(6) $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$

(7) $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

(8) $\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

(9) $\int \frac{1}{\cos x}dx = \int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

(10) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

(11) $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C \qquad \int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

(12) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + C$

(13) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$

(14) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C \qquad \int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right| + C$

(15) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

5 常见的几种凑微分形式(第一类换元法)

(1) $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax + b)d(ax + b)(a \neq 0)$

(2) $\int f(ax^n + b)x^{n-1}dx = \frac{1}{na}\int f(ax^n + b)d(ax^n + b)(a \neq 0)$

(3) $\int f(e^x)e^x dx = \int f(e^x)de^x$

(4) $\int \frac{f(\frac{1}{x})}{x^2}dx = -\int f(\frac{1}{x})d(\frac{1}{x})$

(5) $\int \frac{f(\ln x)}{x}dx = \int f(\ln x)d(\ln x)$

(6) $\int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = 2\int f(\sqrt{x})d(\sqrt{x})$

(7) $\int f(\sin x)\cos x dx = \int f(\sin x)d(\sin x)$

(8) $\int f(\cos x)\sin x dx = -\int f(\cos x)d(\cos x)$

(9) $\int f(\tan x)\sec^2 x dx = \int f(\tan x)d(\tan x)$

(10) $\int f(\cot x)\csc^2 x dx = -\int f(\cot x)d(\cot x)$

(11) $\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int f(\arcsin x)d(\arcsin x)$

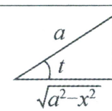
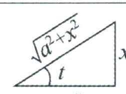
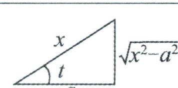
(12) $\int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2}dx = \int f(\arctan x)d(\arctan x)$

6 去根号(第二类换元法)

(1)根号下 x 是一次幂,整体换元

例如:$\int f(\sqrt{1+x})dx \xlongequal{\text{令 } \sqrt{1+x}=t,x=t^2-1} \int f(t)\cdot 2tdt$.

(2)根号下 x 是二次幂,三角换元

根式类型	三角换元	辅助三角形
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin t$ $dx=a\cos tdt$	
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan t$ $dx=a\sec^2 tdt$	
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec t$ $dx=a\sec t\tan tdt$	

7 分部积分

$\int udv = uv - \int vdu$，选 u 的优先级顺序为"反、对、幂、三、指".

8 有理函数积分

真分式拆分模板（其中等号左边均为真分式，(1)，(2)，(3)代表 x 的一次多项式，a,b,c 为待定系数）：

$$\frac{?}{(1)(2)} = \frac{a}{(1)} + \frac{b}{(2)},$$

$$\frac{?}{(1)(2)(3)} = \frac{a}{(1)} + \frac{b}{(2)} + \frac{c}{(3)},$$

$$\frac{?}{(1)(2)^2} = \frac{a}{(1)} + \frac{b}{(2)} + \frac{c}{(2)^2},$$

$$\frac{?}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}.$$

二、定积分

1 可积（即常义积分、定积分）的充分条件

（1）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

（2）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且只有限个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

2 可积（即常义积分、定积分）的必要条件

可积必有界.

3 定积分的基本性质

（1）定积分的结果与积分变量的符号无关，即：$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$

(2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(3) $\int_a^b dx = b - a$

(4) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

(5) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$($k$ 为常数)

(6) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

(7) 设 $f(x) \leqslant g(x), x \in [a,b]$，则 $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$.

推论：当 $f(x) \geqslant 0, x \in [a,b]$ 时，$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$；

(8) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$

(9) 估值定理：设 $m \leqslant f(x) \leqslant M, x \in [a,b]$，其中 m, M 为常数，则 $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$.

(10) 积分中值定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$.

(11) 平均值公式：$\overline{f(x)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

4 牛顿—莱布尼兹公式

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$.

