МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

Расчётно-графическая работа
«Ряды Тейлора и Фурье»

по дисциплине
«МАТЕМАТИКА»

Команда № 1

Выполнил:
Москвитина Полина Р3131
Деревягин Егор Р3115
Хромов Даниил Р3115
Гуменник Петр Р3133
Ефремов Марк Р3134

Преподаватель:
Савченко Татьяна Владимировна

Санкт-Петербург, 2023

Задание 1 (Деревягин Егор и Ефремов Марк)

а) Некоторую функцию разложили в ряд Маклорена и, придав аргументу x определённое значение, получили данный числовой ряд. Найдите его сумму.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{2n+1}$$

$$a_1 = -\frac{2}{3}$$

$$a_2 = \frac{2}{5}$$

$$a_3 = -\frac{2}{7}$$

......

$$a_n = (-1)^n \frac{2}{2n+1}$$

Данный ряд является альтернативным (или знакочередующимся) рядом, поскольку знак каждого последующего члена противоположен знаку предыдущего. Такие ряды можно анализировать с помощью признака Лейбница.

Признак Лейбница гласит, что если убывающий знакочередующийся ряд имеет предел, равный нулю, то ряд сходится. Для данного ряда, это соответствует:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{2}{2n+1}\right) = \frac{2}{\infty} = 0 \Rightarrow \text{сходится}$$

При проверке сходимости ряда по признаку Лейбница мы смотрим на абсолютную величину членов ряда без учета знака, поэтому $(-1)^n$отбрасываем. Так как эта часть влияет только на то, как члены ряда чередуются между положительными и отрицательными значениями, но никак не влияет на общую тенденцию убывания абсолютных величин членов ряда.

Наш ряд очень похож на ряд, который представляет собой разложение арктангенса в ряд Тейлора:

$$arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Наш ряд отличается от этого разложения только тем, что вместо x^{2n+1} у нас просто константа. Если мы подставим $x = 1$ в разложение арктангенса, мы получим наш ряд, умноженный на 2:

$$2 * arctan(1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{2n+1}$$

Известно, что $arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, поэтому: $2 * arctan(1) = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Это и является суммой нашего ряда, но нужно учесть, что мы начинаем подсчет с $n = 1$, поэтому нам нужно вычесть первый член, соответствующий $n = 0$:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{2}{2*0+1} = \frac{\pi}{2} - 2.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} - 2$

б) Найдите первообразную данной функции в виде ряда, используя стандартные разложения степенных рядов, а также свойства их сложения и умножения.

$$f(x) = ln(1 + 3x + 2x^2)$$

D(f) = (-∞;-1)U($-\frac{1}{2}$;+∞)

$$\int ln\left(1 + 3x + 2x^2\right)dx = \int ln\left((2x + 1)(x + 1)\right)dx = \int ln\,(2x + 1)dx + \int ln\,(x + 1)dx$$

Используем стандартное разложение:

$ln(x + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$ x∈(-1;1]

$ln(2x + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n x^n}{n}$ x∈($-\frac{1}{2}$;$\frac{1}{2}$]

$$\int ln\left(1 + 3x + 2x^2\right) = \int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n x^n}{n}dx + \int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{n}\int x^n dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\int x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{n}\frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{x^{n+1}}{n+1} + C =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}(2^n+1)}{n(n+1)} + C = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{5x^3}{6} + \frac{3x^4}{4} - \frac{17x^5}{20} + \ldots - \ldots\right) + C$$

Если возьмём C=0, то получим первообразную функции. Что и требовалось найти.

в) Найдите первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях. Изобразите на графике.

$$y' = \frac{1-x^2}{y} + 1,\ y(0) = 1,\ k = 5$$

Разложение частного решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения при начальном условии $y(x_0) = y_0$ имеет вид:

$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 +$...

