Analisi Matematica II

Analisi complessa

Virginia De Cicco
Sapienza Univ. di Roma

Trasformate di Laplace

La trasformata di Laplace

Sia I un intervallo contenente il semiasse reale positivo: $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty) \subseteq I$ e sia $f : I \Longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione a valori reali o complessi.

Funzione L-trasformabile (o trasformabile secondo Laplace)

La funzione f è **L-trasformabile** (o trasformabile secondo Laplace) se $\exists\, s \in \mathbb{C}$ tale che la funzione $t \Longrightarrow e^{-st} f(t)$ è sommabile su $\mathbb{R}_+$, cioè tale che

$$\int_0^{+\infty} |e^{-st} f(t)| dt < +\infty.$$

In tal caso chiameremo **integrale di Laplace** l'integrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

Osservazione

Se l'integrale precedente converge per un assegnato $s = s_0$, cioè $e^{-st}f(t)$ è sommabile su $\mathbb{R}_+$, allora converge $\forall s \in \mathbb{C}$ tale che $Re(s) > Re(s_0)$.

Infatti

$$|e^{-st}\, f(t)| = e^{-Re(s)\, t}\,|f(t)| \leq e^{-Re(s_0)\, t}\,|f(t)| = |e^{-s_0 t}\, f(t)|,$$

e dunque $e^{-st}\, f(t)$ è maggiorata in modulo da una funzione sommabile ed è perciò sommabile a sua volta.

Osservazione

Si ha dunque che se l'insieme degli $s \in \mathbb{C}$ per cui

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

converge non è vuoto,

allora è costituito da un semipiano (destro), quello dei numeri complessi s per i quali si ha

$$\sigma = Re(s) > \sigma[f],$$

dove $\sigma[f]$ è l'estremo inferiore delle parti reali dei numeri $s \in \mathbb{C}$ per cui $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$ converge.

Trasformata di Laplace

Possiamo dunque dare la seguente
Definizione

Sia $f : I \Longrightarrow \mathbb{C}$ (dove $\mathbb{R}_+ \subseteq I$) una funzione L-trasformabile; posto

$$\sigma[f] := inf \left\{ Re(s) : e^{-st}\, f(t) \text{ è sommabile } \right\},$$

per ogni s tale che $Re(s) > \sigma[f]$ chiameremo **trasformata di Laplace** di f la funzione

$$\mathcal{L}[f](s) = F(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st}\, f(t)\, dt$$

(unilatera essendo $t > 0$).

Diremo inoltre che $\sigma[f]$ è l'ascissa di convergenza della funzione f.

La trasformata è un operatore funzionale lineare che associa ad una funzione di variabile reale una funzione di variabile complessa. La trasformata di Laplace rientra nella categoria delle trasformate integrali.

Si tratta di una trasformata integrale che gode di numerose proprietà, che la rendono utile in molti contesti. L'aspetto più vantaggioso è che l'integrale e la derivata di una funzione diventano rispettivamente una divisione e una moltiplicazione per la variabile complessa,
analogamente al modo in cui i logaritmi cambiano la moltiplicazione di numeri nella loro addizione.
Essa consente di trasformare le equazioni integrali e le equazioni differenziali in equazioni polinomiali, che sono più immediate da risolvere.
Inoltre nello spazio di Laplace la convoluzione diventa una moltiplicazione.

Osservazione

Se la funzione $f(t)$ è di ordine esponenziale α, cioè verifica una disuguaglianza del tipo

$$|f(t)| \leq M\, e^{\alpha\, t} \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

allora $\sigma[f] \leq \alpha$.

Infatti per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s) > \alpha$ si ha

$$|e^{-s\,t}\, f(t)| = e^{-Re(s)\,t}\, |f(t)| \leq e^{-Re(s)\,t}\, M\, e^{\alpha\, t} = Me^{(\alpha - Re(s))t}$$

e l'ultima funzione è sommabile in $\mathbb{R}_+$.

Si osservi inoltre che una funzione di ordine esponenziale $\alpha = 0$ è semplicemente una funzione limitata: $|f(t)| \leq M$.

Esempio 1

Consideriamo la cosiddetta funzione di Heaviside:

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si tratta quindi di vedere quando $e^{-s\,t}$ è sommabile su $\mathbb{R}_+$. Si ha

$$|e^{-s\,t}| = e^{-Re(s)\,t}$$

che risulta sommabile su $\mathbb{R}_+$ se (e solo se) $Re(s) > 0$. Dunque si ottiene $\sigma[f] = 0$ e la trasformata di Laplace si calcola come integrale improprio

$$\mathcal{L}[H](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}.$$

Si noti che la funzione ottenuta $\dfrac{1}{s}$ è definita e olomorfa in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ma essa è la trasformata di Laplace di $H(t)$ solo nel semipiano $Re(s) > 0$.

Esempio 2

Consideriamo $f(t) = e^{at}$ con $a = \alpha + i\,\beta$.

La funzione $t \Longrightarrow e^{-st}\,e^{at} = e^{-(s-a)t}$ è sommabile se (e solo se) $Re(s-a) = Re(s) - \alpha > 0$, cioè $Re(s) > \alpha$.

Dunque si ottiene $\sigma[f] = \alpha$.

Il calcolo della trasformata di Laplace in questo semipiano è simile a quello dell'esempio precedente

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}\,dt = \frac{1}{s-a}.$$

Per $a = 0$ si ritrova il risultato relativo alla funzione di Heaviside.

Esempio 3

Consideriamo l'impulso di durata $h > 0$:

$$\mathcal{X}_{[0,h)}(t) = H(t) - H(t-h) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < h \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si ha per $s \neq 0$

$$\mathcal{L}[\mathcal{X}_{[0,h)}](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, \mathcal{X}_{[0,h)}(t)\, dt = \int_0^h e^{-st}\, dt = \left[\frac{e^{-st}}{s} \right]_{t=h}^{t=0} = \frac{1-e^{-sh}}{s}.$$

C'è dunque una singolarità per $s = 0$, che risulta eliminabile:

$$\lim_{s \to 0} \mathcal{L}[\mathcal{X}_{[0,h)}](s) = \lim_{s \to 0} \frac{1-e^{-sh}}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{1-e^{-sh}}{sh}\, h = h = \mathcal{L}[\mathcal{X}_{[0,h)}](0).$$

Possiamo quindi concludere che la trasformata di Laplace, in questo caso, ha ascissa di convergenza $\sigma[f] = -\infty$; questo avviene, più in generale, ogni volta che $f = 0$ fuori di un insieme compatto, i.e. chiuso e limitato.

