# Analisi Matematica II

## **Analisi complessa**

Virginia De Cicco
Sapienza Univ. di Roma

# Integrazione in campo complesso

# Curve regolari

Definizione

Diremo che $\gamma$ è una *curva regolare* in $\mathbb{C}$

i) se $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$ è una funzione di classe $C^1$ (derivabile con derivata continua)

ii) $\gamma'(t) := \gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t) \neq 0$ per ogni $t \in [a,b]$.

L'immagine $\gamma([a,b])$ di $\gamma$ in $\mathbb{C}$

$$\gamma([a,b]) = \{z \in \mathbb{C} : z = \gamma(t), t \in [a,b]\}$$

si dice *sostegno (o traccia) di* $\gamma$.

# Curve regolari

Diremo che $\gamma$ è contenuta in un aperto $A$, anzichè $\gamma([a, b]) \subseteq A$.

Il punto $\gamma(a)$ si dice *punto iniziale* ed il punto $\gamma(b)$ si dice *punto finale* di $\gamma$.

La funzione $\gamma$ è detta anche *legge oraria* con cui viene percorso il sostegno $\gamma([a, b])$.

Se $\gamma(a) = \gamma(b)$, la curva si dice *chiusa*.

Se $\gamma$, ristretta ad $[a, b)$, è iniettiva, cioè

$$t_1 \neq t_2 \in [a, b) \quad \text{implica} \quad \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2),$$

allora $\gamma$ si dice *semplice*.

Se $\gamma$ è semplice e chiusa, viene detta *circuito*.

Si definisce la lunghezza di $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ nel seguente modo:

$$l(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b (\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2)^{1/2} dt.$$

# Esempi

1) Dati $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_2$, e $t \in [0,1]$,

la curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ definita da $\gamma(t) := (1-t)z_1 + tz_2$ è una curva semplice e regolare con punto iniziale $z_1$ e punto finale $z_2$.

Il suo sostegno è il segmento $[z_1, z_2] \subseteq \mathbb{C}$ e la sua lunghezza è $|z_1 - z_2|$.

2) Dato $z_0 \in \mathbb{C}$ ed $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$,

la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ definita da $\gamma(t) := z_0 + re^{it}$ è una curva semplice, chiusa e regolare,

il suo sostegno è la circonferenza di centro $z_0$ e raggio $r$ e la sua lunghezza è $2\pi r$.

# Appello del 17 gennaio 2013

(i) Si dia la definizione di curva regolare in $\mathbb{C}$.

(ii) Si calcoli la lunghezza della curva del piano complesso avente le seguenti equazioni parametriche

$$\gamma(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, i$$

dove $t \in [-1, 1]$.

Soluzione : Si ha che

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{\frac{1+t^2}{(1+t^2)^3}} = \frac{1}{1+t^2}$$

e quindi

$$l(\gamma) = \int_{-1}^{1} |\gamma'(t)|\, dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{2}\,.$$

# Cambiamento di parametro

Data $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva regolare

e data $\phi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ di classe $C^1$ su $[a, b]$

tale che $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$ e $\phi'(\tau) > 0$ per ogni $\tau \in [\alpha, \beta]$ (tale $\phi$ viene detta *cambiamento di parametro* che conserva l'orientamento),

la nuova curva definita da

$$\gamma_1 := \gamma \cdot \phi : \tau \mapsto \gamma(\phi(\tau))$$

è una curva regolare che ha lo stesso sostegno di $\gamma$ e lo stesso orientamento.

# Cambiamento di parametro

Tutte le curve così ottenute formano una classe di equivalenza:

esse hanno in comune lo stesso sostegno,

ma è diversa la legge oraria con cui questo viene percorso.

Inoltre si possono considerare dei cambiamenti di parametro che cambiano l'orientamento:

per esempio, data $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva regolare,

la curva $\gamma^- : [a, b] \to \mathbb{C}$ definita da $\gamma^-(t) = \gamma(b + (a - t))$ è ancora una curva regolare, ha la stessa traccia di $\gamma$,

ma è percorsa in senso opposto e dunque scambia i punti estremi.

# Concatenamento di curve

Date due curve regolari $\gamma_1$, $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$ tale che $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$

si possono *concatenare* le due curve per esempio definendo

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_2(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{1}$$

Si ha $\gamma(0) = \gamma_1(0)$, $\gamma(1) = \gamma_2(1)$, $\gamma$ è continua, ma in generale non è $C^1$.

La concatenazione analoga di più segmenti dà una *poligonale*.

**Definizione** Una curva $\gamma$ si dice *regolare a tratti* se è ottenuta concatenando due o più curve regolari.

# Integrale curvilineo

Dati $A \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso, $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione continua e $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva regolare (o regolare a tratti) la cui traccia $\gamma([a, b]) \subseteq A$,

si definisce l' *integrale di $f$ lungo $\gamma$* nel seguente modo:

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Si osservi che la funzione $t \mapsto f(\gamma(t))\gamma'(t)$ è una funzione di variabile reale a valori complessi.