В данной задаче $x_0 = 0$, а количество $k = 5$, следовательно:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{y''''(x_0)}{4!}(x - x_0)^4$$

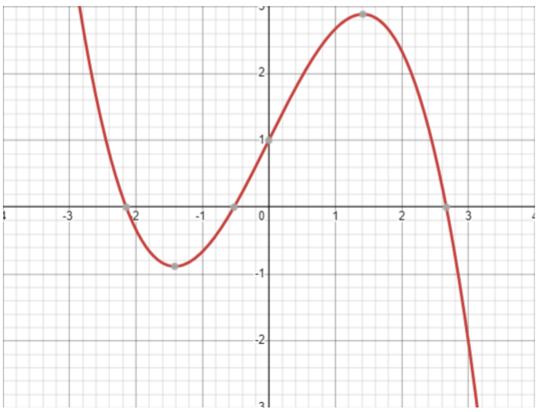
1) $y(0) = 1$
2) $y'(0) = \frac{1-x^2}{y} + 1 = \frac{1-0^2}{1} + 1 = 2$
3) $y''(x) = (y'(x))' = \frac{(1-x^2)'y-y'(1-x^2)}{y^2} =- \frac{2x}{y}$

   $y''(0) =- \frac{2*0}{1} = 0$
4) $y'''(x) = (y''(x))' =- \frac{2}{y}$

   $y'''(0) =- \frac{2}{1} =- 2$
5) $y''''(x) = (y'''(x))' = 0$

   $y''''(0) = 0$

Подставим получившиеся значения в формулу и получим функцию для построения графика: $y(x) = 1 + 2x - \frac{1}{3}x^3$



Задание 2 (Гуменник Петр)

$f(x) = \pi^2 - x^2 \{- \pi \leq x \leq \pi\}$

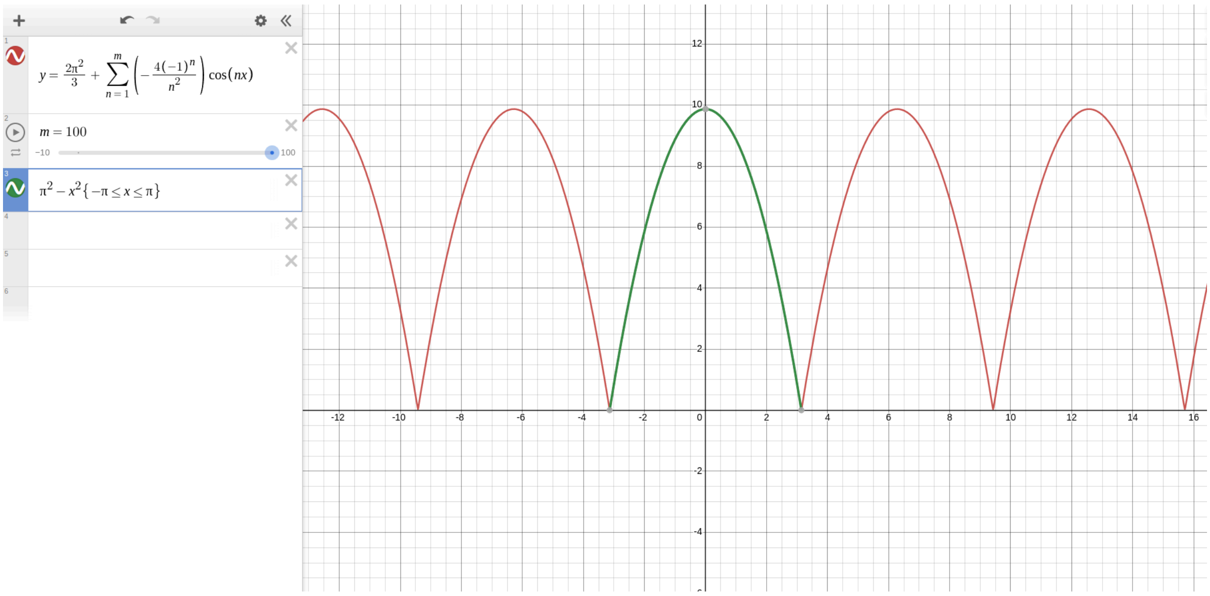
1. Так как функция четная, то $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)dx = \frac{2}{\pi}(-\frac{x^3}{3} + \pi^2 x)|_0^{\pi} = 4\frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\cos\frac{\pi n x}{\pi}dx = \frac{2}{pi}(-x^2\frac{\sin nx}{n} + \pi^2\frac{\sin nx}{n} - 2x\frac{\cos nx}{n^2} + 2\frac{\sin nx}{n^3})\Big|_0^{\pi} = -4\frac{-1^n}{n^2}$$

