ESAME 17 FEBBRAIO 2020

ESERCIZIO 1

I) Si chiede di trovare l'aperto di olomorfia di

$f(z) = \log(\log z)$

il quale é dove log può essere derivabile, ossia in $\mathbb{C}^*$ tranne il semiasse reale negativo, quindi in $\mathbb{C}^{**}$. (RISPOSTA c)

II) Si chiede la convergenza uniforme di

$$f_n(x) = \log\left(\frac{x^2}{n} + 1\right)$$

non risolto :(

III) $\cos(\log i)$

$$\log z = \log\rho + i\vartheta$$

$$\log i = \log 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\cos i\frac{\pi}{2} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}}{2} = \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

RISPOSTA b

IV) Si chiede com'é il dominió della funzione

$$f(z) = \log(|z-1|)$$

non risolto ï

V) Rappresentazione cartesiana di

$$z = 2e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

in forma esponenziale un numero complesso può essere così scritto

$$z = \rho e^{i\theta}$$

mentre in coordinate polari

$$z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

quindi il nostro numero diventa

$$z = 2e^{-\frac{\pi}{4}i} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

RISPOSTA c

ESERCIZIO 2

i) L'espressione della serie di Fourier di una funzione 2π-periodica è

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx$$

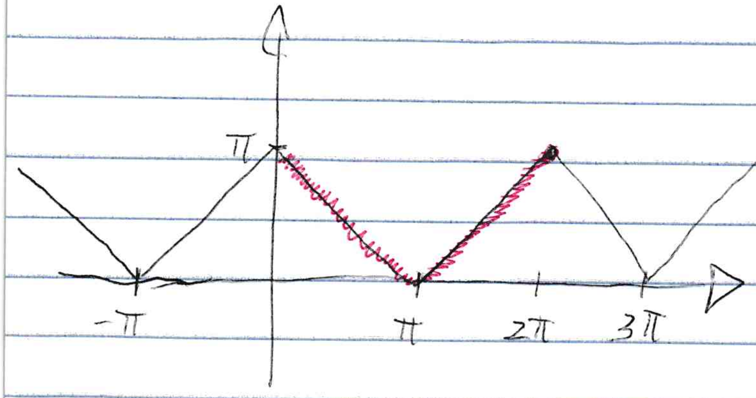
se la funzione è anche pari, ricordando che il coseno è pari ed il seno è dispari l'espressione della relativa serie di Fourier diviene

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

con

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos kx\,dx$$

ii) La funzione data è la seguente $f(x) = |x-\pi|$ $x \in (0, 2\pi]$ prolungata per periodicità su tutto $\mathbb{R}$



la cui parte in rosso è quella principale, da 0 a 2π, da cui si vede che la funzione data è pari

Per cui ci andiamo a calcolare i coefficienti pari

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |x-\pi|\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2} - \pi x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - \pi^2\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2 - 2\pi^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi^2}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x-\pi| \cos k_x\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[|x-\pi|\,\text{sen}\,kx - \int_0^{\pi} \frac{|x-\pi|}{x-\pi}\,\text{sen}\,kx\,dx\right]_0^{\pi} =$$

finire di risolvere l'integrale :)

ESERCIZIO 3

i) Sia $f : I \to \mathbb{C}$ (dove $\mathbb{R}_+ \subseteq I$) una funzione L-trasformabile; posto

$$\sigma[f] := \inf \{ Re(s) : e^{-st} f(t) \text{ é sommabile} \},$$

per ogni s, tale che $Re(s) > \sigma[f]$ chiameremó trasformata di Laplace di f la funzione

$$L[f](s) = F(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

Inoltre diremo che $\sigma[f]$ é l'ascissa di convergenza della funzione f.