(2) ($\xi \in (a,b)$ 的积分中值定理) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = (b-a)F'(\xi) = (b-a)f(\xi), \xi \in (a,b).$$

5 定积分的常用结论

(1)普通对称性

设 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续,则

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx=\begin{cases}2\int_{0}^{l} f(x)dx, & f(x)\text{ 为偶函数}\\ 0, & f(x)\text{ 为奇函数}\end{cases}.$$

(2)重要换元

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,令 $x=a+b-t$,则定积分

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{a}^{b} f(a+b-t)dt=\frac{1}{2}\int_{a}^{b}[f(x)+f(a+b-x)]dx.$$

特别地,设函数 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续,令 $x=-t$,则

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx=\int_{-l}^{l} f(-t)dt=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}[f(x)+f(-x)]dx=\int_{0}^{l}[f(x)+f(-x)]dx.$$

(3)设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数,a 为任意常数,则

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx=\int_{0}^{T} f(x)dx=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx.$$

(4) $\int_{0}^{a}\sqrt{a^{2}-x^{2}}dx=\frac{1}{4}\pi a^{2}$

(5)华里士公式(点火公式)

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n}xdx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n}xdx\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶数}\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1, & n\text{ 为大于 1 的奇数}\end{cases}$$

(6)三角函数系(以下 m,n 为不同时取 0 的非负整数)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mxdx=\int_{0}^{2\pi}\sin nx\sin mxdx=\begin{cases}\pi, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mxdx=\int_{0}^{2\pi}\sin nx\cos mxdx=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx dx = \int_{0}^{2\pi}\cos nx\cos mx dx = \begin{cases}\pi, n = m \\ 0, n \neq m\end{cases}$$

6 定积分的计算

(1)换元法

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,若 $x=\varphi(t)$ 满足:

①$\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续,且 $\varphi'(t)\neq 0$.

②$\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$,并且当 t 在 $[\alpha,\beta]$ 上变化时,$\varphi(t)$ 的值在 $[a,b]$ 上变化,则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

(2)分部积分公式

设 $u(x),v(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续导函数 $u'(x),v'(x)$,则

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

7 柯西不等式

设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx.$$

三、变限积分

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导,且 $F'(x) = f(x)$,这也说明 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

推论 1　设 $F(x) = \int_a^{\varphi(x)} f(t)dt$,则 $F'(x)=f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$.

推论 2　$\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt\right]_x' = f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x) - f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x)$

推论 3　$\left[\int_a^{\varphi(x)} f(t)g(x)dt\right]'_x = \left[g(x)\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt\right]'_x$

$= g'(x)\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt + g(x)f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$

推论 4　$F(x) = \int_a^x f(x-t)dt$，令 $u=x-t$，则 $F(x) = \int_0^{x-a} f(u)dt$，

故 $F'(x)=f(x-a)$

四、反常积分

1 反常积分的计算

(1)无穷限的广义积分(无穷积分)

设 $f(x)$ 连续，则

①$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$

②$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$

③$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$

(2)无界函数的广义积分(瑕积分)

①$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$，($x = b$ 为 $f(x)$ 的瑕点)

②$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$，($x = a$ 为 $f(x)$ 的瑕点)

③$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\eta\to0^+}\int_{c+\eta}^b f(x)dx$ ($x=c$ 为 $f(x)$ 的瑕点)

2 反常积分敛散性的判定

(1)比较审敛原理 1

设函数 $f(x)$,$g(x)$ 在区间 $[a,+\infty]$ 上连续:

如果 $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)\ (a \leqslant x \leqslant +\infty)$,并且 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛,那么 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛.

如果 $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)\ (a \leqslant x \leqslant +\infty)$,并且 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散,那么 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也发散.

(2)极限审敛法 1

设函数 $f(x)$,$g(x)$ 在区间 $[a,+\infty]$ 上连续,且 $f(x) \geqslant 0$

如果 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$,则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛散.

如果 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$,且 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛,则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛.

如果 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$,且 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散,则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也发散.

(3)比较审敛原理 2

设函数 $f(x)$,$g(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续,$x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点:

如果 $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)\ (a < x \leqslant b)$,并且 $\int_a^{b} g(x)dx$ 收敛,那么 $\int_a^{b} f(x)dx$ 也收敛.

如果 $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)\ (a < x \leqslant b)$,并且 $\int_a^{b} g(x)dx$ 发散,那么 $\int_a^{b} f(x)dx$ 也发散.

(4)极限审敛法2

设函数$f(x)$,$g(x)$在区间$(a,b]$上连续,且$f(x)\geqslant 0$,$x=a$为$f(x)$的瑕点:

如果$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l\neq 0$,则$\int_a^b f(x)dx$与$\int_a^b g(x)dx$同敛散.

