Mise au propre des TDs de calculabilité

Yann Miguel

4 février 2020

Table des matières

1 TD1

1.1 Exercice 1

1.1.1 Question 1

Cinq éléments de l'ensemble $\mathbb{N}$ x {0, 1, a} sont:

1. (0, 0)
2. (0, 1)
3. (0, a)
4. (1, 0)
5. (1, 1)

Cela revient donc à faire le produit carthésien entre l'ensemble $\mathbb{N}$ et
l'ensemble {0, 1, a}.

1.1.2 Question 2

Une bijection de $\mathbb{N}$ dans $2\mathbb{N}$ est:

$$f \ : \ x \to 2x$$

1.1.3 Question 3

Une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$x$\mathbb{N}$ est :

$$g \ : \ (x, y) \to \frac{(x+y)(x+y-1)}{2} + y$$

1.1.4 Question 4

Une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$x$\mathbb{N}$x$\mathbb{N}$ est:

$$h \ : \ (x, y, z) \to g(g(x, y), z)$$

1.2 Exercice 2

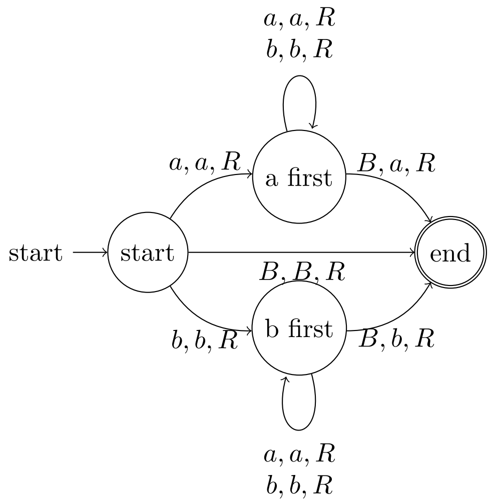

FIGURE 1 – Cette machine de turing rajoute la première lettre d'un mot à la fin du dit mot.

