Analisi Matematica II

Analisi complessa

Virginia De Cicco
Sapienza Univ. di Roma

Analisi complessa

Esponenziale e logaritmo

La funzione esponenziale in campo complesso

Definiamo la *funzione esponenziale in campo complesso*. Essa sarà una funzione olomorfa in tutto $\mathbb{C}$ tale che la sua restrizione all'asse reale coincida con la funzione $f(x) = e^x$ in $\mathbb{R}$.

Definizione:

$$f(z) = e^z := e^x(cos\ y + i\ sen\ y) \qquad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Esempi

$$e^2 = e^2(cos\ 0 + i\ sen\ 0) = e^2$$

$$e^i = e^0(cos\ 1 + i\ sen\ 1) = cos\ 1 + i\ sen\ 1$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = e^0(cos\ \frac{\pi}{2} + i\ sen\ \frac{\pi}{2}) = i$$

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = e^0(cos\ \frac{\pi}{4} + i\ sen\ \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La funzione esponenziale in campo complesso

Definizione:

$$f(z) = e^z := e^x(cos\ y + i\ sen\ y) \qquad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Si ha che $Arg\, e^z = \mathrm{Im\, z} = \mathrm{y}.$

Si ha che $|e^z| = e^{\mathrm{Re\, z}} = e^x > 0$, che implica che $e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Attenzione: non si può parlare di positività di e^z poichè in $\mathbb{C}$ non c'è relazione d'ordine.

Inoltre per ogni $y \in \mathbb{R}$ si ha $|e^{iy}| = e^0 = 1$ e vale la cosiddetta *formula di Eulero*

$$e^{iy} = cos\ y + i\ sen\ y, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Forma esponenziale dei numeri complessi

$$e^{iy} = cos\ y + i\ sen\ y, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Al posto di y metto $Arg\, z$, quindi

$$e^{iArg\, z} = cos\ Arg\, z + i\ sen\ Arg\, z, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

da cui si ha

$$|z|e^{iArg\, z} = |z|(cos\ Arg\, z + i\ sen\ Arg\, z) = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Quindi si ha che ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$ (avente modulo ρ e argomento θ) si può scrivere nella forma *esponenziale*

$$z = \rho(cos\ \theta + i\ sen\ \theta) = \rho e^{i\theta}.$$

Dunque i punti del tipo $\rho e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, sono tutti e soli i punti della circonferenza $|z| = \rho$ di centro 0 e raggio ρ.

Appello del 17 settembre 2012

Domanda a risposta multipla

Calcolando $e^{5\frac{\pi}{2}i}$ si ottiene

a) $5i$ b) -5 c) $-i$ d) i.

Soluzione : d)

Esercizio

Usando la forma esponenziale dei numeri complessi, si verifichi che

$$Arg\,\frac{1}{z} + Arg\,z = 0, \quad z \neq 0.$$

Utilizzando la rappresentazione esponenziale dei numeri complessi

$$z = \rho e^{i\theta},$$

si ha che

$$Arg\,\frac{1}{z} = Arg\left(\frac{1}{\rho e^{i\theta}}\right) = Arg\left(\frac{1}{\rho}e^{-i\theta}\right) = -\theta = -Arg\,z.$$

Si osservi che

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{|z|}.$$

La funzione esponenziale in campo complesso

Si verifica facilmente che

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i \qquad e^{i\pi} = -1 \qquad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i.$$

La seconda, riscritta nella forma

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

dà un legame fondamentale fra i cinque numeri $0, 1, e, i, \pi$ più importanti della matematica.

La funzione esponenziale in campo complesso

$$e^z = e^x(cos\ y + i\ sen\ y)$$

La funzione esponenziale gode delle seguenti proprietà:

1) Per ogni $z = x + iy$ con $y = 0$ si ha che $f(z) = e^x$, ossia è un'estensione della funzione esponenziale in campo reale.

2) La funzione e^z è continua in tutto $\mathbb{C}$ poichè la sua parte reale $u(x, y) = e^x cos\ y$ e la sua parte immaginaria $v(x, y) = e^x sen\ y$ sono continue in $\mathbb{R}^2$.

3) La funzione e^z è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$ poichè ammette le derivate parziali continue e vale **(CR1)**.

Inoltre ammette come derivata se stessa, poichè dalla **(CR1)** si ha

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = e^x(cos\ y + i\ sen\ y) = e^z.$$

La funzione esponenziale in campo complesso

4) La funzione e^z è periodica di periodo $2\pi i$, poichè per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x(cos(y+2\pi) + i\ sen(y+2\pi)) = e^z,$$

dove si è usata la periodicità del seno e del coseno.

