Mathe 26.01.2021

Abiturprüfung 2017

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a durch die Funktionsgleichung

$f_a(x) = x^2 \cdot e^{-ax}$ mit $a > 0$.

Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet

---

a) (1)

- Gegeben: $P(1|0.5)$
- Ansatz: $f_a(1) = 0.5$

$0.5 = 1 \cdot e^{-a}$
$a = -\ln 0.5$

---

a) (2)

- Gesucht: Extrema

Nebenrechnung: $f'_a(x)$ mithilfe der Produktregel

$f'_a(x) = f'_{a1}(x) \cdot f_{a2}(x) + f_{a1}(x) \cdot f'_{a2}(x)$
$f_{a1}(x) = x^2$
$f'_{a1}(x) = 2x$
$f_{a2}(x) = e^{-ax}$
$f'_{a2}(x) = -ae^{-ax}$

$f'_a(x) = 2xe^{-ax} - ax^2e^{-ax}$
$f'_a(x) = x \cdot e^{-ax} \cdot (2 - ax)$

Notwendige Bed.: $f'_a(x) = 0$

$0 = x \cdot e^{-ax} \cdot (2 - ax)$

Satz vom Nullprodukt

$x = 0$

$2 - ax = 0$
$x = \frac{2}{a}$

- **Nullstellen liegen bei:** $x \in \{0; \frac{2}{a}\}$

Koordinaten der Extremstellen

$f_a(0) = 0$
$f_a(\frac{2}{a}) = (\frac{2}{a})^2 e^{-2}$

Hinreichende Bed.: $f_a'(x) = 0 \land f_a''() \neq 0$

$f_a''(0) = 2$
$f_a''(\frac{2}{a}) = -2 \cdot e^{-2}$

- **Tiefpunkt** $T(0|0)$

- **Hochpunkt** $H(\frac{2}{a}|(\frac{2}{a})^2 e^{-2})$

---

a) (3)

Der Hochpunkt von G_a liegt immer im ersten Quadranten, da sofern die Bedingung $a > 0$ erfüllt wird, sowohl x_1, als auch x_2 immer positiv sind.
Da a in x_1 und in x_2 im Nenner steht ist ein größerer Wert von a mit kleineren Werten > 0 für x_1 und x_2 verbunden.

$a \to \infty \Rightarrow H_{x_1} \to 0$
$a \to \infty \Rightarrow H_{x_2} \to 0$

---

a) (4)

- Um $g(x)$ zu bilden ist es möglich den Hochpunkt in der Funktion auszuschreiben

$f_a(\frac{2}{a}) = (\frac{2}{a})^2 e^{-2}$

- hier kann nun $\frac{2}{a}$ durch x ersetzt werden

$x = \frac{2}{a}$
$f_H(x) = x^2 e^{-2}$

ich habe die Funkion von f_a zu f_H umbenannt, da diese neue Funktion kein Schar mehr ist und nicht dem ursprünglichen $f_a(x)$ entspricht. (Sie können mir gerne erklären, wie ich das richtig zu schreiben habe)

- und schon ist g(x) gebildet

$f_H(x) = g(x)$

- um nun zu beweisen, dass diese Funktion auch für den Tiefpunkt funktioniert, kann dieser in die Funktion einfach eingesetzt werden

$g(0) = \frac{0^2}{e^2} = 0$

- in der Tat, $g(x)$ beinhaltet alle Extrempunkte von G_a

---

b) (1)

- Ansatz: Funktion für die Fläche des Dreiecks aufstellen und das Maximum bestimmen

Dreickesflächenfunktion mit Grundseite b und Höhe $f_{0.2}(b)$

$d(x) = 0.5 \cdot b \cdot f_{0.2}(b)$
$d(x) = 0.5 \cdot b \cdot b^2 \cdot e^{-0.2b} = 0.5b^3 \cdot e^{-0.2b}$

Maximum mithilfe des GTR bestimmen. (GTR->GRAPH->MAX)

$b = 15$

Grenzwerte überprüfen

$d(0) = 0$
$d(100) = 1.03 \cdot 10^{-3}$

Flächeninhalt bestimmen

$d(15) = 0.5(15)^3 \cdot e^{-0.2 \cdot 15} = 1687.5 \cdot e^{-3} \approx 84.016$

---

b) (2).1

- Ansatz: Integral für $G_{0.2}$ von 0 bis p

$\int_0^p f_{0.2}(x)dx$

$F_{0.2}(x) = -(5x^2 + 50x + 250) \cdot e^{\frac{-x}{5}}$

$\int_0^p f_{0.2}(x)dx = F_{0.2}(p) - F_{0.2}(0)$
$\int_0^p f_{0.2}(x)dx = -(5p^2 + 50p + 250) \cdot e^{\frac{-p}{5}} + 250$

---

b) (2).2

- $(5p^2 + 50p + 250)$ ist durch die gerade größte Potenz und die 250 immer positiv
  - $0 = 5p^2 + 50p + 250$ hat keine Lösungen, weswegen es nicht 0 sein kann

- $e^{\frac{-p}{5}}$ ist immer positv, da e^x immer positiv ist
- $(-) \cdot (+) \cdot (+) + 250 = 250 + (-) < 250$

---

c) (1)

Der Graph von k ist eine gespiegelte und (um den Faktor 0.3) gestauchte Abwandlung des Graphen G.

---

c) (2)

- Ansatz: $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| + |\overline{CD}| + |\overline{DE}|$

Berechnung von $|\overline{BC}|$

$$k(5) = -0.3 \cdot f_{0.2}(5) \approx -2.759$$
$$k(10) = -0.3 \cdot f_{0.2}(10) \approx -4.06$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(10-5)^2 + (k(10) - k(5))^2} \approx 5.166$$

Berechnung der Länge

$$|\overline{AB}| + |\overline{BC}| + |\overline{CD}| + |\overline{DE}| \approx 5.71 + 5.17 + 5.05 + 5.13 = 21.06$$

---

c) (3)

Die Genauigkeit dieser Metodik ist durch die Abstände und Anzahl der Punkte zu verändern. Mehr Punkte mit kleineren Abständen führen zu höherer Genauigkeit.