1.3 Exercice 3

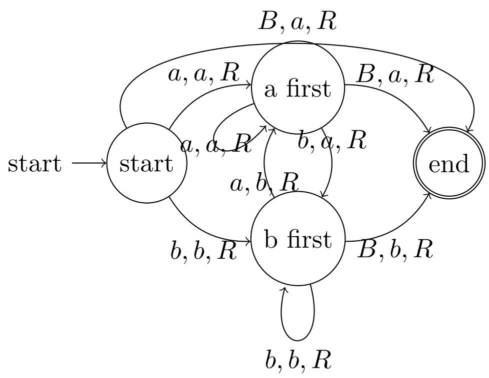

FIGURE 2 – Machinde de turing de décalage avec ajout de a au début

1.4 Exercice 4

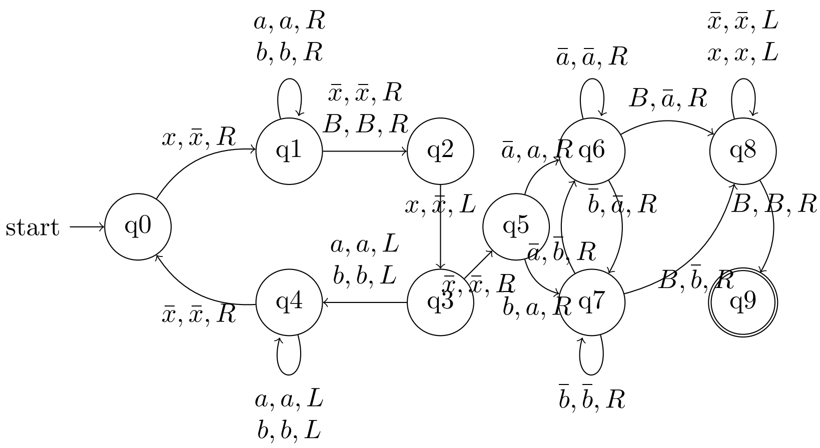

Figure 3 – Utilisation d'une MT pour en faire une autre

1.5 Exercice 5

1.5.1 Question 1

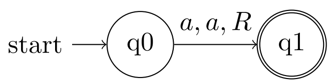

Figure 4 – Vérifie qu'un mot commence par a

1.5.2 Question 2

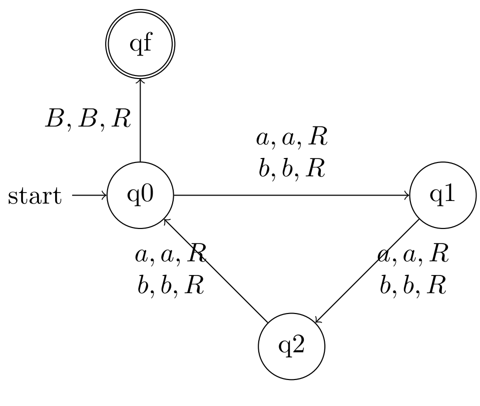

Figure 5 – Longueur du mot est modulo 3

1.5.3 Question 4

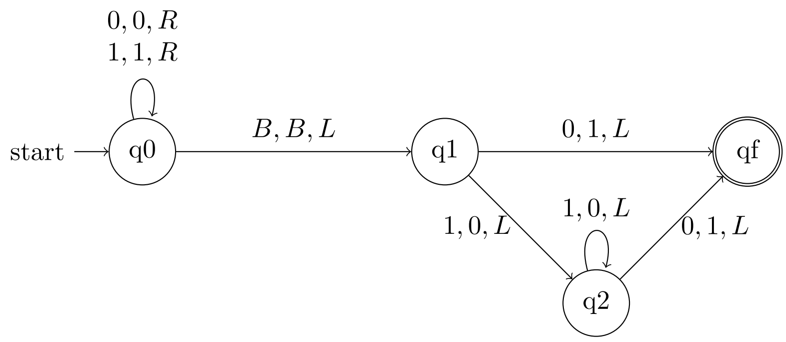

Figure 6 – Fonction d'incrémentation binaire

1.5.4 Question 5

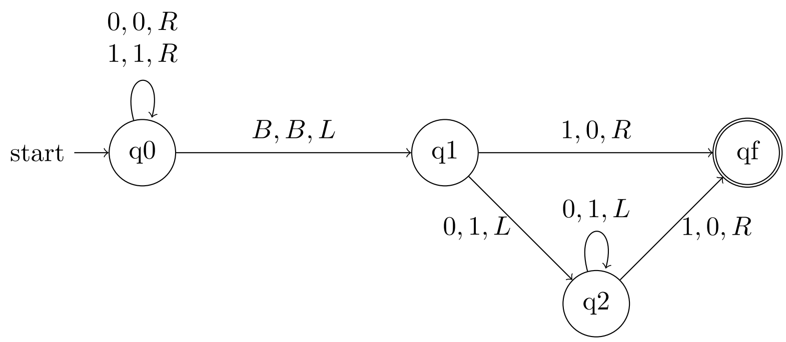

Figure 7 – Fonction de décrémentation binaire

1.5.5 Question 6

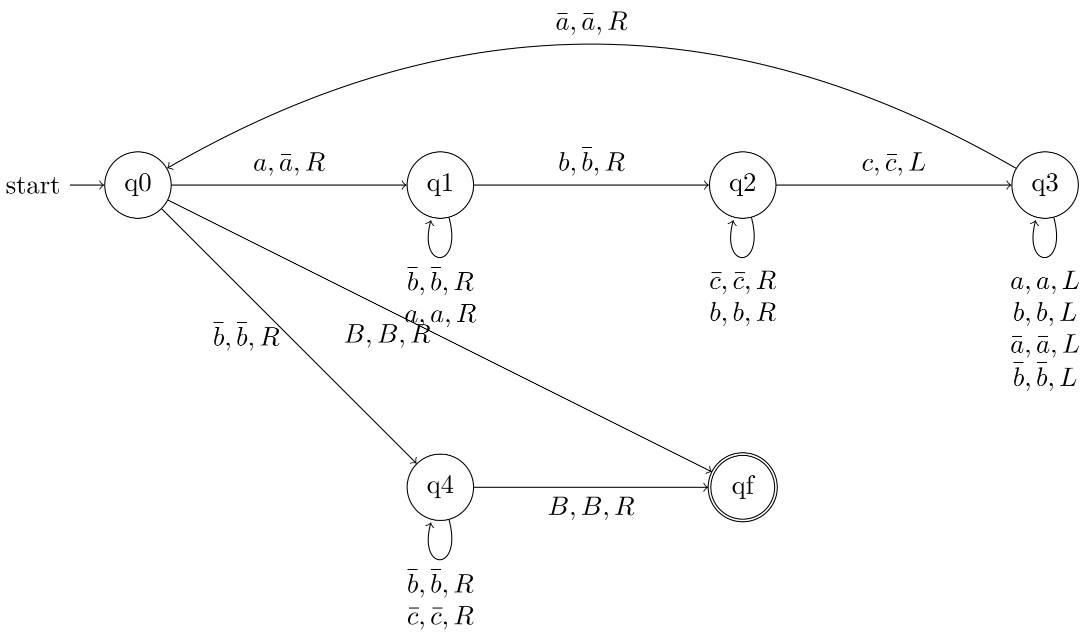

FIGURE 8 – Autant de a que de b que de c

1.5.6 Question 7

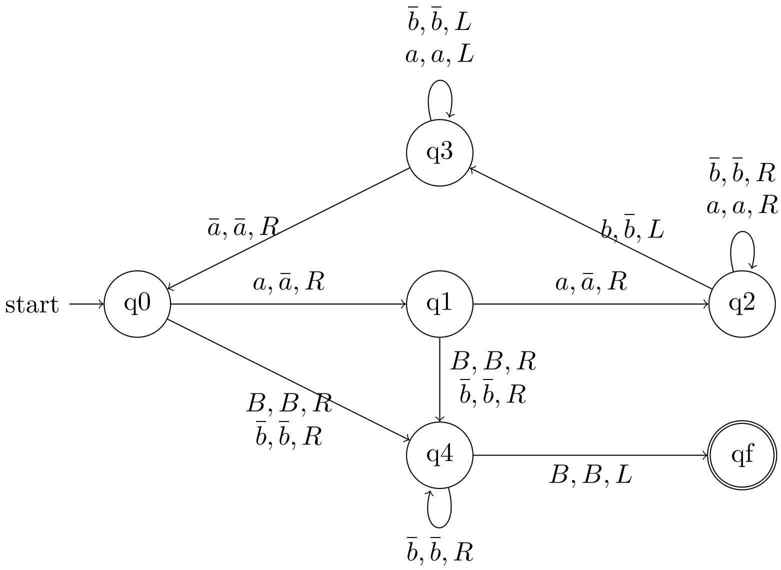

FIGURE 9 – Moitié moins de b que de a

2 TD2

2.1 Exercice 1

2.1.1 Question 1

`Oui.`

2.1.2 Question 2

`Oui.`

2.1.3 Question 3