如果$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$,且$\int_a^b g(x)dx$收敛,则$\int_a^b f(x)dx$也收敛.

如果$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$,且$\int_a^b g(x)dx$发散,则$\int_a^b f(x)dx$也发散.

(5)常见反常积分

①$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}dx\begin{cases}收敛,p>1\\ 发散,p\leqslant 1\end{cases}$,$\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^p x}dx\begin{cases}收敛,p>1\\ 发散,p\leqslant 1\end{cases}$.

②$\int_0^1\dfrac{1}{x^p}dx\begin{cases}收敛,p<1\\ 发散,p\geqslant 1\end{cases}$.

③$\int_1^{+\infty}x^k e^{-x^p}dx$,$k$为任意常数且$p>0$时均收敛.

④$\int_0^1\dfrac{\ln^k x}{x^p}dx$,$k$为任意常数且$p<1$时均收敛.

五、定积分的应用

1 求面积

(1)直角坐标系

在$x\in[a,b]$上,由函数$y=f(x)$,$y=g(x)$所围图形的面积为:$S=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$.

(2)极坐标系

在$\theta\in[\alpha,\beta]$上,由函数$r=r_1(\theta)$,$r=r_2(\theta)$所围图形的面积为:$S=\dfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta|r_1^2(\theta)-r_2^2(\theta)|d\theta$.

2 求体积

(1)旋转体体积

由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a,x=b$ 以及 x 轴所围平面图形，绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积 $V_x=\int_a^b \pi f^2(x)dx$；绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积 $V_y=\int_a^b 2\pi\left|xf(x)\right|dx$.

(2)已知平行截面面积的立体体积：$V=\int_a^b S(x)dx$

3 求弧长

(1) $L:y=f(x),a\leqslant x\leqslant b,l=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx$.

(2)$L:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases},a\leqslant t\leqslant b,l=\int_a^b\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$.

(3)$L:r=r(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,l=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+r'^2}d\theta$.

4 侧面积

由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a,x=b$ 以及 x 轴所围平面图形，绕 x 轴旋转一周所得旋转体侧面积 $S=\int_a^b 2\pi f(x)ds$，其中 ds 为弧微分.

第四章　微分方程

一、一阶微分方程

1 可分离变量方程

形如：$y'=f(x)g(y)$

解法：分离变量得 $\dfrac{dy}{g(y)}=f(x)dx$，所以

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx.$$

2 齐次微分方程

形如：$y'=f(\frac{y}{x})$

解法：令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=ux,y'=u+x\frac{du}{dx}$，于是原方程 $\Rightarrow$

$u+x\frac{du}{dx}=f(u)\Rightarrow\frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{du}{f(u)-u}=\ln|x|+C.$

3 一阶线性微分方程

形如：$y'+p(x)y=q(x)$

解法：方程两边同乘积分因子 $e^{\int p(x)dx}$，然后分别积分并化简得：

$y=e^{-\int p(x)dx}[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C].$

4 伯努利方程

形如：$y'+p(x)y=q(x)y^n$

解法：方程两边同除 y^n，然后令 $z=y^{1-n}$，$z'=(1-n)y^{-n}y'$，则方程化为一阶线性微分方程 $z'+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)$，解法同上.

5 全微分方程

形如：$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0,\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

解法一：凑全微分

解法二：根据曲线积分与路径无关 $\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy=C$ 或 $\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy=C$

二、可降阶的微分方程

1 不显含 y 型

形如：$G(x,y',y'')=0$

解法：令 $y'=p,y''=p'$，代入方程得 $G(x,p,p')=0$，化为一阶微分方程，解得 $p=y'=p(x,C_1)$，继续解一阶微分方程得 $y=y(x,C_1,C_2)$.

2 不显含 x 型

形如：$G(y,y',y'')=0$

解法：令 $y'=p,y''=p\dfrac{dp}{dy}$，代入方程得 $G(x,p,p\dfrac{dp}{dy})=0$，化为一阶微分方程，解得 $p=y'=p(y,C_1)$，继续解一阶微分方程得 $y=y(x,C_1,C_2)$.

三、常系数线性微分方程

1 线性微分方程解的结构

二阶线性方程的一般形式为 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$，其中 $p(x),q(x),f(x)$ 均为连续函数，当右端 $f(x)\equiv 0$ 时，称为二阶线性齐次方程，否则称为非齐次方程.

