Analisi Matematica II

Analisi complessa

Virginia De Cicco
Sapienza Univ. di Roma

Teorema di Cauchy

Primitiva

Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso ed $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione continua.

Si dice che $F : A \to \mathbb{C}$ è una *primitiva* di f

se è derivabile in A

e se $F'(z) = f(z)$ per ogni $z \in A$.

Come in campo reale, se F è una primitiva di f, allora per ogni $c \in \mathbb{R}$ la funzione $F + c$ è una primitiva di f.

La conoscenza di una primitiva permette di calcolare immediatamente gli integrali curvilinei; infatti vale un analogo del teorema di Torricelli-Barrow.

Teorema di Torricelli-Barrow

Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso,

sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva regolare (o regolare a tratti) la cui traccia $\gamma([a, b]) \subseteq A$,

sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione continua e $F : A \to \mathbb{C}$ una sua primitiva.

Allora

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Per dimostrarlo basta osservare che $F(\gamma(t))$ è una primitiva di $f(\gamma(t))\gamma'(t)$ e quindi

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b (F \cdot \gamma)'(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Teorema di Torricelli-Barrow

Dal teorema segue che se f ammette una primitiva,
allora l'integrale dipende solo dagli estremi $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ e non dalla curva che li connette.

In particolare, se γ è chiusa ($\gamma(a) = \gamma(b)$), allora $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Ritornando agli esempi precedenti, si può osservare che necessariamente la funzione $\frac{1}{z}$ non ammette una primitiva in $\mathbb{C}^*$, perché, come già visto, $\int_{\gamma_r} \frac{1}{z}dz = 2\pi i \neq 0$.

Inoltre il fatto che $\int_\gamma z^k dz = 0$ per ogni $k \neq -1$ è coerente col fatto che z^k ammette, per $k \neq -1$, la primitiva $\frac{z^{k+1}}{k+1}$, che è definita in tutto $\mathbb{C}$ se $k > -1$ e in $\mathbb{C}^*$ se $k < -1$.

Appello del 19 novembre 2012

Si calcoli

$$\int_{\gamma} z^2\, dz,$$

dove γ è il segmento congiungente i punti 1 e i .

Soluzione : Tale funzione è olomorfa in $\mathbb{C}$ ed ammette la primitiva

$$F(z) = \frac{1}{3} z^3 \, .$$

Quindi

$$\int_{\gamma} z^2\, dz = F(i) - F(1) = -\frac{i}{3} - \frac{1}{3} \, .$$

Esistenza di una primitiva

Vediamo ora delle condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di una primitiva.

Teorema

Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso e sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Allora sono equivalenti le seguenti proposizioni:

a) f ammette una primitiva in A;

b) per ogni curva regolare a tratti $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ la cui traccia $\gamma([a, b]) \subseteq A$, l'integrale di f su γ dipende solo dagli estremi di γ;

c) per ogni curva chiusa e regolare a tratti $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ la cui traccia $\gamma([a, b]) \subseteq A$, l'integrale di f su γ è nullo.

Dimostrazione

Abbiamo già visto che a) implica b)

e che b) implica c).

Vediamo che c) implica b).

Siano γ_1 e γ_2 due curve regolari a tratti tali che $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ e $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$.
Sia $\gamma = \gamma_1\gamma_2^-$ la concatenazione di γ_1 con γ_2^- che risulta essere una curva chiusa.
Allora dalla c) di ha

$$0 = \int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

da cui segue la b).

Dimostrazione

Vediamo ora che b) implica a).

Sia $z_0 \in A$ un punto fissato, sia $z \in \mathbb{C}$ e sia γ una poligonale congiungente z_0 con z. L'integrale di f su tale poligonale non dipende dal cammino, ma solo da z_0 e da z; essendo z_0 fissato, tale integrale dipende solo da z.

Sia

$$F(z) := \int_{z_0}^{z} f(s)ds,$$

dove l'ultimo integrale denota l'integrale di f lungo la poligonale.

