федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
"Национальный исследовательский университет ИТМО"
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Информатика

Лабораторная работа №7
Работа с системой компьютерной вёрстки LaTeX
Вариант 36

Выполнил Гуменник П.О.
P3133
Преподаватель Балакшин П.В.

Санкт-Петербург 2022

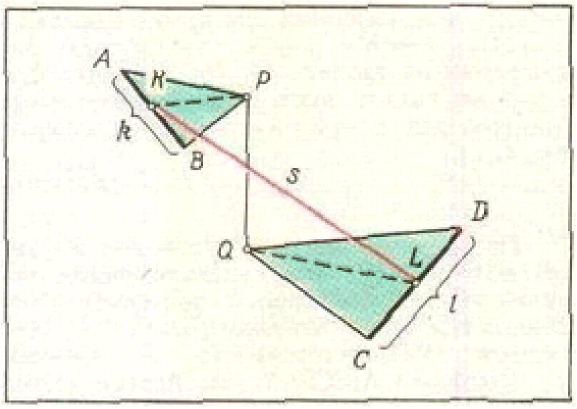

Рис. 6.

лежат отрезки a и b. (В этой и следующих формулах a, $\text{пр}_a b$ и т.п. означают длины соответствующих отрезков.) Наименьший угол между прямыми не превосходит $\pi/2$, поэтому $\cos\alpha \geqslant 0$. Из (1) следует равенство

$$a\,\text{пр}_a b = b\,\text{пр}_b a \qquad (2)$$

которое пригодится нам для решения задачи.

Обозначим через P центр верхнего, а через Q - чентр нижнего оснований пирамиды. Мы докажем следующий факт, несколько более общий, чем нужное нам утверждение задачи **M168**.

Пусть плоскости двух подобных равнобедренных треугольников ABP и CDQ с вершинами P и Q перпендикулярны отрезку PQ (и, тем самым, параллельны между собой). Обозначим отрезок, соединяющий середины K и L оснований AB и CD, через s. Тогда (Рис. 6.)

$$\text{пр}_s k = \text{пр}_s l \qquad (3)$$

Пользуяясь (2), мы вместо (3) можем доказывать такое равенство:

$$k\,\text{пр}_k s = l\text{пр}_l s \qquad (4)$$

Теперь воспользуемся тем, что как это следует из (1), длина пр b_a, не меняется при параллельном переносе отрезков a и b. Поэтому мы можем спроектировать отрезок $k = AB$ на плоскость треугольника CDQ и получим:

$$\text{пр}_{A'B'}K'L = \text{пр}_{A'B'}KL = \text{пр}_{AB}KL = \\ = \text{пр}_k s, \quad (5)$$

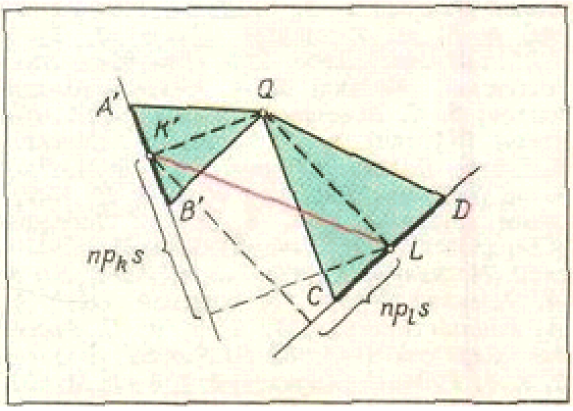

Рис. 7.

где A', B' и K' — проэкции точек A, B и K на плоскость CDQ (рис. 7.). Таким образом, мы свели задачу к тому случаю, когда оба треугольника лежат в одной плоскости (и имеют общую вершину).

Если отрезки AB и CD параллельны, то равенсто (4) очевидно, поскольку обе проэкции равны нулю.Если эти отрезки непараллельны, то получаем:

$$\frac{k}{l} = \frac{A'B'}{CD} = \frac{QK'}{QL} = \frac{\sin\sphericalangle QLK'}{\sin\sphericalangle QK'L} = \\ = \frac{\text{mod } \cos\sphericalangle K'LC}{\text{mod } \cos\sphericalangle LK'B} = \frac{\text{пр}_l s}{\text{пр}_k s},$$

откуда следует (4).

M169. Пусть $k < n$ - натуральные числа. Расставьте числа 1, 2, 3, ..., n^2 в таблицу $n \times n$ так, чтобы в каждой строке числа шли в порядке возрастания и при этом сумма чисел в k-м столбце была a) наименьшей; b) наибольшей.

Решим сначала задачу a).

Если расставить числа так, как показано в таблице 1, a — сначала заполнить первые k-столбцов, строку за строкой, числами от 1 до kn, а затем оставшимися числами заполнить последние $(n-k)$ столбцов (как угодно, лишь бы выполнялось условие возрастания чисел в каждой строке)— то сумма чисел в k-м столбце будет равна

Т а б л и ц а 1а

				k	
1	2	...	$k-1$	k	$nk+1$ ...
$k+1$	$k+2$	...	$2\,k-1$	$2\,k$	
$2\,k+1$	$2\,k+2$	...	$3\,k-1$	$3\,k$	
...	...	...	...		
$(n-k)k+1$		...	$nk-1$	nk	$\ldots n^2$

сел в k-м столбце будет равна

$$k(1+2+...+n) = \frac{kn(n+1)}{2}. \qquad (1)$$

Мы докажем, что это значение суммы является наименьшим. Сначала докажем, что если $a_1, a_2, ..., a_n$ — числа k-го столбца, занумерованные в порядке возрастания:

$$a_1 < a_2 < ... < a_i < ... < a_n \qquad (2)$$

то

$$a_i \geqslant k_i. \qquad (3)$$

Действительно, рассмотрим числа, стоящие в тех же строках, где стоят $a_1, a_2, ..., a_i$, и в первых k столбцах. Из условия (2) и условия, что числа в строках стоят в возрастающем порядке, следует, что эти ki чисел не превосходят числа a_i. Следовательно, среди чисел $1, 2, 3, ..., n^2$ имеется по крайней мере ki чисел, не превосходящих a_i. Отсюда вытекает (3). Сложив неравенства (3) по всем