Notes de cours de ARO

Yann Miguel

15 septembre 2020

Table des matières

1 Introduction

Cette UE consiste à modéliser les problèmes en flot, puis à les programmer en linéaire.

2 Cours 1

2.1 La programmation linéaire

Exemple de problème linéaire : maximiser $x_1 + x_2$ avec :
- $x_2 - x_1 \leq 1$
- $x_1 + 6x_2 \leq 15$
- $4x_1 - x_2 \leq 10$
- $x_1 \geq 0$, et$x_2 \geq 0$

Si on dessine ce problème sur un plan, on observe une zone du plan correspondant à ces contraintes, et la solution optimale avec ces contraintes est 5, avec $x_1 = 3$ et $x_2 = 2$.

2.2 La méthode simplex

Il s'agit d'aller de solution de base en solution de base.
Une solution de base est l'ensemble des sommets du polyhèdre, et le polyhèdre est l'ensemble des solutions admissibles.
La méthode simplex est donc une méthode de voyage entre les sommets du polyhèdre solution.

Forme générale du problème linéaire : maximiser $c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ avec :
- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$
- $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_n$
- $x_1, ..., x_n \geq 0$

Chaque problème de maximisation a un problème de minimisation associé.

La programmation linéaire date de Fourrier, alors que la méthode suplex a été inventée dans les années 50 par Dantzig.

L'algorithme de la méthode simplex est exponentiel dans le pire des cas, et polynomial en moyenne.

L'algorithme de Khachian, créé dans les années 70 est un algorithme polynomial un peu moins efficace que la méthode suplex.

Prenons l'exemple de la diète. Notre corps à besoin de :
- Vitamine A : 0,5mg
- Vitamine C : 15mg
- Fibres : 4g

Chaque nourriture à un prix, et notre corps à des demandes nutritionnelles.

Nom nutriment	Carottes(x_1)	Choux(x_2)	Cornichons(x_3)	Demandes
Vitamine A	35mg	0,5mg	0,5mg	0,5mg
Vitamine C	60mg	30mg	10mg	15mg
Fibres	30g	20g	10g	4g
prix	0,75 euro	0,5 euro	0,15 euro	

Cette exemple demandera donc de **MINIMISER** la quantité d'aliments à prendre, afin de minimiser le coût, et d'avoir les apports minimaux requis.

Exemple de la méthode suplex :

Objet	Cendrier(x_1)	Bol(x_2)	Cruche(x_3)	Vase(x_4)
Moulage	2	4	5	7
Cuisson	1	1	2	2
Peinture	1	2	3	3
Bénéfice	7	9	18	17

On veut donc, dans ce problème, maximiser $7x_1+9x_2+18x_3+17x_4$ avec :

— $2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 \leq 42$
— $1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 17$
— $1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_3 \leq 24$
— $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Dictionnaire D1 :

— $x_5 = 42 - 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 7x_4$
— $x_6 = 17 - 1x_1 - 1x_2 - 3x_3 - 2x_4$
— $x_7 = 24 - 1x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 3x_4$
— $traitdedivision$
— $z = 7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 17x_4$

Les variables de base sont les x de 5 à 7, et les variables hors base sont les x de 1 à 4.

La solution de base admissible consiste à affecter à toutes les variables hors base la valeur 0, ce qui crée :

— $x_5 = 42$
— $x_6 = 17$
— $x_7 = 24$
— $z = 0$

La méthode suplex va consister à faire entrer une variable hors base dans la base, et à faire sortir une variable de base de la base.

On va donc faire entrer la varible x_3, car c'est la variable qui donne le plus de bénéfices (technique glouton). La variable qui va sortir sera celle qui mets le plus de contraintes, donc qui limite le plus la variable entrante. Il s'agit de x_7 dans ce cas.

L'étape de pivot fait donc entrer x_3 et sortir x_7. Donc, on a :

$$3x_3 = 24 - 1x_1 - 2x_2 - 3x_4 - x7$$

Ce qui donne :

$$x_3 = 8 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - x_4 - \frac{1}{3}x_7$$

Le dictionnaire D2 est crée en remplaçant x_3 par l'expression en haut sur toutes les lignes de D1. En le simplifiant, ça donne :

— $x_3 = 8 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - x4 - \frac{1}{3}x_7$
— $x_5 = 2 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - 2x_4 - \frac{5}{3}x_7$
— $x_6 = 1 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_7$
— $traitdedivision$
— $z = 144 + x_1 - 3x_2 - x_4 - 6x_7$

La solution de base admissible dans ce cas est 144 euros gagnés.

La variable entrante de D2 est x_1, car c'est la seule encore positif dans l'équation avec z. La variable sortante est x_6. Ce qui donne :

$$\frac{1}{3}x_1 = 1 + \frac{1}{3}x_2 - x_6 + \frac{2}{3}x_7$$

Ce qui donne, après simplification :

$$x_1 = 3 + x_2 - 3x_6 + 2x_7$$

On obtient D3 en remplaçant x_1 par cette équation dans tout D2. Après simplification, ça donne :

— $x_1 = 3 + x_2 - 3x_6 + 2x_7$
— $x_3 = 7 - x_2 - x_4 + x_6 - x_7$
— $x_5 = 1 - x_2 - 2x_4 + x_6 + x_7$
— $traitdedivision$
— $z = 147 - 2x_2 - x_4 - 3x_6 - 4x_7$

Étant donné qu'il n'y a plus de variable positive dans l'équatikn avec z, la solution de base admissible de D3 est la solution optimale. Donc, optimalement, on fera 3 cendriers, 0 bols, 7 cruches et 0 vases, et on fera un bénéfice de 147 euros.

2.2.1 Cas spéciaux

Cas spécial 1 :maximum non borné
Si le maximum n'est pas borné, alors maximiser retourne $+\infty$.
Si il n'y a pas de contrainte sur x_2, alors le maximum va vers l'infini.

Cas spécial 2 : Dégénérescence et cyclage
La dégénérescence, c'est quand la borne supérieure de la variable entrante est 0. Dans ce cas, on fait entrer dans la base cette variable, même si on ne gagne rien.

Le cyclage, c'est quand des étapes dégénèrent et nous ramènent toujours aux mêmes dictionnaires. Il faudra appliquer la règle de Blund pour s'en sortir.

La règle de Blund consiste à toujours choisir les variables entrentantes et sortantes de plus petit indice , si jamais il y a plus d'une variable possible.

Théorème La méthode suplex avec la règle de Blund n'a pas de cyclage.

3 Informations importantes

Il n'y aura que deux séances de tds et tps, il faut donc bosser chez soi.