Dobbiamo dimostrare che $F'(z) = f(z)$ per ogni $z \in A$. Fissato $z \in A$, sia $h \in \mathbb{C}$ tale che $z + h \in A$, allora

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{z_0}^{z+h} f(s)ds - \int_{z_0}^{z} f(s)ds\right] = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(s)ds,$$

dove l'ultimo integrale si intende esteso al segmento $[z, z+h]$.

Dimostrazione

D'altra parte, poiché la funzione $g(z) = 1$ ammette la primitiva $G(z) = z$, si ha che

$$\int_z^{z+h} ds = (z+h) - z = h$$

e quindi

$$\frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(z)\, ds = f(z).$$

Ne segue che

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} (f(s) - f(z))\, ds.$$

Inoltre dalla continuità di f in z, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che $|f(s) - f(z)| < \epsilon$ per ogni $|h| < \delta_\epsilon$.Quindi, usando ,

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| < \frac{1}{|h|}\epsilon|h| = \epsilon$$

che conclude la dimostrazione.

Notiamo infine che nella condizione c) basta che γ sia una poligonale chiusa. $\square$

Aperti semplicemente connessi

Un aperto connesso $A \subseteq \mathbb{C}$ si dice *semplicemente connesso* se

per ogni curva γ semplice, chiusa e regolare a tratti contenuta in A (significa che la traccia $\gamma([a,b]) \subseteq A$),

l'aperto limitato che ha γ come frontiera è interamente contenuto in A.

Esempi: gli intorni circolari e i semipiani sono semplicemente connessi.
Essi sono anche *convessi* (ricordiamo che un insieme A si dice convesso se comunque fisso due punti, il segmento che li congiunge è interamente contenuto in A).

Aperti semplicemente connessi

Un insieme A si dice convesso se comunque fisso due punti, il segmento che li congiunge è interamente contenuto in A.
Si vede facilmente che

se A è convesso, allora A è semplicemente connesso.

Il viceversa non vale:

$\mathbb{C}^{**}$ è semplicemente connesso, ma non è convesso.

Si osservi inoltre che:

$\mathbb{C}^{*}$ è un aperto connesso, ma non semplicemente connesso e lo stesso vale per ogni corona circolare.

Infine se A è solo un aperto connesso ci sono curve che delimitano aperti interamente contenuti in A e altre no.

Appello del 19 novembre 2012

Domanda a risposta multipla

Uno solo dei seguenti insiemi è semplicemente connesso. Quale?

a) $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$

b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$

c) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 1\}$

d) $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq |z| \leq 1\}$.

Soluzione : d)

Forme differenziali e formula di Gauss-Green

Diamo la definizione di forma differenziale.

Se $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ sono funzioni a valori reali definite e continue in $A \subseteq R^2$, si chiama *forma differenziale lineare in A* l'espressione

$$X(x, y)dx + Y(x, y)dy,$$

prodotto scalare tra il campo vettoriale $(X(x, y), Y(x, y))$ e il vettore spostamento (dx, dy) (le due funzioni X e Y sono detti coefficienti della forma).

La forma differenziale si dice regolare se i coefficienti X e Y sono di classe C^1.

Forme differenziali e formula di Gauss-Green

Se γ è una curva regolare di $\mathbb{R}^2$,

contenuta in A, di equazioni $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$,

si definisce l'integrale della forma differenziale nel seguente modo:

$$\int_\gamma X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int_a^b [X(x(t),y(t))x'(t) + Y(x(t),y(t))y'(t)]dt.$$

Teorema della divergenza (o formula di Gauss-Green in $\mathbb{R}^2$)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso. Sia γ un circuito regolare a tratti, contenuto in A e tale che:

(I) γ è la frontiera di un aperto D interamente contenuto in A.

