Analisi Matematica II

Analisi complessa

Virginia De Cicco
Sapienza Univ. di Roma

Serie di Laurent

Introduciamo la nozione di corona circolare. Si definisce *corona circolare* di centro z_0 un insieme del tipo

$$C_{R_1 R_2} = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq R_1 < |z - z_0| < R_2 \leq +\infty\}.$$

Esempi di insiemi di questo tipo sono gli intorni forati di raggio R_2

$$B^*_{R_2}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R_2 < +\infty\},$$

dove $R_1 = 0$, e l'insieme $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dove $R_1 = 0$ e $R_2 = \infty$.

Serie bilatera

È ovvio che se $f : A \to \mathbb{C}$ ha una singolarità non eliminabile (cioè polo o singolarità essenziale) non è esprimibile come serie di potenze in un intorno di z_0 in quanto la somma di una serie di potenze è analitica.

In questa lezione vedremo che invece f si scriverà in termini di una serie cosiddetta bilatera.

Definizione di serie bilatera

Una *serie bilatera* è un'espressione del tipo

$$\sum_{-\infty<n<+\infty} c_n(z-z_0)^n =$$

$$= \dots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots + c_n(z-z_0)^n + \dots,$$

dove c_n sono numeri complessi.

Serie bilatera

Che senso ha la convergenza di tale serie?

Per convergenza della serie precedente si intende che convergono le due seguenti serie

$$\sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$$

$$\sum_{n<0} c_n (z - z_0)^n = \sum_{k>0} c_{-k} (z - z_0)^{-k} = \sum_{k>0} c_{-k} \frac{1}{(z - z_0)^k}$$

dove $k = -n$
e la sua somma $S(z)$ è la somma delle due funzioni $S_1(z)$ e $S_2(z)$ che rappresentano rispettivamente la somma delle due serie precedenti.

La prima serie si dice *parte singolare* (o parte caratteristica) della serie.
La seconda, che è una usuale serie di potenze, si dice *parte regolare* ed ha un suo raggio di convergenza, che chiamiamo R_2.

Serie bilatera

Facendo il cambiamento di variabili $w := \frac{1}{z-z_0}$ la prima serie diventa una serie di potenze in w,

$$\sum_{-\infty<n<0} c_n(z-z_0)^n = \sum_{k>0} c_{-k}(z-z_0)^{-k} = \sum_{k>0} c_{-k} w^k,$$

che ammette un suo raggio di convergenza, che chiamiamo R_1^*.
Supponiamo che $R_1^* > 0$. Quindi la serie

$$\sum_{k>0} c_{-k} w^k,$$

converge se

$$|w| = \frac{1}{|z-z_0|} < R_1^*, \qquad |z-z_0| > \frac{1}{R_1^*}.$$

Ponendo $R_1 := \frac{1}{R_1^*}$, si ha

$$|z-z_0| > R_1.$$

Serie bilatera

Dunque la serie converge all'esterno del cerchio di raggio R_1 e la somma della serie è analitica su tale insieme.

Ne segue che, se $R_1 < R_2$, nella corona circolare $C_{R_1 R_2}$ convergono entrambe le serie ed hanno come somma una funzione analitica. Abbiamo così ottenuto che:

Teorema
La somma di una serie bilatera è una funzione analitica in una corona circolare (se $R_1 < R_2$).

Vale anche il viceversa ed è il seguente teorema (che non dimostriamo).

Serie di Laurent

Teorema di Laurent

Sia f una funzione analitica su una corona circolare $C_{R_1 R_2}$ di centro z_0.

Allora f è la somma di una serie bilatera,

i.e. vale il seguente *sviluppo di Laurent*

$$f(z) = \sum_{-\infty<n<\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

dove

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

e γ è una circonferenza di centro z_0 e raggio r con $R_1 < r < R_2$.

Serie di Laurent

Osserviamo che, se f è analitica in tutta la palla $B_{R_2}(z_0)$ oppure ha una singolarità eliminabile in z_0, allora lo sviluppo di Laurent si riduce a quello di Taylor (i.e. i coefficienti della parte singolare sono tutti nulli). Infatti se $R_1 = 0$ ed f è analitica nella palla $B_{R_2}(z_0)$, allora

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = 0 \qquad \forall n \leq -1,$$

poiché $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ è analitica per $n \leq -1$. Inoltre i coefficienti della parte regolare c_n, $n \geq 0$, coincidono con quelli di Taylor poiché si ha

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

e dunque

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad \forall n \geq 0\,.$$

Esempi di sviluppi di Laurent di funzioni fratte

Consideriamo ora alcuni esempi di funzioni razionali fratte e calcoliamo gli sviluppi di Laurent.