$$f(x) = 2\frac{\pi^2}{3} + \sum(-4\frac{(-1)^n}{n^2})\cos nx$$

2.



3. Зафиксируем x = 0, чтобы cos(0n) = 1 (выбрал эту точку, потому что она входит в интервал $\{-\pi; \pi\}$ тогда нужная нам сумма остается неизменной, а отдельный x^2 зануляется), тогда используя информацию о том, что:

$$\pi^2 - x^2 = 2\frac{\pi^2}{3} + \sum(-4\frac{(-1)^n}{n^2}) \cos nx \ \{-\pi \le x \le \pi\}$$

путем нехитрых вычислений приходим к выводу о том, что сумма данного в задании ряда равна:

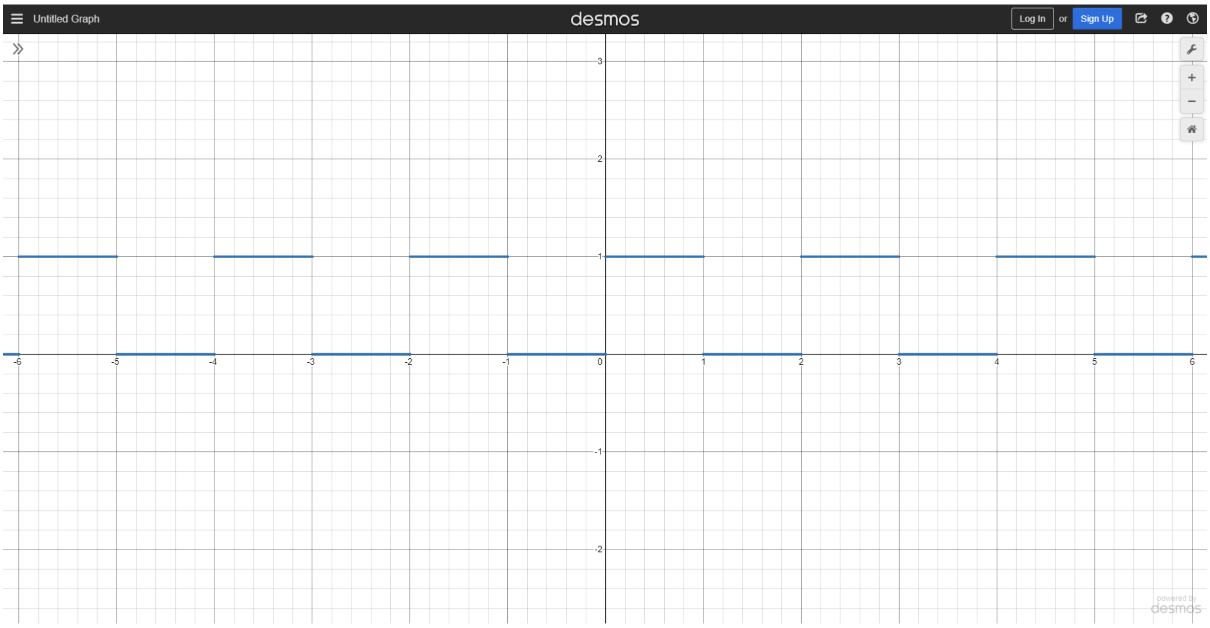
$$\frac{\pi^2 - x^2 - \frac{2\pi^2}{3}}{4} = \frac{\pi^2}{12}$$

Задание 3 (Хромов Даниил и Москвитина Полина)

В трёх однотипных опытах радиолюбителей на вход цифро-аналогового преобразователя (ЦАП) был подан короткий цифровой сигнал формы, изображенной на рисунке.