Allora, date due funzioni $X, Y : A \to \mathbb{R}$ di classe C^1 su A (cioè aventi le derivate parziali prime continue) vale la seguente formula:

$$\int_\gamma X dx + Y dy = \iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dxdy.$$

Forme differenziali e formula di Gauss-Green

1) L'ipotesi (I) è verificata subito per ogni curva γ, se A è semplicemente connesso.

2) Si assume che l'orientamento della curva γ (da cui dipende il primo membro) sia quello antiorario, cioè in modo tale che un osservatore che la percorri lasci i punti interni alla sua sinistra.

3) La formula vale anche se γ è l'unione di due curve, come nel caso della frontiera di una corona circolare.

Un importante teorema sulle funzioni olomorfe è il seguente:

Teorema integrale di Cauchy

Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso e sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora per ogni γ circuito regolare a tratti, contenuto in A e tale che:

(I) γ è la frontiera di un aperto D interamente contenuto in A
si ha che

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Teorema integrale di Cauchy: dimostrazione

Dimostrazione Se scriviamo la curva γ e la funzione f come

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t), \qquad f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y),$$

allora

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

$$= \int_a^b \left[u\left(x(t),y(t)\right) + iv\left(x(t),y(t)\right)\right]\left[x'(t) + iy'(t)\right]dt =$$

$$= \int_a^b [(ux' - vy') + i(vx' + uy')]dt$$

$$= \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy,$$

dove $\quad udx - vdy \quad$ e $\quad vdx + udy \quad$ sono delle forme differenziali a coefficienti reali in $\mathbb{R}^2$.

Teorema integrale di Cauchy: dimostrazione

Dal teorema della divergenza segue che

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy =$$

$$= -\iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0,$$

poiché dall'olomorfia di f e dalle condizioni di Cauchy-Riemann si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

$\square$

Esercizio

Si calcoli il seguente integrale in campo complesso sulla curva chiusa indicata:

$$\int_\gamma \frac{\sin(\pi z)}{z(z+1)}\, dz \qquad \gamma(t) = i + \frac{1}{2}e^{it} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Soluzione : γ è la circonferenza di centro $z_c = i$ e di raggio $\frac{1}{2}$ e la funzione non è definita in 0 ed -1. La curva γ non circuita tali punti e quindi, per il teorema integrale di Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{\sin(\pi z)}{z(z+1)} dz = 0.$$

Appello del 30 maggio 2012

(i) Si enunci e si dimostri il Teorema integrale di Cauchy.

(ii) Si calcolino al variare di $n \leq 7$ i seguenti integrali

$$I_n := \int_{\gamma_n} \frac{1}{z - \frac{15}{2}}\, dz\,,$$

dove γ_n è il bordo dell'insieme

$$A_n = \{z = x + iy : |x| \leq n, |y| \leq n\}\,.$$

Soluzione :
Se $n \leq 7$, il punto $\frac{15}{2}$ non cade all'interno della curva γ_n e quindi

$$I_n = \int_{\gamma_n} \frac{1}{z - \frac{15}{2}}\, dz = 0\,.$$

Teorema integrale di Cauchy: osservazioni

1) Nell'esempio $f(z) = \frac{1}{z}$ in cui $\int_{\gamma_r} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$, la curva γ_r (circonferenza di centro 0 e raggio r) non verifica l'ipotesi (I), essendo $A = \mathbb{C}^*$.

2) Il teorema vale anche se γ è l'unione di due curve.

Teorema integrale di Cauchy: conseguenze

Richiamiamo qui il teorema sull'equivalenza delle 3 condizioni:
a) f ammette una primitiva in A;

b) per ogni curva regolare a tratti $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ la cui traccia $\gamma([a, b]) \subseteq A$, l'integrale di f su γ dipende solo dagli estremi di γ;

c) per ogni curva chiusa e regolare a tratti $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ la cui traccia $\gamma([a, b]) \subseteq A$, l'integrale di f su γ è nullo.

Dal teorema integrale di Cauchy e dall'implicazione c) $\Rightarrow$a) del teorema precedente prima che si ha il seguente corollario.

