Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики».

Дисциплина: Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Расчётно-графическая работа

Аналитическая геометрия

Вариант №5

Выполнили:

Васильев Александр P3132

Глотов Егор P3132

Волков Григорий P3132

Мальков Павел P3132

Гуменник Пётр P3133

Проверила:

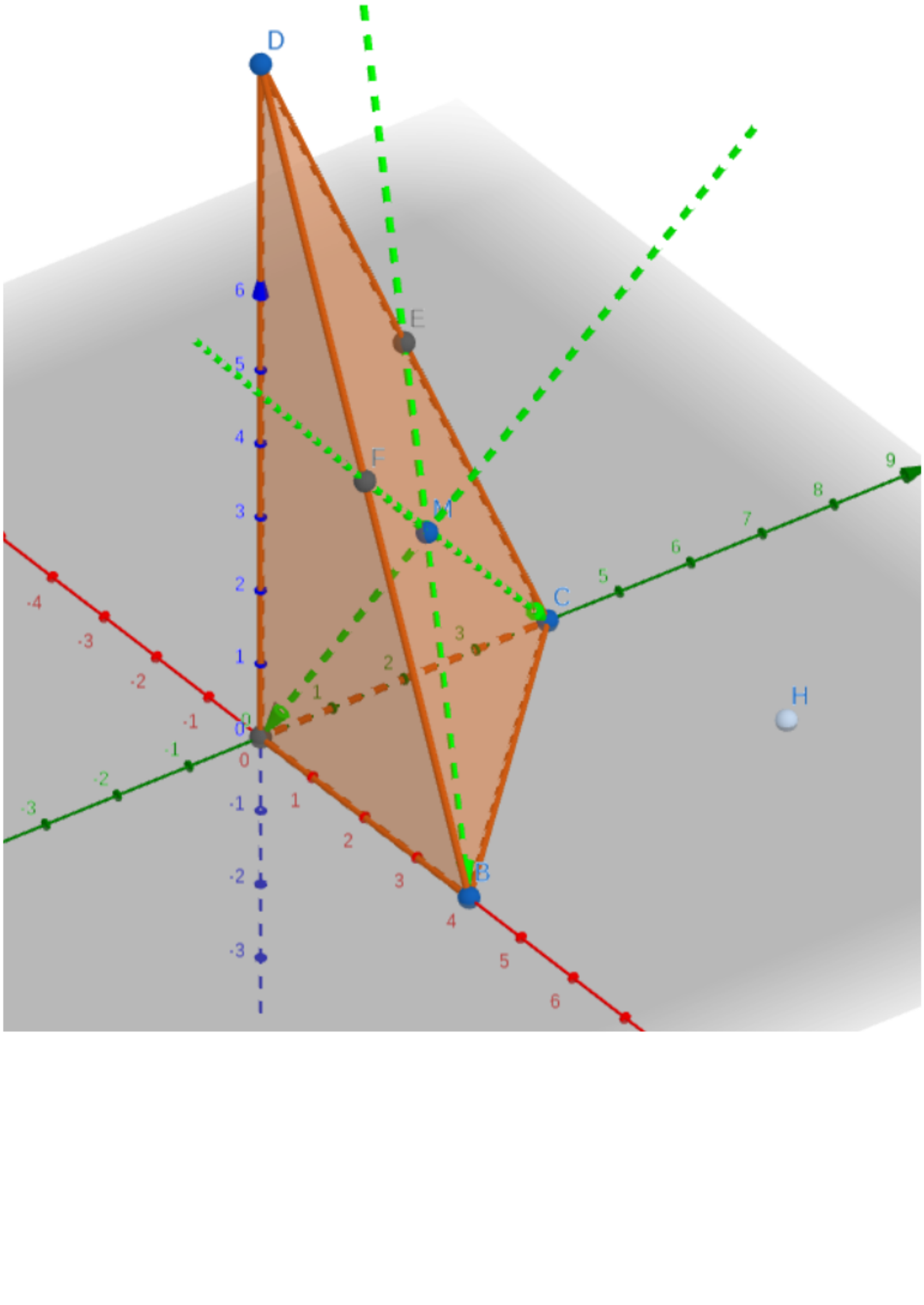
Филимонова Арина Николаевна

г. Санкт-Петербург

2022 год

Задание 1

Пусть $H_M = (x', y', z')$
Тогда $\overrightarrow{MH} = x'\overrightarrow{MB} + y'\overrightarrow{MC} + z'\overrightarrow{MA} = x'(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) + y'(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) - z'\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AM}$
Тогда $\overrightarrow{AH} = x'\overrightarrow{AB} - x'\overrightarrow{AM} + y'\overrightarrow{AC} - y'\overrightarrow{AM} - z'\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM} = x'\overrightarrow{AB} + y'\overrightarrow{AC} + (1 - x' - y' - z')\overrightarrow{AM}$
$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{3}$ так как M - точка пересечения медиан треугольника BCD
$\overrightarrow{AH} = x'\overrightarrow{AB} + y'\overrightarrow{AC} + (1 - x' - y' - z')\frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{3} =$
$= \frac{1 + 2x' - y' - z'}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1 - x' + 2y' - z'}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1 - x' - y' - z'}{3}\overrightarrow{AD}$
Координаты – $(\frac{1 + 2x' - y' - z'}{3}, \frac{1 - x' + 2y' - z'}{3}, \frac{1 - x' - y' - z'}{3})$



Задание 2

1) $2x^2+5xy-3y^2-3x+5y-2=0$

Проверим можно ли использовать метод инвариантов

$$I_2=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2{,}5 \\ 2{,}5 & -3 \end{vmatrix} = -12{,}25 \neq 0$$ => метод инвариантов применим

