Def. Successioni di funzioni

Sia I un intervallo contenuto in R e per ogni $n \in N \, sia \, f_n : I \rightarrow R$ una funzione definita in I. Consideriamo la successione di funzioni

$f_n \; detta \, famiglia \, di \, fuzioni$

$f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ che denoteremo anche con $f_n \;\; n \in N$.

Osserviamo che $f_n(x)$ha una doppia dipendenza: nella variabile $x \in R$ e nell'indice $n \in N$;

$n \in N$ fissato si ha la funzione $x \rightarrow f_n(x)$;

a $x \in I$ fissato si ha la successione numerica $f_n(x)$.

Def. Convergenza puntuale

Data una successione di funzioni $(f_n)_{n \in N}$ definite in I e data $f : A \subseteq I \rightarrow R$, si dice che $f_n \rightarrow f$ puntualmente in A (o che $\lim_{n\rightarrow+\infty} f_n = f$)

Se $\forall x \in A \lim_{n\rightarrow+\infty} f_n(x) = f(x)$

Ciò equivale a dire, ricordando la definizione di limite per una successione, che

$\forall x \in A \forall \epsilon > 0 \exists \nu_{x,\epsilon} \in N : \forall n > \nu_{x,\epsilon} siha |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$

Def. Convergenza uniforme

Data una successione di funzioni $(f_n)_{n \in N}$ definite in I e data $f : A \subseteq I \rightarrow R$, si dice che $f_n \rightarrow f$ uniformemente in A

Se $\forall \epsilon > 0 \exists \nu_\epsilon \in N : \forall n > \nu_\epsilon siha |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \forall x \in A$

Utilizzando la definizione di estremo superiore, si ha che per dimostrare che $f_n \rightarrow f$ uniformemente in A

basta verificare che

$\forall \epsilon > 0 \exists \nu_\epsilon \in N : \forall n > \nu_\epsilon sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

O equivalentemente

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu_\epsilon \in N : \forall n > \nu_\epsilon \, g_n < \epsilon$

$\lim_{n\rightarrow+\infty} g_n = 0$

$g_n = sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| successionedinumeri$

Th. Continuità del limite (teorema convergenza uniforme)

Sia $(f_n)_{n \in N}$ successione di funzioni *continue* definite in un intervallo $I \subseteq R$ e sia $f : I \rightarrow R$ tale che $f_n \rightarrow f$ uniformemente in I. Allora la funzione f è continua

O equivalentemente

1) $f_n \rightarrow f$ uniforme ⇒ f è continua
2) f_n continua

N.B.

Ma non è detto che se f è continua allora $f_n \rightarrow f$ uniforme e f_n continua

Th. Inversione dei limiti (teorema convergenza uniforme)

Sia $(f_n)_{n \in N}$ successione di funzioni definite in un intervallo $I \subseteq R$ e sia $f : I \to R$ tale che $f_n \to f$ uniformemente in I. Supponiamo inoltre che per ogni $n \in N$ esista il limite

$$\lim_{x \to x_0} f_n(x), \; x_0 \in R$$

Allora esistono e coincidono i due limiti seguenti

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \to x_0} (\lim_{n \to +\infty} f_n(x)))$$

Th. Passaggio del limite sotto il segno di integrale (teorema convergenza uniforme)

Sia $(f_n)_{n \in N}$ successione di funzioni *continue* definite in un intervallo $I = [a, b]$ e sia $f : I \to R$ tale che $f_n \to f$ uniformemente in I.

Allora vale la seguente formula

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Dim.

Essendo f limite uniforme di funzioni continue, allora essa è continua in $[a, b]$ e quindi integrabile. Per avere la tesi, grazie alla definizione di limite, basta mostrare che per ogni

$\forall \epsilon \quad \exists \nu_\epsilon \in N : \forall n \geq \nu_\epsilon$ si abbia

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| < \epsilon$$

D'altra parte, poiché $f_n \to f$ uniformemente, per ogni $\forall \epsilon' \exists \nu_{\epsilon'} \in N : \forall n \geq \nu_{\epsilon'}$ si ha

$$g_n = sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon'$$

Quindi, fissato $\epsilon > 0$, se si sceglie $\epsilon' < \frac{\epsilon}{b-a}$

si ottiene per ogni $\forall n \geq \nu_{\epsilon'}$

$$| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx | \leq \int_a^b |f_n(x)dx - f(x)|dx \leq sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)|(b-a) < \epsilon'(b-a) < \epsilon$$

Th. Passaggio del limite sotto il segno di derivata (teorema convergenza uniforme)

Sia $(f_n)_{n \in N}$ successione di funzioni di classe C^1(cioè *derivabili* e con *derivate continue*) definite in un intervallo $I = [a, b]$

E sia $f : I \to R$ tale che $f_n \to f$ puntualmente in I.

Supponiamo inoltre che la successione f_n' delle derivate converga uniformemente verso una funzione g.

Allora si ha che $f_n \to f$ uniformemente in I.

f è derivabile e f'=g

Cioè vale la seguente formula

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = f'(x)$$

Condizioni sufficienti per la convergenza uniforme:

Th. Dini

Sia $(f_n)_{n\in N}$ successione di funzioni *continue* definite in un intervallo $I = [a,b]$ e sia $f : I \to R$ *funzione continua* tale che $f_n \to f$ puntualmente in I.

Assumiamo inoltre che tale successione sia monotona crescente rispetto ad $n \in N$

Cioè per ogni $x \in [a,b]$ si ha che

$$f_n(x) \le f_{n+1}(x)$$

Allora la successione $f_n \to f$ converge uniformemente in I

Th. 2

Sia $(f_n)_{n\in N}$ successione di funzioni *non necessariamente continue* definite in un intervallo $I = [a,b]$ e sia $f : I \to R$ *funzione continua* tale che $f_n \to f$ puntualmente in I.

Assumiamo inoltre per ogni $n \in N$ la funzione $f_n(x)$ sia monotona crescente rispetto ad x

Cioè si ha che $x_1 \le x_2$

Allora $f_n(x_1) \le f_n(x_2)$

Allora la successione $f_n \to f$ uniformemente in I

Def. Convergenza puntuale serie di funzioni

Supponiamo che per ogni $x \in A \subseteq I$ la successione di funzioni $S_n(x)$ ammetta limite finito $S(x) per n \to +\infty$

Cioè

$$S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x)$$

In tal caso la serie di funzioni di termine generale $f_n(x)$ converge puntualmente ad $S(x)$ in A e $S(x)$ è la somma della serie e si scrive

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S(x)$$

L'insieme A è l'insieme di convergenza puntuale

Def. Convergenza assoluta serie di funzioni

Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *converge assolutamente* in $x \in A$

se per ogni $x \in A$ converge la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$$

La convergenza assoluta implica la convergenza puntuale ma non vale il viceversa

Def. Convergenza uniforme serie di funzioni

Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *converge uniformemente* ad S(x) in A se la successione di funzioni $(S_n(x))_{n \in N}$ converge uniformemente alla funzione S(x) in A nel senso delle successioni

La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale ma non vale il viceversa

Def. Convergenza totale

Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *converge totalmente* in $x \in A$ se esiste una successione numerica M_n tale che

$|f_n(x)| \leq M_n \forall x \in A \forall n \in N$

E se la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ risulta convergente

La convergenza totale implica tutte le altre convergenze

N.B.

la convergenza assoluta e la convergenza uniforme implicano quella puntuale, la convergenza totale implica l'assoluta e l'uniforme.

Ma la convergenza uniforme NON implica quella assoluta e neanche il viceversa vale

Th. Continuità della somma di una serie

Sia $(f_n)_{n \in N}$ una successione di *funzioni continue* definite in un intervallo $I \subseteq R$ e sia $S : I \rightarrow R$ la somma della serie avente f_n come termine generale

Cioè

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

Supponiamo inoltre che tale serie converga uniformemente ad $S(x)$

Allora la funzione$S(x)$è continua

Th. Integrazione per serie (o integrazione termine a termine)

Sia $(f_n)_{n \in N}$ una successione di *funzioni continue* definite in un intervallo $I \subseteq R$ e sia $S : I \rightarrow R$ la somma della serie avente f_n come termine generale

Cioè

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

Supponiamo inoltre che tale serie converga uniformemente ad $S(x)$

Allora vale la seguente formula

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx$$

Dim.

Essendo S(x) il limite uniforme della successione $S_k(x) = \sum_{n=0}^{k} f_k(x)$ delle somme parziali (che sono funzioni continue)

Allora essa è continua in $[a, b]$ e quindi integrabile.

Quindi si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a}^{b} f_n(x)dx = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \int_{a}^{b} f_n(x)dx$$
$$= \lim_{k\to\infty} \int_{a}^{b} \sum_{n=0}^{k} f_n(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{a}^{b} S_k(x)dx = \int_{a}^{b} \lim_{k\to\infty} S_k(x)dx = \int_{a}^{b} S(x)dx$$

dove si è usato il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale per la successione di funzioni $S_k(x)$ che converge uniformemente ad $S(x)$.

Th. Derivazione per serie (o derivazione termine a termine)

Sia $(f_n)_{n\in N}$ successione di funzioni di classe C^1(cioè *derivabili* e con *derivate continue*) definite in un intervallo $I \subseteq R$ e sia $S : I \to R$ la somma della serie avente f_n come termine generale

Cioè

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

Consideriamo la serie derivata

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$$

E supponiamo che quest'ultima converga uniformemente

Allora la funzione S è anch'essa di classe C^1 e vale la seguente formula

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$$

Def. Serie di potenze centrate nell'origine

Sia $a_k, k = 0,1,2, ..$ una successione di numeri reali e sia $f_k(x) = a_k x^k$

La serie di funzioni

$$\sum_{k>=0} f_k(x) = \sum_{k>=0} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k + \ldots$$

Prende il nome di serie di potenze di coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$

Def. Serie di potenze centrate in un punto x_0

Una serie di potenze centrata in un punto x_0

$$\sum_{k>=0} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_k(x - x_0)^k + \cdots$$

N.B

Notiamo che k ≥ 1 si ha f_k (0) = 0 e quindi $S(0) = a_0$

Quindi in x = 0 (o in generale in x = x_0) la serie converge

Ne segue che l'insieme di convergenza puntuale (ICP) non può essere vuoto!

Per una serie di potenze si dimostra che **ICP** è un intorno di 0 avente raggio generalizzato ρ nullo, oppure infinito, oppure finito.

Quindi si verifica una delle seguenti circostanze:

i) la serie converge per x = 0 ;
ii) la serie converge per ogni x ∈R;
iii) esiste un numero ρ > 0 tale che la serie converge se |x| < ρ e non converge se |x| > ρ.

Def. Raggio di convergenza

Si definisce il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{k>=0} f_k(x) = \sum_{k>=0} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k + \ldots$$

come l'estremo superiore $\rho \in [0, +\infty]$ dell'insieme X dei numeri reali x nei quali essa converge

cioè

$\rho = sup\ X$ dove $X = \{x \in R\text{:}\ \sum_{k>=0} a_k x^k\ converge\ \}$

Questo estremo superiore esiste sempre e, siccome 0 ∈ X, si ha che $\rho \geq 0$. Si verifica facilmente che il raggio di convergenza

ρ = 0 se e solo se x = 0, i.e. X = {0}

$\rho = +\infty$ se e solo se X = R.

Th.

Sia $0 < \rho < +\infty$.

Allora la serie di potenze

$$\sum_{k>=0} f_k(x) = \sum_{k>=0} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k + \ldots$$

ha raggio di convergenza ρ se e solo se essa converge per $|x| < \rho$ e non converge per$|x| > \rho$.

Inoltre, se $0 < \rho$, essa converge assolutamente per $|x| < \rho$. Infine converge totalmente (e quindi uniformemente) in ogni intervallo chiuso e limitato $[-a, a] \subset (-\rho, \rho)$. Nulla si può dire, in generale, sulla convergenza della serie di potenze nei punti $x = -\rho\ e\ x = \rho$.