Esempio 0

BANALE, MA NON TROPPO
La funzione

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + z^5$$

è già sviluppata in serie di Laurent in $z_0 = 0$.
La funzione

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2} + (z-2)^5$$

è già sviluppata in serie di Laurent in $z_0 = 2$.

Esempi di sviluppi di Laurent di funzioni fratte

Esempio 1

Sia $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ e $z_0 = 0$. La decomposizione in fratti semplici dà

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2(1-\frac{z}{2})}.$$

Quindi si hanno le due serie geometriche:

$$(i) \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n, \qquad \text{per } |z| < 1,$$

$$(ii) \quad -\frac{1}{2(1-\frac{z}{2})} = -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{2^{n+1}}, \qquad \text{per } |z| < 2.$$

Serie di Laurent

Dunque nel cerchio $|z| < 1$, valendo entrambe, si ha

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n, \qquad \text{per } |z| < 1.$$

Invece nella corona circolare $1 < |z| < 2$ vale solo (ii). Al posto di (i), scriviamo

$$(iii) \quad -\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z\left(1 - \frac{1}{z}\right)} = -\frac{1}{z} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{z^n} = -\sum_{n \geq 0} \frac{1}{z^{n+1}}, \quad \text{per } \frac{1}{|z|} < 1, i.e. |z| > 1.$$

Quindi nella corona $1 < |z| < 2$ si ha lo sviluppo di Laurent

$$f(z) = -\sum_{n \geq 0} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{2^{n+1}}, \qquad \text{per } 1 < |z| < 2.$$

Nella corona esterna $|z| > 2$ vale (iii) ed al posto di (ii) scriviamo

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z(1-\frac{2}{z})} = \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{z^n} = \sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{z^{n+1}}, \qquad \text{per} \quad \frac{2}{|z|} < 1, \quad i.e. \quad |z| > 2.$$

Quindi nella corona esterna $|z| > 2$ si ha lo sviluppo di Laurent

$$f(z) = -\sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n\geq 0}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}, \qquad \text{per } |z| > 2.$$

Osserviamo che in quest'ultimo caso non c'è parte regolare.

Esempio 2 Per la stessa funzione f consideriamo adesso lo sviluppo di Laurent in $z_0 = 1$. Si ha che

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-1-1}$$

e se $|z-1| < 1$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-1-1} = -\sum_{n\geq 0}(z-1)^n,$$

e quindi se $0 < |z-1| < 1$

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} - \sum_{n\geq 0}(z-1)^n,$$

mentre se $|z-1| > 1$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-1}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(z-1)^n} = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}$$

e quindi

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} + \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}.$$

Singolarità e sviluppi di Laurent

Vediamo ora qual è il legame tra la natura di un punto singolare isolato z_0 di f ed il suo sviluppo di Laurent nell'intorno forato $B_r^*(z_0)$ (con r strettamente minore della distanza di z_0 dagli altri punti singolari).

Innanzitutto osserviamo che per $n = -1$ si ha

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz = res(f, z_0),$$

dove c_{-1} è il coefficiente (-1)-esimo (quindi di $(z - z_0)^{-1} = \frac{1}{z - z_0}$) dello sviluppo di Laurent.

Proposizione

Sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione analitica, sia $z_0 \in \mathbb{C}$ una singolarità isolata e sia

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$$

lo sviluppo di Laurent di f in un intorno forato di z_0. Allora

(i) z_0 è eliminabile se e solo se la parte singolare è nulla, cioè $c_{-n} = 0$ per ogni $n > 0$, e quindi

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$$

che è lo sviluppo di Taylor di f.

Singolarità e sviluppi di Laurent

(ii) z_0 è un polo di ordine n_0 se e solo $c_{-n_0} \neq 0$ e $c_{-n} = 0$ per ogni $n > n_0$, e quindi

$$f(z) = \sum_{n \geq -n_0} c_n (z - z_0)^n.$$

(iii) z_0 è una singolarità essenziale se e solo $c_{-n} \neq 0$ per infiniti indici $n > 0$.

Esempi

1) La funzione

$$f(z) = \frac{senz}{z}$$

presenta una singolarità eliminabile in $z_0 = 0$.

Quindi lo sviluppo di Laurent è

$$\frac{senz}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$$

che coincide con quello di Taylor (cioè manca la parte singolare). Si osservi inoltre che

$$res(f, 0) = c_{-1} = 0.$$

Esempi

2) La funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^m},$$

$m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$, ha in $z_0 = 0$ un polo di ordine m

e si ha che $res(f, 0) = c_{-1}$ è 0 se $m \neq 1$ ed è 1 se $m = 1$.

