

有道 youdao | 有道考研



MATH CHESS

公式手册

# 考研数学常用公式手册

有道考研研发中心

# 目 录

<b>第一部分 高等数学</b>	1
第一章 函数、极限、连续	1
第二章 一元函数微分学	12
第三章 一元函数积分学	21
第四章 微分方程	32
第五章 多元函数微分学	37
第六章 二重积分	41
第七章 无穷级数	44
第八章 向量代数与空间几何	50
第九章 三重积分	58
第十章 曲线积分	61
第十一章 曲面积分	63
第十二章 场论初步	66
<b>第二部分 线性代数</b>	68
第一章 行列式	68
第二章 矩阵	69
第三章 向量组	73
第四章 线性方程组	76
第五章 特特征值与特征向量	78
第六章 二次型	79

第三部分	概率论与数理统计	82
第一章	随机事件与概率	82
第二章	随机变量及其分布	85
第三章	多维随机变量及其分布	88
第四章	随机变量的数字特征	90
第五章	大数定律与中心极限定理	92
第六章	数理统计的基本概念	93
第七章	参数估计	95
第八章	假设检验	98



关注公众号【考研小舟】  
免费考研资料&无水印PDF

# 第一部分 高等数学

## 第一章 函数、极限、连续



关注公众号【考研小舟】  
免费考研资料&无水印PDF



### 一、基本初等函数及其性质

#### 1 幂函数

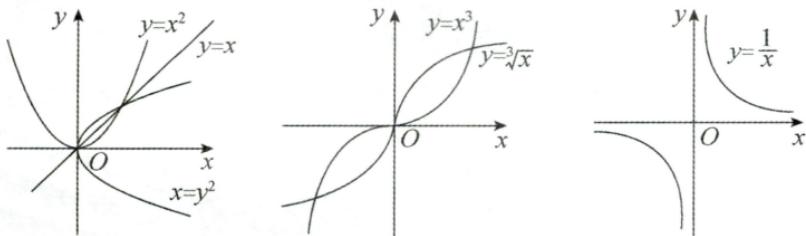
(1) 函数形式:  $y = x^\mu$  ( $\mu \in \mathbb{R}$ ).

(2) 计算性质:

$$y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, y = x^n \cdot x^m = x^{m+n}, y = (x^n)^m = x^{mn}.$$

(3) 常见函数及其图像:

$$y = x, y = x^2, y = \sqrt{x}, y = x^3, y = \sqrt[3]{x}, y = \frac{1}{x}.$$



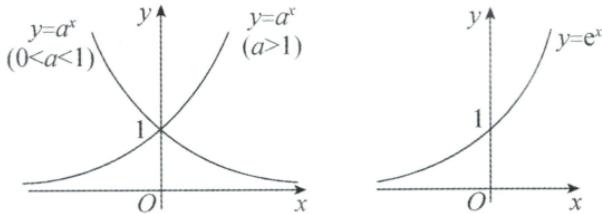
#### 2 指数函数

(1) 函数形式:  $y = a^x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ).

(2) 定义域:  $(-\infty, +\infty)$ , 值域:  $(0, +\infty)$ .

(3) 单调性:  $a > 1$  时,  $y = a^x$  单调增加;  $a < 1$  时,  $y = a^x$  单调减少.

(4) 常见函数及其图像:



(5) 极限:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ .

(6) 特殊函数值:  $a^0 = 1$ ,  $e^0 = 1$ .

### 3 对数函数

(1) 函数形式:  $y = \log_a x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ).

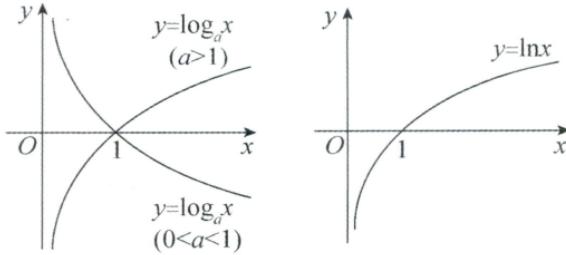
(2) 定义域:  $(0, +\infty)$ , 值域:  $(-\infty, +\infty)$ .

