ESAME 22 FEBBRAIO 2019

ESERCIZIO 1

1) $\text{Arg}\,\frac{\bar{z}}{|\bar{z}|} = \text{Arg}\,\frac{\rho(\cos\vartheta - i\,\text{sen}\,\vartheta)}{\rho} = \text{Arg}(\cos\vartheta - i\,\text{sen}\,\vartheta) =$

$= \text{Arg}\,\bar{z}$

$\boxed{\text{RISPOSTA } c}$

2) Si chiede il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^{2n}} x^n$$

Applicando il criterio di Cauchy-Hadamard

$$l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(2n)^{2n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4n^2} = 0$$

$\rho = +\infty$

$\boxed{\text{RISPOSTA } d}$

3

DA RISOLVERE :(

4) RISPOSTA b

5) DA RISOLVERE :(

ESERCIZIO 2

i) Data una funzione $f(t)$, regolare a tratti e periodica di periodo 2π, la sua serie di Fourier è

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{K=1}^{\infty} a_K \cos Kx + b_K \operatorname{sen} Kx$$

Inoltre la sua somma vale $f(t)$ nei suoi punti di continuità.

Essa converge uniformemente in ogni sottointervallo $[a,b]$ in cui essa è continua.

ii) Data $f(t) = \log(1+5t)$, $t \in (0, 2\pi]$

estendendola per periodicità su tutto $\mathbb{R}$ si ha che

$S(3\pi) = f(3\pi) = f(\pi)$, quindi

$$S(3\pi) = f(3\pi) = f(\pi) = \log(1+5\pi)$$

ESERCIZIO 3

i) La serie di Laurent associata alla funzione è

$$f(z) = \sum_{-\infty<n<\infty} c_n (z-z_0)^n$$

dove

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

e γ è la circonferenza di raggio r compreso tra i raggi della corona circolare e di centro z_0.

ii) Utilizzando lo sviluppo del seno si ha

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{iz^3}\right)}{z^2} = \sum_{-\infty<n<\infty} (-1)^n \frac{1}{(iz^3)^{2n+1}(2n+1)!\, z^2}$$

con parte singolare

CONSIGLI SU COME RISOLVERE? :)

ESERCIZIO 4

i) Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso e sia $f: A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora per ogni γ circuito regolare a tratti, contenuto in A e tale che γ è la frontiera di un aperto D interamente contenuto in A, si ha che

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

ii) Se scriviamo la curva γ e la funzione f come

$$\gamma(t) = x(t) + i y(t), \quad f(z) = f(x,y) = u(x,y) + i v(x,y)$$

allora

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b \left[u(x(t),y(t)) + i v(x(t),y(t))\right]\left[x'(t) + i y'(t)\right] dt =$$

$$= \int_a^b \left[(u x' - v y') + i(v x' + u y')\right] dt =$$

$$= \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i \int_\gamma v\,dx + u\,dy$$

dove $u\,dx - v\,dy$ e $v\,dx + u\,dy$ sono delle forme differenziali a coefficienti reali in $\mathbb{R}^2$. Dal teorema della divergenza segue che

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma v\,dx + u\,dy =$$

$$= -\iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy + i\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$$

poiché dall'olomorfia di f e dalle condizioni di C-R si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad e \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

iii) Data

$$I_n := \int_{\gamma_n} \frac{\operatorname{sen}(z-\pi)}{(z-\pi)^2}\,dz \qquad \text{con} \quad \gamma_n := A = \{z : |z-n| \le 1\}$$

$n \in \mathbb{Z}$

la funzione da integrare ha un polo doppio $z=\pi$, mentre γ_n è una circonferenza di centro n e raggio 1. Per cui l'integrale vale 0 per ogni n diverso da 3 e da 4.

ESERCIZIO 5

i) Il logaritmo in campo complesso é cosí definito nella sua parte principale

$$\mathrm{Log}\, z := \log|z| + i\,\mathrm{Arg}(z) = \log \rho + i\theta$$

ii) Data

$f(z) = \mathrm{Log}(iz^2)$ é definita in $\mathbb{C}^*$, dovendo essere

$iz^2 \neq 0$

É invece olomorfa, ponendó $z = x+iy$, si ottiene

$iz^2 = -2y + i(x-y)(x+y)$, e l'aperto di olomorfia é

$$\arctan\left(\frac{(x-y)(x+y)}{-2y}\right) \neq \pi$$

NON SO SE É GIUSTO