Esempio 4

Consideriamo l'impulso unitario di durata $h > 0$:

$$\delta_h(t) = \frac{\mathcal{X}_{[0,h)}(t)}{h}.$$

È detto unitario perchè si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_h(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \delta_h(t)\,dt = 1.$$

Sfruttando il risultato ottenuto nell'esempio precedente si trova facilmente

$$\mathcal{L}[\delta_h](s) = \frac{1 - e^{-hs}}{hs}$$

e si ha

$$\forall s \text{ fissato} \qquad \lim_{h \to 0} \mathcal{L}[\delta_h](s) = 1.$$

Esempio 4

Osserviamo, scegliendo $h = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$, che la successione di funzioni $\left\{\delta_{\frac{1}{n}}(t)\right\}$ è tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \delta_{\frac{1}{n}}(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ +\infty & t = 0, \end{cases}$$

dove la "funzione" a valori in $[0, +\infty]$ definita da

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ +\infty & t = 0 \end{cases}$$

viene detta "δ di Dirac".

Quindi si definisce $\mathcal{L}[\delta(t)] := \lim_{n\to+\infty} \mathcal{L}[\delta_{\frac{1}{n}}(t)] = 1$.

Proprietà della trasformata di Laplace

Linearità

La trasformata di Laplace è **lineare**,

cioè per ogni coppia f_1 e f_2 di funzioni L-trasformabili con ascisse di convergenza $\sigma[f_1]$ e $\sigma[f_2]$ rispettivamente e per ogni c_1, c_2 costanti si ha

$$\mathcal{L}[c_1 f_1 + c_2 f_2](s) = c_1 \mathcal{L}[f_1](s) + c_2 \mathcal{L}[f_2](s),$$

$$\forall s : \quad Re(s) > max \left\{ \sigma[f_1], \sigma[f_2] \right\}.$$

Trasformata di seno e coseno

Dall'esempio 2 troviamo

$$\mathcal{L}[e^{\pm\, i\omega t}](s) = \frac{1}{s \mp\, i\omega} \qquad \omega \in \mathbb{R}, \qquad Re(s) > 0.$$

Sfruttando la formula di Eulero e la linearità della trasformata otteniamo

$$\mathcal{L}[sen(\omega t)](s) = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{s - i\omega} - \frac{1}{s + i\omega}\right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \qquad Re(s) > 0$$

$$\mathcal{L}[cos(\omega t)](s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \qquad Re(s) > 0,$$

e dunque in particolare

$$\mathcal{L}[sen\, t](s) = \frac{1}{s^2 + 1} \qquad \mathcal{L}[cos\, t](s) = \frac{s}{s^2 + 1} \qquad Re(s) > 0.$$

Trasformata di seno iperbolico e coseno iperbolico

Ancora dall'esempio 2 troviamo

$$\mathcal{L}[e^{\omega t}](s) = \frac{1}{s-\omega} \qquad \omega \in \mathbb{R}, \qquad Re(s) > \omega,$$

$$\mathcal{L}[e^{-\omega t}](s) = \frac{1}{s+\omega} \qquad \omega \in \mathbb{R}, \qquad Re(s) > -\omega.$$

Per $Re(s) > |\omega|$ valgono entrambi i risultati, quindi da

$$senh(\omega t) = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} \qquad cosh(\omega t) = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}$$

segue che

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[senh(\omega t)](s) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s+\omega}\right] = \frac{\omega}{s^2-\omega^2} \\ \mathcal{L}[cosh(\omega t)](s) &= \frac{s}{s^2-\omega^2}, \end{aligned}$$

e dunque in particolare

$$\mathcal{L}[senh(t)](s) = \frac{1}{s^2-1} \qquad \mathcal{L}[cosh(t)](s) = \frac{s}{s^2-1}, \qquad Re(s) > 1.$$

Limitatezza

Proposizione

Sia f una funzione L-trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$;

allora per ogni $\sigma_0 > \sigma[f]$ la funzione $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ è limitata nel semipiano chiuso $Re(s) \geq \sigma_0$

e inoltre

$$\lim_{Re(s) \to +\infty} F(s) = 0.$$

L'ultima affermazione significa che se $\{s_n\}$ è una successione di punti per cui $\sigma_0 \leq \sigma_n := Re(s_n) \Longrightarrow +\infty$, allora

$$\lim_{n \to +\infty} F(s_n) = 0.$$

Derivata della trasformata di Laplace

Proposizione

Sia f una funzione L-trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$;

allora la funzione $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ è olomorfa nel semipiano $Re(s) > \sigma[f]$.

La funzione $t \longrightarrow -tf(t)$ è L-trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$

e abbiamo

$$F'(s) = \mathcal{L}[-tf(t)](s),$$

dove con $F'(s)$ si intende la derivata in campo complesso.

In generale si ha

$$F^{(n)}(s) = \mathcal{L}[(-t)^n f(t)](s) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)] \qquad Re(s) > \sigma[f]\,.$$

Moltiplicazione per t alla n-esima potenza

$$\mathcal{L}[t^n f(t)](s) = (-1)^n F^{(n)}(s).$$

Segnali

La definizione di trasformata coinvolge solo i valori di $f(t)$ per $t \geq 0$.

Se $f(t)$ è definita su $\mathbb{R}$ denotiamo

$$f_+(t) = \begin{cases} f(t) & t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

cioè $f_+(t) = H(t)\, f(t)$.

Ne segue che $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[f_+](s)$.

Definizione
Una funzione nulla per $t < 0$ e L-trasformabile viene chiamata **segnale**.

Trasformata della potenza

Consideriamo la funzione $t \Longrightarrow t_+^n$, con $n \in \mathbb{N}$.

Per $n = 0$ abbiamo $t^0 = 1$ e dunque la funzione t_+^0 coincide con $H(t)$.

La sua trasformata di Laplace è allora

$$\mathcal{L}[t_+^0](s) = \frac{1}{s} \qquad Re(s) > 0.$$

Trasformata della potenza

Per $n > 0$ riusciamo a scrivere la seguente formula ricorsiva

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t_+^n](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, t^n\, dt &= \left[\frac{-e^{-st}}{s}\, t^n\right]_{t=0}^{t=+\infty} + n\int_0^{+\infty} \frac{e^{-st}}{s}\, t^{n-1}\, dt = \\ &= \frac{n}{s}\,\mathcal{L}[t_+^{n-1}](s).\end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\mathcal{L}[t_+](s) = \frac{1}{s^2} \qquad \mathcal{L}[t_+^2](s) = \frac{2}{s^3}$$

e in generale

$$\mathcal{L}[t_+^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad Re(s) > 0.$$

Appello del 21 settembre 2011

(i) Si dia la definizione di trasformata di Laplace di un segnale $f(t)$.

