ESAME 23 GENNAIO 2020

ESERCIZIO 1

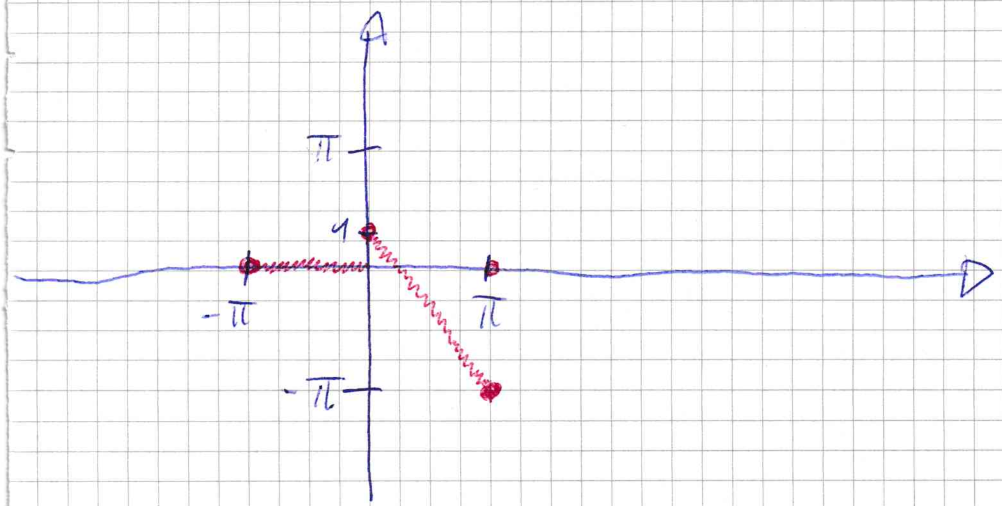
1) $\cos(i) = \dfrac{e^{i^2}+e^{-i^2}}{2} = \dfrac{e^{-1}+e}{2} = \cosh(1)$

Risposta a

2) Data la serie di Fourier, 2π-periodica,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ 1-x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

il cui grafico è



in $x = -\frac{5}{2}\pi$ a

$1+\frac{5}{2}\pi$, essendo un punto ~~di continu~~ in cui é continua

RISPOSTA b

3) La somma della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(iz)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (iz)^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{iz}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{1-\left(\frac{1}{iz}\right)} = \frac{1}{\frac{iz-1}{iz}} = \frac{iz}{iz-1}$$

RISPOSTA a

4) La trasformata di Laplace della convoluzione

$$(t^2 * e^{2t}) = \frac{2}{s^3} \cdot \frac{1}{s-2} = \frac{2}{s^3(s-2)}$$

RISPOSTA c

5) Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \frac{dz}{e^z(z^2+4)}, \quad \text{con } \gamma(t) = -1+2e^{-it}, \; t \in [-\pi, \pi]$$

da risolvere :(

ESERCIZIO 2

i) Si definisce residuo di f in z_0 il numero

$$res(f, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,dz$$

con γ circuito contenuto in A, insieme di definizione di f, e contenente z_0 come una singolarità di f

ii) Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ un polo di ordine n, allora

$$res(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z-z_0)^n f(z) \right)$$

~~...~~ Sia $f = \frac{f_1}{f_2}$, con uno zero semplice in z_0 di f_2, ossia $f_2(z_0) = 0$ e $f_1(z_0) \neq 0$, allora

$$res(f, z_0) = \frac{f_1(z_0)}{f_2'(z_0)}$$

iii) Si calcolino i residui in $z=2$ delle seguenti funzioni

$f(z) = \frac{z-2}{e^{z-2}}$, in $z_0 = 2$ non ci sono poli

$g(z) = e^{\frac{1}{(z-2)^2}}$, in $z_0 = 2$ non ci sono poli

$h(z) = \frac{sen(z-2)}{(z^2-4)^2}$, polo di ordine 2 in $z_0 = 2$

$$res(h(z_0), z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z-z_0)^n f(z) \right) =$$

$$= \lim_{z \to 2} \frac{d}{dz}\left(\cancel{(z-2)^2}\frac{\operatorname{sen}(z-2)}{\cancel{(z-2)^2}(z+2)^2}\right) =$$

$$= \lim_{z \to 2} \frac{(z+2)^2\cos(z-2) - 2\cancel{(z+2)}\,\operatorname{sen}\cancel{(z-2)}}{(z+2)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$$

