ESAME 27 GIUGNO 2019

ESERCIZIO 1

1) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ \pi^2 - x^2 & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

prolungata per periodicità su $\mathbb{R}$ e sia $S(x)$ la somma dello sviluppo di Fourier associato, si chiede quanto valga $S(4\pi)$.

$$S(4\pi) = \frac{1}{2}\left[f(4\pi^+) + f(4\pi^-)\right] = \frac{1}{2}\left(\pi^2 - \pi^2\right) = 0$$

$\boxed{\text{RISPOSTA b}}$

2) Sia $f(z) = \dfrac{z}{z-8}$, $z \in \mathbb{C}$

e sia $\gamma(t) = e^{it} + i$, $t \in [0, 2\pi]$, si chiede quanto valga l'integrale $\int_\gamma f(z)\,dz$

Essendo l'unico polo di $f(z)$ in $z = 8$ e la curva una circonferenza di centro il punto $(0, i)$ e raggio unitario, il polo non ricade in essa, quindi l'integrale è uguale a zero.

$\boxed{\text{RISPOSTA c}}$

3) Si chiede quanto vale i^{2i}

$$z^{\beta} = e^{\beta \log z}$$

$$i^{2i} = e^{2i \log i} = e^{-\pi}$$

$$\log i = i\frac{\pi}{2}$$

$\boxed{\text{RISPOSTA c}}$

4) Si chiede la somma della serie

$$\sum_{K=0}^{+\infty} \frac{(\operatorname{sen} x)^{K-2}}{K!}$$

poniamo $t = \operatorname{sen} x$

$$\sum_{K=0}^{+\infty} \frac{t^{K-2}}{K!} = \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{t^K}{K!} \frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^2} \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{t^K}{K!} = \frac{e^t}{t^2}$$

ossia

$$\sum_{K=0}^{+\infty} \frac{(\operatorname{sen} x)^{K-2}}{K!} = \frac{e^{\operatorname{sen} x}}{(\operatorname{sen} x)^2}$$

$\boxed{\text{RISPOSTA c}}$

5) Si chiede il raggio di convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi^n}{2^n n^2} x^n$$

DA RISOLVERE :(

ESERCIZIO 2

i) Una serie bilatera è un'espressione del tipo

$$\sum_{-\infty<n<\infty} c_n (z-z_0)^n =$$

$$= \dots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots + c_n(z-z_0)^n + \dots$$

dove c_n sono numeri complessi

La somma di una serie bilatera è una funzione analitica in una corona circolare, i cui raggi, interno ed esterno, sono rispettivamente i raggi di convergenza della parte regolare e della parte singolare.

ii) Sia f una funzione analitica su una corona circolare C_{R_1, R_2} di centro z_0. Allora f è la somma di una serie bilatera, ossia vale il seguente sviluppo di Laurent

$$f(z) = \sum_{-\infty<n<\infty} c_n (z-z_0)^n$$

dove

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

e γ é una circonferenza di centro z_0 e raggio r con $R_1 < r < R_2$.

iii) DA SVOLGERE :(

ESERCIZIO 3

i) Data una successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definite in I e data $f: A \subseteq I \to \mathbb{R}$ si dice che $f_n \to f$ uniformemente in se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > \nu_\varepsilon \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$
$$\forall x \in A$$

ii) Data $f_n(x) = \log\left(\frac{3nx^2}{5+n}\right) \qquad x \neq 0$

studiamo la convergenza puntuale

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \log\left(\frac{3nx^2}{5+n}\right) = \log(3x^2)$$

la quale non converge, quindi non esiste nemmeno il limite uniforme

ESERCIZIO 4

i) Si definisce logaritmo principale in campo complesso

$$\mathrm{Log}\, z := \log|z| + i\,\mathrm{Arg}(z) = \log\rho + i\vartheta$$

ii) Essendo la funzione una ~~[illegible]~~ frazione fra funzioni ~~[illegible]~~ di soli parti immaginarie esse non sono olomorfe in nessun aperto in $\mathbb{C}$.

Mentre é definita e continua dove lo é

$\mathrm{Log}(2-iz)$, essendo e^{iz} continua e definita in tutto $\mathbb{C}$.

DA COMPLETARE ¨

ESERCIZIO 5

i) Una funzione nulla per $t<0$ e L-trasformabile viene chiamata segnale.

La sua ascissa di convergenza é così definita

$$\sigma[f] := \inf\{Re(s) : e^{-st}f(t) \text{ é sommabile}\}$$

ii) Si chiede di calcolare la trasformata di Laplace di

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t<1 \\ (t-1)^4 e^{-t+2} & t \geq 1 \end{cases}$$

$$L[t_+](s) = e^2 \frac{4!\, e^s(s+1)}{s^5} = \frac{e^{2s}\, 4!\,(s+1)}{s^5}$$

la cui ascissa di convergenza

$\sigma[f] > 0$