Analisi Matematica II

Serie di Taylor

Virginia De Cicco

Sapienza Univ. di Roma

October 19, 2017

Serie di Taylor

Data una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in (a, b)$
ci chiediamo se esiste una serie di potenze di punto iniziale x_0 convergente in (a, b) verso $f(x)$

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k (x - x_0)^k =$$

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_k(x - x_0)^k + \dots$$

$$f(x) \tilde{=} a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_k(x - x_0)^k$$

con un errore

$$\sum_{m \geq k+1} a_k (x - x_0)^k$$

che si riduce a mano a mano che k aumenta.
In tal caso si dice che f è sviluppabile in serie di potenze di punto iniziale x_0 in (a, b).

Osservazione banale...ma non troppo

Se $f(x)$ è essa stessa un polinomio, qual è il suo sviluppo di Taylor?

Lei stessa!!!

Esempio

$$f(x) = 5x^3 + 4x^9$$

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k (x - x_0)^k$$

con $a_3 = 5, \;\; a_9 = 4$ e tutti gli altri nulli.

Unicità dello sviluppo in serie di potenze

Il seguente teorema mostra che, se f è sviluppabile in serie di potenze in (a, b), allora possiede in (a, b) le derivate di ogni ordine.

Unicità dello sviluppo in serie di potenze

Teorema

Data la serie di potenze

$$\sum_{k\geq 0} a_k(x-x_0)^k$$

avente raggio di convergenza $\rho > 0$, sia $f(x)$ la sua somma, i.e.

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} a_k(x-x_0)^k \qquad \forall x : |x-x_0| < \rho\,.$$

Allora $f(x)$ è una funzione indefinitivamente derivabile (o C^∞) per $|x-x_0| < \rho$ e per ogni $m \in \mathbb{N}$ la derivata di ordine m vale

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1)\ldots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m}.$$

Inoltre $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e dunque f è sviluppabile in serie nella forma

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad \forall x : |x-x_0| < \rho\,.$$

Dimostrazione

Si applica m volte il teorema di derivazione termine a termine per le serie di potenze e si ottiene

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m}.$$

$m = 1$ (serie derivata)

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-1+1)a_k(x-x_0)^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} ka_k(x-x_0)^{k-1}$$

$m = 2$

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-2+1)a_k(x-x_0)^{k-2} =$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k(x-x_0)^{k-2}$$

Dimostrazione

Per dimostrare la seconda parte

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m} =$$

$$= m(m-1)\dots(m-m+1)a_m(x-x_0)^{m-m} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m} =$$

$$= m(m-1)\dots 1\ a_m + \sum_{k=m+1}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m} =$$

$$= m!\ a_m + \sum_{k=m+1}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m}.$$

Dimostrazione

Ponendo adesso $x = x_0$ si annullano tutti gli addendi di tale serie tranne il primo, i.e. $k = m$; infatti

$$f^{(m)}(x_0) = m!\ a_m + \sum_{k=m+1}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x_0 - x_0)^{k-m} = m!\ a_m$$

da cui si ha

$$f^{(k)}(x_0) = k!\ a_k .$$

Ne segue che

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_{0)}}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N} .$$

e dunque f è sviluppabile in serie nella forma

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(x_{0)}}{k!}(x - x_0)^k \qquad \forall x : |x - x_0| < \rho .$$

$\square$

È importante notare che dal teorema precedente segue l'unicità dello sviluppo in serie di potenze.

Data $f(x)$ una funzione C^∞ in (a, b), si può considerare la serie

$$\sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

che prende il nome di serie di Taylor di f ed i coefficienti

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

sono detti coefficienti di Taylor di f.

Nel caso in cui $x_0 = 0$, la serie di Taylor prende il nome di serie di Mac Laurin.

Data $f(x)$ funzione C^∞ in (a, b),

ci chiediamo se f coincide sempre in (a, b) con la sua serie di Taylor

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(x_{0)}}{k!}(x - x_0)^k,$$

i.e. se f è sviluppabile in serie di Taylor in (a, b).

La risposta, in generale, è negativa come mostra il seguente esempio:

la funzione definita per $x \in \mathbb{R}$ da

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

è una funzione C^∞ in $\mathbb{R}$ e si ha

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = 0,\ \ldots,\ f^{(k)}(0) = 0, \ldots$$

Quindi la serie di Taylor di f di punto iniziale $x_0 = 0$ converge verso la funzione identicamente nulla e non verso f.