ESERCIZIO 3

i) Sia f una funzione analitica su una corona circolare C_{R_1,R_2} centrata in z_0. Allora f è la somma di una serie bilatera, ossia vale il seguente sviluppo di Laurent

$$f(z) = \sum_{-\infty < n < \infty} c_n (z - z_0)^n$$

dove

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

e γ è una circonferenza di centro z_0 e raggio r con $R_1 < r < R_2$

ii) Si vuole lo sviluppo di Laurent in $z_0 = 0$ di

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)^2}$$

da risolvere :(

ESERCIZIO 4

i) Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue definite in un intervallo $I=[a,b]$ e sia $f: I \to \mathbb{R}$ tale che $f_n \to f$ uniformemente in I. Allora vale la seguente formula

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

DIMOSTRAZIONE

Essendo f limite uniforme di funzioni continue, allora essa è continua in $[a,b]$ e quindi integrabile. Per avere la tesi, grazie alla definizione di limite, basta mostrare che per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \nu_\varepsilon$ si abbia

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon$$

D'altra parte poiché $f_n \to f$ uniformemente, per ogni $\varepsilon'>0$ esiste $\nu_{\varepsilon'} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \nu_{\varepsilon'}$ si ha

$$g_n = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon'$$

Quindi, fissato $\varepsilon>0$, se si sceglie $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{b-a}$ si ottiene per ogni $n \geq \nu_{\varepsilon'}$

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq$$

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|(b-a) < \varepsilon(b-a) < \varepsilon$$

ii) Si vuole studiare la convergenza puntuale ed uniforme di

$f_n(x) = \dfrac{x}{2x+\frac{3}{n^2}}$, per la convergenza puntuale si ha

$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x}{2x+\frac{3}{n^2}} = \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$, quindi la funzione tende puntualmente su tutto $\mathbb{R}$ alla funzione costante $f(x) = \frac{1}{2}$

Per la convergenza uniforme conviene modificarci la scrittura della successione

$$f_n(x) = \frac{x}{2x+\frac{3}{n^2}} = \frac{x}{\frac{2xn^2+3}{n^2}} = \frac{xn^2}{2xn^2+3} = \frac{1}{2} + \frac{xn^2}{3}$$

Per cui si vede che f_n è strettamente crescente, sia rispetto a n che a x, quindi per il teorema del Dini essa converge uniformemente a $f(x) = \frac{1}{2}$, funzione costante.

iii) Quindi l'integrale

$$\lim_{n \to +\infty} \int_1^3 f_n(x)\,dx$$ rispetta il teorema e si ha dunque,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_1^3 f_n(x)\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\Big[x\Big]_1^3 =$$

$$= \frac{1}{2}(3-1) = 1$$

ESERCIZIO 5

i) Sia f una funzione definita e continua in un settore angolare $\theta_1 \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \theta_2$ e se $\lim_{|z| \to +\infty} z f(z) = 0$, allora

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$$

dove γ_R è l'intersezione della circonferenza di raggio R e centro l'origine con il settore considerato.

[redacted] ii) Datò $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+36}\,dx$ si passa ai metodi per variabili complesse, quindi si

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^2+36}\,dz$, si ha che $\displaystyle\lim_{|z|\to+\infty} \frac{z}{z^2+36}=0$ e

la funzione ha 2 poli (singolarità) in $z_1=6i$ e $z_2=-6i$. Consideriamo solo quella in $\Im z>0$, quindi z_1 e si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^2+36}\,dz = 2\pi i \, res(f, z_1) = 2\pi i \left[\frac{1}{2z}\right]_{z=6i} =$$

$$= 2\pi \cancel{i} \frac{1}{12\cancel{i}} = \frac{\pi}{6} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+36}\,dx$$