему:

BH = {1, t, (1/3) * t^2, t^3 - (1/5) * t^5}

2) Выпишем первые четыре многочлена Лежандра:

$L_0(t) = 1$

$L_1(t) = t$

$L_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)$

$L_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t)$

3) Для определения координат полученных многочленов $L_n(t)$ в базисе BH, мы должны выразить каждый многочлен $L_n(t)$ через векторы базиса $BH = \{1,\ t,\ \frac{1}{3}t^2,\ t^3 - \frac{1}{5}t^5\}$.

Выпишем выражения для первых четырех многочленов Лежандра $L_n(t)$:

$L_0(t)$ = 1

$L_1(t)$ = t

$L_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)$

$L_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t)$

Теперь найдем координаты этих многочленов в базисе B_H, то есть найдем числа a_0, a_1, a_2, a_3 такие, что:

$L_0(t) = a_0 * 1 + a_1 * t + a_2 * \frac{1}{3} * t^2 + a_3 * (t^3 - \frac{1}{5}t^5)$

Сравнивая коэффициенты при соответствующих степенях t, получаем следующие значения координат:

Для $L_0(t)$:

$a_0 = 1$

$a_1 = 0$

$a_2 = 0$

$a_3 = 0$

Для $L_1(t)$:

$a_0 = 0$

$a_1 = 1$

$a_2 = 0$

$a_3 = 0$

Для $L_2(t)$:

$a_0 = 1$

$a_1 = 0$

$a_2 = \frac{1}{3}$

$a_3 = 0$

Для $L_3(t)$:

$a_0 = 0$

$a_1 = 0$

$a_2 = 0$

$a_3 = 1$

Таким образом, координаты полученных многочленов $L_n(t)$ в базисе B_H будут:

$L_1(t) = (1, 0, 0, 0)$

$L_1(t) = (0, 1, 0, 0)$

$L_2(t) = (0, 0, 1/3, 0)$

$L_3(t) = (0, 0, 0, 1)$

Теперь можно сделать вывод о ортогональности системы векторов $L_n(t)$. Поскольку полученные многочлены $L_n(t)$ имеют ненулевые координаты только в соответствующих позициях базисных векторов B_H и нулевые координаты во всех остальных позициях, это означает, что система векторов B_H является ортогональной системой.

4) Для разложения многочлена $P_3(t)$ по системе векторов Лежандра $L_n(t)$, мы должны найти коэффициенты разложения, используя ортогональность многочленов Лежандра.

Многочлен $P_3(t)$ дан в форме: $P_3(t) = t^3 - \frac{1}{5}t^5$

Используя систему векторов Лежандра $L_n(t)$, мы можем записать:

$P_3(t) = a_0 * L_0(t) + a_1 * L_1(t) + a_2 * L_2(t) + a_3 * L_3(t)$

Для определения коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3 мы можем воспользоваться формулой для вычисления коэффициентов разложения:

a_n = (2n + 1) * ∫($P_3(t)$ * $L_n(t)$, -1, 1)

Вычислим коэффициенты разложения для первых четырех многочленов Лежандра:

$a_0 = \int((t^3 - \frac{1}{5} * t^5) * L_0(t), - 1, 1) = \int((t^3 - \frac{1}{5} * t^5), - 1, 1) = (\frac{2}{4} - \frac{2}{12}) = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

$a_1 = 3 * \int((t^3 - \frac{1}{5} * t^5) * L_1(t), - 1, 1) = 3 * \int((t^3 - \frac{1}{5} * t^5), - 1, 1) = 3 * \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$

$a_2 = 5 * \int((t^3 - \frac{1}{5} * t^5) * L_1(t), - 1, 1) = 5 * (- \frac{2}{12}) = (- \frac{5}{12})$

$a_3 = 7 * \int((t^3 - \frac{1}{5} * t^5) * L_1(t), - 1, 1) = 7 * \frac{2}{12} = \frac{7}{6}$

Таким образом, разложение многочлена $P_3(t)$ по системе векторов Лежандра будет:

$P_3(t)$ = (1/3) * L_0(t) + (2/3) * L_1(t) - (5/12) * L_2(t) + (7/6) * L_3(t)

Б) Дано пространство R функций, непрерывных (или имеющих конечный разрыв) на отрезке

[−π; π], со скалярным произведением (f, g) = ∫ -π π f(t)g(t)dt и длиной вектора ‖f‖ = sqrt((f,f)) .