Criterio di Cauchy-Hadamard (ricerca raggio di convergenza)

Data la serie di potenze

$\sum_{k>=0} a_k x^k$

Se esiste il limite

$$l = \lim_{k->+\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}$$

Allora il raggio di convergenza della serie $\sum_{k>=0} a_k x^k$ è

$$\rho = \begin{cases} +\infty & l = 0 \\ \frac{1}{l} & 0 < l < +\infty \\ 0 & l = +\infty \end{cases}$$

Criterio di D'Alembert

Data la serie di potenze

$\sum_{k>=0} a_k x^k$

Con $a_k \neq 0$ definitivamente, se esiste il limite

$l = \lim_{k->+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$

Allora il raggio di convergenza della serie $\sum_{k>=0} a_k x^k$

$$\rho = \begin{cases} +\infty & l = 0 \\ \frac{1}{l} & 0 < l < +\infty \\ 0 & l = +\infty \end{cases}$$

Def. Serie derivata

Data la serie di potenze

$\sum_{k>=0} a_k x^k$

La serie ottenuta derivando questa termine a termine, cioè la serie

$\sum_{k>=1} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + \cdots + k a_k x^{k-1} + \cdots$

Viene detta serie derivata della serie di potenze

Def. Serie integrata

Data la serie di potenze

$\sum_{k>=0} a_k x^k$

La serie ottenuta integrando questa serie termine a termine, cioè la serie

$\sum_{k>=0} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + \ldots$

Viene detta serie integrata della serie di potenze

Th.

Una serie di potenze ha lo stesso raggio di convergenza della sua serie derivata e della sua serie integrata.

Th. Di derivazione e di integrazione delle serie di potenze

Se la serie di potenze

$\sum_{k>=0} a_k x^k$

ha raggio di convergenza ρ non nullo e se f (x) è la sua somma

cioè

$$f(x) = \sum_{k>=0} a_k x^k \qquad \forall x: |x| < \rho con\, \rho > 0$$

Allora risulta anche

$$f'(x) = \sum_{k>=1} k a_k x^{k-1}\, \forall x: |x| < \rho$$

e

$$\int_0^x f(t)d = \sum_{k>=0} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} \forall x: |x| < \rho$$

N.B

Più in generale si possono considerare serie di potenze di punto iniziale x_0, anche diverso da zero

Lo studio di tali serie di potenze viene ricondotto a quelle di punto iniziale x_0 = 0 con il semplice cambio di variabile $y = x - x_0$;

se ρ è il suo raggio di convergenza e $0 < \rho < +\infty$

allora essa *converge assolutamente* per $|x - x_0| < \rho$ e non converge per $|x - x_0| > \rho$.

Inoltre *converge totalmente* negli intervalli del tipo $|x - x_0| \leq a$, con a arbitrario, $0 < a < \rho$.

Se $\rho = +\infty$,

allora essa *converge assolutamente* per ogni $x \in R$

converge totalmente negli intervalli del tipo$|x - x_0| \leq a$, con $a > 0$ arbitrario.

Gli stessi criteri precedenti forniscono metodi per calcolare il raggio di convergenza anche in questo caso.

Criterio di Abel

Sia data la serie di potenze

$$\sum_{k>=0} a_k (x - x_0)^k$$

Avente raggio di convergenza $0 < \rho < +\infty$.

Se tale serie converge nel punto $x = x_0 + \rho$, i.e. se converge la serie numerica

$$\sum_{k>=0} a_k \rho^k$$

Allora la serie di potenze converge uniformemente in intervalli del tipo $[x_0 - \rho + \epsilon, x_0 + \rho]$, con $0 < \epsilon < \rho$. Lo stesso criterio vale nel punto $x = x_0 - \rho$

Si osservi che tale convergenza è SOLO uniforme, mentre la convergenza totale, come già visto, è garantita solo negli intervalli del tipo $[x_0 - \rho + \epsilon, x_0 + \rho - \epsilon], con\ 0 < \epsilon < \rho$.

Def. Sviluppabile serie di potenze

Data una funzione $f: (a, b) \to R$ ed $x_0 \in (a, b)$ ci chiediamo se esiste una serie di potenze di punto iniziale ed x_0 convergente in (a, b)verso $f(x)$

$$f(x) = \sum_{k>=0} a_k(x - x_0)^k$$

Con un errore

$$\sum_{m>k+1} a_k(x - x_0)^k$$

Che si riduce mano a mano che k aumenta

In tal caso si dice che f è sviluppabile in serie di potenze di punto iniziale x_0 in (a, b)

N.B.

Se la funzione $f(x)$ è un polinomio, lo sviluppo di Taylor di essa è essa stessa

Th. Unicità dello sviluppo in serie di potenze(teorema condizione necessaria ma non sufficiente per avere serie di Taylor)

Data la serie di potenze

$$\sum_{k>=0} a_k(x - x_0)^k$$

Avente raggio di convergenza $\rho > 0$, sia $f(x)$la sua somma

Cioè

$$f(x) = \sum_{k>=0} a_k(x - x_0)^k \; \forall x: |x - x_0| < \rho$$

Allora $f(x)$ è una funzione indefinitivamente derivabile (o C^∞) per $|x - x_0| < \rho$ e per ogni $m \in N$ la derivata di ordine m vale

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1) \dots (k-m+1)a_k(x - x_0)^{k-m}$$

Inoltre $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ Per ogni $k \in N$ e dunque f è sviluppabile in serie nella forma

$$f(x) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \forall x: |x - x_0| < \rho$$

Dim.

Si applica m volte il teorema di derivazione termine a termine per le serie di potenze e si ottiene

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1) \dots (k-m+1)a_k(x - x_0)^{k-m}$$

cioè

m=1(serie derivata)

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1) \dots (k-1+1)a_k(x - x_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} ka_k(x - x_0)^{k-1}$$

m=2

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-2+1)a_k(x-x_0)^{k-2} = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(x-x_0)^{k-2}$$

Per dimostrare la seconda parte

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m} \\ &= m(m-1)\dots(m-m+1)a_m(x-x_0)^{m-m} \\ &+ \sum_{k=m+1}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m} \\ &= m(m-1)\dots 1a_m + \sum_{k=m+1}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m} \\ &= \ m!\,a_m + \sum_{k=m+1}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m} \end{aligned}$$

Ponendo adesso $x = x_0$ si annullano tutti gli addendi di tale serie tranne il primo

Cioè $k = m$ infatti

$$f^{(m)}(x_0) = m!\,a_m + \sum_{k=m+1}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x_0-x_0)^{k-m} = m!\,a_m$$

Da cui si ha

$f^{(k)}(x_0) = k!\,a_k$

Ne segue che

$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \forall k \in N$

E dunque f è sviluppabile in serie nella forma

$$f(x) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad \forall x\colon |x-x_0| < \rho$$

È importante notare che dal teorema precedente segue l'unicità dello sviluppo in serie di potenze.

Def. Serie di Taylor

Data $f(x)$ una funzione $C^\infty\ in\ (a,b)$, si può considerare la serie

$$\sum_{k>=0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Che prende il nome di serie di Taylor di f ed i coefficienti

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Sono detti coefficienti di Taylor di f

Nel caso in cui $x_0 = 0$, la serie di Taylor prende il nome di serie di Mac Laurin

N.B.

Data $f(x)$ una funzione $C^\infty \; in \; (a, b)$ ci chiediamo se f coincide sempre in (a, b) con la sua serie di Taylor

$$f(x) = \sum_{k>=0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Cioè se f è sviluppabile in serie di Taylor in (a, b)

Th. (Condizione sufficiente per sviluppabilità in serie di Taylor)

Data $f(x)$ una funzione $C^\infty \; in \; (a, b)$, supponiamo che esistano delle costanti positive M,L ≥ 0 tali che

$|f^{(k)}(x)| <= ML^k \qquad \forall x \in (a, b)$

Allora, per ogni $x_0 \in (a, b)$, la funzione f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0 nell'intervallo (a, b).

In particolare, basta che le derivate di f siano equilimitate in (a, b) (è il caso L = 1).

Sviluppi Mac Laurin

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n>=0} x^n \qquad |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{n>=0} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in R$$

$$senx = \sum_{n>=0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n + 1)!} \qquad x \in R$$

$$cosx = \sum_{n>=0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in R$$

$$senhx = \sum_{n>=0} \frac{x^{2n+1}}{(2n + 1)!} \qquad x \in R$$

$$coshx = \sum_{n>=0} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in R$$

$$arctgx = \sum_{n>=0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n + 1} \qquad |x| < 1$$

$$log(x + 1) = \sum_{n>=0} \frac{x^{n+1}}{n + 1} \qquad |x| < 1$$

Def. Funzione generalmente continua

Diciamo che una funzione f *<u>è generalmente continua</u>* in un intervallo $[a, b]$ se ha al più un numero finito di discontinuità in $[a, b]$.

N.B.

Notiamo che esistono funzioni che non sono generalmente continue

$$f(x) = \frac{1}{sen(\frac{1}{x})}$$

Def. Funzione sommabile

Diciamo che una funzione f generalmente continua è ***sommabile*** in un intervallo $[a, b]$ se

$$\int_a^b |f(x)|dx < +\infty$$

N.B.

Osserviamo che una funzione generalmente continua potrebbe non essere sommabile.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^\beta} & x \in [-\pi, \pi]\{0\} \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad \text{per } \beta \geq 1 \; non \; è \; sommabile$$

Def. Funzioni periodiche

Una funzione $f : R \rightarrow R$ si dice periodica di periodo T (o T-periodica) se per ogni $x \in R$ si ha

$$f(x + T) = f(x)$$

Ovviamente se una funzione è periodica con periodo $T > 0$, allora è anche periodica con periodo $2T, 3T, \dots, kT, con \; k \in N$.

Def. Polinomi trigonometrici

Le somme finite

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k coskx + b_k senkx \qquad a_0, a_k, b_k \in R$$

di funzioni del tipo precedente si dicono polinomi trigonometrici di ordine n e sono funzioni $2\pi - periodiche$

Def. Serie trigonometriche

Supponiamo che la successione di funzioni

$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k coskx + b_k senkx$

converga per ogni $x \in R$ ad una funzione $S(x)$.

Ciò equivale a dire che la seguente serie

$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k coskx + b_k senkx$

Converge puntualmente e ha somma la funzione $S(x)$.

Tale somma è necessariamente una funzione 2π-periodica. Tale serie è detta ***serie trigonometrica*** di coefficienti $a_0, a_k, b_k \in R$

Prop. (condizioni necessarie affinché possa sviluppare in serie trigonometrica una funzione)

Supponiamo sia f ***sviluppabile in serie trigonometrica***

Cioè

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k coskx + b_k senkx$$

Supponiamo inoltre che *la serie converga uniformemente* in $[-\pi, \pi]$

Allora necessariamente i coefficienti hanno la seguente forma:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos\, kx\, dx \qquad k = 0,1,2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen\, kx\, dx \qquad k = 1,2, \dots$$

I coefficienti a_k e b_k della precedente proposizione prendono il nome di coefficienti di Fourier e la serie con essi costruita è detta serie di Fourier di f .

Perché tali coefficienti siano ben definiti basta che f sia 2π-periodica e sommabile in [−π,π].

$$|a_k| <= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)||cos\, kx|\, dx \ <= \ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx \ < +\infty$$

$$|b_k| <= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)||sen\, kx|\, dx \ <= \ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx \ < +\infty$$

N.B.

Il coefficiente

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

È il valor medio di f sull'intervallo di periodicità

Def. Funzione continua a tratti

Diciamo che una funzione f definita su un intervallo $[a, b]$ è *continua a tratti* in $[a, b]$

se esiste una suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ del tipo

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

tale che

- per ogni $i = 0,1,2, \dots, n-1$ la funzione $f\ (x)$ è continua negli intervalli aperti (x_i, x_{i+1})
- nei punti x_i ha al più discontinuità eliminabili o di tipo salto.

Def. Funzione regolare a tratti

Diciamo che una funzione f definita su un intervallo $[a, b]$ è *C^1 a tratti* in [a, b] (o *regolare a tratti* in [a, b])

se esiste una suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ del tipo

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

tale che

- per ogni $i = 0,1,2, \dots, n-1$ la funzione $f\ (x)$ è C^1(i.e. derivabile e con derivata continua) negli intervalli aperti (x_i, x_{i+1})

• nei punti x_i ha al più discontinuità eliminabili o di tipo salto

• in tali punti ha derivata destra e sinistra finita.