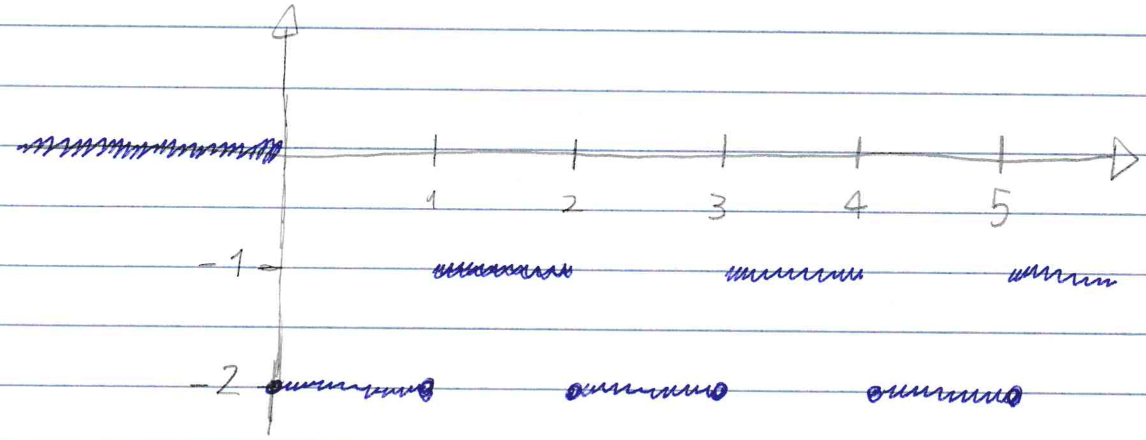
ii) Sia f un segnale periodico per $t \geq 0$ di periodo T, cioé $f(t+T) = f(t) \quad \forall t \geq 0$.
Se f é sommabile in $[0, T]$, allora

$$L[f](s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt \qquad Re(s) > 0$$

iii) Si chiede di calcolare la trasformata della seguente onda quadra

$$f(t) = \begin{cases} -2 & 2n \leq t \leq 2n+1 \qquad n \geq 0 \\ -1 & 2n+1 < t < 2n+2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il cui grafico é



Il suo periodo é $T=2$, applicando quindi la formula

$$\mathcal{L}[f](s)=\frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st}f(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\int_0^1 -2e^{-st}\,dt+\int_1^2 -1e^{-st}\,dt\right)=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left(-2\int_0^1 e^{-st}\,dt-\int_1^2 e^{-st}\,dt\right)=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left(-2\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^1-\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_1^2\right)=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\frac{2}{s}\left(e^{-s}-1\right)+\frac{1}{s}\left(e^{-2s}-e^{-s}\right)\right)=$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\frac{2e^{-s}-2+e^{-2s}-e^{-s}}{s}\right) =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\frac{e^{-2s}+e^{-s}-2}{s}\right)$$

ESERCIZIO 4

i) Per ogni circuito γ regolare a tratti, contenuto in $\mathbb{C}$ e tale che γ è la frontiera di un aperto D interamente contenuto in $\mathbb{C}$, si ha

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

e per ogni $z_0 \in D$ vale

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

ii) Si chiede di calcolare i seguenti integrali lungo la curva $\gamma := |z-1| = 17$, percorsa in verso antiorario

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z-1}\,dz \quad , \quad \int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)^8}\,dz$$

Dalla formula precedente abbiamo

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = f^{(n)}(z_0) \frac{2\pi i}{n!} \quad \text{, quindi}$$

$z_0 = 1$

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z-1} dz = 2\pi i e$$

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{(z-1)^8} dz = \frac{2\pi i e^7}{7!}$$

ESERCIZIO 5

i) Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

essa converge puntualmente se esiste

$S(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x)$, le S_n sono le somme parziali, e la somma della serie è $S(x)$

La serie converge uniformemente ad $S(x)$ in A allo stesso modo della convergenza uniforme delle successioni.

Converge assolutamente in $x \in A$ se converge la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$$

Converge totalmente in $x \in A$ se esiste una successione numerica M_n tale che

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e la serie M_n converge.

Assoluta e uniforme implicano puntuale.
Totale implica assoluta e uniforme.

ii) Data

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, n^{\log x}$$ si chiede di studiarne la convergenza

Essa converge totalmente per

$$n^{\log x} < 1 \quad ; \quad n < \log x$$

e quindi anche assolutamente, uniformemente e puntuale.