$$I_3=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2{,}5 & -1{,}5 \\ 2{,}5 & -3 & 2{,}5 \\ -1{,}5 & 2{,}5 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Т.к $I_2<0$ и $I_3=0$ => кривая - пара пересекающихся прямых

Т.к $I_2\neq 0$ - центральное линии

Если ур-ние задает центральную кривую, то $I_3 = F' I_2$ после переноса, тогда канонический вид ур-ния будет таким $A''x''^2 + C''y''^2 = -\frac{I_3}{I_2}$

Т.к $I_3=0$ => кривая распадается

$$\begin{cases} A'+C' = -1 \\ A'C' = -12{,}25 \\ A'C'F' = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} C' = -1-A' \\ A'C' = -12{,}25 \\ F'=0 \end{cases} \quad \begin{cases} C' = \frac{5\sqrt2-1}{2} \\ A' = \frac{-1-5\sqrt2}{2} \\ F'=0 \end{cases}$$

$$x''^2\left(\frac{-1}{2}-\frac{5\sqrt2}{2}\right)+y''^2\left(\frac{5\sqrt2}{2}-\frac{1}{2}\right)=0$$

2) $4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0$

Проверим на метод инвариантов

$$I_2=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4-4=0$$

Определитель равен 0 => метод инвариантов не подходит

Общий метод

$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda = 0$

$\lambda_1=0 \quad \lambda_2=5$

$$tg\alpha = -\frac{A}{B} = -\frac{4}{-2} = 2$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{tg^2\alpha+1}} = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} = \pm\frac{\sqrt5}{5}$$

$$\sin\alpha = \pm\frac{tg\alpha}{\sqrt{tg^2\alpha+1}} = \pm\frac{2}{\sqrt5} = \pm\frac{2\sqrt5}{5}$$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt5} \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt5}$

Составим матрицу перехода:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \cos\alpha\, x' - \sin\alpha\, y' \\ y = \sin\alpha\, x' + \cos\alpha\, y' \end{cases}$$