**Esempi**

1) Sia $f(z) = \frac{1}{z}$ per $z \in \mathbb{C}^*$ e sia $\gamma$ la circonferenza di centro 0 e raggio $r$, i.e.

$$\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$$

,

$$\gamma_r(t) := re^{it}.$$

Allora

$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = 2\pi i.$$

Si noti che non dipende da $r$.

**Esempi**
2) Sia $f(z) = z^k$, $k \in Z$, con $k \neq -1$ ( $k = -1$ è il caso precedente) definita su tutto $\mathbb{C}$ per $k \geq 0$ e su $\mathbb{C}^*$ per $k < 0$.

Sia

$$\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$$

,

$$\gamma_r(t) := re^{it}.$$

Allora

$$\int_\gamma z^k dz = \int_0^{2\pi} r^k e^{ikt} ire^{it} dt = ir^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t} dt = 0,$$

grazie alla periodicità di $e^z$ in campo complesso con periodo $2\pi i$.

# Integrale curvilineo

Elenchiamo ora alcune proprietà dell'integrale:

1) linearità : $\int_\gamma (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \int_\gamma f_1 + c_2 \int_\gamma f_2$;

2) indipendenza dal cambiamento di parametro (che conserva l'orientamento):

$$\int_\gamma f := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\gamma(\phi(\tau)))(\gamma \circ \phi)'(\tau)d\tau = \int_{\gamma \circ \phi} f;$$

3) cambio di segno nel passaggio a $\gamma^-$ : $\int_\gamma f = -\int_{\gamma^-} f$;

# Integrale curvilineo

4) additività rispetto alla curva: $\int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f = \int_{\gamma_1\gamma_2} f$, dove $\gamma_1\gamma_2$ denota la concatenazione di $\gamma_1$ e di $\gamma_2$;

5) se $M = \max_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))|$, allora $\left| \int_\gamma f \right| \leq M\, l(\gamma)$.

Vale inoltre il seguente teorema di passaggio al limite:

**Teorema**

Sia $f_n$ una successione di funzioni continue definite in $A$. Supponiamo che $f_n \to f$ uniformemente in $A$. Allora

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz.$$

# Esercizio

Si calcoli il seguente integrale in campo complesso

$$\int_\gamma \bar{z}dz \qquad \gamma(t) = i + 2e^{it} \qquad t \in [0, \pi].$$

Soluzione : Utilizzando la definizione di integrale in campo complesso si ha che

$$\int_\gamma \bar{z}dz = \int_0^\pi \overline{i + 2e^{it}}\gamma'(t)dt$$

$$= \int_0^\pi \left(-i + 2e^{-it}\right) 2ie^{it}dt = \int_0^\pi 2e^{it}dt + \int_0^\pi 4i\,dt$$

$$= 2i\ \left(e^{it}\right)\Big|_0^\pi + 4\pi i = -2i + 2i(-1) + 4\pi i = 4(\pi - 1)i.$$

# Primitiva

Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso ed $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione continua.

Si dice che $F : A \to \mathbb{C}$ è una *primitiva* di $f$

se è derivabile in $A$

e se $F'(z) = f(z)$ per ogni $z \in A$.

Come in campo reale, se $F$ è una primitiva di $f$, allora per ogni $c \in \mathbb{R}$ la funzione $F + c$ è una primitiva di $f$.

La conoscenza di una primitiva permette di calcolare immediatamente gli integrali curvilinei; infatti vale un analogo del teorema di Torricelli-Barrow.

# Teorema di Torricelli-Barrow

Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso,

sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva regolare (o regolare a tratti) la cui traccia $\gamma([a, b]) \subseteq A$,

sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione continua e $F : A \to \mathbb{C}$ una sua primitiva.

Allora

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Per dimostrarlo basta osservare che $F(\gamma(t))$ è una primitiva di $f(\gamma(t))\gamma'(t)$ e quindi

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b (F \cdot \gamma)'(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

# Teorema di Torricelli-Barrow

Dal teorema segue che se $f$ ammette una primitiva,
allora l'integrale dipende solo dagli estremi $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ e non dalla curva che li connette.

In particolare, se $\gamma$ è chiusa $(\gamma(a) = \gamma(b))$, allora $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Ritornando agli esempi precedenti, si può osservare che necessariamente la funzione $\frac{1}{z}$ non ammette una primitiva in $\mathbb{C}^*$, perché, come già visto, $\int_{\gamma_r} \frac{1}{z}dz = 2\pi i \neq 0$.

Inoltre il fatto che $\int_\gamma z^k dz = 0$ per ogni $k \neq -1$ è coerente col fatto che $z^k$ ammette, per $k \neq -1$, la primitiva $\frac{z^{k+1}}{k+1}$, che è definita in tutto $\mathbb{C}$ se $k > -1$ e in $\mathbb{C}^*$ se $k < -1$.

# Appello del 19 novembre 2012

Si calcoli

$$\int_\gamma z^2\, dz,$$

dove $\gamma$ è il segmento congiungente i punti 1 e $i$.

Soluzione : Tale funzione è olomorfa in $\mathbb{C}$ ed ammette la primitiva

$$F(z) = \frac{1}{3} z^3 .$$

Quindi

$$\int_\gamma z^2\, dz = F(i) - F(1) = -\frac{i}{3} - \frac{1}{3} .$$