Analisi Matematica II

Analisi complessa

Virginia De Cicco
Sapienza Univ. di Roma

Analisi complessa

Potenze e funzioni trigonometriche

La funzione potenza in campo complesso

Definiamo la *funzione potenza in campo complesso*.

Si tratta di definire una funzione olomorfa su un aperto contenente la semiretta reale positiva, la cui restrizione a tale semiretta coincida con la funzione potenza in campo reale.

Per ogni coppia $\beta \in \mathbb{C}$ e $z \in \mathbb{C}^*$ (ossia $z \neq 0$) si definisce

$$\underline{z}^{\beta} := e^{\beta \log z}.$$

In generale ci sono infinite determinazioni (come per il logaritmo). La determinazione principale è

$$z^{\beta} := e^{\beta \operatorname{Log} z}$$

e si chiama *potenza principale*.

Tale funzione è definita in $\mathbb{C}^*$ ed è continua ed olomorfa in $\mathbb{C}^{**}$.

Esempi

1) $\underline{1}^i = e^{i\ log 1} = e^{i(log|1| + i\ arg 1)} = e^{-2k\pi},\ k \in \mathbb{Z},$

e per $k = 0$ si ha la determinazione principale $1^i = e^0 = 1;$

2) $\underline{i}^i = e^{i\ log i} = e^{i(log|i| + i\ arg i)} = e^{-arg\ i} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)},\ k \in \mathbb{Z},$

e per $k = 0$ si ha la determinazione principale $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$. Sorpresa!

Appello del 17 gennaio 2013

Domanda a risposta multipla

Uno solo dei seguenti numeri è reale. Quale?

a) π^i
b) i^π
c) e^i
d) i^i .

Soluzione : d)

Appello del 19 novembre 2013

Domanda a risposta multipla

Uno dei seguenti numeri non è reale. Quale?

a) π^{π}
b) $(-\pi)^{\pi}$
c) $\pi^{-\pi}$
d) $(2\pi)^{\pi}$.

Soluzione : b)

La funzione potenza in campo complesso

Vediamo ora dei casi particolari:

1) Sia $\beta \in \mathbb{R}_+$.

In tal caso, la potenza (sia la sua determinazione principale, che tutte le altre) è definita anche in $z = 0$ e si ha $0^\beta = 0$:

infatti

$$\lim_{z \to 0} z^\beta = \lim_{z \to 0} e^{\beta(log|z|+iArg(z))} = \lim_{z \to 0} e^{i\beta Arg(z)} \lim_{z \to 0} e^{\beta log|z|} = 0$$

poichè $\lim\limits_{z \to 0} e^{\beta log|z|} = 0 \quad$ e $\quad \left|e^{i\beta Arg(z)}\right| = 1.$

Quindi in questo caso z^β è definita in tutto $\mathbb{C}$ e continua in $\mathbb{C}^{**} \cup \{0\}$.

La funzione potenza in campo complesso

2) Sia $\beta \in \mathbb{N}$: $\beta = n$.

In tal caso, c'è una sola determinazione: infatti a causa della periodicità dell'esponenziale (complesso) di periodo $2\pi i$ si ha

$$z^{\beta} = e^{nlogz} = e^{n(log|z|+i(Arg(z)+2k\pi))} = e^{n(log|z|+i(Arg(z)))} = e^{nLogz}.$$

Inoltre z^{β} coincide con l'usuale potenza

$$z^n = z \cdot z \cdots z, \qquad n \quad \text{volte},$$

definita in campo complesso, poichè

$$z^{\beta} = e^{nLogz} = e^{nlog|z|+i\,nArg(z)} = e^{log|z|^n} e^{i\,nArg(z)} =$$

$$|z|^n(cos(nArg(z)) + isen(nArg(z))) = z^n.$$

Si noti che in tal caso z^{β} è definita, continua ed olomorfa in tutto $\mathbb{C}$.
Analogamente, nel caso $\beta \in \mathbb{Z}$, $\beta = -n$, z^{β} è definita, continua ed olomorfa in tutto $\mathbb{C}^*$.

La funzione potenza in campo complesso

3) Sia $\beta \in \mathbb{Q}$:

$\beta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

In questo caso ci sono n determinazioni, quelle della radice n-esima di z:

infatti per ogni $k \in \mathbb{Z}$ si ha

$$z^{\beta} = e^{\frac{1}{n} log z} = e^{\frac{1}{n}(log|z| + i(Arg(z) + 2k\pi))} =$$

$$= e^{log|z|^{\frac{1}{n}}} e^{i\left(\frac{Arg(z)+2k\pi}{n}\right)} = |z|^{\frac{1}{n}} \left(cos\left(\frac{Arg(z) + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{Arg(z) + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

ma solo $k = 0, 1, \ldots, n-1$ danno luogo a valori distinti (infatti a causa della periodicità del seno e del coseno di periodo 2π, per $k = n$ si ottiene lo stesso valore che si ottiene per $k = 0$ e così via).