подставим вместо x и y в ур-ние x и y из полученной системы

$$\begin{cases} x = x'\frac{1}{\sqrt5} - y'\frac{2}{\sqrt5} \\ y = x'\frac{2}{\sqrt5} + y'\frac{1}{\sqrt5} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt5}(x' - 2y') \\ y = \frac{1}{\sqrt5}(2x' + y') \end{cases}$$

$$4\left(\frac{1}{\sqrt5}(x'-2y')\right)^2 - 4\left(\left(\frac{1}{\sqrt5}(x'-2y')\right)\left(\frac{1}{\sqrt5}(2x'+y')\right)\right) + \left(\frac{1}{\sqrt5}(2x'+y')\right)^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt5}(x'-2y')\right) - 14\left(\frac{1}{\sqrt5}(2x'+y')\right) + 7 = 0$$

$$4\frac{(x^2-4xy+4y^2)}{5} - \frac{8x^2}{5} + \frac{12xy}{5} + \frac{8y^2}{5} + \frac{4x^2+4xy+y^2}{5} - \frac{4\sqrt5 y - 2\sqrt5 x}{5} - \frac{28\sqrt5 x + 14\sqrt5 y}{5} + 7 = 0$$

$$5y^2 - 6\sqrt5 x - 2\sqrt5 y + 7 = 0$$

$$(5y^2 - 2\sqrt5 y) - 6\sqrt5 x + 7 = 0$$

$$(\sqrt5 y - 1)^2 - 6\sqrt5 x = -6 \quad \Big| : -6$$

$$\frac{\sqrt5 x}{1} - \frac{(\sqrt5 y - 1)^2}{6} = 1$$

$$\sqrt5 x - \frac{y''^2}{6} = 1$$

$$\sqrt5 x - 1 = \frac{y''^2}{6} \qquad y''^2 = 6\sqrt5 x - 6$$

$$\varepsilon = 1 \qquad p = \frac{6\sqrt5 x - 6}{2} = \frac{6(\sqrt5 x - 1)}{2} = 3\sqrt5 x - 3$$

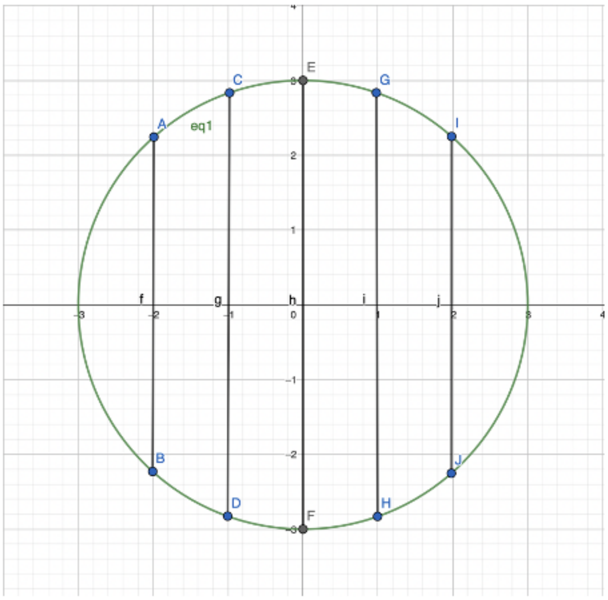
Полярное ур-ние

$$\rho = \frac{3\sqrt5 x - 3}{1 - \cos\alpha}$$

Решение

Шаг 1

Итак, по условию мы имеем окружность eq1 с центром в точке 0 и радиусом R=3. А также хорды, параллельные оси ординат.



Шаг 2

Введем такой эллипс E_1, что его диаметр по оси абсцисс будет равен диаметру окружности eq1, а по оси ординат будет составлять $\frac{1}{3}$ от диаметра окружности eq1 – 2. Таким образом, для каждой хорды AB, CD, EF, GH и IJ должно быть по две точки пересечения с E_1, таких, что каждая из них будет делить хорду в отношении 1:2.

Например, возьмем частный случай хорды – диаметр eq1. Точки пересечения с E_1 будут иметь координаты: (0,1) и (0,-1). И каждая из них будет делить диаметр в отношении $\frac{2}{4}$ = 1:2.

Шаг 3

Составим уравнение такого эллипса.

Стандартный вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Где a – радиус по оси X, b – радиус по оси Y.

Таким образом, получим уравнение: $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$

Шаг 4

Изобразим множество по уравнению: