Analisi Matematica II

Analisi complessa

Virginia De Cicco
Sapienza Univ. di Roma

Analisi complessa

Serie di potenze e di Fourier in campo complesso

Serie in campo complesso

In maniera analoga a quanto fatto nei numeri reali si possono dare le nozioni

di successioni di funzioni $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ in campo complesso

Esempio: $f_n(z) = (iz)^n$
tende a 0 se $|iz| = |z| < 1$,
tende ad 1 se $z = -i$
non converge negli altri punti,

di serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ in campo complesso

Esempio: $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (iz)^n$
converge se $|iz| = |z| < 1$
non converge negli altri punti,

i diversi tipi di convergenza.

Serie di potenze in campo complesso

Data una successione a_n di numeri complessi e fissato $z_0 \in \mathbb{C}$

si definisce *serie di potenze in campo complesso di punto iniziale z_0* una serie del tipo

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n.$$

I numeri complessi a_n sono detti coefficienti della serie.

Se i coefficienti a_n sono definitivamente nulli (cioè esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n = 0$ per ogni $n > n_0$) la serie si riduce al polinomio

$$\sum_{n=0}^{n_0} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + \cdots + a_{n_0} (z - z_0)^{n_0}.$$

Serie di potenze in campo complesso

$$\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n.$$

Si osservi che in $z = z_0$ la serie converge e la sua somma è a_0.

Ricordiamo che per le serie di potenze in campo reale, l'insieme di convergenza è un intervallo di centro il punto iniziale e raggio R.

Nel caso di serie di potenze in campo complesso, l'insieme di convergenza è una palla di centro z_0 e raggio R.

Tale R si dice *raggio di convergenza* della serie e si calcola in maniera analoga al caso reale.
Inoltre

1) se $R = 0$, la serie converge solo per $z = 0$,

2) se $0 < R < +\infty$,

la serie converge (assolutamente) per $|z| < R$,

converge totalmente per $|z| \leq r$, per ogni r tale che $0 < r < R$,

e non converge per $|z| > R$,

3) se $R = +\infty$,

la serie converge (assolutamente) in tutto $\mathbb{C}$

e totalmente per $|z| \leq r$, per ogni $r > 0$.

Esempi

1) La serie

$$\sum_{n\geq 0} n! z^n$$

converge solo in $z = 0$ ($R = 0$),

2) la serie

$$\sum_{n\geq 0} z^n$$

converge nella palla $|z| < 1$ ($R = 1$),

converge totalmente per $|z| \leq r$, per ogni r tale che $0 < r < 1$,

e in nessun punto della sua frontiera (che è la circonferenza $|z| = 1$),

Esempi

3) la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$$

converge nella palla $|z| < 1$ $(R = 1)$,

converge totalmente per $|z| \leq r$, per ogni r tale che $0 < r < 1$,

e in alcuni punti della circonferenza $|z| = 1$ (per esempio nel punto $z = -1$),

ma non in tutti (non converge per esempio in $z = 1$) ,

4) la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$$

converge totalmente nella palla $|z| \leq 1$ $(R = 1)$

e dunque in tutti i punti della circonferenza $|z| = 1$,

Esempi

5) la serie

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$$

converge in ogni punto $z \in \mathbb{C}$ $(R = \infty)$

e totalmente per $|z| \leq r$, per ogni $r > 0$.

Olomorfia di una somma di una serie di potenze

Vediamo ora che le serie di potenze sono derivabili termine a termine.

Teorema

La somma

$$S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

di una serie di potenze è una funzione olomorfa dove è definita

(cioè nel suo cerchio di convergenza $B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$)

e per ogni $z \in B_R(z_0)$ si ha

$$S'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Olomorfia di una somma di una serie di potenze

Iterando il procedimento, dal teorema precedente si ha

$$S''(z) = \sum_{n \geq 2} n(n-1)a_n(z-z_0)^{n-2}$$

e per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n \geq k} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}$$

da cui ponendo $z = z_0$ si ha

$$S^{(k)}(z_0) = k!a_k$$

e quindi

$$a_k = \frac{S^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Olomorfia di una somma di una serie di potenze

Ne segue *l'unicità dello sviluppo in serie di potenze*, ossia:

se

$$S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

è la somma di una serie convergente definita in $B_R(z_0)$,

allora necessariamente si ha che

$$a_n = \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

e dunque

$$S(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R,$$

cioè *la serie di potenze coincide con la serie di Taylor associata alla sua funzione somma $S(z)$*.