Condizione sufficiente per la sviluppabilità in serie di Taylor

Teorema

Data $f(x)$ funzione C^∞ in (a,b), supponiamo che esistano delle costanti positive $M, L \geq 0$ tali che
$$|f^{(k)}(x)| \leq M\ L^k \quad \forall x \in (a,b).$$

Allora, per ogni $x_0 \in (a,b)$, la funzione f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0 nell'intervallo (a,b).

In particolare, basta che le derivate di f siano equilimitate in (a,b) (è il caso $L = 1$).

Sviluppi di Mac Laurin delle funzioni elementari

Applicando il teorema precedente ed i teoremi di derivazione e di integrazione termine a termine si possono provare i seguenti sviluppi di Mac Laurin delle principali funzioni elementari:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n, \quad |x| < 1,$$

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$sen\, x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$cos\, x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

Sviluppi di Mac Laurin delle funzioni elementari

$$senh x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$cosh\, x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$arctg\, x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1,$$

$$log(x+1) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad |x| < 1.$$

Esame del 22 febbraio 2011

Domanda a risposta multipla

Lo sviluppo di Taylor in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \frac{1}{4+x}$ è

$$a)\ \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{n+2}} x^n \qquad b)\ \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{n+2}} x^n \quad c)\ \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{2n+2}} x^n \quad d)\ \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{2n+2}} x^n.$$

Soluzione: c) Infatti

$$f(x) = \frac{1}{4+x} = \frac{1}{4(1+\frac{x}{4})} = \frac{1}{4} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{4^n} x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{2n+2}} x^n.$$

Domanda a risposta multipla

Il coefficiente di Taylor a_2 della funzione $f(x) = 9 + x + 3x^2 + 5x^8$ è

a) $a_2 = 1$

b) $a_2 = 3$

c) $a_2 = 8$

d) $a_2 = 0$.

Soluzione: b)

Domanda a risposta multipla

Lo sviluppo di Taylor della funzione $f(x) = \log(1 - x^2)$ è

$$a) \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{n+1} x^{2n+2} \qquad b) \quad -\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} x^{2n+2}$$

$$c) \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{n+1} x^{2n} \qquad d) \quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} x^{2n+2} \, .$$

Soluzione: b) GIUSTA Infatti da $\frac{1}{1-w} = \sum_{n\geq 0} w^n$ si ha, integrando termine a termine che

$$log(1-w) = -\int_0^w \frac{1}{1-s} ds = -\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} w^{n+1}$$

da cui

$$log(1-x^2) = -\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} x^{2n+2}$$

Domanda a risposta multipla
Lo sviluppo di Taylor della funzione $f(x) = \log(1 - x^2)$ è

$$a) \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{n+1}x^{2n+2} \qquad b) \quad -\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}x^{2n+2}$$

$$c) \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{n+1}x^{2n} \qquad d) \quad \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}x^{2n+2}\,.$$

Soluzione: b) GIUSTA
ALTRO MODO Parto dallo sviluppo del logaritmo e si ha

$$log(1+y) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{y^{n+1}}{n+1}, \quad |y| < 1.$$

Quindi se $y = -x^2$

$$log(1-x^2) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{(-x^2)^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}x^{2n+2}$$

dove si è usato che $(-1)^n(-1)^{n+1} = -1$.

Esame del 16 luglio 2013

(i) Si introducano le serie di potenze.
(ii) Si definisca il raggio di convergenza per una serie di potenze e si diano le formule per calcolarlo.
(iii) Usando gli sviluppi noti, si calcoli la somma della seguente serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\log\, x)^{k-1}}{k!} \qquad\qquad 0 < x < 1\,.$$

Soluzione
Per calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\log\, x)^{k-1}}{k!} \qquad\qquad 0 < x < 1\,,$$

usiamo lo sviluppo dell'esponenziale e si ha

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\log\, x)^{k-1}}{k!} = \frac{1}{\log\, x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\log\, x)^{k}}{k!} = \frac{e^{\log\, x}}{\log\, x} = \frac{x}{\log\, x}\,.$$