N.B.

• Le funzioni continue sono anche continue a tratti.

• Le funzioni C^1 sono anche C^1a tratti.

• Le funzioni continue a tratti in $[-\pi, \pi]$ (e quindi in particolare le continue e anche le C^1 a tratti) sono sommabili.

• Ma non vale il viceversa

Condizione necessaria affinché posso scrivere la serie di Fourier

Poter scrivere la serie di Fourier di f , basta che f sia sommabile e periodica.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k coskx + b_k senkx$$

Th. Convergenza puntuale della serie di Fourier

Sia f una *funzione 2π-periodica e regolare a tratti in R.*

Allora per ogni $x \in R$ la serie di Fourier di f *converge* a

$$\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$$

Cioè alla media tra limite destro e sinistro in x

$$f(x+) = \lim_{y->x^+} f(y)$$

$$f(x-) = \lim_{y->x^-} f(y)$$

In particolare converge a $f(x)$ nei punti di continuità

Cioè dove $f(x+) = f(x-)$

Prop. (Convergenza uniforme della serie di Fourier)

Sotto le stesse ipotesi del teorema precedente, la serie di Fourier di f *converge uniformemente in ogni sotto intervallo* $[a, b]$ in cui $f(x)$ è continua.

Th. Convergenza totale della serie di Fourier

Sia f una funzione *2π-periodica, continua e regolare a tratti in R*.

Allora la serie di Fourier di f *converge totalmente in R* (e quindi uniformemente) alla funzione f .

Th. Integrazione termine a termine per una serie di Fourier

Sia f una funzione 2π-periodica e regolare a tratti in R.

Allora fissati $x_0, x \in [-\pi, \pi]$ si ha

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \frac{a_0}{2}(x - x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} (a_k coskt + b_k senkt)\, dt$$

N.B.

Questo teorema afferma che una serie di Fourier di una funzione regolare a tratti in R si può integrare termine a termine anche senza la convergenza uniforme della serie stessa

Def. Prodotto scalare

Nello spazio delle funzioni continue a tratti su un intervallo $[a, b]$ si può introdurre quello che viene detto un prodotto scalare ed è cosi definito:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Questo prodotto tra funzioni gode delle stesse proprietà del prodotto scalare in R^N:

$(f, g) = (g, f)$ $\quad (f, f) \geq 0$ $\quad (f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$

$(f, g + h) = (f, g) + (f, h)$

N.B.

Si dice che due funzioni continue a tratti f e g sono ortogonali se $(f\ , g)\ =\ 0$. Inoltre nello spazio delle funzioni continue a tratti si può introdurre una distanza nel modo seguente

$$d(f, g) = \sqrt{\int_a^b (f - g)^2 dx}$$

Def. Quadrato sommabile

Si dice che una funzione 2π-periodica `e di quadrato sommabile se

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x)\right)^2 dx < +\infty$$

N.B.

Se f è quadrato sommabile, allora è sommabile

Dim (che quadrato sommabile è sommabile)

$$(1 - |f(x)|)^2 \geq 0$$

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}(1 + |f(x)|^2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx \leq \frac{1}{2}(1 + |f(x)|^2)dx \leq \pi + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x)\right)^2 dx < +\infty$$

Th.

Sia f una funzione 2π-periodica, *generalmente continua e di quadrato sommabile*. Siano a_0, a_k, b_k i coefficienti di Fourier di f e sia $S_n(x)$ la somma parziale n-esima della serie di Fourier di f ,

cioè

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k coskx + b_k senkx$$

Allora si ha

1) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx \ - [\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \ ]$
2) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x)\right)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) -> \ uguaglianza \ di \ Parseval$
3) $al \ variale \ di \ P \in \ F_n \ lo \ scarto \ quadratico \ medio$

   $$E_n = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P(x)|^2 dx = (d(f,P))^2$$

   è $minimo \ se \ P(x) = S_n(x)$

   cioè

   $S_n(x)$ realizza la minima distanza di f(x) da F_n

   $$d(f, S_n) = \min_{P \in F_n} d(f,P)$$

   $dove \ F_n$ è $l'insieme \ dei \ polinomi \ trigonometrici \ di \ ordine \ n, i.e. del \ tipo$

   $$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k coskx + b_k senkx$$

La disuguaglianza

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x)\right)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) <= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x)\right)^2 dx$$

Che è parte dell'eguaglianza di Parseval, prende il nome di diseguaglianza di Bessel

Def. Convergenza media quadratica

Si dice che la serie di Fourier converge in media quadratica se

$$\lim_{n->+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx = 0$$

Dalla 1) e dalla 2) del teorema precedente

Dim.

Dalla 1)

$$\lim_{n->+\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \ \Rightarrow \ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \ = \ 2)$$

Che a sua volta sostituendo nella 2)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x)\right)^2 dx \ - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x)\right)^2 dx \ = 0$$

Segue

Corollario 1

Sia f una funzione *2π-periodica, generalmente continua e di quadrato sommabile,* la serie di Fourier *converge in media quadratica.*

Corollario 2

Sia f una funzione *2π-periodica, generalmente continua e di quadrato sommabile*, si ha

$$\lim_{k->+\infty} a_k = \lim_{k->+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos\, kxdx = 0$$

$$\lim_{k->+\infty} b_k = \lim_{k->+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen\, kxdx = 0$$

N.B

Data una *funzione f 2π-periodica*:

- Se f è *continua e C^1 a tratti*
  Allora la *convergenza è totale* (e quindi uniforme)
  La serie converge ad $f(x)$ e dunque *f è sviluppabile in serie di Fourier*

- Se f è *C^1 a tratti*, allora la *convergenza è puntuale*
  la somma della serie è $\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$
  e la *convergenza è uniforme* in ogni intervallo in cui f (x) è continua

- Se f è *generalmente continua e di quadrato sommabile*
  Allora la *convergenza è in media quadratica*

- Infine poiché una *funzione continua a tratti è generalmente continua e di quadrato sommabile*
  Allora si ha che se
  f è continua a tratti, la *convergenza è in media quadratica e vale l'eguaglianza di Parseval*.

Def. Complessi

Dato $z = (x, y) \in C, x = Re(z)$ e $y = Im(z)$.

Pertanto oltre alla notazione come coppia $z = (x, y)$, si usa spesso anche la notazione $z = x + iy$. Le coordinate x e y di z sono dette anche *coordinate cartesiane.*

Avendo identificato i numeri complessi con le coppie di R^2, si parla spesso di C come del *piano complesso*, dove i numeri reali sono i punti dell'asse delle x, mentre i numeri immaginari sono i punti dell'asse delle y.

A differenza di R, il campo C dei numeri complessi *non è ordinato*, cioè non esiste una relazione d'ordine totale in C che sia compatibile con le operazioni algebriche.

Le coordinate polari o trigonometriche (ρ, θ) nel piano complesso. Dato $z = x + iy \in C$ definiamo il modulo come

$$\rho = |z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Def. Argomento

Definiamo ora l'argomento θ di z. Dato $z = x + iy \in C, z \neq 0$ consideriamo il numero $\frac{z}{|z|}$

Si ha che

$$|\frac{z}{|z|}| = 1$$

Quindi esiste un angolo θ tale che

$$\frac{z}{|z|} = cos\theta + i\, sen\theta$$

$$z = |z|(cos\theta + i\, sen\theta)$$

Tale θ è detto argomento di z

Si indica con $arg(z)$ l'insieme degli argomenti di z

Un elemento di questo insieme è detto anche determinazione dell'argomento di z. Si definisce infine l'argomento principale $Arg(z)$ come l'unico elemento di $arg(z)$ che appartiene all'intervallo $(-\pi, \pi]$.

Formula di De Moivre

$$z^n = |z|^n(cos\theta + i\, sen\theta) \qquad \forall n \in N$$

Formula radici

$$z = |z|^{\frac{1}{n}} \; [cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + i\, sen(\frac{\theta + 2k\pi}{n})] \qquad k = 0,1, \dots, n-1$$

Def. Intorno circolare

Si definisce inoltre *intorno circolare* (o palla) di centro z_0 e raggio $r > 0$ l'insieme

$Br(z_0) := \{z \in C : |z - z_0| < r\}$.

Def. Punto interno

z si dice *interno* ad A se $\exists r > 0 : Br(z) \subseteq A$

Def. Punto esterno

z si dice *esterno* ad A se $\exists r > 0 : Br(z) \subseteq A^C$ (A^C complementare di A),

Def. Punto di frontiera

z si dice *punto di frontiera* di A se $\forall r > 0 \quad Br(z) \cap A \neq \emptyset$ e $Br(z) \cap A^C \neq \emptyset$,

Def. Punto di accumulazione

z si dice *punto di accumulazione* di A se $\forall r > 0$ l'intersezione $Br(z) \cap A$ contiene infiniti punti.

Def. Insieme aperto e chiuso

Inoltre un insieme $A \subset C$ si dice *aperto* se ogni suo punto è interno ad A stesso e si dice *chiuso* se il suo complementare A^C è aperto.

$C^* = C \setminus \{0\}$ $\quad C^*$ è $aperto\ e\ la\ sua\ frontiera$ è $\{0\}$

$C^{**} = C \setminus \{z = x + iy \in C : x \leq 0, y = 0\}$
C^{**} è $aperto\ e\ la\ sua\ frontiera$ è $il\ semiasse\ negativo$

$\{z = x + iy \in C : x \leq 0, y = 0\}$ $corrisponde\ al\ semiasse\ negativo$

Def. Limite successione di numeri complessi

Data una successione $(a_n)_{n \in N}$ di numeri complessi diciamo che essa converge a $\lambda \in C$,

$$\lim_{n->+\infty} a_n = \lambda$$

Se

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \nu \in N : \forall n \geq \nu \quad |a_n - \lambda| < \epsilon.$$

Def. Insieme connesso

Un aperto $A \subset C$ si dice *connesso* se comunque si fissino due punti in A esiste una poligonale che li congiunge, tutta contenuta in A.

Def. Limite

Si dice che $\lambda \in C$ è il limite di f per z che tende a z_0 (punto di accumulazione di A, non necessariamente appartenente ad A), e si scrive

$$\lambda = \lim_{z->z_0} f(z)$$

Se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall z \in A \cap B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\} \quad \Longrightarrow |f(z) - \lambda| < \epsilon.$$

Si dice che $\lambda \in C$ è il limite di f per $|z|$ che tende a $+\infty$ e si scrive

$$\lambda = \lim_{|z|->+\infty} f(z)$$

Se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M > 0: \quad \forall z \in A \quad |z| \geq M \quad \Longrightarrow |f(z) - \lambda| < \epsilon.$$

Def. Funzione continua variabile complessa

La funzione f si dice continua in $z_0 \in A$ se

$$\lim_{z->z_0} f(z) = f(z_0)$$

Cioè se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall z \in A \cap B_\delta(z_0) \quad \Rightarrow \quad |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

Infine la funzione f si dice continua in A se lo è in ogni punto $z_0 \in A$.

N.B.

$Sia\, z = x + iy$ e $w = f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$, dove $u, v : R \times R \to R$ sono dette *funzioni parte reale* e *parte immaginaria* di f

Le funzioni costanti, la funzione identità, la funzione modulo, coniugato e le funzioni (z^2) sono tutte continue in C

Le funzioni razionali fratte sono tutte continue in C privato degli zeri del polinomio al denominatore

Es.