(ii) Si stabilisca se le seguenti funzioni sono trasformate di Laplace di un segnale

$$F(s) = s^{12}, \qquad F(s) = \frac{1}{s^{12}}.$$

Soluzione:

(ii) La funzione $F(s) = s^{12}$ non può essere la trasformata di Laplace di un segnale per il fatto che essa non è limitata in alcun semipiano destro.

Al contrario, la funzione $F(s) = \frac{1}{s^{12}}$ è la trasformata di Laplace del segnale

$$f(t) = \frac{1}{(11)!} t^{11}.$$

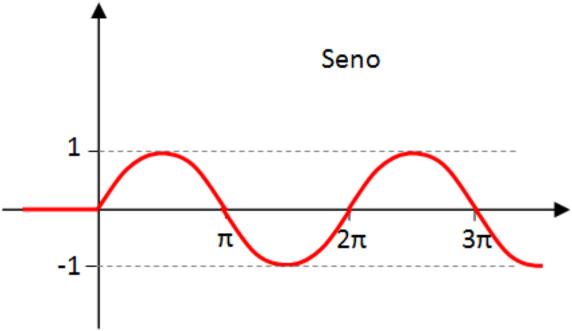
Proprietà

Riportiamo ora alcune proprietà (di facile verifica) della trasformata di Laplace nel caso in cui f sia un segnale.

- $\mathcal{L}[f(ct)](s) = \frac{1}{c}\mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{c}\right) \qquad \forall c > 0 : \ Re(s) > c\sigma[f]$;
- $\mathcal{L}[f(t-t_0)](s) = e^{-t_0 s}\mathcal{L}[f(t)](s) \qquad \forall t_0 > 0 : \ Re(s) > \sigma[f]$ (Traslazione nel tempo);
- $\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-a) \qquad \forall a \in \mathbb{C} : \ Re(s) > \sigma[f] + Re(a)$ (Traslazione complessa).

Esempio: il segnale seno

Segnale $f(t) = sen_+ t$:



$$\mathcal{L}[sen_+(t)] = \frac{1}{s^2+1}.$$

Esempio: il segnale seno

Usando la formula

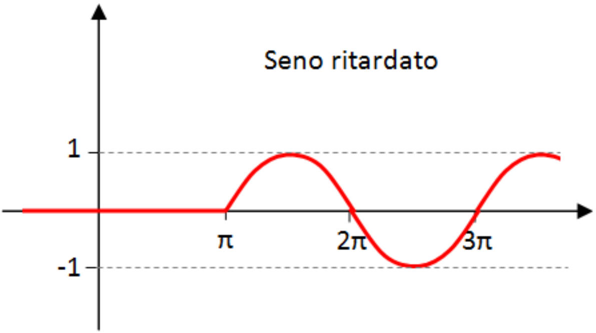
$$\mathcal{L}[f(ct)](s) = \frac{1}{c}\mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{c}\right) \qquad \forall c > 0 : \ Re(s) > c\sigma[f],$$

calcoliamo

$$\mathcal{L}[sen_+(\omega t)](s) = \frac{1}{\omega} \ \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Esempio: il seno ritardato

Segnale ritardato $f(t) = sen_+(t - \pi)$:



$$\mathcal{L}[f(t - t_0)](s) = e^{-t_0 s}\mathcal{L}[f(t)](s) \qquad \forall t_0 > 0 : \; Re(s) > \sigma[f]$$

$$\mathcal{L}[sen_+(t - \pi)] = e^{-\pi\, s}\,\frac{1}{s^2 + 1}.$$

Osservazione

La somma dei due segnali proposti è $sen\, t$ in $[0, \pi]$ e zero fuori

e si ha
$$\mathcal{L}[sen_+ t] + \mathcal{L}[sen_+(t-\pi)] = \frac{1 + e^{-\pi\, s}}{s^2+1}.$$

La trasformata calcolata è una funzione intera:

infatti, tanto il numeratore quanto il denominatore presentano zeri semplici in $s = \pm i$.

Siamo in perfetto accordo con il fatto che la trasformata di una funzione nulla fuori di un compatto è una funzione intera, cioè $\sigma[f] = -\infty$.

Appello del 19 Novembre 2013

(i) Si dia la definizione di trasformata di Laplace di un segnale $f(t)$.

(ii) Si calcolino le trasformate delle seguenti funzioni

$$f(t) = (t-2)^n\,,\ \ n \in \mathbb{N}\,,$$

$$g(t) = \sin(t-\pi)\,,$$

$$h(t) = e^{2t} \cos\, t\,.$$

Appello del 19 Novembre 2013

Soluzione: (ii) Richiamando che

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)](s) = e^{-t_0 s}\mathcal{L}[f(t)](s) \qquad \forall t_0 > 0, \forall s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > \sigma[f]$$

si ha che

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathcal{L}[(t-2)^n](s) = e^{-2s}\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \forall s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 0$$

e

$$\mathcal{L}[\sin(t-\pi)](s) = e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}, \quad \forall s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 0\,.$$

Richiamando che

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-a) \qquad \forall a \in \mathbb{C}\,, \quad \forall s \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Re}(s) > \sigma[f] + \mathrm{Re}(a)$$

si ha che

$$\mathcal{L}[e^{2t}\cos\, t](s) = \mathcal{L}[\cos\, t](s-2) = \frac{s-2}{(s-2)^2+1} \qquad \forall s \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Re}(s) > 2\,.$$

Appello del 17 Gennaio 2014

Domanda a risposta multipla

La trasformata di Laplace di

$$f(t) = \cos_+(t - \pi)$$

è la funzione

a) $F(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$ b) $F(s) = \frac{e^{-\pi s} s}{s^2+1}$

c) $F(s) = \frac{e^{-\pi s} s}{s^2+\pi}$ d) $F(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2+\pi}$.

Soluzione: b)

La trasformata di un segnale periodico

Si può dimostrare la seguente proposizione in cui si dà una formula per calcolare la trasformata di un segnale periodico.

Proposizione

Sia f un segnale periodico per $t \geq 0$ di periodo T, cioè $f(t+T) = f(t) \quad \forall t \geq 0$.

Se f è sommabile in $[0, T]$,

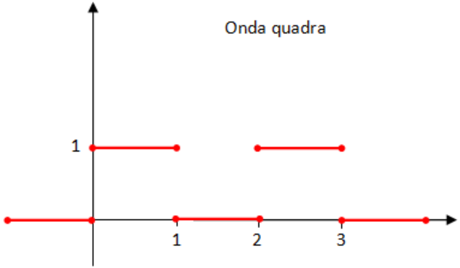
allora

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt \qquad Re(s) > 0.$$

Esempio: l'onda quadra

Consideriamo l'onda quadra:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 2n \leq t \leq 2n+1, \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



È un segnale periodico per $t \geq 0$ di periodo 2.