(3) 单调性:  $a > 1$  时,  $y = \log_a x$  单调增加;  $a < 1$  时,  $y = \log_a x$  单调减少.

(4) 特殊函数值:  $\log_1 1 = 0$ ,  $\log_a a = 1$ ,  $\ln 1 = 0$ ,  $\ln e = 1$ .

(5) 极限:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ .

(6) 常见函数及其图像:



(7) 常用公式:  $x = e^{\ln x}$  ( $x > 0$ ),  $u^v = e^{v \ln u}$  ( $u > 0$ ).

### 4 三角函数

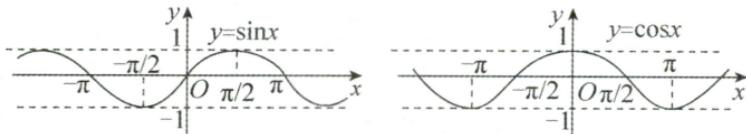
(1) 正弦函数、余弦函数

① 函数形式:  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ .

②定义域:  $(-\infty, +\infty)$ , 值域:  $[-1, 1]$ .

③奇偶性:  $y = \sin x$  在其对称的定义区间内是奇函数,  $y = \cos x$  在其对称的定义区间内是偶函数.

④常见函数及其图像:



⑤常用公式:

(i) 平方公式:  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ .

(ii) 二倍角公式:  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ,

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1.$$

(iii) 降幂公式:  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ ,  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ .

(iv) 诱导公式: 奇变偶不变, 符号看象限.

$$\sin\left(\frac{k\pi}{2} + x\right) = \begin{cases} \pm \sin x, & k \text{ 为偶数}, \\ \pm \cos x, & k \text{ 为奇数}, \end{cases}$$

$\pm$  取决于  $x$  看作锐角时,  $\sin\left(\frac{k\pi}{2} + x\right)$  的符号.

如:  $\sin(\pi - x) = \sin x$ ,  $\sin(\pi + x) = -\sin x$ ,  $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x$ ,

$$\cos\left(\frac{k\pi}{2} + x\right) = \begin{cases} \pm \cos x, & k \text{ 为偶数}, \\ \pm \sin x, & k \text{ 为奇数}, \end{cases}$$

$\pm$  取决于  $x$  看作锐角时,  $\cos\left(\frac{k\pi}{2} + x\right)$  的符号.

如:  $\cos(\pi \pm x) = -\cos x$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ .

(v) 和角公式:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

(vi) 和差化积:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

(vii) 积化和差:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

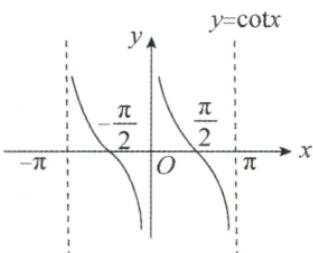
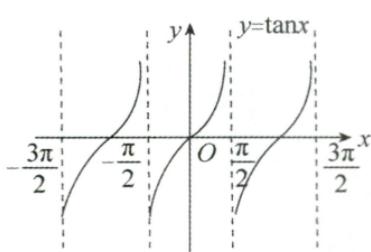
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

(2) 正切函数、余切函数

① 函数形式:  $y = \tan x, y = \cot x$ .② 定义域:  $y = \tan x, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, y = \cot x, x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ;值域:  $(-\infty, +\infty)$ .③ 奇偶性:  $y = \tan x, y = \cot x$  在其对称的定义区间内都是奇函数.

④常见函数及其图像：



⑤常用公式：

(i) 平方公式:  $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$ ,  $\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$ .

(ii) 二倍角公式:  $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ ,  $\cot 2x = \frac{-1 + \cot^2 x}{2 \cot x}$ .