$f(z) = z^n$ è continua in C con $n \in N$

$f(z) = \frac{1}{z^n}$ è continua in C^*

Def. Funzione $Arg(z)$

La funzione $f : C^* \to R$ definita dà $f(z) = Arg(z)$ è continua in C^{**}

Infatti, per tale funzione si ha $v(x,y) = 0$ e

$\theta = arctg\frac{y}{x}$ per $x \neq 0$

$$u(x,y) = \begin{cases} arctg\, \frac{y}{x} & \mathrm{x} > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \mathrm{x} = 0, \mathrm{y} > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \mathrm{x} = 0, \mathrm{y} < 0 \\ arctg\, \frac{y}{x} + \pi & \mathrm{x} < 0, \mathrm{y} >= 0 \\ arctg\, \frac{y}{x} - \pi & \mathrm{x} < 0, \mathrm{y} < 0 \end{cases}$$

Che è discontinua su $\{z = x + iy \in C : x < 0, y = 0\}$

Quindi è continua tranne sul semiasse negativo

Def. Funzione derivabile variabile complessa

Sia $A \subseteq C$ un aperto connesso e sia $f : A \to C$. Per ogni $z \in A$ si definisce *rapporto incrementale* di f in z la funzione

$$z \mapsto \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Dove $\Delta z \in C^*$ ed è tale che $z + \Delta z \in A$

La funzione f si dice *derivabile in un punto* $z \in A$ se esiste in C il limite λ del rapporto incrementale per $\Delta z \mapsto 0$

$$\lambda = \lim_{\Delta z -> 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Def. Derivata variabile complessa

Il numero complesso λ (se esiste) si chiama la derivata di f in z e si denota con $f'(z)$ oppure $Df(z)$.

Come in campo reale, la derivabilità implica la continuità

Def. Differenziabile variabile complessa

Sia $f\ (z)\ =\ f\ (x, y)$ dove $z\ =\ x\ +\ iy$.

La funzione f si dice *differenziabile* rispetto a (x, y) nel punto (x_0, y_0) se, per ogni coppia di incrementi $\Delta x\ e\ \Delta y$, si ha che

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x\, , y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\ \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\ \Delta y + o(\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)})$$

Dove $o(\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}) = |\Delta z|$ è un infinitesimo di ordine superiore alla distanza euclidea dei punti (x_0, y_0) e $(x_0 + \Delta x\, , y_0 + \Delta y)$

N.B

Condizione sufficiente perché f differenziabile rispetto (x, y) è che esistano le derivate parziali prime di f e siano continue in (x_0, y_0)

Def. Differenziale

L'applicazione

$$(\Delta x, \Delta y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

Si dice *differenziale* di $f(x, y)$

Condizioni di Cauchy-Riemann

La differenziabilità di $f\ (x, y)$ rispetto a (x, y) NON equivale alla differenziabilità di $f\ (z)$ rispetto a z.

Prop.

Sia $f\ :\ A\ \rightarrow C$ *differenziabile rispetto a (x, y).*

Allora f (z) è differenziabile (come funzione di variabile complessa) se e solo se si ha

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$ **(CR1)**

Se vale l'ultima uguaglianza, allora

$$f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$$

Scrivendo $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{i}{i}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Ricordando che $\frac{1}{i} = -i$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \textbf{(CR2)}$$

Le uguaglianze **(CR2)** (o equivalentemente **(CR1)**) sono dette condizioni di Cauchy-Riemann.

N.B.

$grad\ u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$ e $grad\ v = (\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y})$

Prodotto scalare è nullo $grad\ u * grad\ v = 0 \Rightarrow vettori\ gradienti\ sono\ ortogonali\ tra\ loro$

Def. Funzione olomorfa

Si dice che $f : A \rightarrow C$ è *olomorfa* in un aperto connesso A se per ogni $z_0 \in A$ la funzione f è derivabile in z_0.

Def. Funzione intera

Una funzione $f : C \rightarrow C$ olomorfa in tutto C si dice *intera*.

N.B.

Le funzioni (non costanti) che hanno valori solo puramente reali o solo puramente immaginari non sono olomorfe in alcun aperto del piano complesso, poiché non soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann.

Es.

$f(z) = Imz$

$f(z) = Rez$

$f(z) = |z|$

$f(z) = Arg(z).$

Def. Funzione esponenziale in campo complesso

Funzione olomorfa in tutto C tale che la sua restrizione all'asse reale coincida con la funzione $f(x) = e^x\ in\ R.$

$f(z) = e^z = e^x(cosy + iseny) \quad \forall z = x + iy \in C$

Sia che

$Arg\ e^z = Im\ z = y$

Si ha che

$|e^z| = e^{Re\ z} = e^x > 0$ che implica che $e^z \neq 0 \quad \forall z \in C$

N.B

Non si può parlare di positività di e^z poiché in C non c'è relazione d'ordine

Def. **Forma esponenziale numeri complessi**

Inoltre per ogni $y \in R$ si ha che $|e^{iy}| = e^0 = 1$ e vale la cosiddetta formula di Eulero

$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y \quad \forall y \in R$

$e^{iArg\,z} = \cos Arg\,z + i \operatorname{sen} Arg\,z \quad \forall z \in C$

$|z|e^{iArg\,z} = |z|(\cos Arg\,z + i \operatorname{sen} Arg\,z) = z \quad \forall z \in C$

Quindi ogni numero complesso $z \in C$ si può scrivere nella forma esponenziale

$z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = \rho e^{i\theta}$

N.B

Dunque i punti del tipo $\rho e^{i\theta}$ $\theta \in [0,2\pi]$, sono tutti e soli i punti della circonferenza $|z| = \rho$ di centro 0 e raggio ρ.

Proprietà esponenziale campo complesso

1. Per ogni $z = x + iy$ con $y = 0$
   si ha che $f(z) = e^x$, ossia è un'estensione della funzione esponenziale in campo reale.

2. La funzione e^z, è continua in tutto C poiché
   la sua parte reale $u(x,y) = e^x \cos y$ e la sua parte immaginaria $v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$ sono continue in R^2 .

3. La funzione e^z è olomorfa in tutto C poiché ammette le derivate parziali continue e vale **(CR1)**.

Inoltre ammette come derivata se stessa, poiché dalla **(CR1)** si ha

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^z$$

4. La funzione e^z è periodica di periodo $2\pi i$, poiché per ogni $z \in C$ si ha
   $e^{z+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x(\cos(y+2\pi) + i \operatorname{sen}(y+2\pi)) = e^z$
   dove si è usata la periodicità del seno e del coseno

N.B.

Essendo periodica e^z NON si può invertire in tutto C

5. Per la funzione e^z vale la formula usuale
   $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$

Condizioni di Cauchy-Riemann

Usando la forma esponenziale dei numeri complessi, le condizioni di Cauchy-Riemann in un aperto A non contenente l'origine si possono scrivere in modo equivalente in coordinate polari come segue:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{1}{i\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta} \qquad \textbf{(CR3)}$$

Infatti se f è derivabile

Allora

$$\frac{\partial f}{\partial \rho}(z) = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial z}(\rho - e^{i\theta})\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho e^{i\theta}) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)e^{i\theta}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(z) = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial z}(\rho e^{i\theta})\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho e^{i\theta}) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)\rho i e^{i\theta}$$

Inoltre di si ha

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{1}{e^{i\theta}}$$

Da

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z)e^{i\theta} = \frac{\partial f}{\partial \rho}(z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{\partial f}{\partial \rho}(z)\frac{1}{e^{i\theta}} = f'(z)$$

Def. Logaritmo in campo complesso

Dato $z \in C^*$ si definisce $log\ z$ nel seguente modo

Da

$w = log\ z$ se e solo se $z = e^w$

A causa della periodicità dell'esponenziale ci sono infiniti valori per cui $z = e^w$ e dunque inifite determinazioni del logaritmo, si dice quindi che

$log\ z$ è una funzione *polidroma*

Cerchiamo quindi u e v di $w = log\ z$

E si ha che

$|z|(cos(arg(z)) + isen((arg(z))) = e^u(cos\ v + i\ sen\ v)$

Da cui segue che

$v = arg(z)$

$u = log|z|$

N.B

Questo logaritmo è quello dei numeri reali poiché $|z| \in R$

Quindi

$log\ z = log|z| + i\ arg(z)$

Questa non è una funzione ma un insieme

Si vede ora chiaramente che $log\ z$ è una funzione a più valori i quali differiscono per multipli interi relativi di $2\pi i$ (poiché $arg(z)$ è definita a meno di multipli di 2π).

Def. Determinazione principale Log z

Si pone

$Log\ z \coloneqq log|z| + i\ Arg(z) = log\ \rho + i\ \theta$

Quindi

$u = Re(Log(z)) = log|z|$

$v = Im(Log(z)) = Arg(z)$

Proprietà logaritmo in campo complesso

1) La funzione $Log\ z$ è definita in C^*
   Cioè per $z \neq 0$.

2) Per ogni $z = x + iy$, con $y = 0\ e\ x > 0$
   si ha che $Log\ z = log\ x$, ossia è un'estensione della funzione logaritmo in campo reale.

3) La funzione Log z è continua in C^{**} poiché la sua parte immaginaria $Arg(z)$ è continua solo in C^{**}, cioè è discontinua sul semiasse reale negativo.

4) La funzione $Log\ z$ è olomorfa in C^{**} infatti non può essere derivabile nei suoi punti di discontinuità
   Cioè sul semiasse reale negativo

Altrove è olomorfa poiché ammette le derivate parziali continue e vale la condizione di Cauchy-Riemann in coordinate polari

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{1}{i\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta} \qquad \textbf{(CR3)}$$

Infatti se $f(z) = Log\ z$

Essendo $f(\rho, \theta) = log(\rho) + i\ \theta$

Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{1}{i\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{1}{i\rho}i = \frac{1}{\rho}$$

Dim che $f'(z) = \frac{1}{z}$

Scrivo z come

$z = \rho e^{i\theta}$ e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \rho} = f'(z)\frac{\partial z}{\partial \rho} = f'(z)e^{i\theta}$$

Segue

$$f'(z) = \frac{1}{e^{i\theta}}\frac{\partial f}{\partial \rho}$$

$$f'(z) = \frac{1}{e^{i\theta}}\frac{\partial}{\partial \rho}(\log \rho \ + \ i\theta) = \frac{1}{e^{i\theta}}\frac{1}{\rho} = \frac{1}{z}$$

N.B

Infine si osservi che per la funzione Log z non valgono le usuali formule del prodotto e della potenza del logaritmo reale.

Es.

$$Log(i^3) = Log(-i) = -i\frac{\pi}{2}$$

$$3Log(i) = i\frac{\pi}{2}$$

Def. Funzione potenza in campo complesso

Si tratta di definire una funzione olomorfa su un aperto contenente la semiretta reale positiva, la cui restrizione a tale semiretta coincida con la funzione potenza in campo reale.

Per ogni coppia $\beta \in C \ e \ z \ \in C^* \ (ossia\ z \neq 0)\ si\ definisce$

$\underline{z}^\beta := e^{\beta \log z}$

In generale ci sono infinite determinazione (come per il logaritmo)

La determinazione principale è

$z^\beta := e^{\beta\, Log\, z}$

E si chiama *potenza principale*

Tale funzione è definita in C^* ed è continua ed olomorfa in C^{**}

Casi particolari funzione potenza campo complesso

1) *Sia $\beta \in R_+$*
   In tal caso, la potenza (sia la sua determinazione principale, che tutte le altre) è definita anche in $z \ = \ 0$ e si ha
   $0^\beta \ = 0$
   Infatti
   $\lim_{z->0} z^\beta \ = \lim_{z->0} e^{\beta(log|z| \,+\, i\, Arg(z))} = \lim_{z->0} e^{i\beta Arg(z))} \lim_{z->0} e^{\beta log|z|} = 0$
   Poiché
   $\lim_{z->0} e^{\beta log|z|} = 0$
   $|e^{i\beta Arg(z))}| = 1$

Quindi in questo caso
z^{β} è definita in tutto C e continua in $C^{**} \cup \{0\}$

2) Sia $\beta \in N$: $\beta = n$
In tal caso, c'`e una sola determinazione: infatti a causa della periodicità dell'esponenziale (complesso) di periodo $2\pi i$ si ha
$z^{\beta} = e^{n \log z} = e^{n(\log|z| + i\,(Arg(z)+2k\pi)} = e^{n\left(\log|z|+iArg(z)\right)} = e^{nLogz}$
Inoltre z^{β} coincide con l'usuale potenza
$z^n = z * z **** z \quad n\ volte$
poiché
$z^{\beta} = e^{nLogz} = e^{n\log|z| + i\,n\,Arg(z)} = e^{\log|z|^n + i\,n\,Arg(z)}$
$= |z|^n(cos(nArg(z)) + i\ sen(nArg(z)) = z^n$

Si noti che in tal **caso z^{β} è definita, continua ed olomorfa in tutto C**. Analogamente, nel caso **$\beta \in Z, \beta = -n$, z^{β} è definita, continua ed olomorfa in tutto C^***

3) Sia $\beta \in Q$
$\beta = \frac{1}{n}\ con\ n \in N^* := N\{0\}$
In questo caso ci sono n determinazioni, quelle della radice n-esima di z
Infatti per ogni $k \in Z$ si ha
$$z^{\beta} = e^{\frac{1}{n}\log z} = e^{\frac{1}{n}(\log|z| + i\,(Arg(z)+2k\pi))} = e^{\log|z|^{\frac{1}{n}}}\, e^{i\frac{(Arg(z)+2k\pi)}{n}}$$
$$= |z|^{\frac{1}{n}}(cos(\frac{(Arg(z)+2k\pi)}{n}) + i\ sen(\frac{(Arg(z)+2k\pi)}{n}))$$
ma solo $k = 0,1,\dots,n-1$ danno luogo a valori distinti (infatti a causa della periodicità del seno e del coseno di periodo 2π per $k = n$ si ottiene lo stesso valore che si ottiene per $k = 0$ e così via).
Quindi per $k = 0,1,\dots,n-1$ la formula precedente ridà gli n valori della radice n-esima di z.
In questo caso ($\beta = \frac{1}{n}$) la potenza **z^{β} (con tutte le sue determinazioni) è definita e continua in C ed è olomorfa in C^{**}.**

N.B.