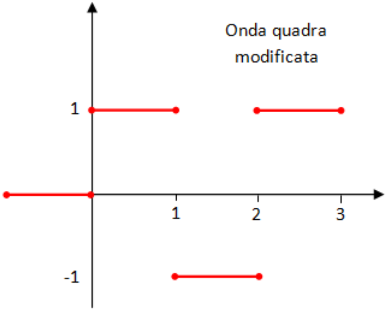
Esempio: l'onda quadra

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)](s) &= \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^1 e^{-st}\,dt = \frac{1}{1-e^{-2s}}\,\frac{1-e^{-s}}{s} = \\
&= \frac{1}{s}\,\frac{1}{1+e^{-s}} \qquad\qquad Re(s) > 0.
\end{aligned}
$$

Esempio: l'onda quadra modificata

Consideriamo l'onda quadra modificata:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 2n \leq t \leq 2n+1, \quad n \geq 0 \\ -1 & 2n+1 < t < 2n+2, \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



Esempio: l'onda quadra modificata

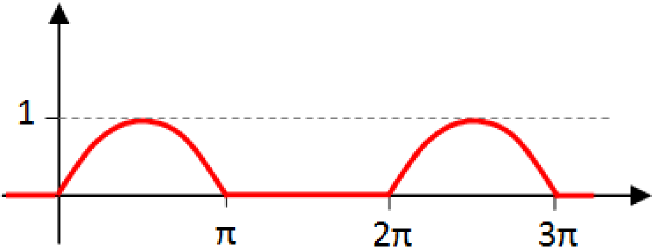
Allora si ottiene

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)](s) &= \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} f(t)dt = \frac{1}{1-e^{-2s}} \Big(\int_0^1 e^{-st}dt - \int_1^2 e^{-st}dt \Big) = \\
&= \frac{1}{1-e^{-2s}} \left(\left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t=0}^{t=1} - \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t=1}^{t=2} \right) = \\
&= \frac{1}{1-e^{-2s}} \Big(\frac{1}{s}(-e^{-s}+1) + \frac{1}{s}(e^{-2s}-e^{-s}) \Big) = \\
&= \frac{1}{1-e^{-2s}} \frac{1}{s}(e^{-2s}-2e^{-s}+1) = \\
&= \frac{1}{1-e^{-2s}} \frac{1}{s}(1-e^{-s})^2 = \frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})}.
\end{aligned}
$$

Esempio

Consideriamo ora il segnale 2π-periodico definito da

$$f(t) = \begin{cases} sen\, t & 2k\pi \le t \le (2k+1)\pi, \quad k \ge 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



Esempio:

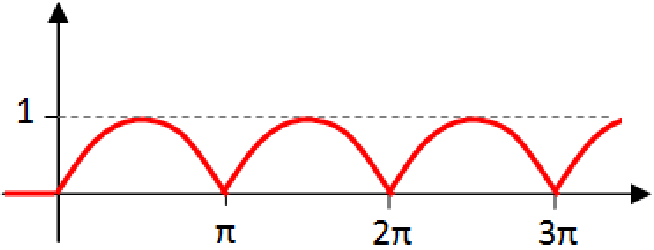
Si ottiene

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[f](s) &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \int_0^{\pi} e^{-st} sen\, t\, dt = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1} = \\
&= \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \frac{1}{s^2+1}.
\end{aligned}
$$

Nel calcolo abbiamo sfruttato il risultato precedente relativo a $\mathcal{L}[sen_+ t + sen_+(t-\pi)](s)$.

Esempio

Consideriamo il segnale π-periodico definito da $f(t) = |sen\, t|_+$.



Per esso si trova

$$\mathcal{L}[|sen|_+](s) = \frac{1}{1 - e^{-\pi s}} \int_0^{\pi} e^{-st} sen\, t\, dt = \frac{1}{1 - e^{-\pi s}} \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1}.$$

La trasformata della derivata

Studiamo il legame tra la trasformata di un segnale e la trasformata della sua derivata prima.

Teorema

Sia f un segnale continuo per $t \geq 0$,

derivabile con derivata prima continua a tratti e Laplace-trasformabile.

Allora si ha che $\forall s$ con $Re(s) > \max\{\sigma[f], \sigma[f']\}$

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\,\mathcal{L}[f](s) - f(0).$$

La trasformata gode di numerose proprietà, che la rendono utile in molti contesti. L′aspetto più vantaggioso è che la derivata di una funzione diventa una moltiplicazione per la variabile complessa.

La trasformata della derivata

Si può iterare il ragionamento:
se f è di classe C^1 e la sua derivata prima verifica le ipotesi del teorema precedente,
possiamo calcolare la trasformata di Laplace di f''.
Si trova

$$\mathcal{L}[f''](s) = s\,\mathcal{L}[f'](s) - f'(0) = s\,[s\,\mathcal{L}[f](s) - f(0)] - f'(0) =$$

$$= s^2\,\mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0).$$

In generale, se f è una funzione di classe C^{n-1} e la derivata di ordine $(n-1)$ verifica le ipotesi del teorema precedente, si trova

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n\,\mathcal{L}[f](s) - \left(s^{n-1}\,f(0) + s^{n-2}f'(0) + \cdots + f^{(n-1)}(0)\right).$$

La derivata di ordine n di una funzione diventa un polinomio nella variabile complessa.

Esempio

Consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

Applichiamo la trasformata di Laplace ai due membri dell'equazione differenziale precedente;
posto $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$ troviamo

$$\mathcal{L}[y'' + y](s) = s^2\, Y(s) - s\, y(0) - y'(0) + Y(s) = Y(s)\,(s^2 + 1) - 1 = 0,$$

(un problema differenziale diventa un problema algebrico)
da cui

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

che riconosciamo essere la trasformata di Laplace della funzione $y(t) = sen\, t$.

Prodotto di convoluzione

Siano f e g due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$; si definisce il prodotto di convoluzione di f e g tramite la formula

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t)\, g(x-t)\, dt.$$

Se f e g sono due segnali si ha

$$(f * g)(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x f(t)\, g(x-t)\, dt & x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si hanno le seguenti proprietà :

1. $(f * g)(x) = (g * f)(x)$ commutativa;
2. $((f * g) * h)(x) = (f * (g * h))(x)$ associativa
3. $(f * (g + h))(x) = (f * g)(x) + (f * h)(x)$ distributiva.

Prodotto di convoluzione

Teorema

Se f e g sono due segnali L-trasformabili con ascisse di convergenza $\sigma[f]$ e $\sigma[g]$ rispettivamente,

allora $(f * g)$ è L-trasformabile nel semipiano $Re(s) > max\,\{\sigma[f], \sigma[g]\}$,

e si ha

$$\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s).$$

Prodotto di convoluzione

Osservazione:
Si tratta di una trasformata integrale che gode di numerose proprietà, che la rendono utile in molti contesti. L′aspetto più vantaggioso è che l'integrale e la derivata di una funzione diventano rispettivamente una divisione (lo vedremo alla prossima slide) e una moltiplicazione per la variabile complessa, analogamente al modo in cui i logaritmi cambiano la moltiplicazione di numeri nella loro addizione.
Essa consente di trasformare le equazioni integrali e le equazioni differenziali in equazioni polinomiali, che sono più immediate da risolvere.
Inoltre nello spazio di Laplace la convoluzione diventa una moltiplicazione.