Тригонометрические многочлены $P_n(t)$ = (a_0/2) + a_1 cos t + b_1 sin t + ... + a_n cos nt + b_n sin nt, где a_k., b_k. – вещественные коэффициенты, образуют подпространство P пространства R .

Требуется найти многочлен $P_n(t)$ в пространстве P, минимально отличающийся от функции f(t) – вектора пространства R .

Указание. Требуется решить задачу о перпендикуляре: расстояние от f(t) до $P_n(t)$ будет наименьшим, если это длина перпендикуляра h = f(t) − $P_n(t)$, опущенного из точки f(t) на подпространство P . В этом случае, $P_n(t)$ будет ортогональной проекцией вектора f(t) на P . Таким

образом, требуется найти координаты вектора $P_n(t)$ (коэффициенты многочлена) в заданном базисе P . Если выбран ортонормированный базис, то эти координаты суть проекции вектора f(t) на векторы данного базиса.

1) Проверка ортогональности и нормирования системы функций {1, cos t, sin t, ... cos nt, sin nt}:

Для ортогональности системы функций, необходимо проверить, что их скалярное произведение равно нулю при разных индексах, то есть:

∫ -π π (cos kt) (sin lt) dt = 0

∫ -π π (cos kt) (cos lt) dt = 0

∫ -π π (sin kt) (sin lt) dt = 0

для всех k ≠ l.

Также нормирование системы предполагает, что каждая функция имеет единичную длину.

Для проверки ортогональности и нормирования, рассмотрим функцию cos kt:

∫ -π π (cos kt)^2 dt = ∫ -π π cos^2 kt dt = ∫ -π π (1 + cos 2kt)/2 dt = (1/2) ∫ -π π dt + (1/2) ∫ -π π cos 2kt dt = π + (1/2) ∫ -π π cos 2kt dt = π + (1/2) [(1/2k) sin 2kt] -π π = π

Таким образом, нормированная система функций {1, cos t, sin t, ... cos nt, sin nt} является ортогональным базисом подпространства P.

2) Найдем проекции вектора f(t) = 2t на векторы полученного ортонормированного базиса:

Проекция на вектор {1}:

a_0 = ∫ -π π f(t) * 1 dt = ∫ -π π 2t dt = [t^2] -π π = π^2 - (-π)^2 = π^2 - π^2 = 0

Проекция на вектор {cos(nt)}:

a_n = ∫ -π π f(t) * cos(nt) dt = ∫ -π π 2t * cos(nt) dt = 2 ∫ -π π t * cos(nt) dt = 2 [(1/n^2) * sin(nt) - (t/n) * cos(nt)] -π π = 2 [(1/n^2) * sin(nπ) - (π/n) * cos(nπ)] - [(1/n^2) * sin(-nπ) - (-π/n) * cos(-nπ)] = 2 [(1/n^2) * sin(nπ) + (π/n) * cos(nπ)] - [(1/n^2) * sin(nπ) + (π/n) * cos(nπ)] = 0

Проекция на вектор {sin(nt)}:

b_n = ∫ -π π f(t) * sin(nt) dt = ∫ -π π 2t * sin(nt) dt = 2 ∫ -π π t * sin(nt) dt = 2 [-(1/n^2) * cos(nt) - (t/n) * sin(nt)] -π π = 2 [-(1/n^2) * cos(nπ) - (π/n) * sin(nπ)] - [-(1/n^2) * cos(-nπ) - (-π/n) * sin(-nπ)] = 2 [-(1/n^2) * cos(nπ) + (π/n) * sin(nπ)] - [-(1/n^2) * cos(nπ) + (π/n) * sin(nπ)] = 0

Таким образом, проекции вектора f(t) = 2t на векторы ортонормированного базиса {1, cos t, sin t, ... cos nt, sin nt} равны 0 для всех n.