Per ogni $z \in C^{**}$ ***e per ogni*** $\beta \in C$

$$\frac{d}{dz}z^{\beta} = \frac{d}{dz}e^{\beta logz} = e^{\beta \log z}\frac{\beta}{z} = z^{\beta}\frac{\beta}{z} = \beta z^{\beta-1}$$

Def. Funzioni circolari ed iperboliche nel campo complesso

Come prima, si tratta di definire delle funzioni olomorfe su un aperto contenente la semiretta reale positiva, la cui restrizione a tale semiretta coincida con le analoghe funzioni in R

Sia $z = ix$ con $x \in R$

Allora

$e^{ix} = cos\, x + i\, sen\, x$

$e^{-ix} = cos\, x - i\, sen\, x$

Si ha che per

$$cos\, x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$sen\, x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Quindi nel campo complesso

$$cos\, z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$sen\, z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Dalla $2\pi i - periodicit$à della funzione esponenziale si deduce la $2\pi - periodicit$à delle funzioni seno e coseno.

Si può dimostrare che le funzioni circolari non hanno altri zeri che quelli della loro restrizione all'asse dei numeri reali.

Dim.

$$cos\, z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{2iz} + 1}{2e^{iz}}$$

Supponiamo che $cos\, z = 0$

Non mi occupo del denominatore perché tanto l'esponenziale non si annulla mai

$$e^{2iz} = -1 \Rightarrow e^{2i(x+iy)} = -1 \Rightarrow e^{-2y}\, e^{2ix} = -1 \Rightarrow e^{-2y}\,(cos\,(2x) + i sen\,(2x)) = -1$$

È un'identità tra due numeri complessi e due numeri complessi sono uguali se la parte reale è uguale alla parte reale corrispondente

E la parte complessa è uguale alla parte complessa corrispondente

$$\begin{cases} e^{-2y}\,(cos\,(2x)) = -1 \\ e^{-2y}\,(sen(2x)) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{-2y}\,(cos\,(2x)) = -1 \\ sen(2x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{-2y}\,(cos\,(k\pi)) = -1 \\ x = k\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{-2y}\,(-1)^k = -1 \\ x = k\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k \ dispari \\ y = 0 \\ x = k\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Quindi ho verificato la condizione

$$cosh\ z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$senh\ z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Tutte queste funzioni sono intere(poiché l'esponenziale lo è)

Cioè definite ed olomorfe in tutto C

N.B

In campo complesso non è vero che seno e coseno sono funzioni limitate.

Infatti si noti che, considerata la restrizione della funzione $cos\ z$ all'asse immaginario (cioè $z = iy\ , y \in R$), si ha

$$\lim_{y->+\infty} cos(iy) = \lim_{y->+\infty} \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = +\infty$$

Def. Serie di potenze in campo complesso di punto iniziale z_0

Data una successione a_n di numeri complessi e fissato $z_0 \in C$ si definisce serie di potenze in campo complesso di punto iniziale z_0 una serie del tipo

$$\sum_{n>=0} a_n(z - z_0)^n$$

I numeri complessi a_n sono detti coefficienti della serie

Se i coefficienti a_n sono definitivamente nulli (cioè esiste $n_0 \in N$ tale che $a_n = 0$ per ogni $n > n_0$) la serie si riduce al polinomio

$$\sum_{n=0}^{n_0} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_{n_0}(z - z_0)^{n_0}$$

N.B.

Si osservi che in $z = z_0$ la serie converge e la sua somma è a_0.

Ricordiamo che per *le serie di potenze in campo reale*, **l'insieme di convergenza è un intervallo di centro il punto iniziale e raggio R.**

Nel caso di *serie di potenze in campo complesso*, **l'insieme di convergenza è una palla di centro z_0 e raggio R.**

Def. Raggio di convergenza serie complessa

Tale R si dice raggio di convergenza della serie e si calcola in maniera analoga al caso reale. Inoltre

1) Se $R = 0$
   La serie *converge* solo per $z = 0$

2) Se $0 < R < +\infty$
   La serie *converge(assolutamente)* per $|z| < R$
   Converge totalmente per $|z| <= r$, per ogni r tale che $0 < r < R$
   Non converge per $|z| > R$

3) Se $R = +\infty$
   la serie *converge(assolutamente)* in tutto C
   e *totalmente* per $|z| <= r$, per ogni $r > 0$

Th. Olomorfia somma serie di potenze in campo complesso

La somma

$$S(z) = \sum_{n>=0} a_n(z - z_0)^n$$

Di una serie di potenze è una funzione olomorfa dove è definita

(cioè nel suo cerchio di convergenza $B_R(z_0) = \{z \in C: |z - z_0| < R\}$)

E per ogni $z \in B_R(z_0)$ si ha

$$S'(z) = \sum_{n>=1} na_n(z - z_0)^{n-1}$$

E per ogni $k \in N$

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n>=k} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(z - z_0)^{n-k}$$

Ponendo $z = z_0$ si ha

$$S^{(k)}(z_0) = k!\, a_k$$

$$a_k = \frac{S^{(k)}(z_0)}{k!}$$

Th. Unicità sviluppo in serie di potenze in campo complesso

Se

$$S(z) = \sum_{n>=0} a_n(z - z_0)^n$$

È la somma di una serie convergente definita in $B_R(z_0)$

Allora necessariamente si ha che

$$a_n = \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \qquad |z - z_0| < R$$

Cioè la serie di potenze coincide con la serie di Taylor associata alla sua funzione somma $S(z)$

Sviluppi Mc Laurin campo complesso

1) $\frac{1}{1-z} = \sum_{n>=0} z^n \qquad |z| < 1$

2) $e^z = \sum_{n>=0} \frac{z^n}{n!} \qquad |z| \in C$

3) $sen\ z = \sum_{n>=0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad |z| \in C$

4) $cos\ z = \sum_{n>=0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad |z| \in C$

5) $senh\ z = \sum_{n>=0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad |z| \in C$

6) $cosh\ z = \sum_{n>=0} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad |z| \in C$

7) $arct\ z = \sum_{n>=0} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{2n+1} \qquad |z| < 1$

8) $Log(z+1) = \sum_{n>=0} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} \qquad |z| < 1$

Def. Serie bilatera

Sapendo che

$$e^{inx} = cos\ nx + i\ sen\ nx$$

Scrivo una serie trigonometrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n cos\ nx\ + b_n sen\ nx)$$

Nella forma

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx} \qquad x \in R$$

Che chiamiamo serie bilatera

N.B.

$$cos\ nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

$$sen\ nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

da cui si ha

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n cos\ nx\ + b_n sen\ nx) = \gamma_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(\gamma_n e^{inx} + \gamma_{-n} e^{-inx}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx}$$

Dove

$$\gamma_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$\gamma_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

$$\gamma_{-n} = \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

$$a_n = \gamma_n + \gamma_{-n}$$

$$b_n = i(\gamma_n - \gamma_{-n})$$

Def. Serie di Fourier in forma esponenziale in campo complesso

Supponiamo che la serie bilatera converga assolutamente (basta supporre che le due serie numeriche siano convergenti)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\gamma_n|$$

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} |\gamma_n|$$

Sia $f(x)$ la sua somma (che è $2\pi - periodica$)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx}$$

Allora necessariamente, dalla formula nota per i coefficienti di Fourier e dalla forma γ_n

Si ha per ogni $n \in Z$

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx$$

I coefficienti γ_n cosi ottenuti si dicono coefficienti di Fourier di f e la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx} \qquad x \in R$$

Si dice serie di Fourier in forma esponenziale

N.B.

e^{inx} è un sistema ortogonale

Infatti

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} dx$$

È nullo se $n \neq m$ ed è uguale a 2π se $n = m$

Def. Curve regolari

Diremo che γ è una *curva regolare* in C

i) Se $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 : [a, b] \longrightarrow C$ è una funzione di Classe C^1(derivabile con derivata continua)

ii) $\gamma'(t) \coloneqq \gamma'_1(t) + i\gamma'_2(t) \neq 0 \quad per \quad ogni \quad t \in [a, b]$

L'immagine di $\gamma([a, b])$ di γ in C

$$\gamma([a, b]) = \{z \in C : \ z = \gamma(t), t \in [a, b]\}$$

Si dice sostegno (o *traccia*) di γ

N.B.

$\gamma(a)$ si dice punto iniziale di γ

$\gamma(b)$ si dice punto finale di γ

La funzione γ è detta anche *legge oraria* con cui viene percorso il sostegno/traccia $\gamma([a,b])$

- Se $\gamma(a)=\gamma(b)$ la curva si dice ***chiusa***

- Se γ, ristretta ad $[a,b)$, è *iniettiva*
  Cioè $t_1 \neq t_2 \in [a,b) \;\Rightarrow\; \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$
  Allora γ si dice ***semplice***

- Se γ è *semplice e chiusa*, viene detta ***circuito***

- Si definisce lunghezza di $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ nel seguente modo:

$$l(\gamma) \coloneqq \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \int_a^b (\gamma'_1(t)^2 + \gamma'_2(t)^2)^{\frac{1}{2}}\, dt$$

Def. Cambiamento di parametro

Data $\gamma:\ [a,b] \to C$ una *curva regolare*

E data $\phi: [\alpha,\beta] \to [a,b]$ di classe $C^1\ su\ [a,b]$

Tale che

$\phi(\alpha) = a$

$\phi(\beta) = b$

E $\phi'(\tau) > 0\ per\ ogni\ \tau \in [\alpha,\beta]$(tale ϕ viene detta *cambiamento di parametro che conserva l'orientamento*)

La nuova curva definita da

$\gamma_1 \coloneqq \gamma \cdot \phi : \tau \mapsto \gamma\big(\phi(\tau)\big)$

È una *curva regolare* che ha lo *stesso sostegno di γ e lo stesso orientamento*

N.B.

Tutte le curve così ottenute formano una classe di equivalenza: esse hanno in comune lo **stesso sostegno**, ma è **diversa** la **legge oraria** con cui questo viene percorso.

Inoltre si possono considerare dei cambiamenti di parametro che cambiano l'orientamento:

Es.

Data $\gamma:\ [a,b] \to C$ una curva regolare, la curva $\gamma^-\ [a,b] \to C$ definita da $\gamma^-(t) = \gamma(b + (a - t))$ è ancora una curva regolare, ha la **stessa traccia** di γ,ma è percorsa in senso opposto e dunque scambia i punti estremi, quindi **diverso orientamento**

Def. Concatenamento di curve

Date due curve regolari $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to C$ tale che $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$

Si possono concatenare le due curve

Definendo

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Si ha

$\gamma(0) = \gamma_1(0)$

$\gamma(1) = \gamma_2(1)$

γ è continua ma in generale non è C^1

La concatenazione analoga di più segmenti dà una poligonale(concatenazione di più segmenti)

N.B.