Quindi, essendo periodica, e^z non si può invertire in tutto $\mathbb{C}$.

5) Per la funzione e^z vale la formula usuale

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2},$$

che si prova usando le formule della somma per il seno ed il coseno.

Condizioni di Cauchy-Riemann

Usando la forma esponenziale dei numeri complessi, le condizioni di Cauchy-Riemann in un aperto A non contenente l'origine si possono scrivere in modo equivalente in coordinate polari come segue:

$$(CR3) \qquad \frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{1}{i\rho}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

Infatti se f è derivabile, allora

$$\frac{\partial f}{\partial \rho}(z) = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial z}(\rho e^{i\theta})\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho e^{i\theta}) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)e^{i\theta}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(z) = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial z}(\rho e^{i\theta})\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho e^{i\theta}) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)\rho i e^{i\theta}.$$

Inoltre si ha

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{1}{e^{i\theta}}.$$

Appello del 9 gennaio 2008

Si studi l′insieme di definizione, l′aperto di continuità e di olomorfia della funzione

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}.$$

$$e^z - 1 = 0 \qquad sse \qquad e^{z+2k\pi i} - 1 = 0 \qquad sse \qquad z_k = 2k\pi i, k \in Z.$$

L′insieme di definizione, l′aperto di continuità e di olomorfia è l′insieme

$$\mathbb{C} \setminus \{z_k = 2k\pi i, k \in Z\}.$$

Esercizio

Si studi l′insieme di definizione, l′aperto di continuità e di olomorfia della funzione

$$f(z) = \frac{1}{e^z}.$$

$$e^z = 0 \qquad sse \qquad MAI$$

L′insieme di definizione, l′aperto di continuità e di olomorfia è l′insieme

$$\mathbb{C}.$$

La funzione logaritmo in campo complesso

Definiamo ora la *funzione logaritmo in campo complesso*.

Come prima, si tratta di definire una funzione olomorfa su un aperto contenente la semiretta reale positiva, la cui restrizione a tale semiretta coincida con la ben nota funzione $f(x) = log\ x$ in campo reale.

Dato $z \in \mathbb{C}^*$ si definisce $log\ z$ nel seguente modo:

$$w = log\ z \qquad \text{se e solo se} \qquad z = e^w,$$

ossia si cerca di invertire la funzione esponenziale complessa.

Ma a causa della periodicità di e^w ci sono infiniti valori di $w = u + iv$ per cui $z = e^w$ e dunque infinite determinazioni del logaritmo (si dice che $log\ z$ è una funzione *polidroma*).

La funzione logaritmo in campo complesso

Cerchiamo la parte reale u e la parte immaginaria v di $w = log\ z$.

Da

$$w = log\ z \qquad \text{se e solo se} \qquad z = e^w,$$

si ha che

$$|z|\big(cos(arg(z)) + i\ sen(arg(z))\big) = e^u(cos\ v + i\ sen\ v)$$

da cui segue che $v = arg(z)$ e $u = log|z|$ (si noti che questo logaritmo è quello nei numeri reali, poichè $|z| \in \mathbb{R}$).

Quindi

$$log\ z = log|z| + i\ arg(z).$$

Si vede ora chiaramente che $log\ z$ è una funzione a più valori i quali differiscono per multipli interi relativi di $2\pi i$ (poichè $arg(z)$ è definita a meno di multipli di 2π).

La funzione logaritmo in campo complesso

Si definisce allora la cosiddetta *determinazione principale* $Log\ z$ del logaritmo,

usando la determinazione principale $Arg(z)$ dell'argomento $arg(z)$;

infatti si pone

$$Log\ z := log|z| + i\ Arg(z) = log\ \rho + i\ \theta.$$

Quindi $u = Re(Log(z)) = log|z|$ e $v = Im(Log(z)) = Arg(z)$.

Appello del 20 luglio 2009

(i) Si dia la definizione di *log z*.

(ii) Si dia la definizione di *Log z* (determinazione principale).

(iii) Utilizzando tale definizione si dimostri che

$$Arg\, z = -i\, Log\left(\frac{z}{|z|}\right).$$

Soluzione:
Siccome

$$Log\left(\frac{z}{|z|}\right) = log\left|\frac{z}{|z|}\right| + iArg\,\frac{z}{|z|}$$

e poiché $\left|\frac{z}{|z|}\right| = 1$ e $Arg\,\frac{z}{|z|} = Arg\, z$, si ha che

$$Log\left(\frac{z}{|z|}\right) = iArg\, z$$

e quindi

$$Arg\, z = -iLog\left(\frac{z}{|z|}\right).$$

La funzione logaritmo in campo complesso

Vediamo alcuni esempi:

Per $z = 1$ si ha $Log(1) = 0$, poichè $|z| = 1$ e $Arg(z) = 0$;

per $z = -1$ si ha $Log(-1) = log|-1| + i\ \pi = i\ \pi$, poichè $|z| = 1$ e $Arg(z) = \pi$ (si ricordi che in campo reale non è definito il logaritmo dei numeri negativi);

per $z = -2$ si ha $Log(-2) = log|-2| + i\ \pi = log\ 2 + i\ \pi$, poichè $|z| = 2$ e $Arg(z) = \pi$;

per $z = i$ si ha $Log\ i = log|i| + i\ \frac{\pi}{2} = i\ \frac{\pi}{2}$, poichè $|z| = 1$ e $Arg(z) = \frac{\pi}{2}$;

per $z = -i$ si ha $Log(-i) = log|-i| - i\ \frac{\pi}{2} = -i\ \frac{\pi}{2}$, poichè $|z| = 1$ e $Arg(z) = -\frac{\pi}{2}$.

La funzione logaritmo in campo complesso

La funzione logaritmo gode delle seguenti proprietà:

1) La funzione $Log\ z$ è definita in $\mathbb{C}^*$, i.e. per $z \neq 0$.

2) Per ogni $z = x + iy$, con $y = 0$ e $x > 0$, si ha che $Log\ z = log\ x$, ossia è un'estensione della funzione logaritmo in campo reale.

3) La funzione $Log\ z$ è continua in $\mathbb{C}^{**}$, poichè la sua parte immaginaria $Arg(z)$ è continua solo in $\mathbb{C}^{**}$, cioè è discontinua sul semiasse reale negativo.

La funzione logaritmo in campo complesso

4) La funzione *Log z* è olomorfa in $\mathbb{C}^{**}$; infatti non può essere derivabile nei suoi punti di discontinuità, cioè sul semiasse reale negativo.

Altrove è olomorfa poichè ammette le derivate parziali continue e vale la condizione di Cauchy-Riemann in coordinate polari

$$(CR3) \qquad \frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{1}{i\rho}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

Infatti, se $f(z) = Log\ z$, essendo $f(\rho, \theta) = log(\rho) + i\theta$ si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}, \qquad \frac{1}{i\rho}\,\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{1}{i\rho}\,i = \frac{1}{\rho}.$$

La funzione logaritmo in campo complesso

Dimostriamo che

$$f'(z) = \frac{1}{z}.$$

Infatti scrivendo z nella forma esponenziale $z = \rho e^{i\theta}$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \rho} = f'(z)\ \frac{\partial z}{\partial \rho} = f'(z)e^{i\theta},$$

da cui segue che

$$f'(z) = \frac{1}{e^{i\theta}}\frac{\partial f}{\partial \rho},$$

e quindi

$$f'(z) = \frac{1}{e^{i\theta}}\frac{\partial}{\partial \rho}(log\,\rho + i\theta) = \frac{1}{e^{i\theta}}\frac{1}{\rho} = \frac{1}{z}.$$

La funzione logaritmo in campo complesso

Infine si osservi che per la funzione $Log\ z$ non valgono le usuali formule del prodotto e della potenza del logaritmo reale.

Infatti basta considerare che $Log(i^3) = Log(-i) = -i\frac{\pi}{2}$, mentre $3Log\ i = 3i\frac{\pi}{2}$.

Appello del 9 marzo 2011

Domanda a risposta multipla
Una delle seguenti funzioni è derivabile in senso complesso nel punto $z = e$. Quale?

a) $Arg(-z)$ b) $Log(-z)$ c) $Log\, z$ d) $|Log\,(-z)|$.

Soluzione : c)

Appello del 16 luglio 2013

Domanda a risposta multipla
La funzione $f(z) = Log(z - i)$ è olomorfa nell'insieme

a) $\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : x \leq 0, y = -1\}$

b) $\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : x \leq 1, y = 1\}$

c) $\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : x \leq 0, y = 1\}$

d) $\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : x \leq 1, y = -1\}$.

Soluzione: c)

Appello del 9 marzo 2011

Domande a risposta multipla
La funzione $f(z) = \frac{1}{Log\,(z-2)}$ è definita in

a) $\mathbb{C} \setminus \{1, 3\}$

b) $\mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$

c) $\mathbb{C} \setminus \{2\}$

d) $\mathbb{C} \setminus \{2, 3\}$.

Soluzione : d)

Appello del 17 Gennaio 2014

Domande a risposta multipla
L'insieme di definizione di

$$f(z) = Log(|e^z|)$$

è

a) $\mathbb{C}^*$ b) $\mathbb{C}^{**}$ c) $\mathbb{C}$ d) $\mathbb{C} \setminus \{e\}$.