解的性质与结构（以下性质可推广到任意高阶的线性方程）分以下几种：

（1）若 $y_1(x),y_2(x)$ 为齐次方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的两个特解，则其线性组合 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 仍为齐次方程的解. 特别地，若 $y_1(x),y_2(x)$ 线性无关（即 $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq\lambda$（常数）），则齐次方程的通解为 $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$.

（2）设 $y_1(x),y_2(x)$ 为非线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的两个特解，则其差 $y_1(x)-y_2(x)$ 为相应齐次方程的特解.

(3)设 $y^*(x)$ 为非齐次方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的一个特解,$y(x)$ 为齐次方程的任意特解,则其和 $y^*(x)+y(x)$ 为 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解,特别地,若 $y_1(x),y_2(x)$ 为齐次方程的两个线性无关的特解,则 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的通解为 $y(x)=y^*(x)+C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$,其中 C_1,C_2 为任意常数.

2 二阶常系数齐次线性微分方程

形如:$y''+py'+qy=0$ 其中 p,q 均为常数

解法:特征方程:$\lambda^2+p\lambda+q=0$

(1)当 λ_1,λ_2 为不同的特征根时,齐次方程的通解为 $y(x)=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$.

(2)当 $\lambda_1=\lambda_2$ 时,齐次方程的通解为 $y(x)=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1x}$.

(3)当 $\lambda=\alpha\pm i\beta$(复根)时,齐次方程的通解为

$y(x)=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

3 二阶常系数非齐次线性微分方程

(1)求解步骤

形如:$y''+py'+qy=f(x)$ 其中 p,q 均为常数

解法:①求对应齐次方程的通解 $\bar{y}(x)$

②求出非齐次方程的特解 $y^*(x)$

③非齐次方程的通解 $y=\bar{y}(x)+y^*(x)$

(2)待定系数法设特解形式如下:

①若 $f(x)=P_n(x)e^{rx}$,$P_n(x)$ 为 x 的某一具体的 n 次多项式,则

令 $y^*(x)=Q_n(x)e^{rx}\cdot x^k,k=\begin{cases}0, r\text{ 不是特征方程的根}\\1, r\text{ 是特征方程的单根}\\2, r\text{ 是特征方程的二重根}\end{cases}$,

其中

$$Q_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n.$$

②若$f(x)=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$,$A,B,\alpha,\beta$为给定的常数,则令$y^*(x)=e^{\alpha x}(a\cos\beta x+b\sin\beta x)\cdot x^k$,其中$a,b$为待定系数,

$$k=\begin{cases}0,\alpha\pm\beta i\ \text{不是特征方程的根}\\1,\alpha\pm\beta i\ \text{是特征方程的单根}\end{cases}.$$

③若$f(x)=e^{\alpha x}(A_m(x)\cos\beta x+B_n(x)\sin\beta x)$,$A_m(x)$,$B_n(x)$为$x$多项式,则令$y^*(x)=e^{\alpha x}(P_l(x)\cos\beta x+Q_l(x)\sin\beta x)\cdot x^k$,其中

$$l=\max\{m,n\},k=\begin{cases}0,\alpha\pm\beta i\ \text{不是特征方程的根}\\1,\alpha\pm\beta i\ \text{是特征方程的单根}\end{cases}.$$

4 欧拉方程

形如:$x^2y''+a_1xy'+a_2y=f(x)$,其中a_1,a_2为常数.

解法:当$x>0$时,令$x=e^t$,则:

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}=Dy,x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}=D(D-1)y.$$

代入原方程得:$\frac{d^2y}{dt^2}+(a_1-1)\frac{dy}{dt}+a_2y=f(e^t)$.这是一个以$t$为自变量,$y(t)$为未知函数的二阶常系数线性微分方程.

当$x<0$时,令$x=-e^t$可得类似结论.

5 一阶差分方程

形如:$y_{t+1}-ay_t=f(t)$

解法:(1)先求齐次方程$y_{t+1}-ay_t=0$的通解:特征方程为$r-a=0$,$\therefore r=a$,$\therefore \overline{y}_t=Ca^t$.

(2)再求非齐次方程的特解:

若$f(t)=P_n(t)d^t$,则令$y_t^*=Q_n(t)d^t\cdot t^k$,$k=\begin{cases}0,d=a\\1,d\neq a\end{cases}$,代入非齐次方程解出$y_t^*$,则$y_t=\overline{y}_t+y_t^*=Ca^t+y_t^*$.

