ESAME 24 LUGLIO 2019

ESERCIZIO 1

I) Si chiede l'antitrasformata di

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

, secondo Laplace

Dalle tavole si vede subito che

$f(t) = t^n e^{at}$ allora $F(s) = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ quindi

l'antitrasformata cercata è

$$f(t) = t e^t$$

$\boxed{\text{RISPOSTA a}}$

II) Si chiede il residuo di $f(z) = \dfrac{3}{iz} + \cos\left(\dfrac{1}{z}\right)$

in $z=0$

DA RISOLVERE :(

III) Si chiede l'aperto di olomorfia di $f(z) = z^{2i}$

tale funzione é definita come

$z^{2i} = e^{2i \log z}$, ed essendo il logaritmo complesso olomorfo in $\mathbb{C}^{**}$, anche la funzione data é olomorfa in $\mathbb{C}^{**}$ quindi l'aperto di olomorfia é $\mathbb{C}^{**}$

$\boxed{\text{RISPOSTA a}}$

IV) Si chiede a cosa sia uguale $(-\pi)^{\pi}$

si ha

$$(-\pi)^{\pi} = e^{\pi \log(-\pi)} = e^{\pi(\log|-\pi| + i \arg(-\pi))} =$$

$$= e^{\pi(\log|\pi| + i\pi)}$$

DA RISOLVERE ☹

V) Si chiede cosa ci sia in $z_0 = 2\pi i$ per la funzione $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(iz)}{(z - 2\pi i)^2}$, e si vede subito esserci un polo doppio

$\boxed{\text{RISPOSTA } c}$

ESERCIZIO 2

i) Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue definite in un intervallo $I = [a, b]$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$ tale che $f_n \to f$ uniformemente in I. Allora vale la seguente formula

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

ii) Essendo f limite uniforme di funzioni continue, allora essa é continua in $[a, b]$ e quindi integrabile. Per avere la tesi basta mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \nu_\varepsilon$ si abbia

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

D'altra parte, poiché $f_n \to f$ uniformemente, per ogni $\varepsilon' > 0$ esiste $\nu_{\varepsilon'} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \nu_{\varepsilon'}$ si ha

$$g_n = \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon'$$

Quindi, fissato $\varepsilon > 0$, se si sceglie $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{b-a}$ si ottiene per ogni $n \geq \nu_{\varepsilon'}$

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq$$

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)|(b-a) < \varepsilon'(b-a) < \varepsilon$$

iii) Si calcoli

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{nx^2+1}{n^2}\right) dx$$

la successione $\operatorname{sen}\left(\frac{nx^2+1}{n^2}\right)$ tende uniformemente a zero in $[0,1]$, in quanto $g_n = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = f_n(1) = \operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$ che per $n \to +\infty$ tende a zero.

Quindi per il teorema sopra enunciato e dimostrato si ha che

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{n x^2 + 1}{n^2}\right) dx = \int_0^1 0 \, dx = 0$$