Esempio

Sia f un segnale L-trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$ e trasformata $F(s)$. Calcoliamone la convoluzione con la funzione di Heaviside.

$$(f * H)(t) = (H * f)(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau \qquad t > 0.$$

Si ottiene dunque la primitiva di f nulla nell'origine.
Per la trasformata di Laplace si trova

$$\mathcal{L}[H * f](s) = \mathcal{L}[H](s)\mathcal{L}[f](s) = \frac{F(s)}{s}, \qquad Re(s) > max\left\{0, \sigma[f]\right\}.$$

Quindi la primitiva nulla nell'origine ha come trasformata la trasformata di f divisa per s

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right](s) = \frac{\mathcal{L}[f](s)}{s}.$$

Quindi l'integrale e la derivata di una funzione diventano rispettivamente una divisione e una moltiplicazione per la variabile complessa.

Esempio

Sia $f(t) = t_+^{n-1}$. Ha come primitiva $\dfrac{t_+^n}{n}$ che si annulla nell'origine. Abbiamo

$$\mathcal{L}\left[\frac{t_+^n}{n}\right](s) = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}[t_+^{n-1}](s) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{L}\left[\frac{t_+^n}{n}\right](s) = \frac{n}{s}\,\mathcal{L}\left[\frac{t_+^{n-1}}{n}\right](s).$$

Esempio

Sia $\delta_h(t) = \dfrac{\mathcal{X}_{[0,h)}(t)}{h}$, con $h > 0$.
Abbiamo già visto che

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_h(t) = 1 \qquad \forall h > 0$$

e che

$$\mathcal{L}[\delta_h](s) = \frac{1 - e^{-sh}}{sh}.$$

Sia ora $f_h(t)$ la sua primitiva nulla per $t \leq 0$, i.e.

$$f_h(t) = \int_0^t \frac{\mathcal{X}_{[0,h)}(\tau)}{h}\, d\tau = \begin{cases} 1 & t > h \\ \dfrac{t}{h} & t \leq h \end{cases} \qquad \text{(rampa unitaria).}$$

Calcoliamo la sua trasformata:

$$\mathcal{L}[f_h](s) = \frac{1 - e^{-hs}}{hs}\,\frac{1}{s}, \quad Re(s) > 0.$$

Inversione della trasformata di Laplace

Studiamo una formula di inversione (detta di Riemann-Fourier), cioè uno strumento analitico per riottenere il segnale f a partire dalla sua trasformata F. Si possono dimostrare i due teoremi riportati qui di seguito.

Teorema
Sia f un segnale regolare a tratti e sia $F(s)$ la sua trasformata con ascissa di convergenza $\sigma[f]$.
Per ogni $\alpha > \sigma[f]$ si ha

$$\frac{1}{2\pi i}\ v.p. \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{st} F(s) ds = \frac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+)),$$

dove $f(t^-)$ ed $f(t^+)$ sono i limiti sinistro e destro in t.

Qui l'integrale a valor principale v.p. è definito come

$$v.p. \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} = \lim_{R \to +\infty} \int_{\alpha - iR}^{\alpha + iR}$$

Inversione della trasformata di Laplace

Corollario

In particolare, $\frac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+)) = f(t)$ nei punti t in cui $f(t)$ è continua. Quindi

$$\frac{1}{2\pi i} \ v.p. \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{st} F(s) ds = f(t),$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \ v.p. \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{st} F(s) ds,$$

Il teorema precedente dà una condizione sufficiente affinchè un segnale sia "ricostruibile" a partire dalla trasformata di Laplace nota.

Inversione della trasformata di Laplace

Il seguente teorema invece dà una condizione su $F(s)$ (che sia analitica in un certo semipiano) affinchè essa sia la trasformata di Laplace di un segnale $f(t)$ fornito dalla formula

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st}F(s)ds.$$

Teorema

Sia $s \in \mathbb{C} \mapsto F(s)$ una funzione analitica nel semipiano $\sigma = Re(s) > \sigma_0$ e tale che si abbia

$$|F(s)| \simeq \frac{1}{|s|^k}, \qquad |s| \to \infty,$$

con $k > 1$, i.e. $\lim_{|s|\to\infty} |F(s)||s^k| = c > 0$.

Allora per ogni $\alpha > \sigma_0$ la formula

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st}F(s)ds$$

definisce un segnale continuo su $\mathbb{R}$, indipendente da α, avente la F come trasformata.

Inversione della trasformata di Laplace

Sia $F(s)$ una funzione razionale fratta tale che il grado del numeratore sia minore di quello del denominatore (ci si può sempre ricondurre a ciò).

Se il grado del numeratore è inferiore almeno di due unità rispetto a quello del denominatore, si può applicare il risultato precedente.

Altrimenti, se la differenza dei due gradi è uno, si ha $F(s)$ nella forma

$$F(s) = \frac{c}{s} + \bar{F}(s),$$

con $\bar{F}$ del tipo precedente.

Esempio

Consideriamo $F(s) = \dfrac{s}{s^2+1}$ che sappiamo essere la trasformata di $cos\, t$.
$F(s)$ è analitica ed inoltre

$$|F(s)| \simeq \frac{1}{|s|} \qquad |s| \to \infty \qquad \text{(dunque } k = 1\text{).}$$

Possiamo scrivere

$$F(s) = \frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s} + \left(\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s} + \left(\frac{s^2 - s^2 - 1}{s(s^2+1)}\right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s(s^2+1)}.$$

Il primo addendo è la trasformata di $H(t)$.

Il secondo è la trasformata di

$$(sen\, t * H(t)) = \int_0^{+\infty} sen\, \tau\, H(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t sen\, \tau d\tau = 1 - cos\, t \qquad t \geq 0.$$

Dunque sommando si ottiene $cos\, t$.

Inversione della trasformata di Laplace

Osserviamo che la funzione $f(t)$ data dalla formula di inversione può essere determinata nel seguente modo:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{st} F(s) ds = \sum_{j=1}^{n} res(e^{st} F(s), s_j),$$

dove gli s_j sono i punti singolari della funzione $e^{st} F(s)$.

Questa formula è dovuta essenzialmente al teorema dei residui e ad una variante del lemma di Jordan e viene utilizzata negli esercizi per ricostruire il segnale.