Posso avere più possibilità di concatenare due curve , cioè ho la libertà sulla frazione di tempo ma devo sempre ***garantire*** che il *punto finale di* γ_1 ***coincida*** con il *punto iniziale* di γ_2

La concatenazione non è ottimale perché la curva non è regolare

Def. Curva regolare a tratti

Una curva γ si dice regolare a tratti se è ottenuta concatenando due o più curve regolari

Def. Integrale curvilineo

Dati $A \subseteq C$ un aperto connesso, $f : A \to C$ una funzione continua e $\gamma : [a, b] \to C$ una curva regolare (o regolare a tratti)

la cui traccia $\gamma([a, b]) \subseteq A$, si definisce l' integrale di f lungo γ nel seguente modo:

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

N.B.

La funzione $t \mapsto f(\gamma(t))\gamma'(t)$ è una funzione di variabile reale a valori complessi

Cioè il parametro è reale ma il risultato è un numero complesso poiché $f : A \to C$

Proprietà integrale curvilineo

1) Linearità:
$$\int_\gamma (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \int_\gamma f_1 + c_2 \int_\gamma f_2$$

2) Indipendenza dal cambiamento di parametro (che conserva l'orientamento)
$$\int_\gamma f := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\gamma(\phi(\tau))(\gamma \circ \phi)'(\tau)d\tau$$

3) Cambio di seno nel passaggio a γ^-: $\int_\gamma f = -\int_{\gamma^-} f$

4) Additività rispetto alla curva
$$\int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f = \int_{\gamma_1\gamma_2} f$$
Dove $\gamma_1\gamma_2$ denota la concatenazione di γ_1 e di γ_2

5) Se $M = \max_{t\in[a,b]} \left|\int_\gamma f\left(\gamma(t)\right)\right|$
Allora $|\int_\gamma f\,| \leq M\, l(\gamma)$

Th. Passaggio al limite

Sia f_n una successione di funzioni continue definite in A.

Supponiamo che $f_n \to f$ uniformemente in A

Allora

$$\int_\gamma f\,(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz$$

Def. Primitiva in campo complesso

$Sia\ A\ \subseteq C$ un aperto connesso ed $f\ :\ A\ \to C$ una *__funzione continua__*.

Si dice che $F\ :\ A\ \to C$ è una primitiva di f *__se è derivabile in A__* e

se $F'(z)\ =\ f\ (z)$ per ogni $z\ \in\ A$.

Come in campo reale, se F è una primitiva di f

Allora per ogni $c\ \in R$ la funzione $F\ +\ c$ è una primitiva di f .

La conoscenza di una primitiva permette di calcolare immediatamente gli integrali curvilinei; infatti vale un analogo del teorema di Torricelli-Barrow.

Th. Torricelli-Barrow

Sia A ⊆C un aperto connesso,

sia $\gamma : [a,b] \rightarrow C$ *curva regolare (o regolare a tratti)* la cui traccia $\gamma([a,b]) \subseteq A$

Sia $f : A \rightarrow C$ una *funzione continua* e $F : A \rightarrow C$ la sua primitiva

Allora

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Dim.

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b (F \cdot \gamma)'(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

N.B.

Dal teorema segue che se f ammette una primitiva

allora l'integrale *dipende* **solo** *dagli estremi* $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ e **non** dalla *curva che li connette*.

- Se γ è chiusa
  Allora $\int_\gamma f(z)dz = 0$

Th. Esistenza di una primitiva

Sia $A \subseteq C$ un aperto connesso e sia $f : A \rightarrow C$ una *funzione continua.*

Allora sono equivalenti le seguenti proposizioni:

a) f ammette una primitiva in A;

b) per *ogni curva regolare a tratti* $\gamma : [a,b] \rightarrow C$ la cui traccia $\gamma([a,b]) \subseteq A$, l'integrale di f su γ dipende solo dagli estremi di γ;

c) per *ogni curva chiusa e regolare a tratti* $\gamma : [a,b] \rightarrow C$ la cui traccia $\gamma([a,b]) \subseteq A$, l'integrale di f su γ è nullo.

a) implica b) visto nel teorema di Torricelli-Barrow

e che b) implica c) segue dal teorema di Torricelli-Barrow se γ è *chiusa*

Dim c) implica b)

Siano γ_1 e γ_2 due *curve regolari a tratti* tali che $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ e $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$.

Sia $\gamma = \gamma_1\gamma_2^-$ la *concatenazione* di γ_1 con γ_2^- che risulta essere una *curva chiusa*.

$\gamma_2^- \; curva \; percorsa \; la \; contrario$

Allora dalla c) di ha

$$0 = \int_{\gamma} f\,(z)dz = \int_{\gamma_1} f\,(z)dz \; - \int_{\gamma_2} f\,(z)dz$$

Da cui segue la b)

Dim. b) implica a)

Sia $z_0 \in A$ un punto fissato, sia $z \in C$ e sia γ una poligonale congiungente z_0 con z.

L'integrale di f su tale poligonale ***non*** dipende dal cammino, ma solo da z_0 e da z; essendo z_0 fissato, tale integrale dipende solo da z.

Sia

$$F(z) \coloneqq \int_{z_0}^{z} f(s)ds$$

Dove l'ultimo integrale denota l'integrale di f lungo la poligonale.

N.B.

La buona definizione di $F(z)$ è data da b) perché dice che l'integrale non dipende dalla poligonale scelto ma solo dal mio punto finale

Dobbiamo dimostrare che $F'(z) = f\,(z)$ per ogni $z \in A$.

Fissato $z \in A$, sia $h \in C$ tale che $z + h \in A$

Allora

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{z_0}^{z+h} f(s)ds - \int_{z_0}^{z} f(s)ds\right] = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(s)ds$$

Dove l'ultimo integrale si intende esteso al segmento $[z, z+h]$

D'altra parte, poiché la funzione $g(z) = 1$ ammette la primitiva $G(z) = z$, si ha che

$$\int_{z}^{z+h} ds = (z+h) - z = h$$

$$\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} g(z)ds = g(z) \; quindi \; f(z)$$

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} \big(f(s) - f(z)\big)ds$$

Inoltre, dalla continuità di f in z, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che

$|f(s) - f(z)| < \epsilon$ per ogni $|h| < \delta_\epsilon$

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| < \frac{1}{|h|}\epsilon|h| = \epsilon$$

Def. Aperto semplicemente connesso

Un aperto connesso $A \subseteq C$ si dice *semplicemente connesso*

se per ogni curva γ *semplice, chiusa e regolare a tratti contenuta in A*

(significa che la traccia $\gamma([a,b]) \subseteq A$)

l'aperto limitato che ha γ come frontiera è interamente contenuto in A.

Es.

Intorni circolari e semipiani

Def. Insieme convesso

Un insieme A si dice convesso

Se comunque fisso due punti, il segmento che li congiunge è interamente contenuto in A.

Se A è convesso, allora A è semplicemente connesso

Il viceversa non vale

Es.

C^{**} è semplicemente connesso, ma non è convesso.

C^{*} è un aperto connesso, ma non semplicemente connesso e lo stesso vale per ogni corona circolare.

Def. Forma differenziale lineare

Se $X(x,y)$ e $Y(x,y)$ sono *funzioni a valori reali definite e continue* in $A \subseteq R^2$

si chiama *forma differenziale lineare* in A l'espressione

$X(x,y)dx + Y(x,y)dy$

prodotto scalare tra il campo vettoriale $(X(x,y), Y(x,y))$ e il vettore spostamento (dx, dy)

(le due funzioni X e Y sono detti coefficienti della forma).

La forma differenziale si dice *regolare* se i coefficienti X e Y sono di *classe C^1*.

N.B.

Se γ è una curva regolare di R^2, contenuta in A, di equazioni $x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b,$

si definisce l'integrale della forma differenziale nel seguente modo

$$\int_\gamma X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int_\gamma [X(x(t),y(t))x'(t) + Y(x(t),y(t))y'(t)]dt$$

Th. Teorema della divergenza (o formula di Gauss-Green in R^2

Sia $A \subseteq R^2$ un *aperto connesso*.

Sia γ un *circuito regolare a tratti*, contenuto in A e tale che

(I) γ è la frontiera di un aperto D interamente contenuto in A

Allora , date due funzioni $X, Y : A \to R$ di classe C^1su A (cioè aventi le derivate parziali prime continue) vale la seguente formula

$$\int_\gamma Xdx + Ydy = \iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy$$

1) L'ipotesi (I) è verificata subito per ogni curva γ, se A è semplicemente connesso.

2) Si assume che l'orientamento della curva γ (da cui dipende il primo membro) sia quello antiorario, cioè in modo tale che un osservatore che la percorri lasci i punti interni alla sua sinistra.

3) La formula vale anche se γ è l'unione di due curve, come nel caso della frontiera di una corona circolare.

Th. Integrale di Cauchy

Sia $A \subseteq C$ un *aperto connesso* e sia $f : A \to C$ una *funzione olomorfa*.

Allora per ogni γ *circuito regolare a tratti*, contenuto in A e tale che:

(I) γ è la frontiera di un aperto D interamente contenuto in A

Si ha che

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Dim.

Se scriviamo la curva γ e la funzione f come

$\gamma(t) = x(t) + iy(t)$

$f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$

Allora

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b [u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))][x'(t) + iy'(t)]\, dt$$
$$= \int_a^b [(u\,x' - vy') + i(vx' + uy')]\, dt = \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy$$

Dove $udx - vdy\ e\ vdx + udy$ sono delle forme differenziali a coefficienti reali in R^2

Dal Th. Della divergenza

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy = -\iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy$$
$$= 0$$

Poiché dall'**olomorfia** di f e dalle **condizioni di Cauchy-Riemann** si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Corollario (dato dal teorema integrale di Cauchy e dall'implicazione c) -> a)

Ogni funzione $f : A \to C$ *olomorfa* in A ammette una primitiva in ogni aperto $A' \subseteq A$ *semplicemente connesso.*

In particolare, se A stesso è semplicemente connesso, allora f ammette primitiva in A.

N.B.

Notiamo che quindi sotto le ipotesi del corollario, "f ammette localmente una primitiva", cioè per ogni punto $z_0 \in A$ esiste un intorno $Br(z_0) \subset A$ in cui f ammette una primitiva.

Es.

$f(z) = \frac{1}{z}$ è olomorfa in C^*ma non ammette primitiva in C^*, va d'accordo con il corollario poiché C^* non è semplicemente connesse

Al contrario in C^{**} è dotata di primitiva, poiché C^{**} è semplicemente connesso

Osservazione 1

Il fatto che $\int_{\gamma_r} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$ non dipenda da r, non è un caso, ma è un fatto generale:

l'integrale di una funzione olomorfa su un circuito non varia se tale circuito viene deformato senza uscire dall'aperto di olomorfia.

Prop.

Se γ_1, γ_2 sono due *circuiti regolari a tratti* con γ_2 $interno\ a\ \gamma_1$

Se f è *olomorfa* nel dominio D compreso tra $\gamma_1\ e\ \gamma_2$

Allora

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$$

Tale proposizione è una immediata conseguenza del teorema integrale di Cauchy applicato alla curva $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^-$

Nel caso particolare in cui f sia olomorfa in tutto il dominio interno a γ_1, si ha che i due integrali sono uguali banalmente, essendo entrambi uguali a 0.

Formula integrale di Cauchy

Sia $A \subseteq C$ un *aperto connesso* e sia $f : A \to C$ una *funzione olomorfa*.

Sia γ un *circuito regolare a tratti*, contenuto in A e tale che:

(I) γ è *la frontiera* di un aperto D interamente contenuto in A.

Allora per ogni $z_0 \in D$ vale la seguente formula:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Si ha

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

Osservazione 2

Il risultato afferma che, una volta che si conosce in valore di f su γ,

allora si conosce il valore di f in tutti i punti del suo interno D.