第五章 多元函数微分学

一、多元函数的偏导数与全微分

1 偏导数

$$f_x'(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x};$$

$$f_y'(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

2 可微

记$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$，$A=f_x'(x,y)$，$B=f_y'(x,y)$，

若$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{\Delta z-[A\Delta x+B\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$，则$f(x,y)$在$(x,y)$处可微.

3 全微分

若$f(x,y)$在(x,y)处可微，则在该点处$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$必存在，且有$dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$.

若$f(x,y)$在(x,y)处的两个一阶偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$连续，则$f(x,y)$在$(x,y)$处可微.

4 二阶混合偏导数与次序无关

设$z=f(x,y)$的两个混合偏导数$f_{xy}''(x,y)$，$f_{yx}''(x,y)$在区域D内连续，则有$f_{xy}''(x,y)=f_{yx}''(x,y)$.

5 极限、连续、偏导数、可微、方向导数的关系

$$
\text{一阶偏导数连续} \Rightarrow \text{可微} \Rightarrow \begin{cases} \text{方向导数存在} \\ \quad\not\Downarrow \\ \text{偏导数存在} \\ \quad\not\Downarrow \\ \text{函数连续} \\ \quad\Downarrow \\ \text{极限存在} \end{cases}
$$

二、多元函数微分法

1 多元复合函数求偏导

(1) 设 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\varphi(x,y)$，则

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}
$$

(2) 设 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(x)$，$v=\varphi(x)$，则

$$
\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}
$$

(3) 设 $z=f(x,u,v)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\varphi(x,y)$，则

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0+\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}
$$

注：复合函数一定要设中间变量，抽象函数的高阶偏导数，其中间变量用数字 1，2，3……表示更简洁.

2. 隐函数存在定理 1

设函数 $F(x,y)$ 且在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0)=0$，$F'_y(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $y=y(x)$，

它满足条件 $y_0=f(x_0)$，并有 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}$，其中 F'_x,F'_y 分别为二元函数 $F(x,y)$ 对 x,y 的偏导数.

隐函数存在定理 2

设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，且 $z_0=f(x_0,y_0)$，并有 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$，其中 F'_x,F'_y,F'_z 分别为三元函数 $F(x,y,z)$ 对 x,y,z 的偏导数.

2 多元隐函数求偏导

公式法：(1) 函数 $y=y(x)$ 由 $F(x,y)=0$ 确定，则 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

(2) 函数 $z=z(x,y)$ 由 $F(x,y,z)=0$ 所确定，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

(3) 函数 $y=y(x)$，$z=z(x)$ 由方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 确定，则

$\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}$ 可通过方程组：$\begin{cases}F'_x+F'_y\frac{dy}{dx}+F'_z\frac{dz}{dy}=0\\G'_x+G'_y\frac{dy}{dx}+G'_z\frac{dz}{dx}=0\end{cases}$ 求解.

直接求：对隐函数方程两边关于自变量求偏导，化简即可(类似一元函数中的隐函数求导).

三、多元函数的极值与条件极值

1. 多元函数的极值

(1) 定义

设函数 $z=f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 的某领域内有定义，若对于该邻

域内异于 $P(x_0,y_0)$ 点的任一点 $Q(x,y)$ 恒有

$$f(x,y)>f(x_0,y_0)\ (\text{或} <f(x_0,y_0))$$

则称 $f(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的极小值(极大值).

(2)必要条件

设 $z=f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 点的一阶偏导数存在,且 $P(x_0,y_0)$ 是 $z=f(x,y)$ 的极值点,则 $\begin{cases} f_x'(x_0,y_0)=0 \\ f_y'(x_0,y_0)=0 \end{cases}$.

(3)充分条件

设 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某领域内有连续的偏导数,且 $f_x'(x_0,y_0)=0$, $f_y'(x_0,y_0)=0$. $A(x_0,y_0)=f''_{xx}(x_0,y_0)$,

$B(x_0,y_0)=f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C(x_0,y_0)=f''_{yy}(x_0,y_0)$:

①若 $AC-B^2>0$,则 $P(x_0,y_0)$ 是 $z=f(x,y)$ 的一个极值点. 若 $A>0$,则 $P(x_0,y_0)$ 为极小值点. 若 $A<0$,则 $P(x_0,y_0)$ 为极大值点.

