ESAME 19 SETTEMBRE 2019

ESERCIZIO 1

I) Data la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n$$, la quale è una serie di potenze,

si chiede dove converge (uniformemente, puntualmente o totalmente)

Quindi cerchiamo il raggio di convergenza con il criterio di Cauchy-Hadamard

$$l = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{2^n} = 2$$

$$\rho = \frac{1}{l} = \frac{1}{2}$$

Quindi per $|x| < \frac{1}{2}$ la serie data converge totalmente, in $x = \frac{1}{2}$ diverge e per $x = -\frac{1}{2}$ è una serie a segni alterni, per $|x| > \frac{1}{2}$ diverge.

Quindi la risposta è a), converge uniformemente per $|x| \leq \frac{1}{3}$

II) Si chiede dove converge puntualmente

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{5nx}{2n+x}$$

ed il suo insieme di convergenza è $\{0\}$

RISPOSTA a

III) Si chiede quale funzione sia olomorfa nel suo campo di esistenza

DA RISOLVERE ☹

IV) Si chiede il tipo di singolarità in $z=0$ di $f(z)$

$$f(z)=\frac{(e^z-1)\,\operatorname{sen} z}{z^3-z^2}=\frac{(e^z-1)\,\operatorname{sen} z}{z^2(z-1)}=\frac{\operatorname{sen} z}{z}\cdot\frac{e^z-1}{z}\cdot\frac{1}{z-1}$$

per il primo termine $\frac{\operatorname{sen} z}{z}$, si ha che $z=0$ è una singolarità eliminabile, per il secondo termine $\frac{e^z-1}{z}$ anche $z=0$ è una singolarità eliminabile

RISPOSTA d

V) Si chiede quale sia la parte reale di

$\operatorname{sen} i$, sappiamo che

$$\operatorname{sen} z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$$, quindi

$$\operatorname{sen} i=\frac{e^{-1}-e}{2}=\frac{\frac{1}{e}-e}{2}=\frac{\frac{1-e^2}{e}}{2}=\frac{1}{2}\,\frac{1-e^2}{e}$$

DA RISOLVERE :(

ESERCIZIO 2

i) Si definisce integrale curvilineo di una funzione $f: A \to \mathbb{C}$ lungo una curva $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ la cui cui traccia $\gamma([a,b]) \subseteq A$ nel seguente modo

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

ii) Si chiede di calcolare

$$\int_\gamma e^z\,dz \quad \text{lungo} \quad \gamma(t) = 1 + e^{it} \quad \text{con } t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma'(t) = ie^{it}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{1+e^{it}} \cdot ie^{it}\,dt =$$

$$= \left[e^{1+e^{it}}\right]_0^{2\pi} = e^{1+e^{2\pi i}} - e^2$$

ESERCIZIO 3

i) Una funzione 2π-periodica e pari ha il seguente sviluppo in serie di Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{K=1}^{\infty} a_K \cos Kx + b_K \operatorname{sen} Kx$$

ma essendo pari i coefficienti sono

$$a_K = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos Kx \, dx \qquad K = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_K = 0$$

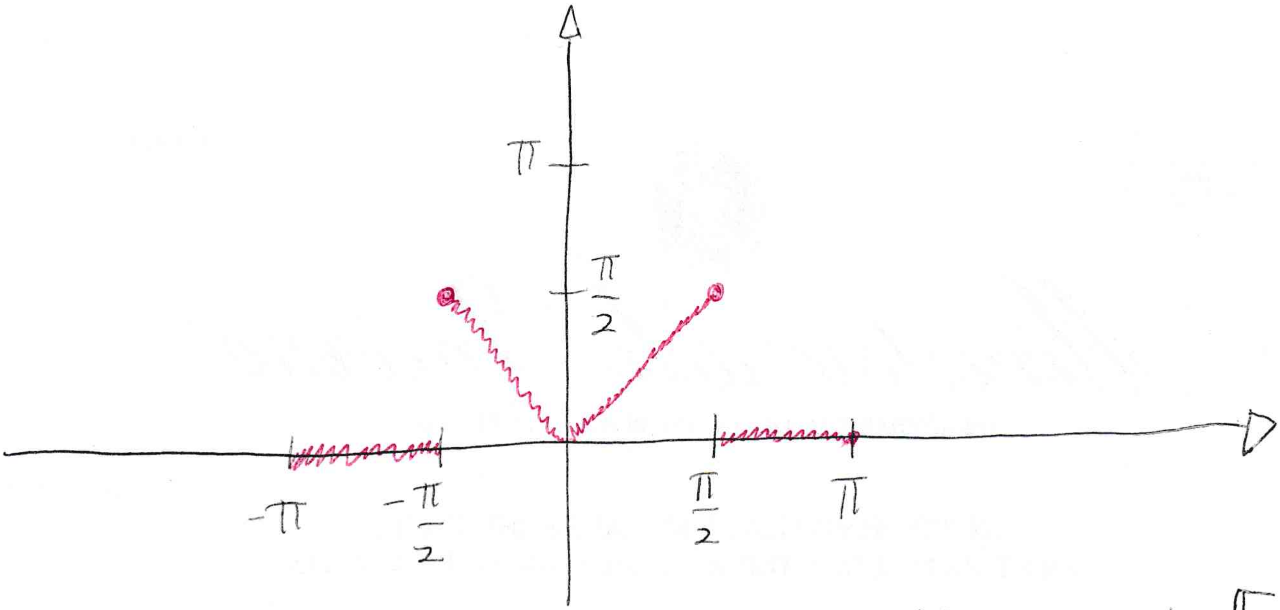
e lo sviluppo diventa

$$f(x) = \sum_{K=0}^{\infty} a_K \cos Kx$$

ii) La funzione definita per $]-\pi, \pi]$ e prolungata per periodicità su tutto $\mathbb{R}$ é

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

il cui grafico é



in $]-\pi, \pi]$, i cui coefficienti della serie di Fourier sono

$$a_K = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos Kx \, dx = \frac{2(\pi-1)}{\pi} \operatorname{sen} K\pi$$

ESERCIZIO 4

i) Sia $f: A \to \mathbb{C}$ differenziabile rispetto a (x, y). Allora $f(z)$ è differenziabile (come funzione di variabile complessa) se e solo se valgono le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

ii) Si trovi una funzione olomorfa in $\mathbb{C}$ tale che

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \quad , \quad z = x + iy$$

$$u(x,y) = x^2 y - \frac{1}{3} y^3$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - y^2 = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Da cui otteniamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2xy \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} = y^2 - x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial v = 2xy \, \partial y \\[2ex] \partial v = (y^2 - x^2) \partial x \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = \int 2xy \, dy = \\ v = \int (y^2 - x^2) \, dx \end{cases}$$

DA RISOLVERE

ESERCIZIO 5

i) Sia f un segnale regolare a tratti e sia $F(s)$ la sua trasformata con ascissa di convergenza $\sigma[f]$.

Per ogni $\alpha > \sigma[f]$ si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \text{ v.p.} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{st} F(s)\, ds = \frac{1}{2}\left(f(t^-) + f(t^+)\right)$$

ii) Data

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2-5} = \frac{s}{s^2-5} + \frac{2}{s^2-5} = \frac{s}{s^2-5} + \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}}{s^2-5}$$

da cui riconosciamo essere la trasformata di

$$f(t) = \cosh \sqrt{5}t + \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{senh} \sqrt{5}t = \cosh \sqrt{5}t + \frac{2\sqrt{5}}{5} \operatorname{senh} \sqrt{5}t$$