а) Найдите аналитически и изобразите на графике форму аналогового сигнала на выходе ЦАП для каждого опыта, если в первом опыте ЦАП был настроен так, что обрезал все гармоники, кроме нулевой и первой; во втором – после третьей; в третьем – после десятой (i-ой гармоникой считается i-й член ряда Фурье при нумерации с нуля).

Построим график функции для наглядности:



Далее рассмотрим график функции и посмотрим какие значения и на каких участках он принимает. Получим:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1 \\ 0, & 1 \le x < 2 \end{cases}$$

Продлим наш график не нарушая условия функции. Дальше мы найдем период функции T=2l. где l - любое положительное число. В нашем случае l = 2

Используя формулы для разложения в ряд Фурье функции на произвольном участке:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx$$

По данным формулам найдем коэффициенты и разложим в ряд Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \left|\begin{matrix}\text{Разлолжим нашу функции на несколько, потому что} \\ \text{на разных учатсках он принимает разные значения}\end{matrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{-1} 1dx + \int_{-1}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} 1dx + \int_{1}^{2} 0dx\right) = 1/$$

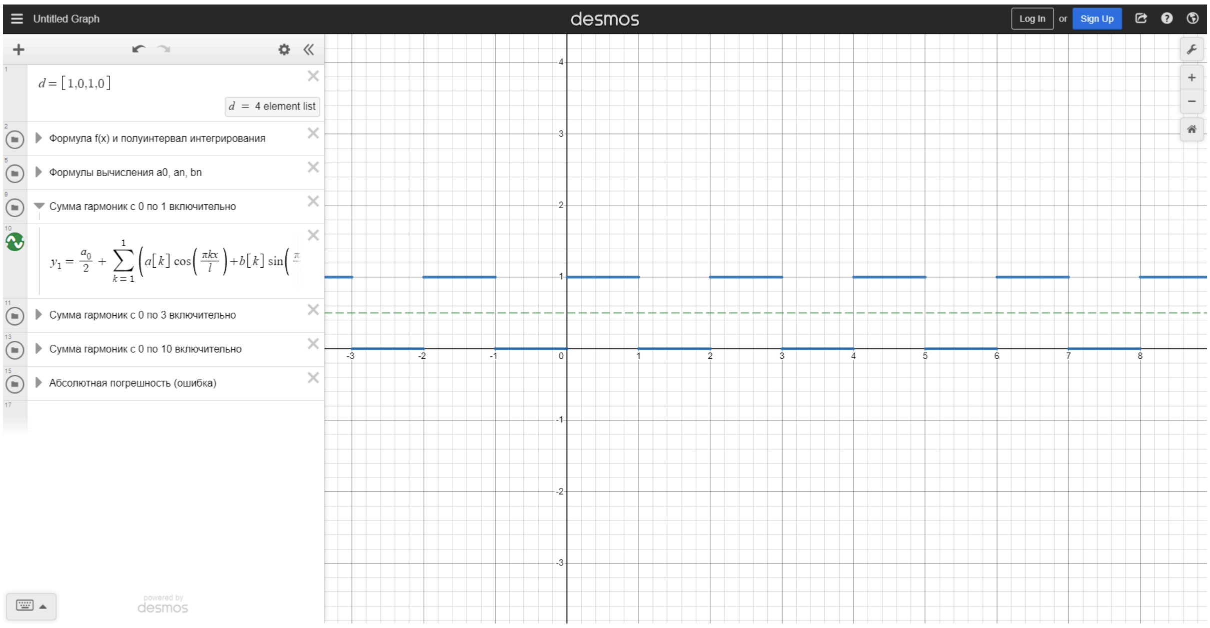
$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{\pi nx}{2}dx = \frac{\sin \pi n}{\pi \mathrm{n}}, \text{где n} = 1,2\ldots,$$

$$\mathrm{b_n} = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \mathrm{f(x)}\ \sin\frac{\pi \mathrm{nx}}{2}\mathrm{dx}\ = \frac{\cos \mathrm{n}\pi\ - 2\cos\frac{\pi \mathrm{n}}{2}\ + 1}{\pi \mathrm{n}}$$