②若 $AC-B^2<0$,则 $P(x_0,y_0)$ 不是 $z=f(x,y)$ 的极值点.

③若 $AC-B^2=0$,则此法失效..

2 条件极值

(1)目标函数 $z=f(x,y)$,已知条件 $\varphi(x,y)=0$.

解题步骤:

①构造辅助函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$;

②解方程组 $\begin{cases} f_x'(x,y)+\lambda\varphi_x'(x,y)=0 \\ f_y'(x,y)+\lambda\varphi_y'(x,y)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$,求得驻点;

③根据实际问题,判断驻点是否为极值点或最值点.

(2)目标函数 $z=f(x,y)$,已知条件 $\varphi_1(x,y)=0$, $\varphi_2(x,y)=0$.

解题步骤：

①构造辅助函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi_1(x,y)+\mu\varphi_2(x,y)$；

②解方程组 $\begin{cases}f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_{1x}(x,y)+\mu\varphi'_{2x}(x,y)=0\\ f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_{1y}(x,y)+\mu\varphi'_{2y}(x,y)=0\\ \varphi_1(x,y)=0\\ \varphi_2(x,y)=0\end{cases}$，求得驻点；

③根据实际问题，判断驻点是否为极值点或最值点.

第六章　二重积分

一、二重积分的概念

1 概念

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma.$$

2 几何意义

当 $z=f(x,y)\geqslant 0,(x,y)\in D$ 时，二重积分表示以 $z=f(x,y)$ 为曲顶，以 D 为底的曲顶柱体的体积.

3 物理意义

当 $z=f(x,y)\geqslant 0,(x,y)\in D$ 时，二重积分表示平面薄片的质量.

二、二重积分的性质

1 基本性质

(1) $\iint\limits_D kf(x,y)\,d\sigma=k\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$，$k$ 为常数

(2) $\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\,d\sigma=\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma\pm g(x,y)\,d\sigma$

(3) $\iint\limits_{D} f(x,y)\,d\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} \iint\limits_{D_i} f(x,y)\,d\sigma$,其中 D_i 为 D 的区域划分且任两个子域最多只有边界重叠($i = 1,2,\cdots,n$).

(4) $\iint\limits_{D} d\sigma = A$,其中 A 为区域 D 的面积.

(5)比较定理

若在 D 上恒有 $f(x,y) \leqslant g(x,y)$,则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,d\sigma \leqslant \iint\limits_{D} g(x,y)\,d\sigma .$$

(6)估值定理

设 M,m 分别为 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的最大值和最小值,A 为区域 D 的面积. 则: $mA \leqslant \iint\limits_{D} f(x,y)\,d\sigma \leqslant MA$.

(7)中值定理

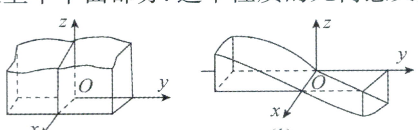
若 $f(x,y)$ 在闭区域上 D 连续,A 为区域 D 的面积,则在 D 上至少存在一点(ξ,η),使 $\iint\limits_{D} f(x,y)\,d\sigma = f(\xi,\eta)A$.

2 普通对称性

(1)如果积分区域 D 关于 x 轴对称,$f(x,y)$ 为 y 的奇偶函数,则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,d\sigma = \begin{cases} 0, & f(x,-y) = -f(x,y) \\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,d\sigma, & f(x,-y) = f(x,y) \end{cases}.$$

D_1 为 D 在上半平面部分. 这个性质的几何意义见图(a),(b)



(a) (b)

(2)如果积分区域 D 关于 y 轴对称,$f(x,y)$ 为 x 的奇偶函数,则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}0, & f(-x,y)=-f(x,y)\\ 2\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma, & f(-x,y)=f(x,y)\end{cases}$$

D_2 为 D 在右半平面部分.

(3)如果 D 关于原点对称,$f(x,y)$ 同时为 x,y 的奇偶函数,则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}0, f(-x,-y)=-f(x,y)\\ 2\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma, f(-x,-y)=f(x,y)\end{cases}$$

D_2 为 D 在右半平面部分.

