

# Richiami di algebra delle matrici

Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune propriet`a  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

# Outline

Richiami di algebra  
delle matrici

A. Iodice

1 Operazioni di base sui vettori

Operazioni di base  
sui vettori

2 Operazioni di base sulle matrici

Operazioni di base  
sulle matrici

3 matrici particolari

matrici particolari  
Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

4 Alcune proprietà delle operazioni tra matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

5 Interpretazione geometrica di vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

6 Trasformazioni matriciali dei dati di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

7 Il coefficiente di correlazione

# Vettori riga e vettori colonna

Richiami di algebra  
delle matrici

A. Iodice

vettore colonna

$$\mathbf{a}_{(5 \times 1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vettore riga

$$\mathbf{b}_{(1 \times 5)} = ( 10 \quad 3 \quad 8 \quad 7 \quad 1 )$$

trasposizione di un vettore

$$\mathbf{a}_{(5 \times 1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{a}_{(1 \times 5)}^T = ( 1 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \quad 0 )$$

$$\mathbf{b}_{(1 \times 5)} = ( 10 \quad 3 \quad 8 \quad 7 \quad 1 ) \longrightarrow \mathbf{b}_{(5 \times 1)}^T = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 8 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

# Somma vettoriale

Richiami di algebra  
delle matrici

A. Iodice

L'operazione somma è definita solo tra vettori aventi le stesse dimensioni, ovvero i vettori addendo devono essere entrambi riga (o entrambi colonna) ed avere lo stesso numero di elementi. Poichè  $\mathbf{a}$  ha dimensioni  $(5 \times 1)$  e  $\mathbf{b}$  ha dimensioni  $(1 \times 5)$ , la somma  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  non può essere eseguita.

## somma di vettori colonna

È possibile effettuare la somma tra i vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}^T$ , che hanno entrambi dimensioni  $(5 \times 1)$ .

$$\mathbf{a} + \mathbf{b}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 8 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 12 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## somma di vettori riga

È possibile effettuare la somma tra i vettori  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{a}^T$ , che hanno entrambi dimensioni  $(1 \times 5)$ .

$$\mathbf{b} + \mathbf{a}^T = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 8 & 7 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 12 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

# prodotto vettoriale

Richiami di algebra  
delle matrici

A. Iodice

Dato un vettore colonna  $\mathbf{c}$  avente per elementi  $\{6, 4, 1\}$ , si definisce **prodotto vettoriale**

$$\mathbf{a} * \mathbf{c}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 18 & 12 & 3 \\ 24 & 16 & 4 \\ 18 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Concetto di Matrice

La struttura che risulta dal prodotto vettoriale di  $\mathbf{a}$  per  $\mathbf{c}$  si definisce **matrice** di dimensione  $5 \times 3$ , ovvero è caratterizzata da un numero di righe (5) pari al numero di elementi del primo vettore e il numero di colonne (3) pari al numero di elementi del secondo vettore.

In generale una **matrice di dimensioni  $n \times p$**  è una struttura definita da  $n$  vettori riga di  $p$  elementi incolonnati, o equivalentemente da  $p$  vettori di  $n$  elementi affiancati.

Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

# prodotto scalare

Richiami di algebra  
delle matrici

A. Iodice

Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

Il prodotto vettoriale determina una matrice, il prodotto tra gli elementi di due vettori che ha per risultato un singolo valore (scalare) si definisce **prodotto scalare**. Il prodotto scalare non può essere applicato a vettori che abbiano un numero di elementi diverso. Si consideri un vettore colonna  $d$  con elementi  $\{1, 8, 2\}$  si definisce **prodotto scalare**  $c^T * d$ :

$$c^T * d = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} =$$
$$(6 \times 1) + (4 \times 8) + (1 \times 2) = 40$$

# Somma tra matrici

Richiami di algebra  
delle matrici

A. Iodice

Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

L'operazione di somma è definita solo tra matrici che abbiano le **stesse dimensioni** (stesso numero di righe e colonna). Il risultato della somma di due matrici **A** e **B** di dimensioni  $n \times p$  è una matrice delle stesse dimensioni i cui elementi sono la somma degli elementi di posto corrispondente in **A** e **B**.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 18 & 12 & 3 \\ 24 & 16 & 4 \\ 18 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 19 & 15 & 12 \\ 5 & 9 & 16 \\ 12 & 0 & 18 \\ 10 & 16 & 15 \\ 18 & 9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 19 & 13 \\ 23 & 21 & 19 \\ 36 & 16 & 22 \\ 28 & 24 & 17 \\ 18 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

# Prodotto tra matrici

Richiami di algebra  
delle matrici

A. Iodice

Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

Il prodotto tra due matrici è possibile solo se il numero di colonne della prima matrice corrisponde al numero di righe della seconda: poichè **A** e **B** sono di dimensioni  $5 \times 3$ , il prodotto **A** \* **B** non è possibile; utilizzando l'operatore trasposizione, si possono effettuare i prodotti **A**<sup>T</sup> \* **B** e **A** \* **B**<sup>T</sup>

$$\mathbf{A}^T * \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 18 & 24 & 12 & 0 \\ 4 & 12 & 16 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 19 & 15 & 12 \\ 5 & 9 & 16 \\ 12 & 0 & 18 \\ 10 & 16 & 15 \\ 18 & 9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 612 & 444 & 972 \\ 408 & 296 & 648 \\ 102 & 74 & 162 \end{pmatrix}$$

# Matrici rettangolari e matrici quadrate

Richiami di algebra  
delle matrici

A. Iodice

Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

## Matrice rettangolare

$$\mathbf{X}_{n \times p} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,p} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \dots & x_{n,p} \end{pmatrix}$$

## Matrice quadrata

$$\mathbf{X}_{p \times p} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,p} \\ x_{2,1} & \dots & x_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{p,1} & \dots & x_{p,p} \end{pmatrix}$$

# Matrici diagonali e matrici scalari

Richiami di algebra  
delle matrici

A. Iodice

## Matrice diagonale

Una matrice quadrata che ha elementi nulli eccetto la diagonale principale si definisce matrice diagonale

$$\mathbf{D}_{p \times p} = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{2,2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{p,p} \end{pmatrix}$$