`Oui.`

2.2 Exercice 4

2.2.1 Questions 1 et 2

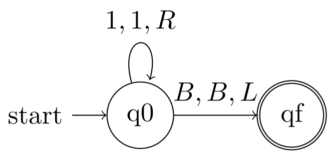

FIGURE 10 – Machine acceptant tout les mots composés que de 1 ou le mot nul

2.2.2 Question 3

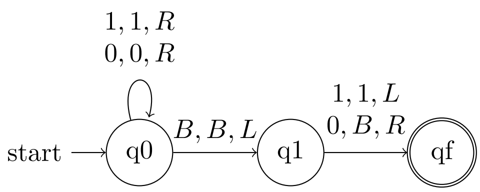

FIGURE 11 – Machine en binaire qui retourne l'entier si il est impair ou sa moitié si il est pair

2.2.3 Question 4

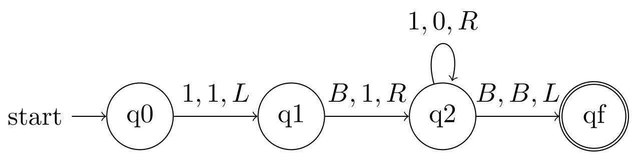

FIGURE 12 – Machine qui prends un nombre en unaire et renvoie son exposant de 2 en binaire

2.3 Exercice 5

2.3.1 Question 1

`On peux faire cela facilement avec une machine à deux curseurs, un tout à gauche du mot, et un tout à droite.`

2.3.2 Question 2

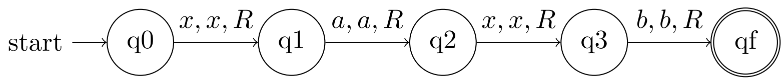

FIGURE 13 – Machine vérifiant que la seconde lettre du mot est un a et que la quatrième lettre du mot est un b

2.3.3 Question 3

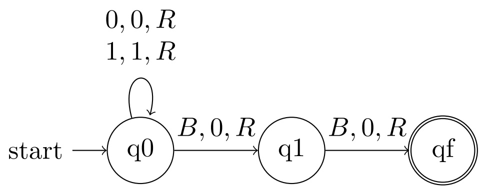

FIGURE 14 – Machine prenant un entier en binaire et sortant son multiple par 4 en binaire (4=2x2)