(iii) 和角公式:  $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$ .

## 5 反三角函数

(1) 反正弦函数、反余弦函数

① 函数形式:  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ .

② 定义域:  $[-1, 1]$ ;

值域:  $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\arccos x \in [0, \pi]$ .

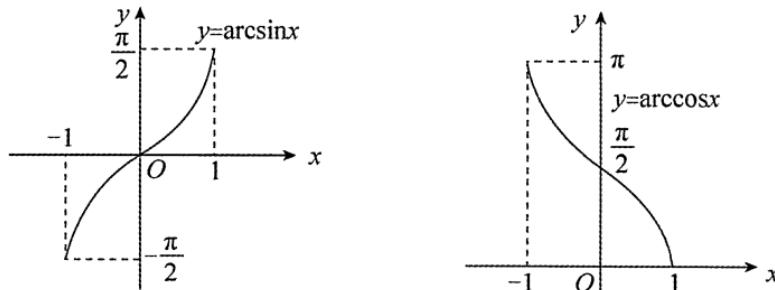
③ 奇偶性:  $y = \arcsin x$  在定义域内是奇函数.

④ 有界性:  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$  在定义域内均有界.

⑤ 常用公式:  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ .



## ⑥常见函数及其图像：



## (2) 反正切函数、反余切函数

① 函数形式:  $y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ .

② 定义域:  $(-\infty, +\infty)$ ;

值域:  $\arctan x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \operatorname{arccot} x \in (0, \pi)$ .

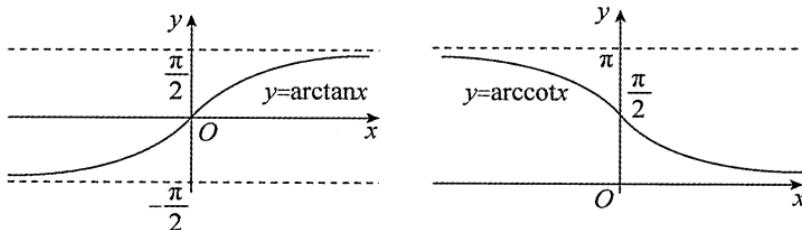
③ 奇偶性:  $y = \arctan x$  在定义域内是奇函数.

④ 有界性:  $y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$  在定义域内均有界.

⑤ 常用公式:  $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$ ,

$$\arctan x \pm \arctan y = \arctan\left(\frac{x \pm y}{1 \mp xy}\right).$$

## ⑥ 常见函数及其图像:



⑦ 极限:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$ .



## 二、极限的概念、性质与计算

### 1 极限与左、右极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0) = A + \alpha(x), \text{ 其中 } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

### 2 极限的性质

(1) 局部保号性: 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 若  $A > 0$  (或  $A < 0$ ), 则存在  $\delta > 0$ ,

当  $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$  时,  $f(x) > 0$  (或  $f(x) < 0$ ).

(2) 局部有界性: 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则存在  $\delta > 0$ , 当  $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$  时,  $f(x)$  有界.

### 3 极限运算法则

$\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$ , 则:

$$(1) \lim(f(x) \pm g(x)) = A \pm B;$$

$$(2) \lim f(x)g(x) = A \cdot B;$$

$$(3) \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0);$$

$$(4) \text{若 } A, B \text{ 不全为 } 0, \text{ 则 } \lim f(x)^{g(x)} = A^B.$$

### 4 无穷小的比较

设  $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = 0, \beta(x) \neq 0$ , 则:

若  $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ , 则  $\alpha(x)$  是比  $\beta(x)$  高阶的无穷小, 记为

$$\alpha(x) = o(\beta(x)).$$

若  $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$ , 则  $\alpha(x)$  是比  $\beta(x)$  低阶的无穷小.

若  $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c (c \neq 0)$ , 则  $\alpha(x)$  与  $\beta(x)$  是同阶无穷小,

特别地,若  $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ , 则  $\alpha(x)$  与  $\beta(x)$  是等价的无穷小, 记

为  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ .

若  $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c(c \neq 0), k > 0$ , 则  $\alpha(x)$  是  $\beta(x)$  的  $k$  阶无穷小,

特别地,若  $\lim \frac{\alpha(x)}{x^k} = c(c \neq 0)$ , 则  $\alpha(x)$  是  $x$  的  $k$  阶无穷小.

### 5 常见等价无穷小( $x \rightarrow 0$ 时):

$$\left. \begin{array}{l} \sin x \\ \arcsin x \\ \tan x \\ \arctan x \\ \ln(1+x) \\ e^x - 1 \end{array} \right\} \sim x, \quad \begin{array}{ll} a^x - 1 \sim x \ln a, & x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3, \\ (1+x)^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}x, & x - \arcsin x \sim -\frac{1}{6}x^3, \\ 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, & \tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3, \\ & \arctan x - x \sim -\frac{1}{3}x^3. \end{array}$$

### 6 极限存在准则与两个重要极限

#### (1) 夹逼准则

设在  $x = x_0$  的某去心邻域内, 恒有  $\varphi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ .

(2) 单调有界定理: 单调有界的数列必有极限.

(3) 两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

抓大头:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & n = m > 0, \\ 0, & 0 < n < m, \\ \infty, & n > m > 0. \end{cases}$$

(4) 几个常用极限：

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln^\beta x = 0, \alpha > 0, \beta \text{ 任意常数};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0, \alpha \text{ 任意常数}, \beta > 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = 0, \alpha > 0, \beta \text{ 任意常数};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1.$$

### 7 洛必达法则

设函数  $f(x), g(x)$  满足条件：

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty;$$

(2)  $f(x), g(x)$  在  $x_0$  的去心邻域内可导且  $g'(x) \neq 0$ ；

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ 存在(或为 } \infty \text{);}$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

注： $x \rightarrow \infty$  时有类似结论。

### 8 泰勒公式

设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处的某邻域内具有  $n+1$  阶导数，则对该邻域内异于  $x_0$  的任意点  $x$ ，在  $x_0$  与  $x$  之间至少存在一个  $\xi$ ，使得： $f(x)$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x -$$

$$x_0)^n + R_n(x), \text{ 其中 } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \text{ 称为 } f(x) \text{ 在点 } x_0 \text{ 处带}$$

有拉格朗日余项的泰勒公式。

$$\text{令 } x_0 = 0, \text{ 则 } f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

称为带皮亚诺余项的麦克劳林公式。

常用函数在  $x=0$  处的带有皮亚诺余项的泰勒公式：

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$



### 三、连续性与间断点

#### 1 连续概念

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 则  $f(x)$  在  $x=x_0$  处连续.

#### 2 间断点及其类型

(1) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在  $\neq f(x_0)$  或  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 且  $f(x)$  在  $x_0$  处无

定义,则  $f(x)$  在  $x = x_0$  处为可去间断点.

(2) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  存在但不相等, 则  $f(x)$  在  $x = x_0$  处为跳跃间断点.

(3) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$  或  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ , 则  $f(x)$  在  $x = x_0$  处为无穷间断点.

(4) 若  $x \rightarrow x_0$  时, 函数值  $f(x)$  在某个区间内变动无限多次, 则  $f(x)$  在  $x = x_0$  处为振荡间断点.



## 四、闭区间上连续函数的性质

### 1 连续函数的有界性

(1) 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界.

(2) 设函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  上连续, 且  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  都存在, 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  上有界.

### 2 最值定理

设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则在  $[a, b]$  上  $f(x)$  存在最大值与最小值, 即存在  $m, M$ , 使得  $m \leq f(x) \leq M$ .

### 3 介值定理

函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $C$  是介于  $f(a)$  与  $f(b)$  之间的任一实数, 则在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) = C$ .

推论: 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $m \leq C \leq M$ , 则存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得  $f(\xi) = C$ .