Esame del 20 Settembre 2013

Sui raggi di convergenza
Domanda a risposta multipla

Sia dato l'insieme $I = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 11\}$. Quale tra le seguenti serie converge in I?

$$a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(11)!\, n} \qquad b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (11)^n x^n$$

$$c) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (11)^{\frac{1}{n}} x^n \qquad d) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(11)^n}.$$

Soluzione: d) Infatti il raggio di convergenza è $\rho = \frac{1}{l}$ dove

$$l = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{(11)^{n+1}}}{\frac{1}{(11)^n}} = \frac{1}{11}.$$

Esame del 19 novembre 2013

Sui raggi di convergenza
Domanda a risposta multipla

La serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^n} x^n$$

ha raggio di convergenza

a) $R = 0$ b) $R = e/4$ c) $R = 1$ d) $R = 4$.

Soluzione: b) Infatti il raggio di convergenza è $\rho = \frac{1}{l}$ dove

$$l = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{4^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{4^n n!}{n^n}} = 4(n+1)\frac{1}{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}} = 4\frac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \frac{4}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{4}{e}.$$

Appello di 1 luglio 2008

(i) Si provi l'unicità dello sviluppo in serie di potenze di una funzione $f(x)$.
(ii) Si calcoli $f^{(20)}(0)$, dove

$$f(x) = \frac{7x^4}{(1-x)^2}.$$

Soluzione
(ii) Poichè per $|x| < 1$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = D\left(\frac{1}{1-x}\right) = D\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$$

si ha che

$$f(x) = \frac{7x^4}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} 7nx^{n+3}.$$

D'altra parte per l'unicità dello sviluppo in serie si ha

$$\frac{f^{(20)}(0)}{(20)!} = a_{20} = 7 \cdot 17 \quad \to \quad f^{(20)}(0) = 119 \cdot (20)!\,.$$

Da Casalvieri-De Cicco

Si calcoli la somma della seguente serie.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!x} (\log x)^{2n} \quad x > 0.$$

Soluzione
Utilizzando la sostituzione $t = \log x$ si ottiene

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!x} (\log x)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)! e^t}$$

$$= e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = e^{-t} \cos t = \frac{\cos(\log x)}{x} \quad \forall x > 0.$$

Da Casalvieri-De Cicco

Sia $f(x) = \frac{1}{3+2x}$. Si scriva, specificando l'insieme di convergenza, lo sviluppo in serie di potenze centrato nel punto x_0 a fianco indicato delle seguenti funzioni.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & f(x) & x_0 = 0 \\ \text{(b)} & f^2(x) & x_0 = 0 \\ \text{(c)} & f(x) & x_0 = -1 \end{array}$$

Da Casalvieri-De Cicco

(a) Utilizzando lo sviluppo della serie geometrica si ha che

$$\frac{1}{3+2x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{3}x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}x\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{3^{n+1}} x^n,$$

la quale converge se

$$\left|-\frac{2}{3}x\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \forall x \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Da Casalvieri-De Cicco

(b) Si ha che

$$f^2(x) = \frac{1}{(2+3x)^2} = -\frac{1}{3}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2+3x}\right).$$

Per il teorema di derivazione per serie si ricava dunque che

$$\frac{1}{(2+3x)^2} = -\frac{1}{3}\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{3^{n+1}}x^n\right) = -\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{3^n}nx^{n-1}$$

$$\overset{n-1=k}{=} -\frac{1}{9}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}2^{k+1}}{3^{k+1}}(k+1)x^k = \frac{2}{27}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k 2^k}{3^k}(k+1)x^k.$$

Lo stesso teorema ci garantisce che l'insieme di convergenza è uguale a quello dello sviluppo in serie di f. Tale serie converge dunque $\forall x \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Da Casalvieri-De Cicco

(c) In questo caso, conviene riscrivere f nel seguente modo

$$f(x) = \frac{1}{3+2x} = \frac{1}{3+2(x+1)-2} = \frac{1}{1+2(x+1)} = \frac{1}{1-(-2(x+1))}$$

ed utilizzando di nuovo lo sviluppo della serie geometrica di ragione $-2(x+1)$ si ottiene

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n 2^n (x+1)^n$$

la quale converge se

$$|-2(x+1)| < 1 \Leftrightarrow |x+1| < \frac{1}{2} \quad \forall x \in \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$