Sviluppi

Ricordiamo infine che alcuni sviluppi classici noti per le funzioni reali valgono ancora in ambito complesso:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n, \quad |z| < 1,$$

$$e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$senz = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$cosz = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

Sviluppi

$$senhz = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$coshz = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$arctgz = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1,$$

$$Log(z+1) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad |z| < 1.$$

Appello del 22 febbraio 2011

Domanda a risposta multipla

Lo sviluppo di Taylor in $z_0 = 0$ della funzione $f(z) = \frac{1}{4+z}$ è

$$a)\ \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{n+2}} z^n$$

$$b)\ \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{n+2}} z^n$$

$$c)\ \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{2n+2}} z^n$$

$$d)\ \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{2n+2}} z^n.$$

Soluzione : c)

Appello del 9 marzo 2011

Domanda a risposta multipla

L'insieme di convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^{-|e^z|}}, \quad z \in \mathbb{C}$$

è

a) tutto $\mathbb{C}$ b) l'insieme vuoto c) un semipiano d) un cerchio.

Soluzione : b)

Appello del 10 novembre 2017

(i) Sia dia la definizione di convergenza puntuale per una serie di funzioni.

(ii) Sia assegnata la seguente serie in campo complesso:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(z+i)^n}.$$

Se ne determini l'insieme di convergenza E, fornendone una rappresentazione grafica sul piano complesso.

Se ne calcoli la somma $\forall z \in E$.

(ii) Sia assegnata la seguente serie in campo complesso:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(z+i)^n}.$$

Se ne determini l'insieme di convergenza E, fornendone una rappresentazione grafica sul piano complesso.
Se ne calcoli la somma $\forall z \in E$.

Soluzione:

$$\left| \frac{2^2}{z+i} \right| < 1 \quad sse \quad |z+i| > 4$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(z+i)^n} = \frac{1}{1-\frac{4}{z+i}} = \frac{z+i}{z+i-4}$$

Esercizi

Si sviluppi la seguente funzione in serie di Taylor centrata nel punto $z_0 = 1$, specificandone l'insieme di convergenza.

$$f(z) = e^{(z-1)^2}$$

Soluzione : Utilizzando lo sviluppo in serie di potenze dell'esponenziale in campo complesso si ha che

$$e^{(z-1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-1)^{2n}}{n!}.$$

Tale serie ha raggio di convergenza ∞ e dunque lo sviluppo in serie di Taylor vale $\forall z \in \mathbb{C}$.

Esercizi

Si sviluppi la seguente funzione in serie di Taylor centrata nel punto $z_0 = 3$, specificandone l'insieme di convergenza.

$$f(z) = \frac{1}{z - 2i}$$

Soluzione :
Utilizzando lo sviluppo della serie geometrica si ha che

$$\frac{1}{z-2i} = \frac{1}{z-3+3-2i} = \frac{1}{3-2i}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-3}{3-2i}\right)}$$

$$= \frac{1}{3-2i}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(z-3)^n}{(3-2i)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(z-3)^n}{(3-2i)^{n+1}}.$$

Esso converge se

$$\left|\frac{z-3}{3-2i}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-3| < |3-2i| = \sqrt{13}$$

cioè nel cerchio di centro $z_0 = 3$ e di raggio $\sqrt{13}$.

