ESAME 23 GENNAIO 2020

ESERCIZIO 1

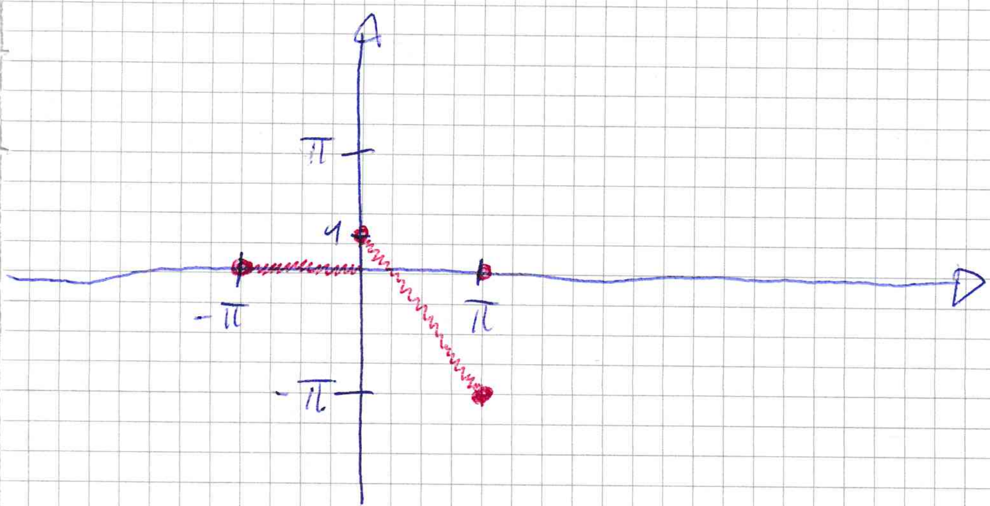
1) $\cos(i) = \dfrac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} = \dfrac{e^{-1} + e}{2} = \cosh(1)$

RISPOSTA a

2) Data la serie di Fourier, 2π-periodica,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 - x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

il cui grafico è



in $x = -\dfrac{5}{2}\pi$ a

$1+\frac{5}{2}\pi$, essendo un punto ~~di continu~~ in cui é continua

RISPOSTA b

3) La somma della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(iz)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (iz)^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{iz}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{1-\left(\frac{1}{iz}\right)} = \frac{1}{\frac{iz-1}{iz}} = \frac{iz}{iz-1}$$

RISPOSTA a

4) La trasformata di Laplace della convoluzione

$$(t^2 * e^{2t}) = \frac{2}{s^3} \cdot \frac{1}{s-2} = \frac{2}{s^3(s-2)}$$

RISPOSTA c

5) Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \frac{dz}{e^z(z^2+4)}, \quad \text{con } \gamma(t) = -1+2e^{-it}, \quad t \in [-\pi, \pi]$$

da risolvere :(

ESERCIZIO 2

i) Si definisce residuo di f in z_0 il numero

$$\operatorname{res}(f, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz$$

con γ circuito contenuto in A, insieme di definizione di f, e contenente z_0 come una singolarità di f

ii) Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ un polo di ordine n, allora

$$\operatorname{res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z-z_0)^n f(z) \right)$$

~~[illegible]~~ sia $f = \frac{f_1}{f_2}$, con uno zero semplice in z_0 di f_2, ossia $f_2(z_0) = 0$ e $f_1(z_0) \neq 0$, allora

$$\operatorname{res}(f, z_0) = \frac{f_1(z_0)}{f_2'(z_0)}$$

iii) Si calcolino i residui in $z=2$ delle seguenti funzioni

$f(z) = \frac{z-2}{e^{z-2}}$, in $z_0 = 2$ non ci sono poli

$g(z) = e^{\frac{1}{(z-2)^2}}$, in $z_0 = 2$ non ci sono poli

$h(z) = \frac{\operatorname{sen}(z-2)}{(z^2-4)^2}$, polo di ordine 2 in $z_0 = 2$

$$\operatorname{res}(h(z_0), z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z-z_0)^n f(z) \right) =$$

$$= \lim_{z \to 2} \frac{d}{dz}\left(\cancel{(z-2)^2} \frac{\operatorname{sen}(z-2)}{\cancel{(z-2)^2}(z+2)^2} \right) =$$

$$= \lim_{z \to 2} \frac{(z+2)^{\cancel{2}} \cos(z-2) - 2\cancel{(z+2)} \operatorname{sen}(z-2)}{(z+2)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$$

ESERCIZIO 3