3) Минимально отстоящий многочлен $P_n(t)$:

$$P_n(t) = a_0 + \Sigma(a_n * cos(nt) + b_n * sin(nt)) = \Sigma(a_n * cos(nt) + b_k * sin(nt))$$

Так как все коэффициенты a_k и b_k равны 0, то минимально отстоящий многочлен $P_n(t)$ равен нулю.

4)

5) Вывод о поведении многочлена при росте его порядка:

При росте порядка многочлена n, многочлен Фурье $P_n(t)$ будет лучше приближать функцию f(t). Это можно видеть из графиков, где с увеличением n многочлен Фурье более точно следует форме функции f(t) = 2t. При достаточно большом n многочлен Фурье может стать очень близким к исходной функции f(t), однако он никогда не сможет полностью совпасть с ней, так как многочлены Фурье представляют только тригонометрические функции и не могут точно приблизить все возможные функции.

Многочлены Фурье позволяют разложить функцию в ряд и использовать его для аппроксимации или анализа функций на заданном отрезке. При выборе оптимального порядка n для приближения функции необходимо учитывать требуемую точность и сложность вычислений.

Задание 3

1 - Привести уравнение $2x^2 - 6xy + 2y^2 + z^2 - 25 = 0$ к канонической форме.
Составим матрицу уравнения и найдем собственные числа:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A - \lambda E = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 0 \\ -3 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Решая это уравнение получаем: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 5$
Теперь составим диагональную матрицу D:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Получаем приведенное уравнение:
$u^2 - v^2 + 5w^2 - 25 = 0$

Выполним преобразования:
$\frac{u^2}{5^2} + \frac{w^2}{\sqrt{5}^2} - \frac{v^2}{5^2} = 1$

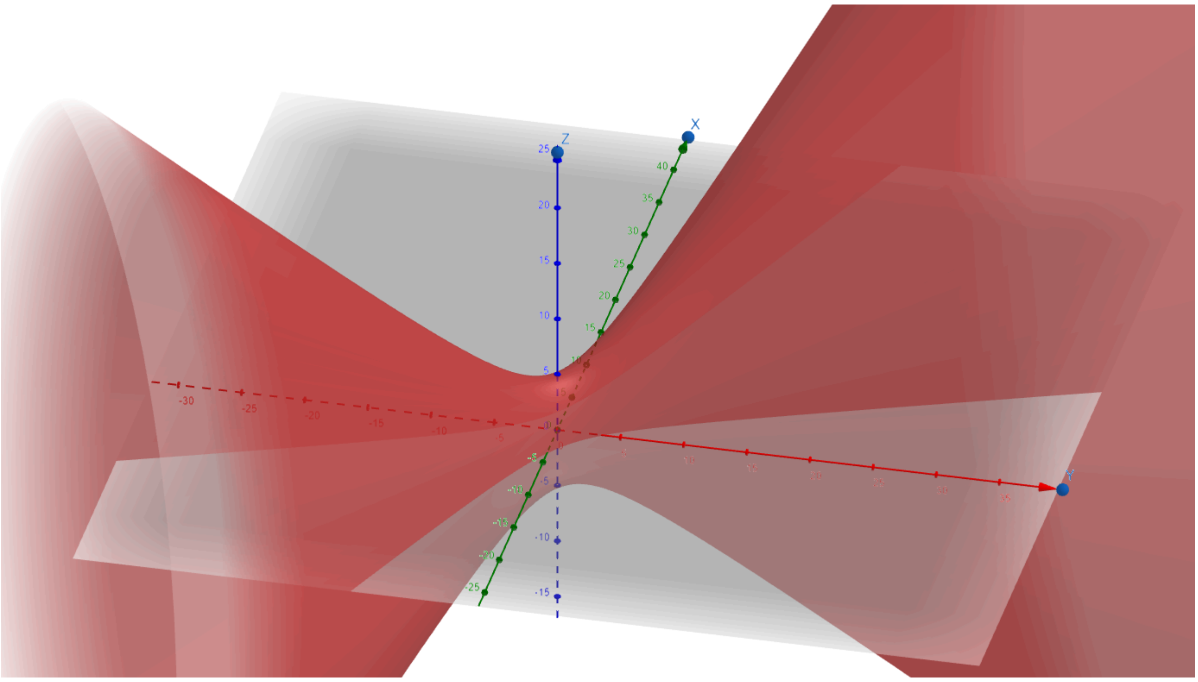
Итак, это уравнение однополостного гиперболоида в канонической форме, где u, v и w - новые переменные, полученные в результате линейного преобразования.