Esempio di antitrasformata

Consideriamo $F(s) = \dfrac{s}{(s-1)^2}$ e determiniamo il segnale di cui è la trasformata.

Per determinarlo applichiamo la decomposizione in fratti semplici:

$$F(s) = \frac{s}{(s-1)^2} = \frac{a}{(s-1)} + \frac{b}{(s-1)^2}, \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Svolgendo i conti si trova $a = 1$, $b = 1$ e dunque

$$F(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Allora si ottiene facilmente che il segnale è $f(t) = e^t + te^t$.

Appello del 30 maggio 2012

(i) Si discuta l'esistenza o meno dell'antitrasformata delle seguenti funzioni:

$$f_1(s) = \frac{1}{s-4}\ , \qquad f_2(s) = \frac{1}{\sin(s-4)}\ , \qquad f_3(s) = \frac{1}{(s-4)^2}\ ,$$

$$f_4(s) = \frac{e^{-2s}}{s-4}\ , \qquad f_5(s) = \frac{\sin(s-4)}{s-4}\ , \qquad f_6(s) = \frac{1}{s^2-4}\ .$$

(ii) Si calcoli l'antitrasformata laddove essa esiste e negli altri casi si motivi la non esistenza dell'antitrasformata usando le condizioni necessarie.

Appello del 30 maggio 2012

Soluzione: L'antitrasformata di

$$F_1(s) = \frac{1}{s-4}$$

è

$$f_1(t) = e^{4t};$$

l'antitrasformata di

$$F_2(s) = \frac{1}{\sin(s-4)}$$

non esiste in quanto questa funzione non è olomorfa su alcun semipiano destro, a causa degli infiniti punti in cui si annulla il denominatore;
l'antitrasformata di

$$F_3(s) = \frac{1}{(s-4)^2}$$

è

$$f_3(t) = te^{4t};$$

Appello del 30 maggio 2012

l'antitrasformata di

$$F_4(s) = \frac{e^{-2s}}{s-4}$$

è

$$f_4(t) = e^{4(t-2)};$$

l'antitrasformata di

$$F_5(s) = \frac{\sin(s-4)}{s-4}$$

non esiste in quanto questa funzione non è limitata su alcun semipiano destro;
l'antitrasformata di

$$F_6(s) = \frac{1}{s^2-4}$$

è

$$f_6(t) = \frac{1}{2}\sinh(2t)\,.$$

Appello del 26 giugno 2013

Domanda a risposta multipla

L'antitrasformata di Laplace della funzione

$$F(s) = e^{-3s} \frac{s}{s^2 - 3}$$

è

a) $f(t) = \cosh(\sqrt{3}(t-3))$

b) $f(t) = \cosh(\sqrt{3}t - 3)$

c) $f(t) = \cosh(t - \sqrt{3})$

d) $f(t) = \cosh(3t - \sqrt{3})$.

Soluzione: a)

Da Casalvieri-De Cicco

Si calcoli l'antitrasformata $f(t) = L^{-1}[F(s)](t)$ delle seguenti funzioni:

(a) $F(s) = \frac{se^{-3s}}{s^2-3}$

(b) $F(s) = \frac{s}{4s^2+5}$

Da Casalvieri-De Cicco

Soluzioni

(a) Utilizzando la formula della traslazione con $t_0 = 3$ si ricava che

$$L^{-1}\left[\frac{se^{-3s}}{s^2-3}\right](t) = L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-3}\right](t-3).$$

Si ha che

$$L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-3}\right](t) = \cosh\left(\sqrt{3}t\right)$$

e quindi

$$f(t) = L^{-1}\left[\frac{se^{-3s}}{s^2-3}\right](t) = \cosh\left[\sqrt{3}(t-3)\right].$$

(b) Raccogliendo il fattore 4 a denominatore si può scrivere

$$F(s) = \frac{1}{4} \cdot \frac{s}{s^2 + \frac{5}{4}}.$$

Utilizzando la proprietà di linearità si ricava che

$$f(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{4}\frac{s}{s^2 + \frac{5}{4}}\right](t) = \frac{1}{4}L^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + \frac{5}{4}}\right](t) = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right).$$

Da Casalvieri-De Cicco

Si calcoli l'antitrasformata $f(t) = L^{-1}[F(s)](t)$ della seguente funzione:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+2)}\right](t).$$

Da Casalvieri-De Cicco

Soluzione:
Utilizzando il metodo dei residui, si ottiene per il polo semplice $s = -2$

$$res\left(\frac{e^{st}}{s^2(s+2)}, -2\right) = \lim_{s\to -2} \frac{e^{st}}{s^2(s+2)}(s+2) = \frac{1}{4}e^{-2t}$$

mentre, per il polo doppio $s = 0$

$$res\left(\frac{s^{st}}{s^2(s+2)}, 0\right) = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}\left(\frac{e^{st}}{s^2(s+2)}s^2\right)$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}\left(\frac{e^{st}}{s+2}\right) = \lim_{s\to 0} \frac{te^{st}(s+2) - e^{st}}{(s+2)^2} = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}.$$

Pertanto

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+2)}\right](t) = res\left(\frac{e^{st}}{s^2(s+2)}, -2\right)$$

$$+res\left(\frac{e^{st}}{s^2(s+2)}, 0\right) = \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}.$$

Riepilogo formule

Riportiamo le proprietà fondamentali della trasformata di Laplace di un segnale $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$.

Definizione:

$$L[f](s) = F(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

Ascissa di convergenza:

$$\sigma(f) := \inf \left\{ \mathrm{Re}\, s \ : \ \int_0^{+\infty} |e^{-st} f(t)| dt < +\infty \right\}$$

Linearità:

$$L[c_1 f_1 + c_2 f_2](s) = c_1 L[f_1](s) + c_2 L[f_2](s) \qquad \mathrm{Re}\, s = \max\{\sigma(f_1), \sigma(f_2)\}$$

Riepilogo formule

Derivabilità:

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n L\left[t^n f(t)\right] \qquad \mathrm{Re}\, s > \sigma(f)$$

$$L\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n F^{(n)}(s) \qquad \mathrm{Re}\, s > \sigma(f)$$

Dilatazione/contrazione:

$$L[f(ct)](s) = \frac{1}{c} L[f(t)]\left(\frac{s}{c}\right), \ \forall c > 0 \qquad \mathrm{Re}\, s \geq c\sigma(f)$$

Traslazione temporale:

$$L[f(t - t_0)](s) = e^{-t_0 s} L[f(t)](s), \quad \forall t_0 > 0 \qquad \mathrm{Re}\, s > \sigma(f)$$

Traslazione complessa:

$$L[e^{at} f(t)](s) = L[f(t)](s - a), \quad \forall a \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{Re}\, s > \sigma(f) + \mathrm{Re}(a)$$

Riepilogo formule

Trasformata di un segnale di periodo T:

$$L[f](s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt \qquad \mathrm{Re}\, s > 0$$

Trasformata della derivata:

$$\begin{aligned} L[f'](s) &= sL[f](s) - f(0), && \mathrm{Re}\, s > \sigma(f) \\ L[f''](s) &= s^2 L[f](s) - sf(0) - f'(0), && \mathrm{Re}\, s > \sigma(f) \end{aligned}$$

Prodotto di convoluzione:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau, \quad t \geq 0$$

Riepilogo formule

Trasformata del prodotto di convoluzione:

$$L[f * g](s) = L[f](s) \cdot L[g](s), \quad \mathrm{Re}\, s > \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}$$

Formula di inversione:

$$f(t) = L^{-1}[F](t) = \sum_{j=1}^{n} res\left(e^{st} F(s), s_j\right)$$

dove s_j, $j = 1, ..., n$ sono i punti singolari della funzione $e^{st}\, F(s)$.

