ESAME 24 LUGLIO 2019

ESERCIZIO 1

I) Si chiede l'antitrasformata di

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$$, secondo Laplace

Dalle tavole si vede subito che

$f(t) = t^n e^{at}$ allora $F(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ quindi

~~[illegible]~~ l'antitrasformata cercata è

$$f(t) = t e^t$$

$$\boxed{\text{RISPOSTA a}}$$

II) Si chiede il residuo di $f(z) = \frac{3}{iz} + \cos\left(\frac{1}{z}\right)$ in $z=0$

DA RISOLVERE :(

III) Si chiede l'aperto di olomorfia di $f(z) = z^{2i}$
tale funzione è definita come

$z^{2i} = e^{2i \log z}$, ed essendo il logaritmo complesso olomorfo in $\mathbb{C}^{**}$, anche la funzione data è olomorfa in $\mathbb{C}^{**}$ quindi l'aperto di olomorfia è $\mathbb{C}^{**}$

RISPOSTA a

IV) Si chiede a cosa sia uguale $(-\pi)^{\pi}$

si ha

$$(-\pi)^{\pi} = e^{\pi \log(-\pi)} = e^{\pi(\log|-\pi| + i \arg(-\pi))} =$$

$$= e^{\pi(\log|\pi| + i\pi)}$$

DA RISOLVERE ☹

V) Si chiede cosa ci sia in $z_0 = 2\pi i$ per la funzione $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(iz)}{(z - 2\pi i)^2}$, e si vede subito esserci un polo doppio

$\boxed{\text{RISPOSTA c}}$

ESERCIZIO 2

i) Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue definite in un intervallo $I = [a, b]$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$ tale che $f_n \to f$ uniformemente in I. Allora vale la seguente formula

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

ii) Essendo f limite uniforme di funzioni continue, allora essa è continua in $[a, b]$ e quindi integrabile. Per avere la tesi basta mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \nu_\varepsilon$ si abbia

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

D'altra parte, poiché $f_n \to f$ uniformemente, per ogni $\varepsilon' > 0$ esiste $\nu_{\varepsilon'} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \nu_{\varepsilon'}$ si ha

$$g_n = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon'$$

Quindi, fissato $\varepsilon > 0$, se si sceglie $\varepsilon' < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ si ottiene per ogni $n \geq \nu_{\varepsilon'}$

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq$$

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|(b-a) < \varepsilon'(b-a) < \varepsilon$$

iii) Si calcoli

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{nx^2+1}{n^2}\right)dx$$

la successione $\operatorname{sen}\left(\dfrac{nx^2+1}{n^2}\right)$ tende uniformemente a zero in $[0,1]$, in quanto $g_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| =$ $= f_n(1) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{n+1}{n^2}\right)$ che per $n \to +\infty$ tende a zero.

Quindi per il teorema sopra enunciato e dimostrato si ha che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{nx^2+1}{n^2}\right)dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

ESERCIZIO 3

i) Data

$S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$, somma di una serie convergente definita in $B_r(z_0)$, allora necessariamente si ha che

$$a_n = \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!}$$ e dunque

$$S(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \qquad |z-z_0|<R$$

cioè la serie di potenze coincide con la serie di Taylor associata alla sua funzione somma $S(z)$.

ii) Data

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (z+2)^{2n-1} \qquad z \in \mathbb{C}$$

poniamo $\tilde{z} = z+2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tilde{z}^{2n} \frac{1}{\tilde{z}} = \frac{1}{\tilde{z}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1) \tilde{z}^{2n}$$

che riconosciamo essere lo sviluppo di $\left(\frac{1}{1+\tilde{z}^2}\right)\frac{1}{\tilde{z}}$

per cui si ha

$$\frac{1}{\tilde{z}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tilde{z}^{2n} = \frac{1}{\tilde{z}}\,\frac{1}{1+\tilde{z}^2} = \frac{1}{(z+2)}\,\frac{1}{1+(z+2)^2}$$

per $|z+2|<1$, il quale è anche l'insieme di convergenza

ESERCIZIO 4

i) Sia f una funzione definita e continua in un settore angolare $\vartheta_1 \leq Arg(z) \leq \vartheta_2$ (per $|z|$ abbastanza grande) e se $\lim_{|z|\to+\infty} z f(z) = 0$, allora

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$$

dove γ_R è l'intersezione della circonferenza di raggio R e centro l'origine con il settore considerato

ii) Dato

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2-2x+2}\,dx$$

ci si porta, con una naturale estensione nel campo complesso, e quindi si deve risolvere

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{z^2-2z+2}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-1-i)(z-1+i)}\,dz$$

Inoltre sappiamo che

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{K=1}^{r} \text{res}(f, z_K)$$

ed in questo caso ci sono 2 poli in $1-i$ e $1+i$ quindi si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx = 2\pi i \sum_{K=1}^{1} (f, z_K) = 2\pi i \left[\frac{1}{2+2i-2}\right]$$

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{2i}\right] = \pi$$

, in cui si è considerato solo il polo $1+i$, stando nel semipiano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$

ESERCIZIO 5

i) Sia f sviluppabile in serie trigonometrica, ossia

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{K=1}^{\infty} a_K \cos Kx + b_K \operatorname{sen} Kx$$

sia inoltre f, 2π-periodica e sommabile in $[-\pi; \pi]$, allora lo sviluppo sopra è la sua serie di Fourier.

I coefficienti a_K, b_K sono così definiti:

$$a_K = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos Kx\,dx \qquad K = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_K = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} Kx\,dx \qquad K = 1, 2, \dots$$

ii) Teorema convergenza puntuale

Sia f una funzione 2π-periodica e regolare a tratti in $\mathbb{R}$. Allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ la serie di Fourier di f converge a

$$\frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right]$$

Teorema convergenza totale (e quindi uniforme)

Sia f una funzione 2π-periodica, continua e regolare a tratti in $\mathbb{R}$. Allora la serie di Fourier di f converge totalmente ed anche uniformemente alla funzione f.

iii) Data

$$f(x) = 2\,\text{sen}(9x) - 3\cos(5x)$$

i suoi coefficienti di Fourier sono

$$a_5 = -3 \qquad b_9 = 2 \qquad \text{e} \qquad a_K = 0 \quad \text{per } K \neq 5$$
$$b_K = 0 \quad \text{per } K \neq 9$$

iV) Essa converge sia puntualmente che uniformemente, essendo somma di funzioni continue, 2π-periodiche e regolari a tratti in $\mathbb{R}$.