### 4 零点定理

设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) = 0$ .

## 第二章 一元函数微分学



### 一、导数的定义、性质与计算

#### 1 导数的定义

$$(1) f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ 或 } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

$$(2) \text{左导数: } f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ 或 }$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

$$\text{右导数: } f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ 或 }$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

$$(3) \text{充要条件 } f'(x_0) = A \Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = A.$$

#### 2 几何意义

$$(1) \text{切线方程: } y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

(2) 法线方程:

$$\text{当 } f'(x_0) \neq 0 \text{ 时, } y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0);$$

$$\text{当 } f'(x_0) = 0 \text{ 时, } x = x_0.$$

#### 3 微分的定义

设  $f(x)$  在  $x_0$  的某邻域内有定义, 若

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

可表示为

$$\Delta y = A \Delta x + o(\Delta x),$$

其中  $A$  为不依赖于  $\Delta x$  的常数, 则称  $f(x)$  在  $x_0$  处可微, 并称  $A\Delta x$  为  $f(x)$  在  $x_0$  处的微分, 记作  $dy$  或  $df(x)$ , 即

$$dy = df(x) = A \Delta x.$$

#### 4 基本求导(微分)公式

(1) $y = c$ (常数)	$y' = 0$	$dy = 0$
(2) $y = x^\alpha$ ( $\alpha$ 为实数)	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$	$dy = \alpha x^{\alpha-1} dx$
(3) $y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	$dy = a^x \ln a dx$
$y = e^x$	$(e^x)' = e^x$	$d(e^x) = e^x dx$
(4) $y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$dy = \frac{1}{x \ln a} dx$
$y = \ln  x $	$(\ln  x )' = \frac{1}{x}$	$d(\ln  x ) = \frac{1}{x} dx$
(5) $y = \sin x$	$y' = \cos x$	$d(\sin x) = \cos x dx$
(6) $y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$d(\cos x) = -\sin x dx$
(7) $y = \tan x$	$y' = \sec^2 x$	$d(\tan x) = \sec^2 x dx$
(8) $y = \cot x$	$y' = -\csc^2 x$	$d(\cot x) = -\csc^2 x dx$
(9) $y = \sec x$	$y' = \sec x \tan x$	$d(\sec x) = \sec x \tan x dx$
(10) $y = \csc x$	$y' = -\csc x \cot x$	$d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$
(11) $y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
(12) $y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
(13) $y = \arctan x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx$
(14) $y = \text{arccot } x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$	$d(\text{arccot } x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$

## 5 函数求导法则

## (1) 四则运算法则

$$\textcircled{1} (u \pm v)' = u' \pm v' \quad d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$\textcircled{2} (uv)' = uv' + vu' \quad d(uv) = udv + vdu$$

$$\textcircled{3} \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0) \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

## (2) 反函数求导法则

设  $y = f(x)$  在点  $x$  的某邻域内单调、可导且  $f'(x) \neq 0$ , 则其反函数在点  $x$  所对应的  $y$  处可导, 并且有

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

## (3) 复合函数求导法则

若  $\mu = \varphi(x)$  在点  $x$  可导, 而  $y = f(\mu)$  在对应点  $\mu (\mu = \varphi(x))$  可导, 则复合函数  $y = f(\varphi(x))$  在点  $x$  可导, 且  $y' = f'(\mu) \cdot \varphi'(x)$

## (4) 隐函数求导法则

①直接求. 方程两边对  $x$  求导, 注意  $y$  是  $x$  的函数, 应按复合函数求导法则处理.

②公式法.  $y = y(x)$  由  $F(x, y) = 0$  确定, 则  $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$ , 其中,  $F'_x$ ,  $F'_y$  分别表示  $F(x, y)$  对  $x$  和  $y$  的偏导数.