## Matrice scalare

Una matrice diagonale che ha tutti gli elementi uguali ad una costante  $K$  si definisce matrice scalare

$$\mathbf{K}_{p \times p} = \begin{pmatrix} K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & K \end{pmatrix}$$

## Esempio matrice diagonale

$$\mathbf{D}_{p \times p} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

## Esempio matrice scalare

Si consideri  $K = 8$

$$\mathbf{K}_{p \times p} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 8 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 8 \end{pmatrix}$$

Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

# Matrice identità e matrice unitaria

Richiami di algebra  
delle matrici

A. Iodice

## Matrice identità

La matrice identità  $\mathbf{I}$  è una matrice scalare con  $K = 1$ .

$$\mathbf{I}_{p \times p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$$

Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

## Matrice unitaria

La matrice unitaria ha tutti gli elementi uguali ad 1.

$$\mathbf{U}_{n \times p} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

# Trasposizione del prodotto tra matrici

Richiami di algebra  
delle matrici

A. Iodice

Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

## Esempio trasposizione prodotto tra matrici

Si considerino le matrici **A** e **B**

$$(\mathbf{A}_{2 \times 3} \mathbf{B}_{3 \times 2})^T = \left( \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 8 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \\ 9 & 9 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 66 & 121 \\ 32 & 101 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{3 \times 2}^T \mathbf{A}_{2 \times 3}^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & 121 \\ 32 & 101 \end{pmatrix}$$

# Prodotto tra una matrice uno scalare

Richiami di algebra  
delle matrici

A. Iodice

Il prodotto di una matrice  $\mathbf{A}$  per uno scalare  $\lambda$  determina una matrice i cui elementi sono gli elementi di  $\mathbf{A}$  moltiplicati per  $\lambda$

$$\lambda \mathbf{A} = \mathbf{A}\lambda$$

## Esempio

Sia  $\lambda = 2$ .

$$\lambda \mathbf{A}_{2 \times 3} = \mathbf{A}_{2 \times 3} \lambda = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 8 & 6 & 7 \end{pmatrix} \times \mathbf{2} = \begin{pmatrix} 8 & 14 & 2 \\ 16 & 12 & 14 \end{pmatrix}$$

Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

# Prodotto tra matrici

Richiami di algebra  
delle matrici

A. Iodice

Il prodotto di una matrice  $\mathbf{A}$  per uno scalare  $\lambda$  determina una matrice i cui elementi sono gli elementi di  $\mathbf{A}$  moltiplicati per  $\lambda$

$$\mathbf{A}_{n \times p} \mathbf{B}_{p \times n} = \mathbf{P}_{n \times n}$$

$$(\mathbf{A}_{2 \times 3} \mathbf{B}_{3 \times 2}) = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 8 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \\ 9 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & 32 \\ 121 & 101 \end{pmatrix}$$

## Proprietà del prodotto tra matrici

Siano  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 18 \end{pmatrix}$

- $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$
- $\mathbf{ABC} = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
- $(\mathbf{A}^T + \mathbf{B})\mathbf{C} = (\mathbf{A}^T\mathbf{C}) + (\mathbf{B}\mathbf{C})$

Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

# Traccia di una matrice

Richiami di algebra  
delle matrici

A. Iodice

La traccia di una matrice quadrata è la somma degli elementi della diagonale principale

$$tr(\mathbf{X}_{p \times p}) = \sum_{i=1}^p x_{ii}$$

$$tr(\mathbf{P}_{2 \times 2}) = \begin{pmatrix} 66 & 32 \\ 121 & 101 \end{pmatrix} = 66 + 101 = 167$$

## Proprietà della traccia

- $tr(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = tr(\mathbf{A}) + tr(\mathbf{B})$
- $tr(\mathbf{A}) = tr(\mathbf{A}^T)$
- $tr(\mathbf{AB}) = tr(\mathbf{BA})$
- $tr(\mathbf{AA}^T) = tr(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2$

Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

# Determinante di una matrice

Richiami di algebra  
delle matrici

A. Iodice

Ciascuna matrice quadrata è identificabile attraverso un singolo valore detto **determinante**

## Determinante di una matrice $2 \times 2$

$$\det(\mathbf{X}_{2 \times 2}) = \det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} =$$

$x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}$

## Determinante di una matrice $2 \times 2$

$$\det \begin{pmatrix} 66 & 32 \\ 121 & 101 \end{pmatrix} =$$

$(66 * 101) - (121 * 32) = 6666 - 3873 = 2794$

## Determinante per matrice $3 \times 3$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

# Inversa di una matrice

Richiami di algebra  
delle matrici

A. Iodice

Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

## Teorema

Sia  $\mathbf{A}$  una matrice quadrata con determinante diverso da zero, allora esiste ed è unica la matrice  $\mathbf{B}$  tale che

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$$

La matrice  $\mathbf{B}$  rappresenta la matrice inversa di  $\mathbf{A}$  e si indica con  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$

## Proprietà della matrice inversa

- $(k * \mathbf{A})^{-1} = k^{-1} * \mathbf{A}^{-1}$
- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$
- $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})^{-1}$

# Interpretazione geometrica di vettori

Un vettore  $\mathbf{v} = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$  avente punto di applicazione nell'origine degli assi  $O$ , è un segmento orientato avente per estremi  $O$  ed il punto  $P$  di coordinate  $(x, y)$ .

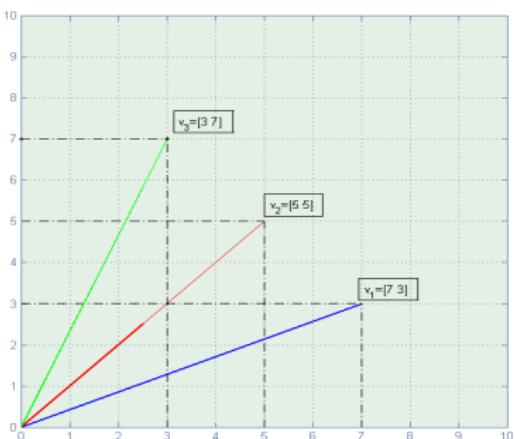
## Rappresentazione di vettori in $R^2$

Si considerino i seguenti vettori:  $v_1 = [7, 3]$ ,  $v_2 = [5, 5]$  e  $v_3 = [3, 7]$ .