Quindi per $k = 0, 1, \ldots, n-1$ la formula precedente ridà gli n valori della radice n-esima di z.

La funzione potenza in campo complesso

In questo caso ($\beta = \frac{1}{n}$) la potenza z^β (con tutte le sue determinazioni) è definita e continua in $\mathbb{C}$ ed è olomorfa in $\mathbb{C}^{**}$.

In maniera analoga si definisce z^β se β è un qualunque numero razionale, $\beta = \frac{m}{n}$, con $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, n ed m primi tra di loro.

Basta considerare le n radici n-esime del numero z^m.

Si osservi infine che grazie alle usuali regole di derivazione ed alle formule viste si ha per ogni $z \in \mathbb{C}^{**}$ e per ogni $\beta \in \mathbb{C}$

$$\frac{d}{dz} z^\beta = \frac{d}{dz} e^{\beta \log z} = e^{\beta \log z} \frac{\beta}{z} = z^\beta \frac{\beta}{z} = \beta z^{\beta - 1}.$$

Funzioni circolari in campo complesso

Definiamo ora le *funzioni circolari ed iperboliche in campo complesso*.

Come prima, si tratta di definire delle funzioni olomorfe su un aperto contenente la semiretta reale positiva, la cui restrizione a tale semiretta coincida con le analoghe funzioni in $\mathbb{R}$.
Sia $z = ix$, con $x \in \mathbb{R}$, allora

$$e^{ix} = cosx + i\, senx$$

$$e^{-ix} = cosx - i\, senx.$$

Sommando e sottraendo si ha per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$cosx = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad senx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Quindi per definire un'estensione di coseno e seno al campo complesso si definiscono per ogni $z \in \mathbb{C}$

$$cosz := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad senz := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Funzioni circolari in campo complesso

$$cosz := \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad senz := \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

Dalla $2\pi i$-periodicità della funzione esponenziale si deduce la 2π-periodicità delle funzioni seno e coseno.

Si può dimostrare che le funzioni circolari non hanno altri zeri che quelli della loro restrizione all'asse dei numeri reali.

Infatti si verifica facilmente, dato $z = x + iy$, che

$$cos\, z = 0 \qquad sse \qquad y = 0 \quad e \quad cos\ x = 0$$

$(x = \pi/2 + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z})$

$$sen\ z = 0 \qquad sse \qquad y = 0 \quad e \quad sen\ x = 0$$

$(x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z})$.

Funzioni iperboliche in campo complesso

$$cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad sen z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Analogamente al campo reale, si definiscono le funzioni coseno e seno iperbolico nel seguente modo:

$$cosh z := \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \quad senh z := \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}.$$

Tutte queste funzioni sono intere (poichè l'esponenziale lo è), cioè definite ed olomorfe in tutto $\mathbb{C}$.

Funzioni circolari ed iperboliche in campo complesso

Usando le definizioni si verifica facilmente che valgono le usuali formule delle derivate

$$Dcosz = -senz, \quad Dsenz = cosz,$$

$$Dcoshz = senhz, \quad Dsenhz = coshz$$

e valgono le identità

$$cos^2 z + sen^2 z = 1$$

$$cosh^2 z - senh^2 z = 1.$$

In campo complesso non è vero che seno e coseno sono funzioni limitate. Infatti si noti che, considerata la restrizione della funzione $cos\, z$ all'asse immaginario (cioè $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$) , si ha

$$\lim_{y\to+\infty} cos(iy) = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = +\infty.$$

Appello del 16 luglio 2013

Domanda a risposta multipla

Solo una delle seguenti affermazioni è vera

a) $|\sin(3i)| = 1$ b) $|\sin(3i)| > 1$

c) $|\sin(3i)| < 1$ d) $|\sin(3i)| = 3$.

Soluzione : b)

Appello del 16 luglio 2013

Domanda a risposta multipla

Solo una delle seguenti identità è vera

a) $\sin iz = i \sinh z$ b) $\sin iz = i \sinh iz$

c) $\sin iz = \sinh z$ d) $\sin iz = \sinh iz$.

Soluzione : a)

Appello del 24 luglio 2012

Domanda a risposta multipla

1) La parte reale di $\sin z$ è
a) $\cosh y \sinh x$
b) $\sin x \cosh y$
c) $\sin x \sin y$
d) $\sinh x \cos y$.

Soluzione : b)