ESAME 17 FEBBRAIO 2020

ESERCIZIO 1

I) Si chiede di trovare l'aperto di olomorfia di

$$f(z) = \log(\log z)$$

il quale è dove log può essere derivabile, ossia in $\mathbb{C}^*$ tranne il semiasse reale negativo, quindi in $\mathbb{C}^{**}$. (RISPOSTA c)

II) Si chiede la convergenza uniforme di

$$f_n(x) = \log\left(\frac{x^2}{n} + 1\right)$$

non risolto :(

III) $\cos(\log i)$

$$\log z = \log \rho + i\vartheta$$

$$\log i = \log 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$\cos i\frac{\pi}{2} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}+e^{\frac{\pi}{2}}}{2} = \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

RISPOSTA b

IV) Si chiede com'è il dominio della funzione

$$f(z) = \log(|z-1|)$$

non risolto ï

V) Rappresentazione cartesiana di

$$z = 2e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

in forma esponenziale un numero complesso può essere così scritto

$$z = \rho e^{i\theta}$$

mentre in coordinate polari

$$z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

quindi il nostro numero diventa

$$z = 2e^{-\frac{\pi}{4}i} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{4} - i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

RISPOSTA c

ESERCIZIO 2

i) L'espressione della serie di Fourier di una funzione 2π-periodica è

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{K=1}^{\infty} a_K \cos Kx + b_K \operatorname{sen} Kx$$

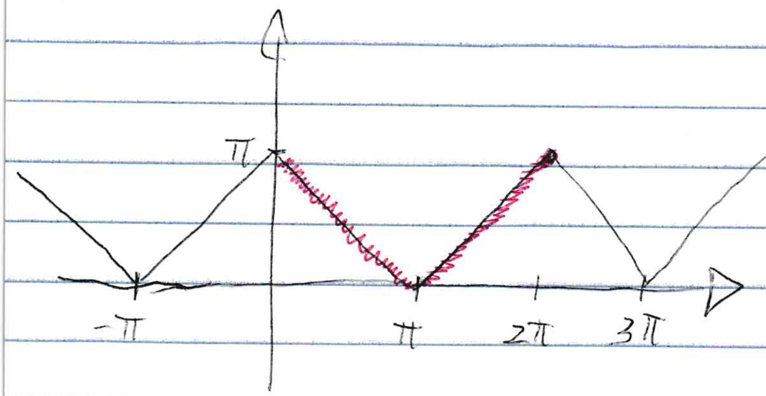
se la funzione è anche pari, ricordando che il coseno è pari ed il seno è dispari, l'espressione della relativa serie di Fourier diviene

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx + \sum_{K=1}^{\infty} a_K \cos Kx$$

con

$$a_K = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos Kx \, dx$$

ii) La funzione data è la seguente $f(x) = |x-\pi|$ $x \in (0, 2\pi]$ prolungata per periodicità su tutto $\mathbb{R}$



la cui parte in rosso è quella principale, da 0 a 2π, da cui si vede che la funzione data è pari

Per cui ci andiamo a calcolare i coefficienti pari

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |x-\pi|\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2} - \pi x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - \pi^2\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2 - 2\pi^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi^2}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos Kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x-\pi|\cos Kx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[|x-\pi|\,\mathrm{sen}\,Kx - \int_0^{\pi} \frac{|x-\pi|}{x-\pi}\,\mathrm{sen}\,Kx\,dx\right]_0^{\pi} =$$

finire di risolvere l'integrale :)