Soluzione : c)

Appello del 20 Settembre 2013

(i) Si studi l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia della funzione

$$f(z) = Log(-5 - 4i + |z|^2\, i).$$

(ii) Si studi l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia della funzione

$$g(z) = Log(5 - 4i + |z|^2\, i).$$

(iii) Si rappresentino graficamente ciascuno degli insiemi trovati.

Appello del 20 Settembre 2013

Si studi l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia della funzione

$$f(z) = Log(-5 - 4i + |z|^2\, i).$$

Soluzione : (i) La funzione f è definita in tutto $\mathbb{C}$, in quanto il suo argomento non può annullarsi.

Essa è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{z : |z| = 2\}$;

infatti $\mathrm{Re}(-5 - 4i + |z|^2\, i) = -5 \leq 0\,,$

$\mathrm{Im}(-5 - 4i + |z|^2\, i) = -4 + |z|^2$ e quest'ultima è uguale a 0 se e solo se z appartiene alla circonferenza $|z| = 2\,.$

Appello del 20 Settembre 2013

Si studi l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia della funzione

$$g(z) = Log(5 - 4i + |z|^2\, i).$$

Soluzione :
(ii) La funzione g è definita in tutto $\mathbb{C}$, in quanto il suo argomento non può annullarsi.

Essa è olomorfa in $\mathbb{C}$ in quanto $\mathrm{Re}(5 - 4i + |z|^2\, i) = 5 \geq 0\,.$

Appello del 17 gennaio 2013

(i) Si dia la definizione di $Log\, z$, con $z \in \mathbb{C}$.

(ii) Si studino gli insiemi di definizione, di continuità e di olomorfia della seguente funzione

$$f(z) = Log\,(z + 2i)\,.$$

Soluzione:
L'insieme di definizione è $\mathbb{C} \setminus \{-2i\}$. L'aperto dove la funzione è continua ed olomorfa è

$$\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : x \leq 0, y = -2\}\,.$$

Appello del 9 marzo 2011

Si studino l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia della seguente funzione

$$f(z) = Log(z^4 - 1)\,.$$

Soluzione:
L'insieme di definizione è

$$\mathbb{C} \setminus \{1, -1, i, -i\}\,.$$

Essendo

$$\mathrm{Re}(z^4 - 1) = -1 + x^4 + y^4 - 6x^2y^2$$

ed

$$\mathrm{Im}(z^4 - 1) = 4xy(x^2 - y^2)\,,$$

l'aperto di olomorfia è

$$\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : -1 + x^4 + y^4 - 6x^2y^2 \le 0\,,\ 4xy(x^2 - y^2) = 0\}\,.$$

Appello del 9 marzo 2011

L'aperto di olomorfia è

$$\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : -1 + x^4 + y^4 - 6x^2y^2 \leq 0\,,\ 4xy(x^2 - y^2) = 0\}\,.$$

Dalla condizione $xy(x^2 - y^2) = 0$ si hanno i tre casi: $x = 0$, $y = 0$ e $y = \pm x$.

Mettendo $x = 0$ nella condizione $-1 + x^4 + y^4 - 6x^2y^2 \leq 0$, si ha $-1 \leq y \leq 1$ e quindi si ha il segmento verticale compreso tra i e $-i$.

Analogamente, per $y = 0$, si ha $-1 \leq x \leq 1$ e quindi si ha il segmento orizzontale compreso tra 1 e -1.

Per $y = \pm x$ la condizione $1 - x^4 - y^4 + 6x^2y^2 \geq 0$ è sempre soddisfatta. Quindi la funzione è olomorfa nel piano complesso privato delle 4 bisettrici e dei 2 segmenti descritti prima. Si osservi che essi hanno origine nei quattro punti $1, -1, i, -i$.

Appello del 10 settembre 2008

Si dia l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia della funzione

$$f(z) = Log(e + e^z).$$

Soluzione: la funzione non è definita nei punti z tali che $e^z = -e$.

Ciò equivale a dire

$$e^x(cos\, y + \ sen\, y) = -e\,,$$

da cui si ha $x = 1$ e $y = \pi + 2k\pi = (1+2k)\pi$. Quindi l'insieme di definizione è

$$\mathbb{C} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{1 + (2k+1)\pi\, i\}\,.$$

L'aperto di olomorfia è

$$\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : e^x\, sen\, y = 0\,,\ e + e^x\, cos\, y \leq 0\}\,.$$

Si verifica facilmente che coincide con l'insieme

$$\mathbb{C} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Big([1, +\infty[\times \{(1+2k)\pi\}\Big)\,.$$