## Caratteristiche di vettori

Le caratteristiche distintive di un vettore sono

- **intensità** (norma): ovvero la lunghezza del vettore
- **direzione**: individuata dalla retta passante per gli estremi ( $OP$ ) del vettore
- **verso**: la semiretta con origine in  $O$  e passante per  $P$



Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

# La norma di un vettore

Richiami di algebra  
delle matrici

A. Iodice

La norma (lunghezza di un vettore  $\mathbf{v}$ ) è data dalla radice quadrata della somma dei quadrati degli elementi di  $\mathbf{v}$

$$\|\mathbf{v}\| = [v_1, v_2, \dots, v_p] = \sqrt{\sum_{i=1}^p v_i^2}$$

## Calcolo della norma di vettori

Con riferimento ai vettori  $v_1 = [7, 3]$ ,  $v_2 = [5, 5]$  e  $v_3 = [3, 7]$  le norme sono

- $\|v_1\| = \sqrt{7^2 + 3^2} = 7.61$
- $\|v_2\| = \sqrt{5^2 + 5^2} = 7.07$
- $\|v_3\| = \sqrt{3^2 + 7^2} = 7.61$

## Rappresentazione di vettori in $R^2$



Operazioni di base sui vettori

Operazioni di base sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà delle operazioni tra matrici

Interpretazione geometrica di vettori

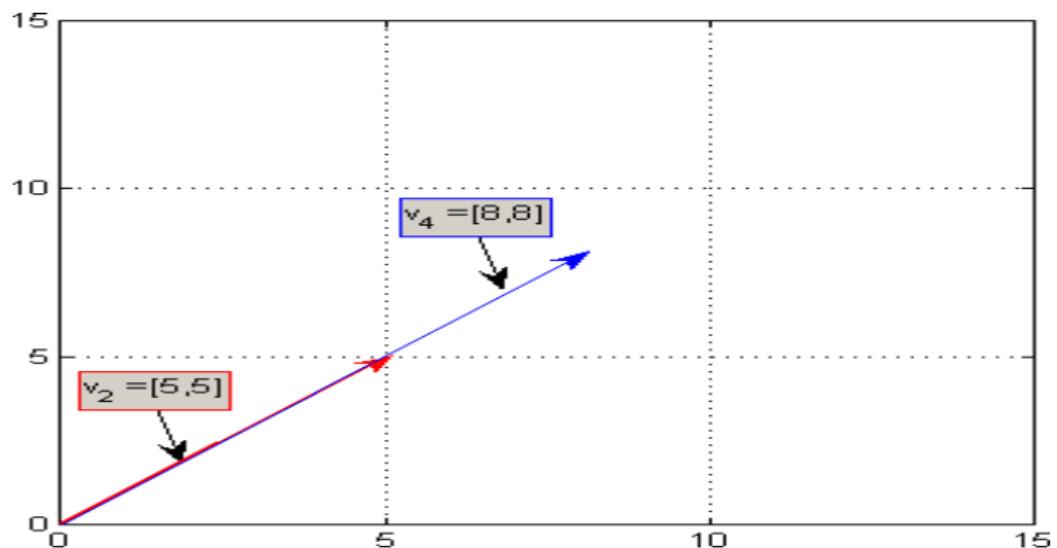
Trasformazioni matriciali dei dati di partenza

Il coefficiente di correlazione

# Vettori collineari

Due vettori si dicono collineari se sono caratterizzati da uguale direzione, anche se da intensità differente.

Considerando i vettori  $\mathbf{v}_2 = [5, 5]$  e  $\mathbf{v}_4 = [8, 8]$

Operazioni di base  
sui vettoriOperazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

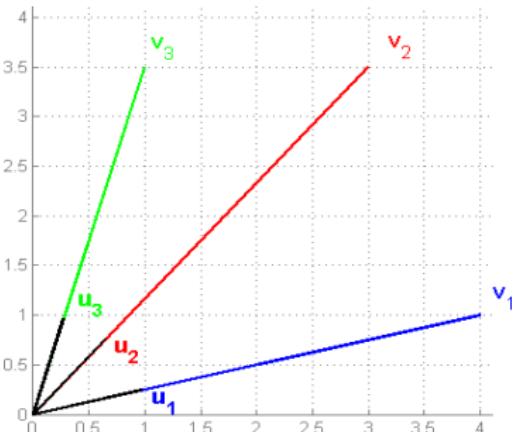
Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matriciInterpretazione  
geometrica di  
vettoriTrasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenzaIl coefficiente di  
correlazione

## Vettore di norma unitaria

Il vettore di lunghezza unitaria si definisce **versore** e identifica una direzione. Una direzione identifica infiniti vettori, pertanto quello cui si fa riferimento è il versore. Per ottenere il versore **u** corrispondente al vettore **v** è necessario dividere ciascuno degli elementi di **v** per  $\|v\|$ . Con riferimento ai vettori  $v_1 = [4, 1]$ ,  $v_2 = [3, 3.5]$  e  $v_3 = [1, 3.5]$ , i corrispondenti vettori unitari (versori) sono

- $u_1 = [\frac{4}{4.12}, \frac{1}{4.12}] = [0.97, 0.24]$
- $u_2 = [\frac{3}{4.61}, \frac{3.5}{4.61}] = [0.65, 0.76]$
- $u_3 = [\frac{1}{3.64}, \frac{3.5}{3.64}] = [0.27, 0.96]$