б) Зная коэффициенты (члены) для формулы разложения ряда Фурье мы можем произвести преобразования в соответствии с формулой, получим:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin \pi n}{\pi n} * \cos\frac{\pi nx}{2} + \frac{\cos \mathrm{n}\pi\ - 2\cos\frac{\pi \mathrm{n}}{2}\ + 1}{\pi \mathrm{n}} * \sin\frac{\pi nx}{2}\right)$$

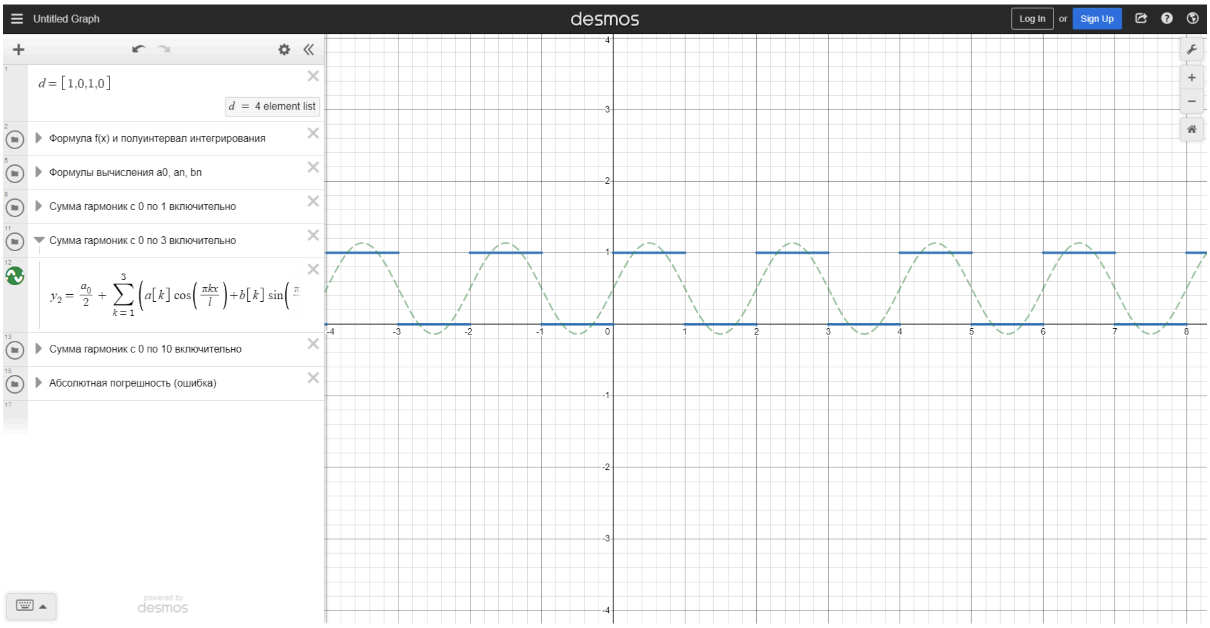
1) Найдем сумму гармоник с 0 по 1 включительно. Графиком для этого ряда будет:



Запишем формулу для этой гармоники:

$$y_1 = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{1}\left(\frac{\sin \pi n}{\pi n} * \cos\frac{\pi nx}{2} + \frac{\cos \mathrm{n}\pi\ - 2\cos\frac{\pi \mathrm{n}}{2}\ + 1}{\pi \mathrm{n}} * \sin\frac{\pi nx}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