3 轮换对称性

任何情况下均有 $I=\iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy=\iint_{D_{yx}} f(y,x)dydx$ 成立,因为二重积分与变量无关,对换 x,y 不影响结果.

若积分区域 D_{xy} 关于 $y=x$ 对称,即 $D_{xy}=D_{yx}$,则二重积分 $I=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}[f(x,y)+f(y,x)]dxdy$.

若 $f(x,y)=f(y,x)$,即被积函数具有轮换对称性,则二重积分 $I=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}\cup D_{yx}} f(x,y)dxdy$,其中 D_{xy},D_{yx} 最多只有边界重叠.

三、二重积分的计算

步骤:

①画积分区域 D;

②利用对称性化简;

③选择坐标系及积分次序;

④化为累次积分并计算.

第七章　无穷级数

一、数项级数

1 级数的敛散性

(1)设 $c \neq 0$ 的常数,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$ 有相同的敛散性

(2)设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛,和分别为 s,σ,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = s \pm \sigma$.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 发散;

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 敛散性不确定.

注:添加、改变、删除有限项不影响级数的敛散性.

(3)设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则对其各项任意加括号后所得新级数仍收敛于原级数的和

(4)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

2 正项级数敛散性的判定

(1)比较判敛法:设 $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$,若

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散

(2)比较法的极限形式:设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数

且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = A(v_n \neq 0)$

① 若 $A \neq 0$ 且为常数,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散

② 若 $A = 0$,且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

③ 若 A 为 $+\infty$,且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

两个常用的比较级数:

① 等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r}, & |r| < 1 \\ \text{发散}, & |r| \geq 1 \end{cases}$

② p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{收敛}, p > 1 \text{ 时} \\ \text{发散}, p \leq 1 \text{ 时} \end{cases}$

(3) 比值判别法(达朗贝尔准则)(适用于通项 u_n 中含有 $n!$ 或关于 n 的若干连乘积形式)

设 $u_n \geq 0, n = 1,2\cdots$ 对于 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 来讲

$$\text{若}\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho \begin{cases} \rho > 1 \text{ 时}, \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散} \\ \rho = 1 \text{ 时},\text{方法失效} \\ \rho < 1 \text{ 时}, \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \end{cases}$$

(4) 积分判别法

若存在一个定义在$[1, +\infty)$上的单调递减的非负函数 $f(x)$,使 $u_n = f(n)(n = 1,2,\cdots)$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

3 交错级数敛散性的判定

莱布尼兹准则:

若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n,(u_n>0)$ 满足条件：

$$(1)\ u_n \geqslant u_{n+1},(n=1,2,\cdots\cdots);\quad (2)\ \lim_{n\to\infty}u_n=0,$$

则交错级数收敛.

4 一般级数敛散性的判定

(1)绝对收敛：若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，且此时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 一定也收敛.

(2)条件收敛：若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

二、幂级数

1 幂级数的概念

$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛半径：若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，则 $\mathbf{R}=\frac{1}{\rho}$.

2 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 收敛域的求法步骤

(1)用比值(或根值)法求 $\rho(x)$，即 $\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\rho(x)$

(或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\rho(x)$)；

(2) 解不等式方程 $\rho(x)<1$，求出 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛区间 (a,b)；

(3) 考察 $x=a$(或 $x=b$) 时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(a)$(或 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(b)$) 的敛散性

(4) 写出 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域

3 幂级数的四则运算性质

设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$，$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = g(x)$，其收敛半径分别为$R_1, R_2$，$R = \min(R_1, R_2)$，则对$\forall x \in (-R, R)$，有：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n = f(x) \pm g(x)$$，且在$(-R,R)$内绝对收敛.

4 幂级数的和函数的性质

(1)幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$S(x)$在其收敛域$I$上连续；

(2)幂级数$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在收敛区间$(-R,R)$内可以逐项求导，即$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$，且逐项求导后的幂级数的收敛半径与原级数的收敛半径相同.

(3)幂级数$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在其收敛域$I$上可以逐项积分，即$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$，且逐项求导后的幂级数的收敛半径与原级数的收敛半径相同.

5 函数的幂级数展开

设$f(x)$在$x=x_0$的某邻域内具有任意阶导数，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots$$

称为$f(x)$在$x=x_0$处的泰勒级数.

当$x_0=0$时，级数化为：