## Rappresentazione di vettori in $R^2$



Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

# Interpretazione geometrica della somma tra vettori

Richiami di algebra delle matrici

A. Iodice

## Rappresentazione della somma di vettori in $R^2$

### Somma tra vettori

Dati due vettori vettori

$\mathbf{v}_1 = [x_1, y_1]$  e

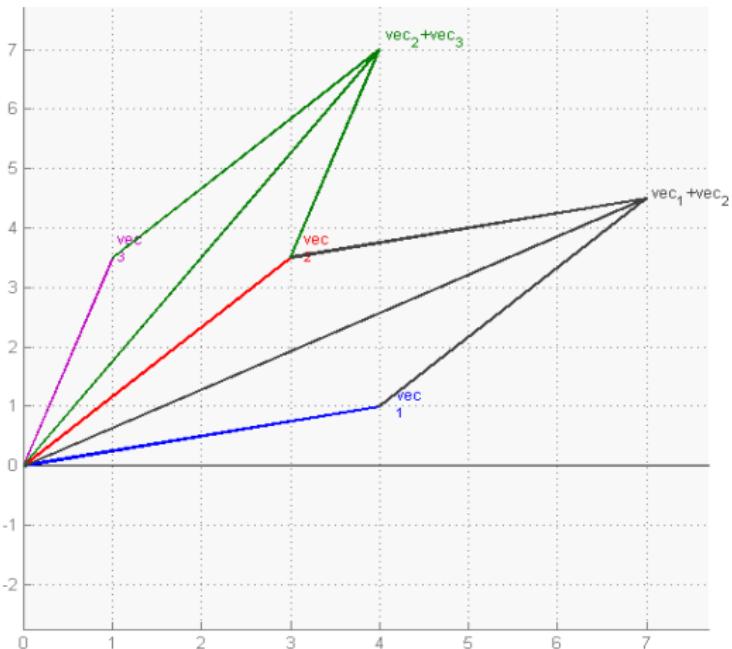
$\mathbf{v}_2 = [x_2, y_2]$  il vettore risultante dalla somma

$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  corrisponde alla diagonale maggiore del parallelogramma avente per lati  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ .

Con riferimento ai vettori

$v_1 = [4, 1]$ ,  $v_2 = [3, 3.5]$  e  $v_3 = [1, 3.5]$ , i corrispondenti vettori somma sono

- $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = [7, 4.5]$
- $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = [4, 7]$



Operazioni di base sui vettori

Operazioni di base sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà delle operazioni tra matrici

Interpretazione geometrica di vettori

Trasformazioni matriciali dei dati di partenza

Il coefficiente di correlazione

# Interpretazione geometrica della differenza tra vettori

Richiami di algebra delle matrici

A. Iodice

## Rappresentazione della differenza di vettori in $R^2$

### Differenza tra vettori

Dati due vettori vettori

$v_1 = [x_1, y_1]$  e

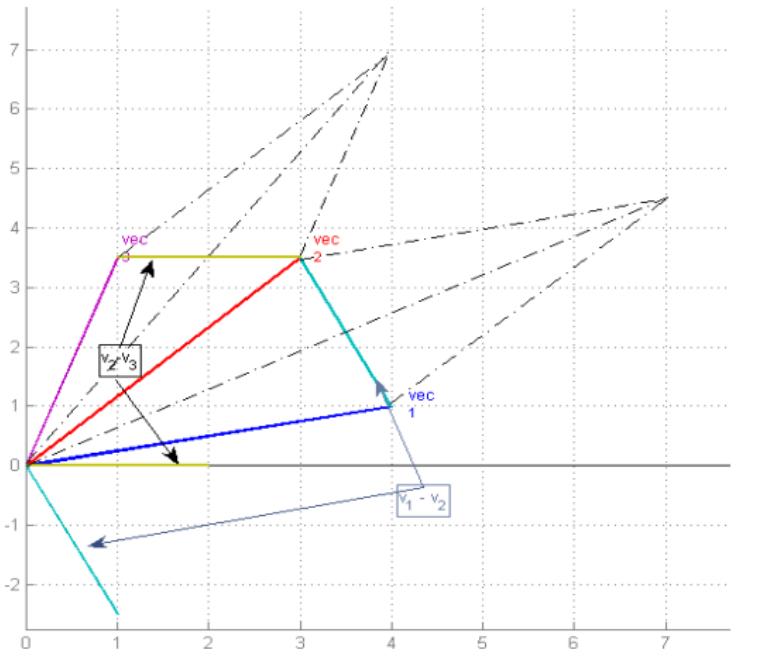
$v_2 = [x_2, y_2]$  il vettore risultante dalla somma

$v_1 - v_2$  corrisponde alla diagonale minore del parallelogramma avente per lati  $v_1$  e  $v_2$ .

Con riferimento ai vettori

$v_1 = [4, 1]$ ,  $v_2 = [3, 3.5]$  e  $v_3 = [1, 3.5]$ , i corrispondenti vettori somma sono

- $v_1 - v_2 = [1, -2.5]$
- $v_2 - v_3 = [2, 0]$



Operazioni di base sui vettori

Operazioni di base sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà delle operazioni tra matrici

Interpretazione geometrica di vettori

Trasformazioni matriciali dei dati di partenza

Il coefficiente di correlazione

# Interpretazione geometrica del prodotto scalare tra vettori

Dati due vettori vettori  $\mathbf{v}_1 = [x_1, y_1]$  e  $\mathbf{v}_2 = [x_2, y_2]$  il prodotto scalare è proporzionale alla proiezione ortogonale del vettore  $\mathbf{v}_1$  sul vettore  $\mathbf{v}_2$

## Il prodotto scalare tra vettori tra vettori

Il prodotto scalare è proporzionale al coseno dell'angolo  $\theta$  formato tra i due vettori.

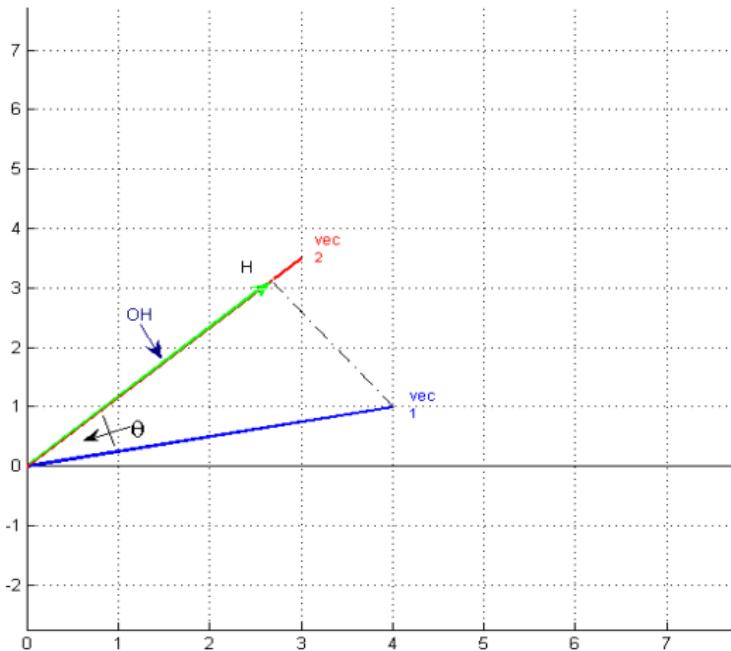
$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\|}$$

da cui

$$\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 = \cos(\theta) \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\|$$

da cui deriva il fatto che, se  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  sono perpendicolari,  $\theta = 90^\circ$ , dunque  $\cos(\theta) = \cos(90^\circ) = 0$  allora  $\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 = 0$