Теперь можно найти матрицу преобразования, найдя собственные векторы, подставляя собственные числа и находя ФСР уравнения, ортонормировав их и составив из них матрицу:
$1)\lambda_1 | v_1 = (0, 0, 1)^T$
$2)\lambda_2 | v_2 = (1, 1, 0)^T$
$3)\lambda_3 | v_3 = (-1, 1, 0)^T$
Этот набор векторов ортогональный, остается его нормировать:
$p_1 = (0, 0, 1)^T$
$p_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}, 0)^T}$
$p_3 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T$
Из этих векторов составляем матрицу ортогонального преобразования:

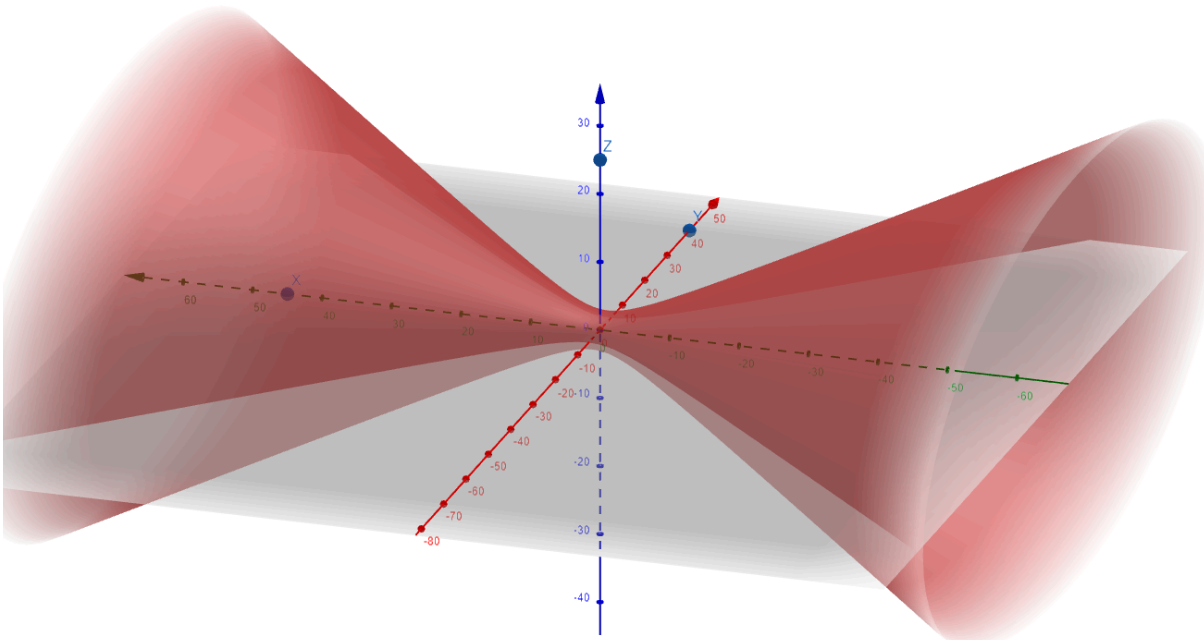
$$P = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{new} = P^T * A$$

2 - Изобразите график уравнения в исходной системе координат. Какую поверхность оно задаёт?
Укажите на графике оси исходной и приведённой систем координат.



Исходный график



Полученный график (ортогональные преобразования)

Данное уравнение задает поверхность однополостного гиперболоида, этот тип поверхности, которой имеет форму “седла” и открывается в двух направлениях