PREAPPELLO 19 DICEMBRE 2019

ESERCIZIO 1

I) Si vuole studiare l'insieme di convergenza puntuale della serie

$$S_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^3 \left|\operatorname{sen}\frac{x}{n}\right|} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{n^3 \left|\operatorname{sen}\frac{x}{n}\right|}}$$

Quindi

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = 0$$, in particolare converge in tutto $\mathbb{R}$

RISPOSTA b

II) Si chiede anche qui dove converge la successione di funzioni

$$f_n(x) = e^{-n^3 \left|\operatorname{sen}\frac{x}{n}\right|}$$ anche in questo caso

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$$ e si ha in tutto $\mathbb{R}$

RISPOSTA b

III) RISPOSTA b

Poiché con $t \in [0, 3\pi]$ e si ha $\frac{1}{3}it$ come coefficiente la curva si ferma a π, non chiudendosi

IV) Verifichiamo se la funzione data sia pari

$$f(-x) = (-x-\pi)^4 = x^4 + 4\pi x^3 + 6\pi^2 x^2 + 4\pi^3 x + \pi^4$$

$$f(x) = (x-\pi)^4 = x^4 - 4\pi x^3 + 6\pi^2 x^2 - 4\pi^3 x + \pi^4$$

$f(x) \neq f(-x)$ quindi non è pari, allora si deve risolvere il seguente integrale

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (x-\pi)^4 \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{\pi}$$

V) Si chiede quale sia la parte reale di $i\,\text{senh}\left(-\frac{\pi}{2}i\right)$, sapendo che $\text{senh}(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$

abbiamo

$$i\,\text{senh}\left(-\frac{\pi}{2}i\right) = i\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{2}i} - e^{\frac{\pi}{2}i}}{2}\right) = -i\left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}i} - e^{-\frac{\pi}{2}i}}{2}\right)$$

da cui notiamo che la parte reale è uguale a zero

RISPOSTA b

ESERCIZIO 2

Si usi il lemma di Jordan per calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}x + \cos x}{x^2+16}\,dx$$

Sappiamo che

$$e^{ix} = \cos x + i\,\text{sen}x$$

quindi $\cos x + \text{sen}x = Re(e^{ix}) + Im(e^{ix})$

da cui l'integrale diventa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}x+\cos x}{x^2+16}\,dx = Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+16}\,dx\right) + Im\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+16}\,dx\right) =$$

Utilizzando la variabile complessa abbiamo $g(z) = \frac{1}{z^2+16}$

e $\lim_{|z|\to+\infty} g(z) = 0$

Inoltre si hanno 2 singolarità (poli) in $z_1 = 4i$ e $z_2 = -4i$
Quindi l'integrale diviene

$$\mathrm{Re}\left(2\pi i \,\mathrm{res}\left(\frac{e^{ix}}{x^2+16}, 4i\right)\right) - \mathrm{Im}\left(2\pi i \,\mathrm{res}\left(\frac{e^{ix}}{x^2+16}, -4i\right)\right) =$$

$$\mathrm{Re}\left(\cancel{2}\pi \cancel{i}\left(\frac{e^{4i^2}}{\underset{4}{\cancel{8}}\cancel{i}}\right)\right) - \mathrm{Im}\left(\cancel{2}\pi \cancel{i}\left(\frac{e^{-4i^2}}{-\underset{4}{\cancel{8}}\cancel{i}}\right)\right) =$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\pi}{4}e^{-4}\right) + \mathrm{Im}\left(\frac{\pi}{4}e^{4}\right) = \frac{\pi}{4}e^{-4}$$

RISULTATO FINALE

ESERCIZIO 3

i) Data $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione analitica in A, un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ si dice punto singolare isolato o una singolarità isolata per f se $z_0 \notin A$, ma esiste un intorno forato

$$B_r^*(z_0) := B_r(z_0) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$$

tutto contenuto in A.

ii) Si vogliono determinare e classificare le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{\mathrm{sen}(5z)}{\mathrm{sen}(10z)}$$

Le singolarità possibili si hanno solo nel caso in cui il denominatore si azzeri, in quanto il seno è funzione continua.

$sen(10z) = 0$

DA FINIRE :(

ESERCIZIO 4

i) Si definisce residuo di f in z_0 il numero

$$res(f, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz$$

dove γ è un circuito contenuto nell'insieme di definizione di f, e contenente z_0 e nessun'altra singolarità di f.

ii) Sia $f: A \to \mathbb{C}$ una funzione analitica nell'aperto connesso $A \subseteq \mathbb{C}$ e sia γ un circuito in A. Siano $z_1, \dots, z_n$ dei punti singolari isolati di f appartenenti all'aperto D interno a γ. Allora

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res(f(z), z_k)$$

DIMOSTRAZIONE

Siano $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ delle circonferenze di centro $z_1, \dots, z_r$ e raggi opportunatamente piccoli in modo che ognuna sia interna a D, non si intersichino fra loro e ognuna non contenga altre singolarità tranne il suo centro. Consideriamo la curva

$$\tilde{\gamma} = \gamma \cup \gamma_1^- \cup \dots \cup \gamma_r^-$$

che è l'unione di curve non connesse tra di loro. Dal teorema di Cauchy (che vale anche per l'unione di curve) si ha

$$0 = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz + \sum_{K=1}^{r} \int_{\gamma_K^-} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz - \sum_{K=1}^{r} \int_{\gamma_K} f(z)\,dz$$

e quindi

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{K=1}^{r} \int_{\gamma_K} f(z)\,dz$$

D'altra parte, per ogni $K: 1, \dots, r$ si ha

$$\int_{\gamma_K} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}(f(z), z_K)$$

e dunque si ottiene la tesi

iii) Data $\gamma(t)=5e^{it}$, con $t\in[0,2\pi]$, essa è una circonferenza di centro l'origine e raggio 5, volendo trovare una funzione $f(z)$ per cui

$\int_\gamma f(z)\,dz = 2i$ il risultato richiesto lo poniamo uguale al residuo

$$2i = 2\pi i \operatorname{res}(f(z), z_0) \Rightarrow \pi \operatorname{res}(f(z), z_0) = 1$$

il punto singolare sarà π, contenuto in γ e la funzione sarà

$$f(z) = \frac{1}{z^2-\pi^2}$$??

ESERCIZIO 5

Si risolva con la trasformata di Laplace

$$\begin{cases} y''+y=\frac{1}{2}\cos t \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{2}\,\frac{s}{s^2+1}\,\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{2}\,\frac{s}{(s^2+1)^2}$$

Di cui riconosciamo le antitrasformate, e si ha

$$y(t) = \operatorname{sen} t + \frac{1}{2}(\cos t * \operatorname{sen} t)$$

soluzione del problema di Cauchy dato