Linearità dell'antitrasformata:

$$L^{-1}[c_1 F_1 + c_2 F_2](t) = c_1 L^{-1}[F_1](t) + c_2 L^{-1}[F_2](t)$$

Problemi di Cauchy

Consideriamo il problema di Cauchy per un'equazione lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti, non omogenea:

$$\begin{cases} y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t) & t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \quad y'(0) = y_1, \end{cases}$$

con $g(t)$ funzione L-trasformabile e $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$.

La funzione $y(t)$ è un segnale e dunque è nullo per $t \leq 0$; per questo motivo i dati iniziali assegnati nell'origine vanno interpretati come valori limite da destra.

Problemi di Cauchy

Applicando la trasformata di Laplace all'equazione e sfruttando la formula per la trasformata di una derivata si ha,
posto $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$

$$s^2 Y(s) - sy_0 - y_1 + a(sY(s) - y_0) + bY(s) = \mathcal{L}[g](s),$$

cioè

$$(s^2 + as + b)Y(s) = y_0(s + a) + y_1 + \mathcal{L}[g](s),$$

e dunque si trova

$$Y(s) = \frac{y_0(s + a) + y_1}{s^2 + as + b} + \frac{\mathcal{L}[g](s)}{s^2 + as + b} =: Y_1(s) + Y_2(s).$$

Il polinomio $s^2 + as + b$ si chiama polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$.
A questo punto dobbiamo antitrasformare per ottenere il segnale $y(t)$.

Problemi di Cauchy omogenei

Nel caso con $g(t) = 0$ (equazione omogenea) la trasformata di Laplace della soluzione è $Y(s) = Y_1(s) = \dfrac{y_0(s+a) + y_1}{s^2 + as + b}$,

dunque una funzione razionale fratta propria;

questa circostanza si verifica per ogni equazione differenziale lineare a coefficienti costanti omogenea, indipendentemente dall'ordine.

Sappiamo antitrasformare per risalire al segnale utilizzando le tecniche viste.

Problemi di Cauchy omogenei

In particolare consideriamo $y_0 = 0$ e $y_1 = 1$

$$\begin{cases} y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t) & \quad t \geq 0 \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 1, \end{cases}$$

si trova la soluzione è $Y(s) = Y_1(s) = \dfrac{1}{s^2 + as + b}$.

Problemi di Cauchy non omogenei

Nel caso con $g(t) \neq 0$

la trasformata di Laplace della soluzione è

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = \frac{y_0(s+a) + y_1}{s^2 + as + b} + \frac{\mathcal{L}[g](s)}{s^2 + as + b}.$$

Il primo termine $Y_1(s) = \dfrac{y_0(s+a) + y_1}{s^2 + as + b}$ lo sappiamo antitrasformare;

il secondo termine è $Y_2(s) = \mathcal{L}[g](s) \dfrac{1}{s^2 + as + b} = \mathcal{L}[g * \bar{y}](s)$,

dove $\bar{y}(t)$ è detta **soluzione fondamentale** e verifica il problema

$$\begin{cases} \bar{y}''(t) + a\bar{y}'(t) + b\bar{y}(t) = 0 \qquad t \geq 0 \\ \bar{y}(0) = 0 \quad \bar{y}'(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzione fondamentale

Osservazione Sia dato il problema

$$\begin{cases} y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0 \qquad t \geq 0 \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

Se si considera il segnale $y_+(t)$, cioè la funzione nulla per $t < 0$ e coincidente con $y(t)$ per $t \geq 0$,

si trova che essa è continua in 0, ma non C^1 poichè la derivata ha una discontinuità di salto nell'origine pari ad 1.

Dunque $y_+(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale considerata negli intervalli $t < 0$ e $t > 0$, mentre nell'origine la derivata non esiste.

Soluzione fondamentale

Non è quindi una soluzione in senso "classico", ma lo è nel senso delle distribuzioni,

cioè una soluzione dell'equazione

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = \delta,$$

dove δ indica la delta di Dirac.

Per quanto appena detto la soluzione fondamentale va anche sotto il nome di **risposta all'impulso di Dirac** o **risposta impulsiva**.

Problemi di Cauchy

Esempio

Consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) + 9y(t) = H(t-1) & t \geq 0 \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Trasformando ambo i membri dell'equazione si trova,

posto $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$

$$(s^2 + 9)Y(s) = \frac{e^{-s}}{s} \qquad \Longrightarrow \qquad Y(s) = \frac{e^{-s}}{s(s^2+9)}.$$

Antitrasformando si ottiene

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{9}\left(1 - cos(3(t-1))\right) & t \geq 1 \\ 0 & t < 1. \end{cases}$$

Problemi di Cauchy

Esempio

Consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 3 \\ y(5) = 0 \quad y'(5) = 1. \end{cases}$$

Le condizioni non sono assegnate in 0.

Si cerca dunque di ricondursi ad un problema con condizioni iniziali in 0 (si può fare perchè il secondo membro è invariante per traslazioni).