Questo valore è *indipendente dalla curva γ* (grazie all'osservazione 1).

Si osservi inoltre che $\frac{f(z)}{z-z_0}$ può non essere olomorfa in A.

Def. Funzioni analitiche

Sia $A \subseteq C$ un *aperto connesso* e ∂A la sua frontiera

Una funzione $f : A \to C$ si dice *analitica*

se per ogni $z_0 \in A$ essa è *sviluppabile in serie di Taylor* nell'intorno $Br(z_0) \subseteq A$ di z_0

con $r = dist(z_0, \partial A)$, cioè

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n(z - z_0)^n = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}z_0}{n!}(z - z_0)^n \qquad \forall z: |z - z_0| < r$$

N.B

Se f è analitica, allora f è olomorfa nel cerchio di convergenza della serie. Vale anche il viceversa

Th.

Sia $A \subseteq C$ un *aperto connesso* e sia $f : A \to C$ una *funzione olomorfa*.

Allora per ogni $z_0 \in A$, posto $r = dist(z_0, \partial A)$

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n(z - z_0)^n$$

Per ogni $z \in Br(z_0)$ ed inoltre

$$c_n = \frac{f^{(n)}z_0}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz$$

Dove γ è una circonferenza di centro z_0 e raggio minore di r

Formula integrale Cauchy per le derivate

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}z_0$$

N.B.

- n = 0 è esattamente la formula integrale di Cauchy.
- n > 0 si ottiene dalla formula di Cauchy derivando n volte rispetto ad z_0 sotto il segno di integrale.
- Se $A = C$ si prende $r = \infty$. Il risultato afferma che basta che esista una derivata perché esistano tutte le successive. In tal caso si dice che f è $C^\infty(A)$, cioè infinitamente derivabile.

Inoltre f derivabile implica che f è localmente sviluppabile in serie di Taylor.

Tutto ciò non accade in campo reale.

Importante:

In campo reale

f analitica ⇒ derivabile

ma **NON** vale il viceversa

Es.

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

Questa funzione è C^1 ma non C^2

In campo complesso

f olomorfa ⟺ f analitica

In C avere una derivata è molto più forte di avere una derivata nei reali

Th.

Sia $f = u + iv : C \to C$ una *funzione analitica*

Allora $u(x, y)$ e $v(x, y)$ (viste come funzioni delle due variabili reali x e y) sono *funzioni armoniche*

Cioè valgono le seguenti equazioni di Laplace

$$\Delta u \coloneqq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\Delta v \coloneqq \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Operatore Δ è detto Laplaciano

Dim.

Essendo f analitica (e quindi olomorfa), dalle condizioni di Cauchy-Riemann si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Derivando e usando il teorema di inversione dell'ordine di derivazione (Teorema di Schwartz) si ha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Th. Morera

Sia $f : A \to C$ una *funzione continua* nell'aperto connesso $A \in C$.

Se *l'integrale* di f su ogni *curva semplice e chiusa* in A è *nullo*,

allora f è *analitica* in A.

Dim.

Sappiamo che se l'integrale di f su ogni curva semplice e chiusa in A è nullo, allora f ammette una primitiva.

Quindi f è la derivata di una funzione F olomorfa e dunque analitica.

Ne segue che anche f è analitica (essendo la derivata di una analitica).

Def. Zeri funzione analitica

Sia $f : A \to C$ una *funzione continua* nell'aperto connesso $A \in C$.

Un punto $a \in A$ si dice uno zero di f se $f(a) = 0$.

Se a è uno zero di f e

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n (z-a)^n = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

È lo sviluppo di Taylor in un intorno di a

Allora $c_0 = f(a) = 0$

N.B.

Diremo che a è uno zero di ordine n se $f^{(n)}(a) = 0$ per ogni $0 \leq k \leq n-1$ e $f^{(n)}(a) \neq 0$

Es.

la funzione $f(z) = (z-1)^3$ ha uno zero di ordine 3 in a = 1;

Th.

Sia $f : A \to C$ una *funzione analitica* nell'aperto connesso $A \in C$.

Sono equivalenti le seguenti proposizioni

(i) esiste a ∈ A tale che $f^{(n)}(a) = 0$ per ogni $n \geq 0$;

(ii) f è nulla in un intorno di a

(iii) f è nulla in A.

Corollario 1

Se due funzioni analitiche coincidono in un intorno di a ∈ A, allora coincidono ovunque.

Th. Principio degli zeri isolati

L'insieme degli zeri di una funzione analitica non identicamente nulla definita in A (se non è vuoto) è costituito da punti isolati ed è privo di punti di accumulazione appartenenti ad A.

$$\begin{cases} f \neq 0 \\ f\ analitica \\ f(a) = 0 \end{cases} \Longrightarrow\ a \text{ è } un\ zero\ isolato$$

Corollario 2 (Principio di identità)

Se due funzioni analitiche coincidono su un dominio che sia dotato di un punto di accumulazione appartenente allo stesso dominio, allora le due funzioni coincidono ovunque.

Corollario 3 (Prolungamento analitico)

Dato $I \subseteq R$ un intervallo ed $f : I \to R$,

se esiste una *funzione analitica* definita in un aperto $A \subseteq C$ tale che $I \subseteq A \cap R$ e la cui restrizione ad I coincide con $f(x)$,

allora tale funzione è univocamente determinata ed è detta *prolungamento analitico*.

Es.

Le funzioni e^z, $cosz$ e $senz$, con $z \in C$, sono i prolungamenti analitici di e^x, $cosx$ e $senx$, con $x \in R$.

N.B.

Inoltre il prolungamento analitico esiste sempre per le funzioni sviluppabili in serie di Taylor

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(z - x_0)^n \qquad \forall z \in I = B_r(x_0) \subseteq C$$

Def. Diseguaglianza di Cauchy

Sia γ una circonferenza di centro a e raggio r, allora per n = 0 si ha

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f\left(a+re^{it}\right)}{re^{it}} ire^{it}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a+re^{it}\right)dt$$

Ciò significa che il valore $f\ (a)$ in un punto $a\ \in\ A$ si ottiene come *media integrale dei valori* che f assume su una qualunque circonferenza di centro a, contenuta in A.

Separando parte reale e parte immaginaria, si ottiene un risultato analogo per $u\ =\ Ref$ e per v = Imf , che dunque godono della stessa proprietà della media

Proprietà caratteristica delle serie armoniche

Dalla formula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

Con $\gamma = \gamma_r$ detto

$M(r) \coloneqq \max\{|f(z)|:\ z\ \in \gamma_r\}$

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{M(r)}{r^{n+1}}2\pi r = \frac{M(r)}{r^n}$$

Per ogni $n \in N$ e per ogni r>0 tale che $B_r(a) \subseteq A$

Quest'ultima è detta *disequaglianza di Cauchy*

Th. Liouville

Se f è *analitica* su C e $|f\ (z)| \leq\ M$ per ogni $z\ \in C$, allora f è *costante*.

Dim.

Poiché $A\ =\ C$, la formula

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{M(r)}{r^{n+1}}2\pi r = \frac{M(r)}{r^n}$$

Vale con r arbitrario

$$|c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \qquad \forall r > 0$$

Facendo tendere $r \to \infty$ si ha

$$c_n = 0 \qquad \forall n \in N\backslash\{0\}$$

$$f(z) = c_0 = costante$$

Def. Punto singolare isolato

Data $f : A \to C$ una *funzione analitica* in A, un punto $z_0 \in C$ si dice un *punto singolare isolato* o una singolarità isolata per f

Se $z_0 \notin A$ (che equivale a dire che z_0 non è un punto di olomorfia di f)

Ma esiste un intorno forato

$B_r^*(z_0) \coloneqq B_r(z_0) \setminus \{z_0\} = \{z \in C : 0 < |z - z_0| < r\}$

tutto contenuto in A (che equivale a dire che i punti $z \in B_r^*(z_0)$ sono tutti punti di olomorfia di f).

N.B

Punto singolare isolato è necessariamente un punto di frontiera per l'Aperto A di definizione di $f(z)$

Se f_1, f_2 sono funzioni analitiche in A

Allora

$$f(z) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

È analitica in A privato degli zeri di f_2

Classificazione singolarità

Sia $f : A \to C$ *una funzione analitica* e sia $z_0 \in C$ una *singolarità isolata*.

1) **Singolarità eliminabili**:
   a. Supponiamo che esista in C il limite
      $\lim_{z \to z_0} f(z) = \lambda \in C$
      Si ha che la funzione
      $\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & z \in A \\ \lambda & z = z_0 \end{cases}$
      È analitica in un intorno di z_0 (ed è il prolungamento analitico di f)
      In tal caso z_0 si dice *singolarità eliminabile*

2) **Poli:**
   a. Supponiamo che per un certo $n \in N* = N \setminus \{0\}$ la funzione
      $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$
      Ammetta un limite $\lambda \neq 0$ per $z \to z_0$ cioè
      $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = \lambda$
      In tal caso si dice che z_0 è un polo di ordine n per f

3) **Singolarità essenziali:**

a. Un punto singolare isolato z_0 che non sia né una singolarità eliminabile, né un polo, si dice una *singolarità essenziale.*
In tal caso non esiste il limite di f per $z \rightarrow z_0$, anzi questa è una *condizione necessaria e sufficiente* perché z_0 sia una singolarità essenziale.

Def. Residuo

Sia $f : A \rightarrow C$ una *funzione analitica* e sia $z_0 \in C$ una *singolarità isolata*.

Si definisce residuo di f in z_0 il numero

$$res(f, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)dz$$

dove γ è un circuito contenuto in A e contenente z_0 e nessuna altra singolarità di f.

N.B

se z_0 è una singolarità eliminabile,

allora per il teorema integrale di Cauchy si ha che $res(f, z_0) = 0$

Prop.

Sia $f : A \rightarrow C$ una *funzione analitica* e sia $z_0 \in C$ un *polo di ordine n*. Allora

$$res(f, z_0) := \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z - z_0)^n f(z))$$

Dim.
Sia $z_0 \in C$ un polo di ordine n, allora la funzione

$$g(z) = (z - z_0)^n f(z)$$

è analitica in un intorno z_0

$$\frac{d^{n-1}g}{dz^{n-1}}(z_0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} dz = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_\gamma f(z)dz$$

Dove γ è una circonferenza di centro z_0 e di raggio r contenuta in A

$$\frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z - z_0)^n f(z)) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}g}{dz^{n-1}}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)dz = res(f, z_0)$$

N.B.

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \, res(f, z_0)$$

Def. Serie bilatera

$$\sum_{-\infty<n<+\infty} c_n(z-z_0)^n$$

Per convergenza della serie precedente si intende che convergono le due seguenti serie

1) $\sum_{n\geq 0} c_n(z-z_0)^n$
2) $\sum_{n<0} c_n(z-z_0)^n = \sum_{k>0} c_{-k}(z-z_0)^{-k} = \sum_{k>0} c_{-k}\frac{1}{(z-z_0)^k}$

La prima serie si dice *parte singolare* (o parte caratteristica) della serie. La seconda, che è una usuale serie di potenze, si dice *parte regolare* ed ha un suo raggio di convergenza, che chiamiamo R2.

N.B.

Facendo il cambiamento di variabili, la prima serie diventa di potenze

$$w := \frac{1}{(z-z_0)}$$

$$\sum_{n\geq 0} c_n(z-z_0)^n = \sum_{k>0} c_{-k}(z-z_0)^{-k} = \sum_{k>0} c_{-k}w^{-k}$$

che ammette un suo raggio di convergenza, che chiamiamo $R1^*$

Se $R1^* > 0$

$\sum_{k>0} c_{-k}w^{-k}$ converge se $|w| = \frac{1}{|(z-z_0)|} < R1^*$ $|(z-z_0)| < \frac{1}{R1^*}$

Ponendo $R1 = \frac{1}{R1^*}$ $|(z-z_0)| < R1$

Dunque la serie *converge* all'esterno del cerchio di raggio R1 e la somma della serie è analitica su tale insieme.

Th.

La somma di una serie bilatera è una *funzione analitica* in una corona circolare (se R1 < R2).

Th. Di Laurent

Sia f una *funzione analitica* su una corona circolare C_{R1R2}di centro z_0.