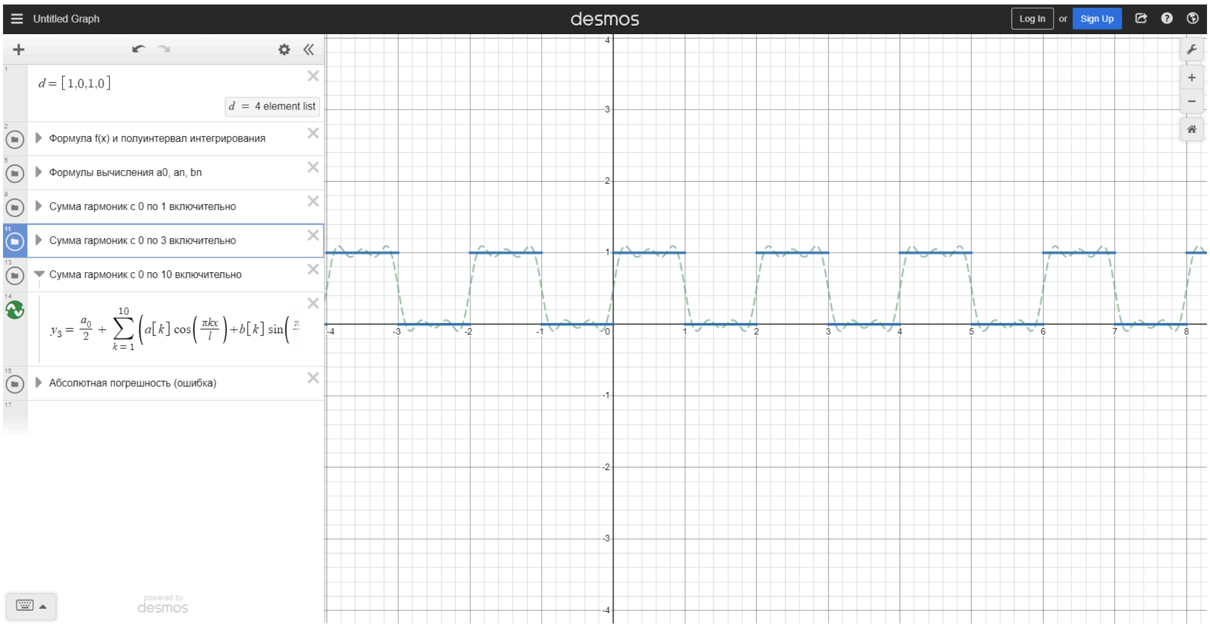
2) Найдем сумму гармоник с 0 по 3 включительно. Графиком для этой гармоники будет:



Запишем формулу для этой гармоники:

$$y_2 = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{3} \left(\frac{\sin \pi n}{\pi n} * \cos \frac{\pi n x}{2} + \frac{\cos n\pi \; - \; 2\cos \frac{\pi n}{2} \; + 1}{\pi n} * \sin \frac{\pi n x}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{2 \sin \pi x}{\pi}$$