③利用微分形式不变性. 由  $F(x, y) = 0$  知  $F'_x dx + F'_y dy = 0$ , 所以

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

## (5) 参数方程求导法则

设  $y = f(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  确定, 则:

$$\textcircled{1} y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = h(t)$$

$$\textcircled{2} y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{h'(t)}{x'(t)}$$

## 6 高阶导数

## (1) 莱布尼兹公式

若  $u(x), v(x)$  均  $n$  阶可导, 则  $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$ , 其中  
 $u^{(0)} = u, v^{(0)} = v.$

## (2) 常用高阶导数

$$\textcircled{1} (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0) \quad (e^x)^{(n)} = e^x$$

$$\textcircled{2} (\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$\textcircled{3} (\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$\textcircled{4} (x^m)^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$$

$$\textcircled{5} (\ln x)^{(n)} = (-1)^{(n-1)} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

## 7 连续、可导、可微的关系

可导  $\Leftrightarrow$  可微; 可导必连续, 连续未必可导.



## 二、导数的应用

## 1 单调性与极值

(1) 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 如果在  $(a, b)$  内  $f'(x) \geq 0$  (或  $f'(x) \leq 0$ ), 且等号仅在有限个点处成立, 那

么函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调增加(或单调减少).

### (2) 极值的必要条件

设函数  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 且在  $x_0$  处取得极值, 则  $f'(x_0) = 0$ .

### (3) 极值的第一充分条件

设函数  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 在  $x_0$  的某去心邻域  $\dot{U}(x_0, \delta)$  内可导.

①若  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  时,  $f'(x) > 0$ , 而  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  时,  $f'(x) < 0$ , 则  $f(x)$  在  $x = x_0$  处取得极大值;

②若  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  时,  $f'(x) < 0$ , 而  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  时,  $f'(x) > 0$ , 则  $f(x)$  在  $x = x_0$  处取得极小值;

③若  $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$  时,  $f'(x)$  符号保持不变, 则  $f(x)$  在  $x = x_0$  处没有极值.

### (4) 极值的第二充分条件

设  $f(x)$  在  $x_0$  处具有二阶导数, 且  $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$ , 则:

①当  $f''(x_0) < 0$  时, 函数  $f(x)$  在  $x_0$  处取得极大值;

②当  $f''(x_0) > 0$  时, 函数  $f(x)$  在  $x_0$  处取得极小值.

③如果  $f''(x_0) = 0$ , 此方法失效.

## 2 函数最值的求法

(1) 若  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则比较  $f(x)$  的端点值、驻点值、不可导点处函数值的大小, 最大的则为最大值, 最小的则为最小值.

(2) 若  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内可导且有唯一驻点, 则该点必为极小(大)值点, 且此极小(大)值必为函数  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内的最小(大)值点.

## 3 凸凹性与拐点

### (1) 凸凹性的定义

设函数  $f(x)$  在区间  $I$  上连续, 任取两点  $x_1, x_2 \in I$ , 恒有  
 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$  或  $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ , 则称曲线  
 $y = f(x)$  在区间  $I$  是凹(或凸)的.

### (2) 凹凸性的判别定理

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内具有一阶和二阶导数, 那么: 若在  $(a, b)$  内  $f''(x) < 0$  (或  $f''(x) > 0$ ), 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的图形是凸的(或凹的).

### (3) 拐点的第一充分条件

设函数  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 在  $x_0$  的某去心邻域  $\dot{U}(x_0, \delta)$  内具有二阶可导.

①若  $f''(x)$  在  $x_0$  的左右领域内符号异号, 则  $(x_0, f(x_0))$  为函数  $f(x)$  的拐点;

②若  $f''(x)$  在  $x_0$  的左右领域内符号保持不变, 则  $(x_0, f(x_0))$  不为函数  $f(x)$  的拐点.

### (4) 拐点的第二充分条件

设  $f(x)$  在  $x_0$  处具有三阶导数, 且  $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$ , 则  $(x_0, f(x_0))$  为函数  $f(x)$  的拐点.