Allora f è la somma di una serie bilatera,

cioè vale il seguente sviluppo di Laurent

$$f(z) = \sum_{-\infty<n<+\infty} c_n(z-z_0)^n$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

γ è una circonferenza di centro z_0 e raggio r con $R1 < r < R2$.

N.B

se f è analitica in tutta la palla $B_{R2}(z_0)$ oppure ha una singolarità eliminabile in z_0

Allora lo sviluppo di Laurent si riduce a quello di Taylor, cioè i coefficienti della parte singolare sono tutti nulli

poiché

$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ è analitica per n ≤−1. Inoltre i coefficienti della parte regolare c_n, n ≥ 0, coincidono con quelli di Taylor poiché si ha

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Se $n = -1$

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\, dz = res(f, z_0)$$

Prop.

Sia $f : A \to C$ una _funzione analitica_, sia $z_0 \in C$ una _singolarità isolata_ e sia

$$f(z) = \sum_{n\in N} c_n(z-z_0)^n$$

lo sviluppo di Laurent di f in un intorno forato di z_0

Allora

(i) z_0 è eliminabile se e solo se la parte singolare è nulla
Cioè $c_{-n} = 0$ per ogni n>0

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n(z-z_0)^n$$

che è lo sviluppo di Taylor di f

(ii) z_0 è un polo di ordine n_0 se e solo se $c_{-n_0} \neq 0$ e $c_{-n} = 0$ per ogni $n > n_0$

$$f(z) = \sum_{n \geq -n_0} c_n (z - z_0)^n$$

(iii) z_0 è una singolarità essenziale se e solo se $c_{-n} \neq 0$ per infiniti indici n>0

Th. Residui

Sia $f : A \rightarrow C$ una *funzione analitica* nell'aperto connesso $A \subseteq C$ e sia γ un circuito in A. Siano $z_1, \ldots z_r$ dei punti singolari isolati di f appartenenti all'aperto D interno a γ.

Allora

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{r} res(f, z_r)$$

Dim.

Siano $\gamma_1, \ldots \gamma_r$ delle circonferenze di centro $z_1, \ldots z_r$ e raggi opportunamente piccoli in modo che ognuna sia interna a D, non si intersechino fra di loro e ognuna non contenga altre singolarità tranne il suo centro. Consideriamo la curva

$$\tilde{\gamma} = \gamma \cup \gamma_1^- \cup \ldots \cup \gamma_r^-$$

che è l'unione di curve non connesse tra di loro.

Dal teorema integrale di Cauchy (che vale anche per l'unione di curve) si ha

$$0 = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz + \sum_{k=1}^{r} \int_{\gamma_r^-} f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz - \sum_{k=1}^{r} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz$$

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{r} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz$$

Per ogni $k: 1, \ldots r$

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i\, res(f, z_r)$$

Lemma del grande cerchio

Sia f una funzione *definita e continua* in un settore angolare $\theta_1 \leq Arg(z) \leq \theta_2$ (per $|z|$ abbastanza grande) e se $\lim_{|z| \to \infty} f(z) = 0$, allora

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$$

Dove γ_R è l'intersezione della circonferenza di raggio R e centro l'origine con settore considerato

Lemma di Jordan

Sia g una *funzione definita e continua in un settore angolare* S contenuto nel semipiano $Imz \geq 0$,

$S = \{z \in C: 0 \leq \theta_1 \leq Arg(z) \leq \theta_2 \leq \pi$

Supponiamo che $\lim_{|z|\to\infty} g(z) = 0$

Allora

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} g(z)e^{iz}dz = 0$$

Dove γ_R è l'intersezione della circonferenza di raggio R e centro l'origine con settore considerato

Lemma del polo semplice

Sia f una *funzione analitica in un intorno forato* dell'origine ed abbia in tale intorno un *polo semplice*

Allora

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)dz = \pi i \, res(f, 0)$$

dove γ_r è la semicirconferenza di equazione $z = re^{it}, 0 \leq t \leq \pi$.

Def. Funzione L-trasformabile (o trasformabile secondo Laplace)

Sia I un intervallo contenente il semiasse reale positivo: $R_+ = [0, +\infty) \subseteq I \; e \; sia \; f : I \implies C$ una *funzione a valori reali o complessi*.

La funzione f è L-trasformabile (o trasformabile secondo Laplace) se $\exists s \in C$ tale che la funzione $t \implies e^{-st} f(t)$ è *sommabile* su R_+, cioè tale che

$$\int_0^{+\infty} |e^{-st} f(t)| dt < \infty$$

In tal caso chiameremo integrale di Laplace l'integrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

N.B

Se l'integrale converge per un assegnato $s = s_0$

Cioè $e^{-st} f(t)$ è sommabile su R_+

Allora converge $\forall s \in C$ tale che $Re(s) > Re(s_0)$

Infatti

$|e^{-st}f(t)| = e^{-Re(s)t}|f(t)| \leq \; e^{-Re(s_0)t}|f(t)| = |e^{-Re(s_0)t}f(t)|$

e dunque $e^{-st}f(t))$ è maggiorata in modulo da una funzione sommabile ed è perciò sommabile a sua volta.

Se l'insieme degli $s \; \in C$ per cui

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \, f(t)dt$$

Converge non è vuoto

allora è costituito da un semipiano (destro), quello dei numeri complessi s per i quali si ha

$\sigma = Re(s) > \sigma[f]$

dove $\sigma[f \,]$ è *<u>l'estremo inferiore delle parti reali dei numeri</u>* $s \; \in C$ per cui

$\int_0^{+\infty} e^{-st} \, f(t)dt$ converge

Def. Trasformata di Laplace

Sia $f \, : \, I \; \Longrightarrow C$ (dove $R_+ \; \subseteq \; I$) una *<u>funzione L-trasformabile</u>*

posto $\sigma[f \,] := \; inf\{Re(s) : \; e^{-st} \, f \, (t)\}$ è *<u>sommabile</u>*

per ogni s tale che $Re(s) \; > \; \sigma[f \,]$ chiameremo trasformata di Laplace di f la funzione

$$L[f \,](s) \; = \; F(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} \, f(t)dt$$

(unilatera essendo $t \; > \; 0$).

Diremo inoltre che $\sigma[f \,]$ è *<u>l'ascissa di convergenza della funzione f</u>*.

La trasformata è un operatore funzionale lineare che associa ad una funzione di variabile reale una funzione di variabile complessa. La trasformata di Laplace rientra nella categoria delle trasformate integrali.

Funzione Heaveside

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Funzione delta di Dirac

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ +\infty & t = 0 \end{cases}$$

Proprietà Trasformata di Laplace

1) Linearità
   $L[c_1 f_1 + c_2 f_2](s) = c_1 L[f_1](s) + c_2 L[f_2](s)$
   $\forall s\text{:} \quad Re(s) > \; max\{\sigma[f_1], \sigma[f_2]\}$
2) Limitatezza

3) Derivata della trasformata di Laplace
   $F'(s) = L[-tf(t)](s)$

Prop. (Limitatezza)

Sia f una funzione *L-trasformabile* con ascissa di convergenza $\sigma[f\ ]$

allora per ogni $\sigma_0 > \sigma[f\ ]$ la funzione $F(s) = L[f\ ](s)$ è *limitata* nel semipiano chiuso $Re(s) \geq \sigma_0$

e inoltre

$$\lim_{Re(s)\to+\infty} F(s) = 0$$

L'ultima affermazione significa che se $\{s_n\}$ è una successione di punti per cui $\sigma_0 \leq \sigma_n := Re(s_n) \Longrightarrow +\infty$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} F(s_n) = 0$$

Prop. (derivata della trasformata di Laplace)

Sia f una funzione *L-trasformabile* con ascissa di convergenza $\sigma[f]$

Allora la funzione $F(s) = L[f\ ](s)$ è *olomorfa* nel semipiano $Re(s) > \sigma[f\ ]$.

La funzione $t \to -tf\ (t)$ è *L-trasformabile* con ascissa di convergenza $\sigma[f\ ]$ e abbiamo

$F'(s) = L[-tf\ (t)](s),$

dove con $F'(s)$ si intende la derivata in campo complesso.

In generale si ha $F^{(n)}(s) = L[(-t)^n f\ (t)](s) = (-1)^n L[t^n f\ (t)] \quad Re(s) > \sigma[f\ ]$.
Moltiplicazione per t alla n-esima potenza $L[t^n f\ (t)](s) = (-1)^n F^{(n)}(s)$.

Def. Segnali

La definizione di trasformata coinvolge solo i valori di $f\ (t)$ per $t \geq 0$.

Se $f\ (t)$ è definita su R denotiamo

$$f_+(t) = \begin{cases} f(t) & t \geq 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Cioè $f_+(t) = H(t)f(t)$

Una funzione nulla per $t < 0$ e *L-trasformabile* viene chiamata *segnale*

Proprietà segnale:

1) $L[f(ct)](s) = \frac{1}{c}L[f(t)]\left(\frac{s}{c}\right) \qquad \forall c > 0{:}\, Re(s) > c\sigma[f]$
2) Traslazione nel tempo
   $L[f\ (t - t_0)](s) = e^{-t_0 s}L[f\ (t)](s) \quad \forall t0 > 0 :\ Re(s) > \sigma[f\ ]$
3) Traslazione complessa
   $L[e^{at}f\ (t)](s) = L[f\ (t)](s-a) \qquad \forall a \in C :\ Re(s) > \sigma[f\ ] + Re(a)$

Prop.

Sia f un segnale periodico per $t \geq 0$ di periodo T, cioè $f(t+T) = f(t)\ \forall t \geq 0$.

Se f è sommabile in $[0, T]$.

Allora

$$L[f(t)](s) = \frac{1}{1-e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt \qquad Re(s) > 0$$

Th.

Sia f un *segnale continuo* per $t \geq 0$, *derivabile con derivata prima continua a tratti e Laplace-trasformabile.*

Allora si ha che $\forall s \ \ con \ \ Re(s) > max\{\sigma[f], \sigma[f']\}$

$L[f'](s) = sL[f](s) - f(0)$.

Th.

Se f e g sono *due segnali L-trasformabili* con ascisse di convergenza $\sigma[f]$ e $\sigma[g]$ rispettivamente,

allora $(f * g)$ *è L-trasformabile* nel semipiano $Re(s) > max\{\sigma[f], \sigma[g]\}$, e si ha

$L[f * g](s) = L[f](s) \cdot L[g](s)$.

Th. (Inversione della trasformata di Laplace)

Sia f un *segnale regolare a tratti* e

sia $F(s)$ la sua trasformata con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Per ogni $\alpha > \sigma[f]$ si ha

$$\frac{1}{2\pi i} v.p. \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+\infty} e^{st} F(s)ds = \frac{1}{2}\left(f(t^-) + f(t^+)\right)$$

Dove $f(t^-)$ ed $f(t^+)$ sono i limiti sinistro e destro in t

Qui l'integrale a valor principale v.p. è definito come

$$v.p. \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+\infty} = \lim_{R\to+\infty} \int_{\alpha-iR}^{\alpha+iR}$$

Corollario

In particolare,

$\frac{1}{2}\left(f(t^-) + f(t^+)\right) = f(t)$ nei punti t in cui $f(t)$ è continua. Quindi

$$\frac{1}{2\pi i} v.p. \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+\infty} e^{st} F(s)ds = f(t)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} v.p. \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st} F(s)ds$$

Th.

Sia $s \in C \to F(s)$ una funzione analitica nel semipiano $\sigma = Re(s) > \sigma_0$ e tale che si abbia

$$|F(s)| \simeq \frac{1}{|s|^k} \qquad |s| \to \infty$$

con $k > 1$

cioè

$$\lim_{|s|\to\infty} |F(s)|\,|s|^k = c > 0$$

Allora per ogni $\alpha > \sigma_0$ la formula

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st}F(s)ds$$

definisce un segnale continuo su R, indipendente da α, avente la F come trasformata.

N.B

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st}F(s)ds = \sum_{j=1}^{n} res(e^{st}F(s), s_j)$$

dove gli s_j sono i punti singolari della funzione $e^{st}F(s)$