Esempi

3) La funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^{24}} + \frac{3}{z^{17}} + 1 + z^4$$

ha in $z_0 = 0$ un polo di ordine 24

e si ha che $res(f, 0) = c_{-1} = 0$.

Inoltre $1 + z^4$ è la parte regolare, mentre $\frac{1}{z^{24}} + \frac{3}{z^{17}}$ è la parte singolare.

Esempi

4) La funzione $f(z) = e^{-\frac{1}{2z^4}}$ ha in $z_0 = 0$ il seguente sviluppo di Laurent

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2z^4} \right)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^n z^{4n}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{z^4} + \frac{1}{2} \frac{1}{4z^8} - \ldots$$

Quindi ha parte regolare uguale a 1, mentre $-\frac{1}{2}\frac{1}{z^4} + \frac{1}{2}\frac{1}{4z^8} - \ldots$ è la parte singolare, e

$$res(f, 0) = c_{-1} = 0.$$

Si osservi che la parte singolare consta di infiniti termini: $z_0 = 0$ è una singolarità essenziale.

Esempi

5) La funzione

$$f(z) = sen\frac{1}{z}$$

ha in $z_0 = 0$ il seguente sviluppo di Laurent

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} - \dots$$

Quindi non ha parte regolare, mentre $\frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} - \dots$ è la parte singolare, e

$$res(f, 0) = c_{-1} = 1.$$

Si osservi anche qui che la parte singolare consta di infiniti termini: $z_0 = 0$ è una singolarità essenziale.

Esempi

Riepilogo

Come calcolare il residuo?

Se si conosce lo sviluppo di Laurent nel punto z_0 in un intorno forato $B_r^*(z_0)$, allora basta prendere il coefficiente c_{-1}.

Se il punto z_0 è una singolarità eliminabile, allora $res(f, 0) = c_{-1} = 0$.

Se il punto z_0 è un polo, allora il residuo si può calcolare con la formula che abbiamo visto, anche senza conoscere lo sviluppo di Laurent nel punto.

Appello del 22 febbraio 2011

Domanda a risposta multipla
La serie

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{4n-1}}$$

è lo sviluppo di Laurent in $z_0 = 0$ di

$$a)\ z^2 \sin \frac{1}{z^3}$$

$$b)\ z\ \sin \frac{1}{z^3}$$

$$c)\ z^3 \sin \frac{1}{z}$$

$$d)\ z^3 \sin \frac{1}{z^2}$$

.

Soluzione: d)

Appello del 21 settembre 2011

Si scriva lo sviluppo di Laurent della funzione

$$f(z) = (z+4)^2 e^{\frac{1}{z+4}} ,$$

intorno al punto $z = -4$, specificando in quale regione vale e di che tipo di singolarità si tratta. Si calcoli infine il residuo in tale punto.

Soluzione:
Lo sviluppo di Laurent della funzione

$$f(z) = (z+4)^2 e^{\frac{1}{z+4}} ,$$

intorno al punto $z = -4$, è

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z+4)^{n-2}}$$

nella regione $|z+4| > 0$, o equivalentemente $\mathbb{C} \setminus \{-4\}$. Il punto $z = -4$ è una singolarità essenziale e il residuo in tale punto è

$$res(f(z), -4) = c_{-1} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6} .$$

Appello del 21 settembre 2011

Si calcoli l'integrale

$$\int_\gamma \frac{\sin(z^2)}{z^3}\,dz\,,$$

dove γ è la circonferenza di centro 1 e raggio 2.

Soluzione:
La funzione $f(z) = \frac{\sin(z^2)}{z^3}$ ha una singolarità di tipo polo in $z = 0$ ed ha il seguente sviluppo di Laurent

$$f(z) = \frac{\sin(z^2)}{z^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{4n-1}\,.$$

Quindi si ha che $res(f(z), 0) = 1$ e, dal momento che la circonferenza γ di centro 1 e raggio 2 contiene l'origine, ne segue che

$$\int_\gamma \frac{\sin(z^2)}{z^3}\,dz = 2\pi i\ res(f(z), 0) = 2\pi i\,.$$

Appello del 17 settembre 2012

Data la funzione

$$f(z) = \frac{1}{1 - z^2}$$

si calcolino i seguenti residui

$$res(f, 0) \qquad res(f, 1)\ .$$

Soluzione:
Si ha che $res(f, 0) = 0$, essendo olomorfa in $z = 0$ e $res(f, 1) = -\frac{1}{2}$, in quanto essa ha il seguente sviluppo di Laurent

$$f(z) = \frac{1}{1 - z^2} = \frac{-1}{z-1}\frac{1}{z+1} = \frac{-1}{z-1}\ \frac{1}{2 + (z-1)} = \frac{-1}{z-1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{1 + (\frac{z-1}{2})} =$$

$$\frac{-1}{z-1}\ \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1}\,.$$

Per $n = 0$ si ha $c_{-1} = -\frac{1}{2}$.