Esercizi

Si sviluppi la seguente funzione in serie di Taylor centrata nel punto $z_0 = -2$, specificandone l'insieme di convergenza.

$$f(z) = \frac{2}{z}$$

Soluzione :
Utilizzando la serie geometrica si ha che

$$f(z) = \frac{2}{z} = \frac{2}{z+2-2} = -\frac{2}{2\left(1 - \frac{z+2}{2}\right)} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(z+2)^n}{2^n}.$$

Esso converge se

$$\left|\frac{z+2}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z+2| < 2$$

cioé nel cerchio di centro $z_0 = -2$ e di raggio 2.

Forma esponenziale delle serie di Fourier

Ricordiamo che si definisce nel campo complesso l'esponenziale nel seguente modo:

$$e^z := e^x(cos\ y + i\ sen\ y) \qquad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}$$

e quindi

$$e^{inx} = cos\ nx + i\ sen\ nx.$$

Ciò consente di scrivere una serie trigonometrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n cos\ nx + b_n sen\ nx)$$

nella forma

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

che chiamiamo serie bilatera.

Forma esponenziale delle serie di Fourier

Infatti ricordiamo che

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \qquad \operatorname{sen} nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

da cui si ha

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos\ nx + b_n \operatorname{sen}\ nx) = \gamma_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(\gamma_n e^{inx} + \gamma_{-n} e^{-inx}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx}$$

dove

$$\gamma_0 = \frac{a_0}{2}, \qquad \gamma_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} = \frac{a_n - ib_n}{2}, \qquad \gamma_{-n} = \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

Inoltre

$$a_n = \gamma_n + \gamma_{-n} \qquad b_n = i(\gamma_n - \gamma_{-n}).$$

Forma esponenziale delle serie di Fourier

Supponiamo che la serie bilatera converga assolutamente (basta supporre che le due serie numeriche

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\gamma_n|, \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} |\gamma_n|$$

siano convergenti); sia $f(x)$ la sua somma (che è 2π-periodica),

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx} \,,$$

allora necessariamente, dalla formula nota per i coefficienti di Fourier e dalla forma di γ_n, si ha per ogni $n \in \mathbb{Z}$

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx \,.$$

Forma esponenziale delle serie di Fourier

I coefficienti γ_n così ottenuti si dicono coefficienti di Fourier di f e la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

si dice serie di Fourier in forma esponenziale.

Osserviamo infine che e^{inx} è un sistema ortogonale; infatti

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\ e^{-inx}\ dx$$

è nullo se $n \neq m$ ed è uguale a 2π se $n = m$.

Appello del 20 febbraio 2009

Si scriva la serie di Fourier in forma esponenziale della funzione, periodica di periodo 2π, definita in $[-\pi, \pi[$ da

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \in [-\pi, 0[\\ \\ 1 & x \in [0, \pi[, \end{cases}$$

calcolandone esplicitamente i coefficienti.

$$\begin{aligned}\gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)dx &= \frac{1}{2\pi}\left(2\int_{-\pi}^{0} e^{-inx}dx + \int_{0}^{\pi} e^{-inx}dx\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(2\int_{-\pi}^{0} e^{-inx}dx + \int_{0}^{\pi} e^{-inx}dx\right)\end{aligned}$$

Appello del 20 febbraio 2009

Soluzione:

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left(2\int_{-\pi}^{0} e^{-inx}dx + \int_{0}^{\pi} e^{-inx}dx\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(2\int_{-\pi}^{0} e^{-inx}dx + \int_{0}^{\pi} e^{-inx}dx\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-2\frac{1}{i\,n}[1-(-1)^n] - \frac{1}{i\,n}[(-1)^n - 1]\right) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{n}((-1)^n - 1).$$

Appello del 20 febbraio 2009

La serie di Fourier in forma esponenziale della funzione data è

$$\gamma_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(\gamma_n e^{inx} + \gamma_{-n} e^{-inx}) =^{k=-n}$$

$$\gamma_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\gamma_n e^{inx} + \sum_{k=-\infty}^{-1}\gamma_k e^{ikx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\gamma_n e^{inx}$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}((-1)^n - 1)e^{inx} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{n}((-1)^n - 1)e^{inx}.$$