Corollario

Ogni funzione $f : A \to \mathbb{C}$ olomorfa in A ammette una primitiva in ogni aperto $A' \subseteq A$ semplicemente connesso. In particolare, se A stesso è semplicemente connesso, allora f ammette primitiva in A.

Notiamo che quindi sotto le ipotesi del corollario, "f ammette localmente una primitiva", cioè per ogni punto $z_0 \in A$ esiste un intorno $B_r(z_0) \subset A$ in cui f ammette una primitiva.

Teorema integrale di Cauchy: conseguenze

Sappiamo che la funzione $f(z) = \frac{1}{z}$ è olomorfa in $\mathbb{C}^*$, ma non è dotata di primitiva in $\mathbb{C}^*$.

Ciò va d'accordo con il corollario precedente, poiché $\mathbb{C}^*$ non è semplicemente connesso.

Al contrario è dotata di primitiva in $\mathbb{C}^{**}$ (la primitiva di tale f è $Logz$), poiché $\mathbb{C}^{**}$ (che è incluso in $\mathbb{C}^*$) è semplicemente connesso.

Inoltre è dotata di primitiva in ogni altro aperto semplicemente connesso.

Ad esempio se si considera

$$A = \mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : x \geq 0, \ y = 0\}$$

(cioè se si opera un taglio lungo la semiretta reale positiva)

allora una primitiva è

$$logz = log|z| + i \ argz, \quad \text{con} \quad 0 \leq argz < 2\pi.$$

Teorema integrale di Cauchy: conseguenze

Osservazione 1

Il fatto che $\int_{\gamma_r} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$ non dipenda da r, non è un caso,

ma è un fatto generale:

l'integrale di una funzione olomorfa su un circuito non varia se tale circuito viene deformato senza uscire dall'aperto di olomorfia.

Infatti, vale la seguente proposizione.

Teorema integrale di Cauchy: conseguenze

Proposizione

Se γ_1, γ_2 sono due circuiti regolari a tratti con γ_2 interno a γ_1,

se f è olomorfa nel dominio D compreso tra γ_1 e γ_2,

allora

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Tale proposizione è una immediata conseguenza del teorema integrale di Cauchy applicato alla curva $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^-$.

Nel caso particolare in cui f sia olomorfa in tutto il dominio interno a γ_1, si ha che i due integrali sono uguali banalmente, essendo entrambi uguali a 0.

Formula integrale di Cauchy

Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso e sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa.

Sia γ un circuito regolare a tratti, contenuto in A e tale che:

(I) γ è la frontiera di un aperto D interamente contenuto in A.

Allora per ogni $z_0 \in D$ vale la seguente formula:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Osservazione 2

Il risultato afferma che, una volta che si conosce in valore di f su γ,

allora si conosce il valore di f in tutti i punti del suo interno D.

Questo valore è indipendente dalla curva γ (grazie all'osservazione 1).

Si osservi inoltre che $\frac{f(z)}{z-z_0}$ può non essere olomorfa in A.

Il teorema (e la formula) di Cauchy ha notevoli conseguenze che vedremo in seguito.

Formula integrale di Cauchy

(I) γ è la frontiera di un aperto D interamente contenuto in A.

Allora per ogni $z_0 \in D$ vale la seguente formula:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

e quindi si ha

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

Esercizio

Si calcoli

$$\int_\gamma \frac{sen^3 z}{z - \frac{\pi}{2}} dz,$$

dove

1) $\gamma(t) = e^{it},\ t \in [0, 2\pi[$

2) $\gamma(t) = 2e^{it},\ t \in [0, 2\pi[$.

Soluzione:
1)

$$\int_\gamma \frac{sen^3 z}{z - \frac{\pi}{2}} dz = 0$$

per il teorema di Cauchy.
2)

$$\int_\gamma \frac{sen^3 z}{z - \frac{\pi}{2}} dz = 2\pi i\ sen^3(\frac{\pi}{2}) = 2\pi i.$$

per la formula integrale di Cauchy.