Notes de cours de calculabilité avancée

Yann Miguel

24 mars 2021

Table des matières

1 Introduction

La calculabilité est l'étude des limites du calcul.

Lemme:

L'ensemble des fonctions de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est en bijection avec [0,1].

Lemme:

L'ensemble des programmes en $\mathbb{P}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Théorème:

$|\mathbb{N}| < |[0,1]|$

Corollaire:

Il existe des fonctions de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui ne sont pas calculables en $\mathbb{P}$.

2 Cours 1

Questions/Problèmes du jeu de la vie:

1. Garden of Eden: Une configuration sans antécédent. Question: Plus petit Garden of Eden dans le jeu de la vie?
2. Forteress: Peux se défendre contre tout. Peux servir à protéger une autre construction. Question: Plus petite forteresse possible dans le Game of Life?
3. Death Problem: Étant donné une config initial finie, est-ce que toutes les cellules vont mourir? (indécidable)

Définition:

un automate cellulaire est défini par:

1. La dimension de l'espace d
2. Un ensemble d'états finis S
3. Un voisinage N
4. Une fonction locale f:$S^m \rightarrow$S
5. Une configuration c:$2^d \rightarrow$S évolue en c' avec, $\forall$x$\in \mathbb{Z}^d$:c'(x)=f(c(x+n_1),...,c(

Si les hypothèses physiques suivantes sont vraies:

1. les lois de la physique sont homogènes dans l'espace
2. les lois de la physique sont homogènes dans le temps
3. la vélocité de propagation de l'information est bornée
4. la densité d'information est bornée
5. il existe un etat quiescent

alors, nous vivons dans un automate cellulaire.

3 Cours 2

Deux modèles de calculs sont équivalents s'ils sont capables de se simuler mutuellement.
Donc, les machines de Turing déterministes sont équivalentes aux machines de Turing multi-rubans et non-déterministes.

Tout modèle de calcul effectif, ou réaliste, est au mieux équivalent aux machines de Turing.

L'opérateur μ, dit opérateur de minimisation, a été inventé pour compléter les fonctions récursives primites en inventant les fonctions μ-primitives, qui calculent tout ce que les primitives récursives ne calculent pas.

4 Cours 3

Une machine de Turing universelle prends le code d'une machine M et l'entrée w, et doit donner le résultat de M sur w.

5 Cours 4

Théorème d'incomplétitude de Gödel: Il existe des problèmes mathématiques indémontrables.
Quand on parle des "mathématiques", on parle en général de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel.

Remarque: Les ensembles d'axiomes et de règles d'un système formel peuvent être infinis, mais ils doivent être récursivement énumérables, ou semi-décidables.
Définition: Un système formel est dit **cohérent** si on ne peux pas démontrer un énoncé et sa négation. On le dit aussi **non contradictoire**.
Définition: Un système formel est **complet** si on peux démontrer tout les énoncés qui sont vrais.

Théorème d'incomplétude 1: Aucun système formel contenant l'arithmétique élémentaire ne peux être à la fois **cohérent et complet**.
Théroème d'incomplétude 2: Aucun système formel contenant l'arithmétique élémentaire ne peux démontrer sa propre cohérence.

Définition: Un système formel est **correct** si tout les énoncés qu'on peux prouver sont vrais.
On a donc correction$\Rightarrow$cohérence, mais cohérence$\not\Rightarrow$correction.
Théorème: Aucun système formel contenant l'arithmétique élémentaire ne peux être à la fois correct et complet.

6 Informations importantes

NF=$\frac{DM+EF}{2}$