### (5) 拐点的必要条件

设函数  $f(x)$  在  $x_0$  处二阶可导, 且  $(x_0, f(x_0))$  为函数  $f(x)$  的拐点, 则  $f''(x_0) = 0$ .

## 4 漐近线

### (1) 水平渐近线

若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$  或  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ , 则  $y = a$  称为函数  $y = f(x)$  的水平渐近线.

### (2) 铅直渐近线

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  或  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , 则  $x = x_0$  称为函数  $y = f(x)$  的铅直渐近线.

### (3) 斜渐近线

若  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$ , 则  $y = kx + b$  称为函数  $y = f(x)$  的斜渐近线.



## 三、微分中值定理

### 1 费马定理

若函数  $f(x)$  满足条件:

(1) 函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某邻域内有定义, 并且在此邻域内恒有  $f(x) \leq f(x_0)$  或  $f(x) \geq f(x_0)$ ;

(2)  $f(x)$  在  $x_0$  处可导. 则有  $f'(x_0) = 0$ .

### 2 罗尔定理

设函数  $f(x)$  满足条件:

(1) 在闭区间  $[a, b]$  上连续;

(2) 在开区间  $(a, b)$  内可导;

(3)  $f(a) = f(b)$ ;

则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ .

### 3 拉格朗日中值定理

设函数  $f(x)$  满足条件:

(1) 在闭区间  $[a, b]$  上连续;

(2) 在开区间  $(a, b)$  内可导;

则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$ .

或存在  $\theta \in (0, 1)$ , 使得  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a + (b - a)\theta)$ .



关注公众号【考研小舟】  
免费考研资料&无水印PDF

## 4 柯西中值定理

设函数  $f(x), g(x)$  满足条件：

- (1) 在闭区间  $[a, b]$  上连续；
- (2) 在开区间  $(a, b)$  内可导，且  $g'(x) \neq 0$ ；

则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ ，使得  $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ .

## 5 泰勒中值定理

设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处的某邻域内具有  $n+1$  阶导数，则对该邻域内异于  $x_0$  的任意点  $x$ ，在  $x_0$  与  $x$  之间至少存在一个  $\xi$ ，使得：

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ & + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$



## 四、弧微分与曲率

## 1 弧微分

$$ds = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \begin{cases} \sqrt{1+y'^2} dx, & \text{曲线为 } y=f(x), \\ \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt, & \text{曲线为 } \begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t). \end{cases} \\ \sqrt{r^2+r'^2} d\theta, & \text{曲线为 } r=r(\theta). \end{cases}$$

## 2 曲率

## (1) 公式

$$\text{曲率 } K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}, \text{ 曲率半径 } R = \frac{1}{K}.$$

## (2) 性质

① 曲率圆的圆心在该点凹侧的法线上，半径等于曲率的倒数，

曲率圆与曲线在该点处相切；

②该点曲率越大，曲率圆的半径越小，该点处弯曲程度越大；

③在该点处，曲线与曲率圆具有相同的切线与曲率，即有相同的一阶导数值与二阶导数值，且凹向相同，可以近似代替。

④在该点的某邻域内，曲线夹在切线与曲率圆之间。



## 五、导数的经济学应用

### 1 边际的概念

如果函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  处可导，则在  $(x_0, x_0 + \Delta x)$  内的平均变化率为  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ；在  $x = x_0$  处的瞬时变化率为  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$ ，经济学中称  $f'(x_0)$  为  $f(x)$  在  $x = x_0$  处的边际函数值。

设函数  $y = f(x)$  在  $x$  处可导，则称导数  $f'(x)$  为  $f(x)$  的边际函数。 $f'(x)$  在  $x_0$  处的值  $f'(x_0)$  为边际函数值。其意义为：当  $x = x_0$  时， $x$  改变一个单位的绝对量， $y$  改变  $f'(x_0)$  个单位的绝对量。