## Rappresentazione della proiezione di $\mathbf{v}_1$ su $\mathbf{v}_2$



Operazioni di base sui vettori

Operazioni di base sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà delle operazioni tra matrici

Interpretazione geometrica di vettori

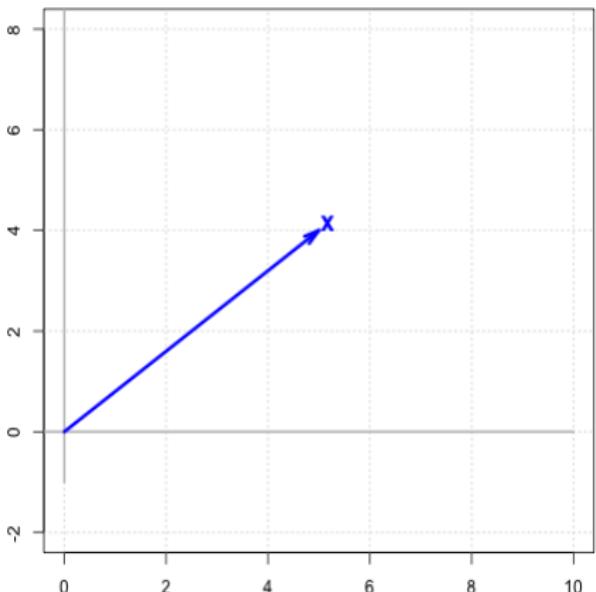
Trasformazioni matriciali dei dati di partenza

Il coefficiente di correlazione

# Proiezione ortogonale di un vettore

...graficamente

si consideri il vettore  $\mathbf{x} = [5, 4]$



Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

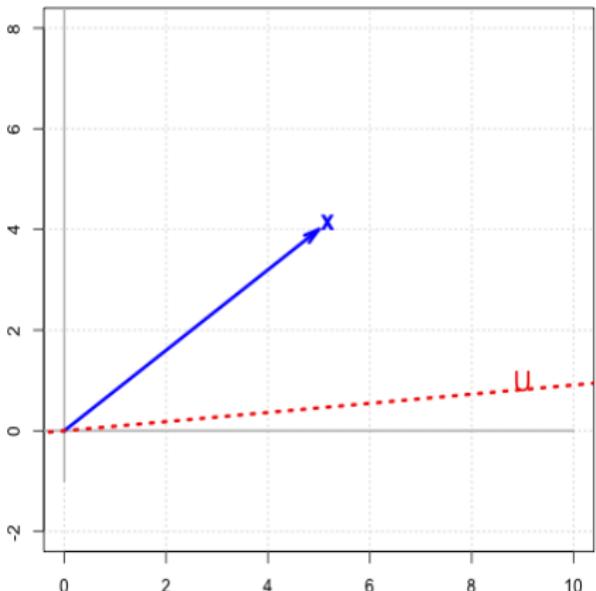
Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

# Proiezione ortogonale di un vettore

...graficamente

si vuole proiettare il vettore  $\mathbf{x}$  sull'asse  $\mathbf{U}$  passante per il punto  $(11, 1)$ .



Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

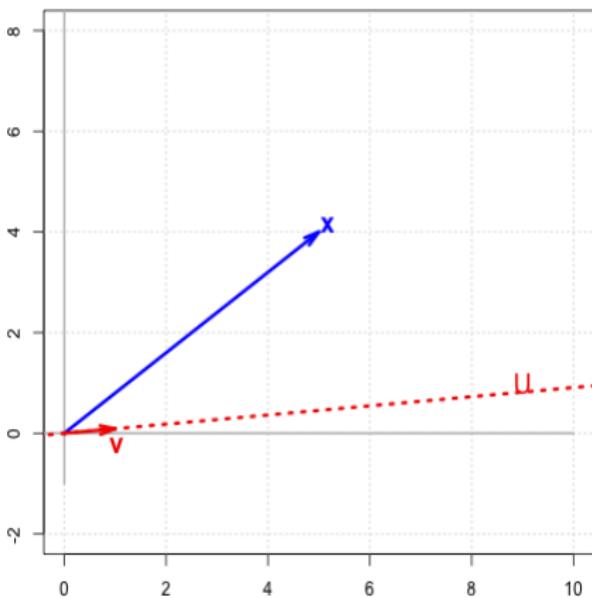
Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

# Proiezione ortogonale di un vettore

...graficamente

per effettuare la proiezione di  $x$  sull'asse  $U$  occorre calcolare il versore  $v$  dell'asse  $U$ ; il versore è  $v = [0.995, 0.0905]$



Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

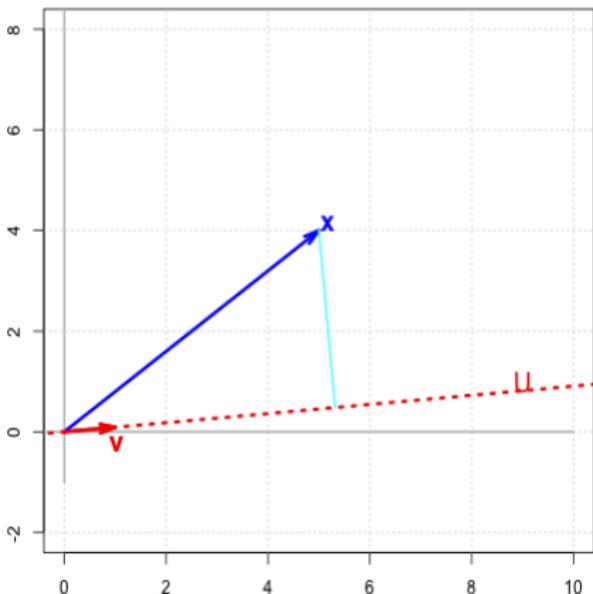
Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