Si pone, allora, $\bar{y}(t) = y(t+5)$ e si ha che $\bar{y}(t)$ deve soddisfare il problema

$$\begin{cases} \bar{y}^{''}(t) + \bar{y}(t) = 3 \\ \bar{y}(0) = 0 \quad \bar{y}^{'}(0) = 1. \end{cases}$$

Problemi di Cauchy

Trasformando entrambi i membri dell'equazione si ottiene che la trasformata di Laplace della soluzione è

$$Y(s) = \frac{3}{s(s^2+1)} + \frac{1}{s^2+1} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s-i} + \frac{c}{s+i} + \frac{1}{s^2+1}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Risolvendo si trova $a = 3,\ b = -\dfrac{3}{2},\ c = -\dfrac{3}{2}$.
Si riesce dunque facilmente ad antitrasformare:

$$\bar{y}(t) = sen\, t + 3 - \frac{3}{2}(e^{-it} + e^{it}) = sen\, t + 3(1 - cos\, t).$$

A questo punto si può scrivere la soluzione del problema:

$$y(t) = sen(t-5) + 3(1 - cos(t-5)).$$

Esempio

Consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 0 \qquad t \geq 0 \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

Trasformando ambo i membri si trova

$$(s^2 + 4s + 3)Y(s) = 1 \quad \leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} = \frac{1}{(s+1)(s+3)}.$$

Possiamo quindi scrivere

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{2} - \frac{e^{-3t}}{2}.$$

Problemi di Cauchy

Osserviamo che la trasformata di Laplace consente ovviamente di risolvere anche problemi di Cauchy del primo ordine. Diamo il seguente esempio.

Esempio

Consideriamo il seguente problema di Cauchy per un'equazione del primo ordine:

$$\begin{cases} y'(t) - y(t) = H(t-1) & t \geq 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

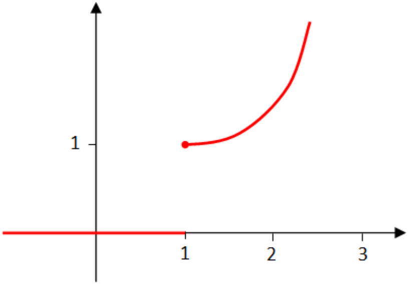
dove H è la funzione di Heaviside.
Si ha

$$Y(s) = \frac{e^{-s}}{s(s-1)} \quad \Longrightarrow \quad y(t) = \begin{cases} -1 + e^{t-1} & t \geq 1 \\ 0 & 0 \leq t < 1. \end{cases}$$

Problemi di Cauchy

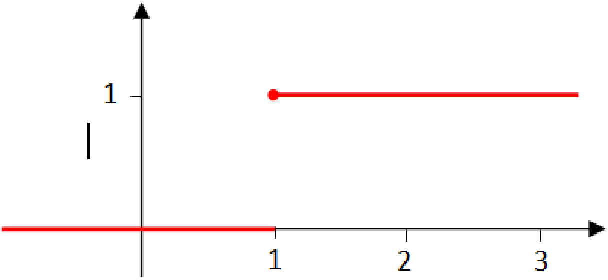
Si può osservare facilmente che $y(t)$ è continua, mentre la sua derivata prima no:

$$y'(t) = \begin{cases} e^{t-1} & t > 1 \\ 0 & 0 \leq t < 1. \end{cases}$$



Problemi di Cauchy

Questo è dovuto al salto che il termine noto (funzione di Heaviside) ha in $t = 1$:



Si dice che $y(t)$ riceve un impulso in $t = 1$.

Problemi di Cauchy

Esempio

Vogliamo risolvere, tramite la trasformata di Laplace, il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = te^t \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Trasformiamo entrambi i membri dell'equazione:

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2+1} + \frac{1}{(s^2+1)(s-1)^2} = Y_1(s) + Y_2(s).$$

Per $Y_1(s)$ si ha

$$Y_1(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} \qquad \Longrightarrow \qquad y_1(t) = cos\, t + sen\, t.$$

Mentre per $Y_2(s)$:

$$Y_2(s) = \mathcal{L}[te^t]\, \mathcal{L}[sen\, t] \qquad \Longrightarrow \qquad y_2(t) = te^t\, *\, sen\, t.$$

Mettendo insieme y_1 e y_2 si può scrivere

$$y(t) = cos\, t + sen\, t + te^t\, *\, sen\, t.$$

Problemi di Cauchy

Alla stessa conclusione si poteva arrivare facendo la somma dei residui: occupiamoci ad esempio di

$$Y_1(s) = \frac{s+1}{s^2+1}.$$

I punti singolari sono $s = \pm i$ e sono poli di ordine 1; calcoliamo allora

$$res\left(\frac{e^{st}(s+1)}{s^2+1}, i\right) = \lim_{s\to i}\left(\frac{e^{st}(s+1)}{s+i}\right) = \frac{e^{it}(i+1)}{2i};$$

$$res\left(\frac{e^{st}(s+1)}{s^2+1}, -i\right) = \lim_{s\to i}\left(\frac{e^{st}(s+1)}{s-i}\right) = \frac{e^{-it}(-i+1)}{-2i}.$$

E dunque si ha

$$y_1(t) = \frac{e^{it}(i+1)}{2i} + \frac{e^{-it}(-i+1)}{-2i} = cos\, t + sen\, t.$$

Determinando i residui per $Y_2(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)(s-1)^2}$ si trova

$$y_2(t) = \frac{te^t - e^t}{2} + \frac{1}{2} cos\, t.$$

Problemi di Cauchy

La trattazione fatta fino ad ora si estende in maniera naturale a problemi di ordine maggiore di 2:

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = g(t) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Appello del 9 marzo 2011

(i) Usando la trasformata di Laplace, si cerchi il segnale $y_n = y_n(t)$ soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_n''(t) + y_n(t) = \frac{1}{n}\,, \qquad t \geq 0 \\ y_n(0) = 1, \qquad y_n'(0) = 0\,. \end{cases}$$

(ii) Si calcoli la funzione limite della successione di funzioni y_n .

Appello del 9 marzo 2011

Soluzione: (i) Usando la trasformata di Laplace, si ha

$$s^2 Y(s) - s + Y(s) = L\left[\frac{1}{n}\right](s)\,,$$

da cui

$$Y(s) = \frac{s + L\left[\frac{1}{n}\right](s)}{s^2+1}\,.$$

Quindi

$$y_n(t) = \cos\, t + \left(\sin\, t * \frac{1}{n}\right) = \cos\, t - \frac{1}{n}\cos\, t + \frac{1}{n}\,.$$

(ii) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} y_n(t) = \cos\, t\,.$$

Appello del 21 giugno 2012

Si risolva il seguente problema di Cauchy, usando la trasformata di Laplace ed il metodo della convoluzione

$$\begin{cases} y''(t) - y'(t) = e^{2t}\,, & t \geq 0 \\ y(0) = 0, \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Appello del 21 giugno 2012

Soluzione:
Usando la trasformata di Laplace si ha

$$s^2 Y(s) - 1 - sY(s) = Ł \left[e^{2t}\right](s),$$

da cui

$$Y(s) = \frac{1 + L\left[e^{2t}\right](s)}{s^2 - s} = \frac{1}{s(s-1)} + \frac{L\left[e^{2t}\right](s)}{s(s-1)} =$$

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \left[-\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}\right] L\left[e^{2t}\right](s).$$

Quindi

$$y(t) = -1 + e^t + (-1 + e^t) * e^{2t} = -1 + e^t - e^t + \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}.$$