### 2 经济学中常见的边际函数

(1) 边际成本： $C'(Q)$

(2) 平均边际成本： $(\frac{C(Q)}{Q})'$

(3) 边际需求： $Q'(P)$

(4) 边际收益： $R'(Q) = P(Q) + QP'(Q)$

(5) 边际利润： $L'(Q) = R'(Q) - C'(Q)$

【注】利润最大原则： $L'(Q) = 0, L''(Q) < 0$ ，即

$R'(Q) = C'(Q), R''(Q) < C''(Q)$

### 3 弹性的概念

如果函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处可导，且  $x_0 \neq 0$ ，称函数的相对改变量

$\frac{\Delta y}{y_0}$  与自变量的相对改变量  $\frac{\Delta x}{x_0}$  之比  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x_0}{y_0}$  为函数从  $x_0$  到  $x_0 + \Delta x$  两点间的平均相对变化率, 或称为  $x_0$  与  $x_0 + \Delta x$  两点间的弹性.

设函数  $y = f(x)$  在  $x$  处可导, 则称  $E_{yx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$  为  $f(x)$  的弹性函数.  $E_{yx}$  在  $x_0$  处的值称为弹性函数值, 简称弹性. 其意义为: 当  $x = x_0$  时,  $x$  改变 1% 的相对量,  $y$  改变  $|E_{yx}|$  % 的相对量.

#### 4 经济学中常见的弹性函数

$$(1) \text{需求价格弹性: } E_{dp} = -\frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$$

$$(2) \text{供给价格弹性: } E_{sp} = \frac{dS}{dP} \cdot \frac{P}{S}$$

$$(3) \text{成本需求弹性: } E_{cq} = \frac{dC}{dQ} \cdot \frac{Q}{C}$$

$$(4) \text{收益价格弹性: } E_{rp} = \frac{dR}{dP} \cdot \frac{P}{R}$$

$$[\text{注}] E_{rp} = [Q + P \frac{dQ}{dP}] \cdot \frac{P}{PQ} = 1 + \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = 1 - \eta$$

$$(5) \text{收益需求弹性: } E_{rq} = \frac{dR}{dQ} \cdot \frac{Q}{R}$$

$$[\text{注}] E_{rq} = [\frac{dP}{dQ}Q + P] \cdot \frac{Q}{PQ} = 1 + \frac{dP}{dQ} \cdot \frac{Q}{P} = 1 - \frac{1}{\eta}$$

### 第三章 一元函数积分学



#### 一、不定积分

##### 1 原函数与不定积分的概念

如果在区间  $I$  上, 可导函数  $F(x)$  的导函数为  $f(x)$ ; 即对任一

$x \in I$  都有  $F'(x) = f(x)$  或  $dF(x) = f(x) dx$ , 那么函数  $F(x)$  就称为  $f(x)$  (或  $f(x) dx$ ) 在区间  $I$  上的一个原函数; 称  $\int f(x) dx = F(x) + C$  为  $f(x)$  或  $f(x) dx$  在区间  $I$  上不定积分.

## 2 原函数的存在性

- (1) 连续函数一定存在原函数.
- (2) 含有可去间断点、跳跃间断点、无穷间断点的函数一定没有原函数.
- (3) 含有振荡间断点的函数可能存在原函数.

## 3 不定积分的计算性质

- (1)  $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$  ( $k \neq 0$  为常数)
- (2)  $\int [f_1(x) \pm \dots \pm f_k(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \dots \pm \int f_k(x) dx$
- (3)  $[\int f(x) dx]' = f(x)$  或  $d \int f(x) dx = f(x) dx$
- (4)  $\int F'(x) dx = F(x) + C$  或  $\int dF(x) = F(x) + C$  ( $C$  是任意常数)

## 4 基本积分公式

- (1)  $\int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} + C$  ( $k \neq -1$ )
- (2)  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$        $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$
- (3)  $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$
- (4)  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$  ( $a > 0, a \neq 1$ )       $\int e^x dx = e^x + C$
- (5)  $\int \cos x dx = \sin x + C$        $\int \sin x dx = -\cos x + C$