# Proiezione ortogonale di un vettore

...graficamente

coordinata  $\alpha$  della proiezione ortogonale sull'asse  $\mathbf{U}$  del vettore  $\mathbf{x}$  si ottiene moltiplicando il vettore da proiettare per il versore  $\mathbf{v}$  dell'asse  $\mathbf{U}$ ,



Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

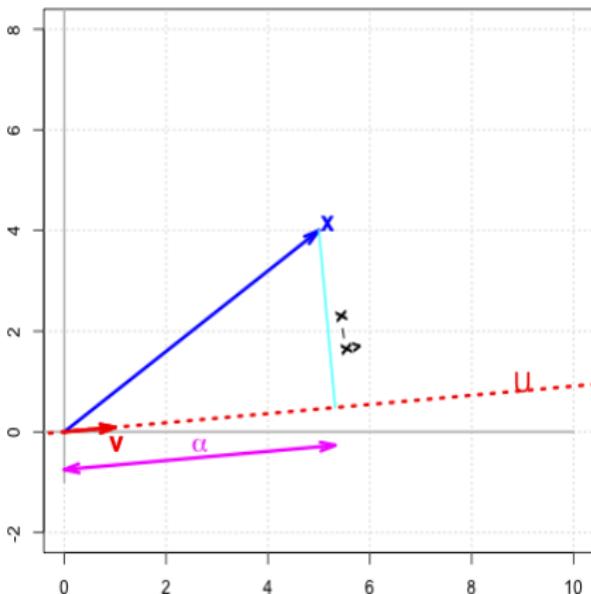
Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

# Proiezione ortogonale di un vettore

...graficamente

coordinata  $\alpha$  della proiezione ortogonale sull'asse  $U$  del vettore  $x$  si ottiene moltiplicando il vettore da proiettare per il versore  $v$  dell'asse  $U$ ,



Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

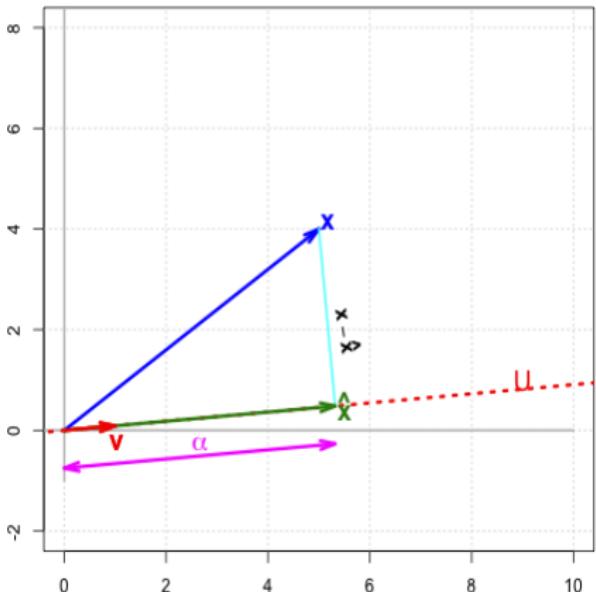
Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

# Proiezione ortogonale di un vettore

...graficamente

avendo ottenuto  $\alpha$ , è ora possibile calcolare il vettore  $\hat{x}$  che rappresenta l' 'immagine' di  $x$  sull'asse  $U$



Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

# Proiezione ortogonale di un vettore

Ciascun asse individua una direzione nello spazio; poiché ciascuna direzione identifica infiniti vettori di diversa intensità si fa riferimento al versore che ha norma (intensità) pari ad 1. Dunque tutti i punti che giacciono su un asse  $\mathbf{U}$  che ha per versore  $\mathbf{v}$  avranno come coordinata un multiplo di  $\mathbf{v}$ . Questo perchè a ciascuno dei punti su  $\mathbf{U}$  corrisponde un vettore di direzione identificata dall'asse  $\mathbf{U}$  di versore  $\mathbf{v}$ . Sia  $\hat{\mathbf{x}}$  la proiezione ortogonale del vettore  $\mathbf{x}$  sull'asse  $\mathbf{U}$  di versore  $\mathbf{v}$ .

## Determinare $\alpha$ , la coordinata sull'asse

La proiezione di  $\mathbf{x}$  su  $\mathbf{U}$  deve essere ortogonale, quindi il vettore differenza  $(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$  deve essere ortogonale all'asse  $\mathbf{U}$ , di conseguenza  $(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$  deve essere ortogonale a  $\mathbf{v}$ . Due vettori sono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo, il vincolo è quindi  $(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{v} = 0$  da cui, facendo alcuni passaggi, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{v} - \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{v} &= 0 && \text{poichè } \hat{\mathbf{x}} = \alpha \mathbf{v} \text{ e } \hat{\mathbf{x}}^T = \alpha \mathbf{v}^T \text{ allora} \\ \mathbf{x}^T \mathbf{v} - \alpha \mathbf{v}^T \mathbf{v} &= 0 && \text{essendo } \mathbf{v} \text{ un versore, } \mathbf{v}^T \mathbf{v} = 1, \text{ quindi} \\ \mathbf{x}^T \mathbf{v} - \alpha &= 0 \implies \alpha = \mathbf{x}^T \mathbf{v} && \text{che rappresenta la coordinata di } \mathbf{x} \text{ sull'asse } \mathbf{U} \text{ di versore } \mathbf{v}. \end{aligned}$$

dunque la coordinata  $\alpha$  della proiezione ortogonale sull'asse  $\mathbf{U}$  del vettore  $\mathbf{x}$  si ottiene moltiplicando il vettore da proiettare per il versore  $\mathbf{v}$  dell'asse  $\mathbf{U}$ .