2.3.4 Question 4

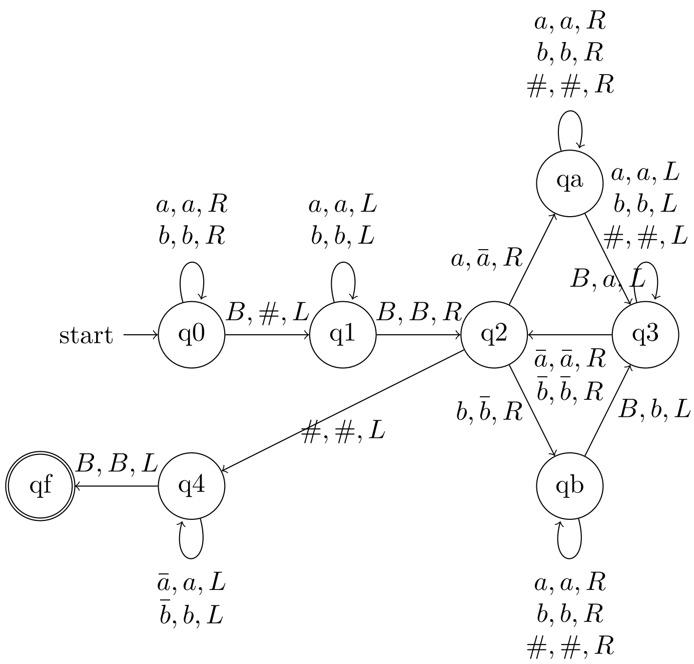

FIGURE 15 – Machine de Σ^* vers Γ^* telle que f(w)=w#w

2.3.5 Question 5

```
Définition machine:
 - on compare les tailles, refusé si x2 a une taille inférieure à
   x1.
 - si ils sont de tailles égales, on fait une comparaison bit à bit.
```

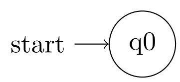

FIGURE 16 – Machine reconnaissant x1#x2 avec x1 < x2 (en binaire)

2.4 Exercice 6

2.4.1 Question 1

2.4.2 Question 2

2.4.3 Question 3

$$[0,1] \;\subseteq\; \mathbb{R} \;\Rightarrow\; |[0,1]| \;\leq\; |\mathbb{R}|$$
$$\arctan(2x+1) \;\; est \;\; une \;\; surjection \;\; de \;\; [0,1] \;\; vers \;\; \mathbb{R}$$

2.4.4 Question 4

$$f \;:\; x \;\rightarrow\; (x,1) \;\; est \;\; une \;\; injection \;\; de \;\; \mathbb{R} \;\; dans \;\; \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$
$$Entremeller \;\; deux \;\; réels \;\; est \;\; une \;\; injection \;\; de \;\; \mathbb{R}\times\mathbb{R} \;\; dans \;\; \mathbb{R}$$

2.5 Exercice 7

```
Encodage d'une machine:
 - commence par 111 pour indiquer le début de la machine
 - on mets autant de 0 que d'états
 - on mets 11 pour indiquer la fin des états
 - on mets autant de 0 que de lettres sur le ruban de travail
 - on mets 11 pour indiquer la fin des lettres
 - on encode les transitions, en les séparant par des 11, et on encode
   les états et symboles par un nombre de 0 équivalent à leur position
   (de 1 à n) tout en séparant chaque partie de la transuition par
   1
 - on note R=0 et L=00
 - on termine la machine par 111
Application:
```

$$(M) = 111 \;\; 000 \;\; 11 \;\; 000 \;\; 11 \;\; 01010010010 \;\; 11 \;\; 001001001010 \;\; 11 \;\; 00100010001000100 \;\; 111$$

```
Des espaces ont été ajoutés afin de clarifier la lecture.
```

2.6 Exercice 8

2.6.1 Question 1

```
Il faut dessiner une machine de Turing qui reconnait ce langage.
```

2.6.2 Question 2

```
Machine récursivement énumérable:
 - La machine va avoir un #, puis un état ou elle va écrire tout
   les mots du langage à gauche du #.
 - Après avoir écrit chaque mot, il va y avoir une transition vers
   une autre machine qui va recopier le mot à droite du #.
 - On remets la tête de lecture sur le #, et on entre l'état d'énumération.
```

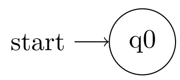

Figure 17 – Machine d'un langage récursivement énumérable

2.7 Exercice 9

Ce qu'on sait:

1. La machine parcours t étapes, ayant chacune une transition.
2. La machine peux aller à droite, ou à gauche.
3. On a un alphabet τ, avec des mots de longueur s.
4. Une machine déterministe qui repasse par une même configuration veut dire qu'elle repasse par un état.

Ce qu'on peux en conclure:

1. Donc, on peux consommer au maximum autant de cases qu'il y a eu d'étapes.
2. Un mouvement à gauche après un mouvement à droite ne consomme pas de nouvelle case, le minimum étant donc deux cases quand on ne fait que aller à droite puis à gauche.
3. On a donc au maximum τ^s mots, ce qui donne au plus $|\tau|^s(s+1)|Q|$ configurations.
4. La machine ne s'arrête jamais, donc, si la machine s'arrête, cela veut dire qu'elle ne visite qu'une seule configuration à chaque fois. Ce qui veut dire que le nombre de cases utilisées est bornée par le temps qu'on passe dans la machine, et aussi que le temps qu'on passe dans la machine est borné par le nombre de cases qu'on utilise.