Appello del 20 Settembre 2013

Domanda a risposta multipla
Lo sviluppo di Laurent in $z_0 = -i$ della funzione

$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{z+i}\right) + \sin(z+i)$$

$$a) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+1)!}\left(\frac{1}{(z+i)^{2k+1}} + (z+i)^{2k+1}\right)$$

$$b) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{(2k)!}\left(\frac{1}{(z+i)^{2k}} + (z+i)^{2k}\right)$$

$$c) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{(2k+1)!}\left(\frac{1}{(z+i)^{2k+1}} + (z+i)^{2k+1}\right)$$

$$d) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{2k+1}\left(\frac{1}{(z+i)^{2k+1}} + (z+i)^{2k+1}\right).$$

Soluzione: c)

Il teorema dei residui

Sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione analitica nell'aperto connesso $A \subseteq \mathbb{C}$ e sia γ un circuito in A.
Siano $z_1, \ldots, z_r$ dei punti singolari isolati di f appartenenti all'aperto D interno a γ.
Allora

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{r} res(f, z_k).$$

Il teorema dei residui

Dimostrazione

Siano $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ delle circonferenze di centro $z_1, \ldots, z_r$ e raggi opportunamente piccoli in modo che ognuna sia interna a D, non si intersechino fra di loro e ognuna non contenga altre singolarità tranne il suo centro.
Consideriamo la curva

$$\tilde{\gamma} = \gamma \cup \gamma_1^- \cup \cdots \cup \gamma_r^-$$

che è l'unione di curve non connesse tra di loro.
Dal teorema integrale di Cauchy (che vale anche per l'unione di curve) si ha

$$0 = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \sum_{k=1}^{r} \int_{\gamma_k^-} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz - \sum_{k=1}^{r} \int_{\gamma_k} f(z)dz,$$

e quindi

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{r} \int_{\gamma_k} f(z)dz.$$

D'altra parte, per ogni $k : 1, \ldots, r$ si ha

$$\int_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi i \ res(f, z_k).$$

Appello del 24 luglio 2012

(i) Si dia la definizione di residuo.

(ii) Si enunci il Teorema dei residui.

(iii) Si dimostri tale Teorema.

(iv) Si calcolino i seguenti residui

$$res(e^{z-1},0)\,,\ \ res(e^{z-1},1)\,,\ \ res(e^{\frac{1}{z-1}},1)\,,\ \ res(e^{\frac{1}{(z-1)^2}},1)\,.$$

Appello del 24 luglio 2012

Soluzione:(iv) Si ha che $res(e^{z-1}, 0) = 0$, essendo

$$e^{z-1} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n ;$$

$res(e^{z-1}, 1) = 0$, essendo

$$e^{z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (z-1)^n ;$$

$res(e^{\frac{1}{z-1}}, 1) = 1$, essendo

$$e^{\frac{1}{z-1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z-1} \right)^n ;$$

$res(e^{\frac{1}{(z-1)^2}}, 1) = 0$, essendo

$$e^{\frac{1}{(z-1)^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z-1} \right)^{2n} .$$

Da Casalvieri-De Cicco

Si calcoli

$$\int_\gamma \frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)}dz \quad \gamma(t) = 3e^{it} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Soluzione:

La curva γ è la circonferenza di centro l'origine e di raggio 3. La funzione integranda è il rapporto di due funzioni intere e quindi le sue singolarità coincidono con i numeri complessi che ne annullano il denominatore:

$$(\sin z)^3(z-1) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi \vee z = 1 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Le uniche singolarità circuitate da γ sono $z_0 = 0$ e $z_1 = 1$. Quest'ultima è un polo semplice per $f(z)$.

Da Casalvieri-De Cicco

Per quanto riguarda la prima, si osservi che

$$\lim_{z\to 0} \frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)} z = \lim_{z\to 0} \frac{z^3}{-z^3} = -1$$

e quindi anche $z_0 = 0$ è un polo semplice. Pertanto per il teorema dei residui si ha

$$\int_\gamma \frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)} dz = 2\pi i \left[res\left(\frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)}, 0 \right) + res\left(\frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)}, 1 \right) \right]$$

e poiché

$$res\left(\frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)}, 0 \right) = \lim_{z\to 0} \frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)} z = -1$$

$$res\left(\frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)}, 1 \right) = \lim_{z\to 1} \frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)} (z-1) = \frac{1}{(\sin 1)^3}$$

allora

$$\int_\gamma \frac{z^2}{(\sin z)^3(z-1)} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{(\sin 1)^3} - 1 \right).$$