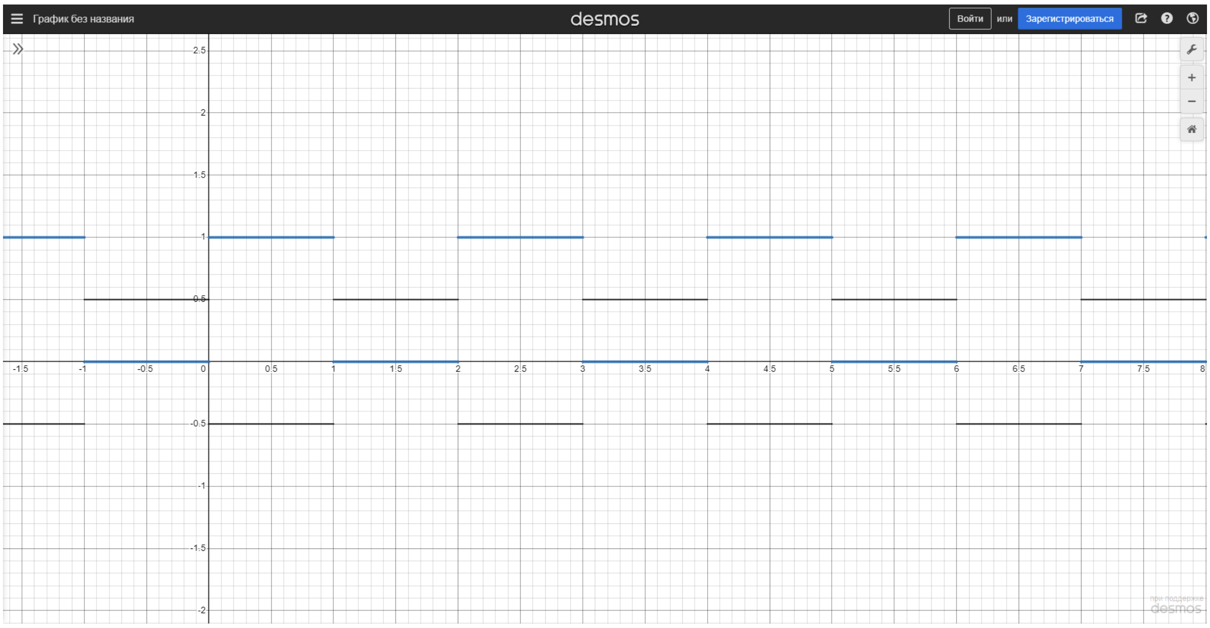
3) Найдем сумму гармоник с 0 по 10 включительно. Графиком для этой гармоники будет:



Запишем формулу для этой гармоники:

$$y_3 = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{\sin \pi n}{\pi n} * \cos \frac{\pi n x}{2} + \frac{\cos n\pi \ - \ 2\cos \frac{\pi n}{2} \ + 1}{\pi n} * \ \sin \frac{\pi n x}{2} \right)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{2 \sin \pi x}{\pi} + \frac{2 \sin 3\pi x}{3\pi} + \frac{2 \sin 5\pi x}{5\pi}$$

Графиком погрешности (ошибки) для первого опыта будет:

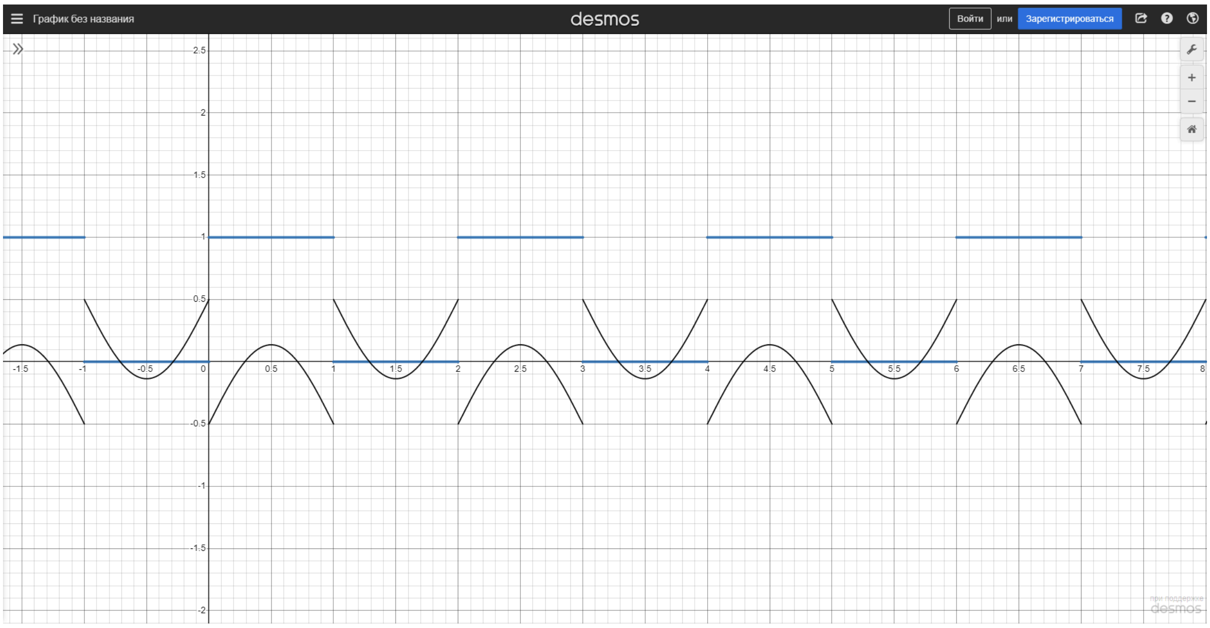


Находится по формуле:

$y_1 - f(x) \approx -0.5$

=0.5

Графиком погрешности (ошибки) для второго опыта будет:

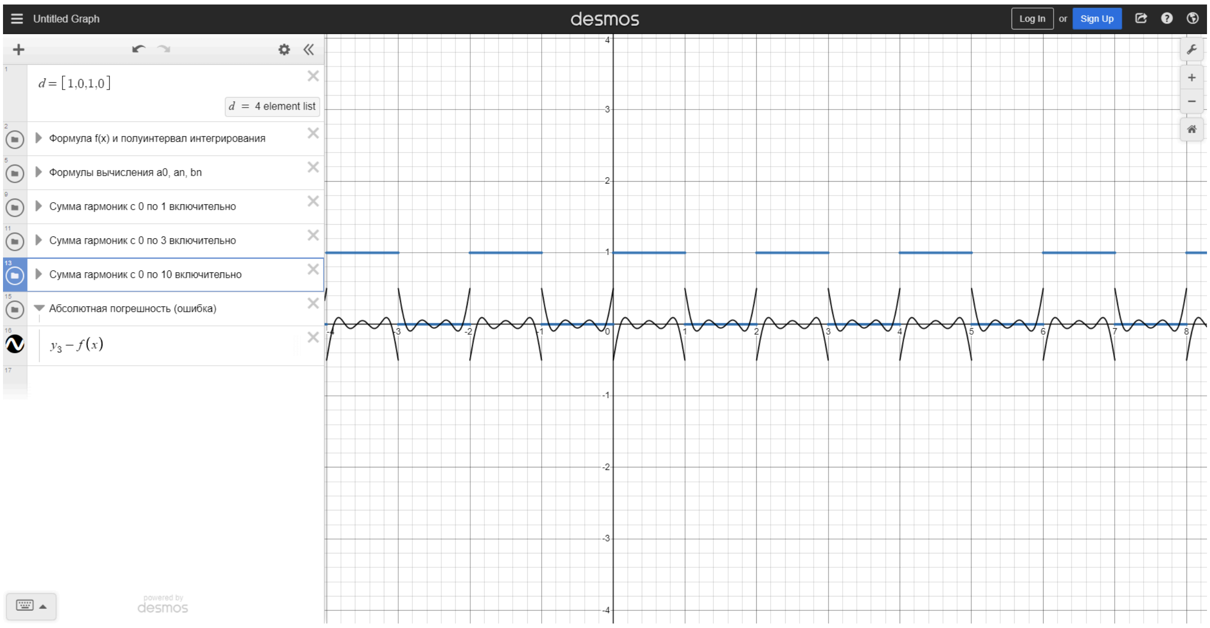


Находится по формуле:

$y_2 - f(x) \approx -0.5$

=0,363

Графиком абсолютной погрешности (ошибка) будет:



Находится по формуле:

$y_3 - f(x) \approx -0.5$

= 0.142

в) Вывод: увеличение количества членов ряда Фурье приближает ряд к исходной функции, следствием чего является уменьшение погрешности вычислений.

Вклад каждого исполнителя:

Москвитина Полина (100%)
Деревягин Егор (100%)
Хромов Даниил (100%)
Гуменник Петр (100%)
Ефремов Марк (100%)