La coordinata  $\alpha$  sarà dunque una **combinazione lineare** (somma ponderata) di  $\mathbf{x}$

$$\alpha = \mathbf{x}^T \mathbf{v} = [5, 4] \begin{bmatrix} 0.995 \\ 0.905 \end{bmatrix} = 5 \times \underbrace{0.995}_{\text{peso}} + 4 \times \underbrace{0.905}_{\text{peso}} = 8.595$$

Operazioni di base  
sui vettoriOperazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matriciInterpretazione  
geometrica di  
vettoriTrasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenzaIl coefficiente di  
correlazione

# la media aritmetica

Richiami di algebra  
delle matrici

A. Iodice

- media semplice:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- media per dati organizzati in frequenze:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i n_i$$

- media per frequenze relative:

$$\mu = \sum_{i=1}^n x_i \frac{n_i}{n}$$

Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

# Definizione di varianza

La varianza un'indice che misura la variabilità di una variabile  $X$  rispetto alla media aritmetica. In particolare la varianza  $\sigma^2$  data dalla media dei quadrati degli scarti (delle modalità dalla media)

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \dots + (x_n - \mu)^2}{n} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\end{aligned}$$

per dati organizzati in frequenze

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{(x_1 - \mu)^2 \times n_1 + (x_2 - \mu)^2 \times n_2 + \dots + (x_k - \mu)^2 \times n_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2 \times n_i\end{aligned}$$

# Misura del legame

Richiami di algebra  
delle matrici

A. Iodice

Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

Le componenti della variabile doppia  $X$  e  $Y$  possono essere caratterizzate da diversa posizione e variabilità, risulta in genere che

$$\mu_x \neq \mu_y \text{ e } \sigma_x \neq \sigma_y$$

Volendo misurare le **variazioni congiunte** delle modalità di  $X$  ed  $Y$ , si fa riferimento alla versione **standardizzata** delle variabili, data da

$$Z_x = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \text{ e } Z_y = \frac{Y - \mu_y}{\sigma_y}$$

questo per escludere dalla misura del legame gli effetti della differente media e varianza (essendo  $\mu_x \neq \mu_y$  e  $\sigma_x \neq \sigma_y$ )

# Il coefficiente di correlazione lineare di Pearson $\rho$

Richiami di algebra  
delle matrici

A. Iodice

L'indice corrispondente alla media aritmetica del prodotto delle modalità standardizzate delle variabili si definisce  
**coefficiente di correlazione lineare di Pearson  $\rho$**  ed dato da

$$\rho_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_{x,i} z_{y,i}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x} \times \frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y} \right)$$

Con piccole trasformazioni si ottiene la presente formalizzazione

$$\rho_{xy} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

La quantità al numeratore si definisce **covarianza**: essa corrisponde alla media del prodotto degli scarti delle modalità di  $X$  e  $Y$  dalle rispettive medie. La covarianza misura la contemporanea variazione di  $X$  e  $Y$  con riferimento alle loro medie.

Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

# Tabella individui × variabili

Si considerino  $p$  variabili quantitative osservate su un collettivo di  $n$  unità statistiche. La corrispondente matrice di dati  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}_{n \times p} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

## esempio

$$\mathbf{A}_{5 \times 3} = \begin{pmatrix} 25 & 19 & 13 \\ 23 & 21 & 19 \\ 36 & 16 & 22 \\ 22 & 24 & 17 \\ 18 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

# Calcolo del vettore delle medie delle $p$ variabili

Utilizzando il prodotto vettoriale è possibile ottenere il vettore delle medie

$$\mathbf{m} = \mathbf{A}_{p \times n}^T * \mathbf{u}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \dots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{n}(a_{1,1} + a_{1,2} + \dots + a_{1,n}) \\ \frac{1}{n}(a_{2,1} + a_{2,2} + \dots + a_{2,n}) \\ \dots \\ \frac{1}{n}(a_{p,1} + a_{p,2} + \dots + a_{p,n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_p \end{pmatrix}$$

## esempio

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 25 & 23 & 36 & 22 & 18 \\ 19 & 21 & 16 & 24 & 9 \\ 13 & 19 & 22 & 17 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^T_{3 \times 5}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_{5 \times 1}} = \begin{pmatrix} \frac{(25+23+36+22+18)}{5} \\ \frac{(19+21+16+24+9)}{5} \\ \frac{(13+19+22+17+4)}{5} \end{pmatrix} =$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 24.8 \\ 17.8 \\ 15 \end{pmatrix}}_{\mathbf{m}_{3 \times 1}}$$

Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

# Calcolo della matrice delle medie delle $p$ variabili

Richiami di algebra  
delle matrici

A. Iodice

A partire da  $\mathbf{m}$ , vettore delle medie, si ottiene la matrice delle medie, utile alla successiva operazione di centratura.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{n \times p} &= \mathbf{1}_{n \times 1} * \mathbf{m}_{1 \times p}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \times (\mu_1 \quad \mu_2 \quad \dots \quad \mu_p) = \\ &= \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_p \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## esempio

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{1}_{5 \times 1}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 24.8 & 17.8 & 15 \end{pmatrix}}_{\mathbf{m}_{1 \times 3}^T} = \underbrace{\begin{pmatrix} 24.8 & 17.8 & 15 \\ 24.8 & 17.8 & 15 \\ 24.8 & 17.8 & 15 \\ 24.8 & 17.8 & 15 \\ 24.8 & 17.8 & 15 \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}_{5 \times 3}}$$

Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

# Centratura della matrice

Sottraendo alla matrice dei dati di partenza  $\mathbf{A}$  e la matrice delle medie  $\mathbf{M}$  si ottiene la matrice dei dati centrati  $\mathbf{X}$ .

$$\mathbf{X}_{n \times p} = \mathbf{A}_{n \times p} - \mathbf{M}_{n \times p} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_p \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_p \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (a_{1,1} - \mu_1) & (a_{1,2} - \mu_2) & \dots & (a_{1,p} - \mu_p) \\ (a_{2,1} - \mu_1) & (a_{2,2} - \mu_2) & \dots & (a_{2,p} - \mu_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{n,1} - \mu_1) & (a_{n,2} - \mu_2) & \dots & (a_{n,p} - \mu_p) \end{pmatrix}$$

## esempio

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 25 & 19 & 13 \\ 23 & 21 & 19 \\ 36 & 16 & 22 \\ 22 & 24 & 17 \\ 18 & 9 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_{5 \times 3}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 24.8 & 17.8 & 15 \\ 24.8 & 17.8 & 15 \\ 24.8 & 17.8 & 15 \\ 24.8 & 17.8 & 15 \\ 24.8 & 17.8 & 15 \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}_{5 \times 3}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.2 & 1.2 & -2 \\ -1.8 & 3.2 & 4 \\ 11.2 & -1.8 & 7 \\ -2.8 & 6.2 & 2 \\ -6.8 & -8.8 & -11 \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}_{5 \times 3}}$$

Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

# Matrice di devianza e codevianza

Una volta ottenuta la matrice centrata  $\mathbf{X}$ , è possibile, attraverso il prodotto di  $\mathbf{X}$  per la sua trasposta, ottenere la matrice di devianza e codevianza. Tale matrice avrà elementi della diagonale principale le **devianze**; gli elementi extra-diagonale le **codevianze**.  $\mathbf{X}_{p \times n}^T * \mathbf{X}_{n \times p} =$

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{p,1} & x_{p,2} & \dots & x_{p,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,p} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \dots & x_{n,p} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \text{dev}(X_1) & \text{codev}(X_1, X_2) & \dots & \text{codev}(X_1, X_p) \\ \text{codev}(X_2, X_1) & \text{dev}(X_2) & \dots & \text{codev}(X_2, X_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{codev}(X_p, X_1) & \text{codev}(X_p, X_2) & \dots & \text{dev}(X_p) \end{pmatrix}$$

## esempio

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0.20 & -1.80 & 11.20 & -2.80 & -6.80 \\ 1.20 & 3.20 & -1.80 & 6.20 & -8.80 \\ -2.00 & 4.00 & 7.00 & 2.00 & -11.00 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_{3 \times 5}^T} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0.2 & 1.2 & -2 \\ -1.8 & 3.2 & 4 \\ 11.2 & -1.8 & 7 \\ -2.8 & 6.2 & 2 \\ -6.8 & -8.8 & -11 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_{5 \times 3}} =$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 182.8 & 16.8 & 140 \\ 16.8 & 130.8 & 107 \\ 140 & 107 & 194 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_{3 \times 3}}$$

Operazioni di base  
sui vettoriOperazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matriciInterpretazione  
geometrica di  
vettoriTrasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenzaIl coefficiente di  
correlazione

# Matrice di varianze e covarianze

A questo punto è immediato definire la matrice di varianze e covarianze  $\Sigma$ . Per fare questo si consideri la **matrice diagonale** come una matrice quadrata (stesso numero di righe e di colonne) i cui elementi extradiagonali sono nulli. In particolare si faccia riferimento alla matrice  $\mathbf{U}$  di dimensione  $(p \times p)$  i cui elementi diagonali siano tutti uguali a  $\frac{1}{n}$ .

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Utilizzando la matrice  $\mathbf{U}$  è possibile ricavare la matrice  $\Sigma$  di dimensioni  $p \times p$  a partire da quella di devianze e codevianze  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  precedentemente ottenuta.

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{U} = \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{(X_1, X_2)} & \dots & \sigma_{(X_1, X_p)} \\ \sigma_{(X_2, X_1)} & \sigma_{X_2}^2 & \dots & \sigma_{(X_2, X_p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{(X_n, X_1)} & \sigma_{(X_n, X_2)} & \dots & \sigma_{X_p}^2 \end{pmatrix}$$

# Matrice di varianze e covarianze

Richiami di algebra  
delle matrici

A. Iodice

Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

## esempio

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 182.8 & 16.8 & 140 \\ 16.8 & 130.8 & 107 \\ 140 & 107 & 194 \end{pmatrix}}_{\mathbf{V}_{3 \times 3}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}_{3 \times 3}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 36.56 & 3.36 & 28 \\ 3.36 & 26.16 & 21.4 \\ 28 & 21.40 & 38.8 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\Sigma}_{3 \times 3}}$$

# Matrice standardizzata

Per ottenere la matrice dei dati standardizzati  $\mathbf{Z}$  di dimensione  $n \times p$  i cui elementi generici

$z_{ij} = \frac{a_{ij} - \mu_j}{\sigma_j}$ ,  $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, p$ . Avendo già ottenuto la matrice dei dati centrati  $\mathbf{X}$  è necessario moltiplicare ciascuno degli elementi di tale matrice per  $\frac{1}{\sigma_j}$ . Si ricorre anche in questo caso ad una matrice diagonale: la matrice è  $\mathbf{D}$  di dimensione  $(p \times p)$  i cui elementi diagonali sono tutti uguali a  $\frac{1}{\sigma_j}$ ,  $j = 1, \dots, p$ .

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_p} \end{pmatrix}$$

Utilizzando la matrice  $\mathbf{D}$  è possibile ricavare la matrice  $\mathbf{Z}$  di dimensioni  $n \times p$ : post-moltiplicando  $\mathbf{D}$  ad  $\mathbf{X}$  si ottiene

$$\mathbf{Z} = \mathbf{XD} = \begin{pmatrix} \frac{a_{11} - \mu_1}{\sigma_1} & \frac{a_{12} - \mu_2}{\sigma_2} & \dots & \frac{a_{1p} - \mu_p}{\sigma_p} \\ \frac{a_{21} - \mu_1}{\sigma_1} & \frac{a_{22} - \mu_2}{\sigma_2} & \dots & \frac{a_{2p} - \mu_p}{\sigma_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n1} - \mu_1}{\sigma_1} & \frac{a_{n2} - \mu_2}{\sigma_2} & \dots & \frac{a_{np} - \mu_p}{\sigma_p} \end{pmatrix}$$

# Matrice standardizzata

Richiami di algebra  
delle matrici

A. Iodice

esempio

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0.2 & 1.2 & -2 \\ -1.8 & 3.2 & 4 \\ 11.2 & -1.8 & 7 \\ -2.8 & 6.2 & 2 \\ -6.8 & -8.8 & -11 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_{5 \times 3}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{36.56}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{26.16}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{38.8}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{D}_{3 \times 3}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.03 & 0.23 & -0.32 \\ -0.30 & 0.63 & 0.64 \\ 1.85 & -0.35 & 1.12 \\ -0.46 & 1.21 & 0.32 \\ -1.12 & -1.72 & -1.77 \end{pmatrix}}_{\mathbf{z}_{5 \times 3}}$$

Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

# Matrice di correlazione

Il coefficiente di correlazione lineare di Pearson che caratterizza una coppia di variabili è definito come la media aritmetica dei prodotti delle modalità standardizzate. Pertanto, avendo calcolato  $\mathbf{Z}$ , matrice standardizzata, risulta agevole ottenere la matrice di correlazione:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \dots & \rho_{1,p} \\ \rho_{2,1} & 1 & \dots & \rho_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{p,1} & \rho_{p,2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

In particolare gli elementi diagonali di tale matrice sono

$$r_{jj} = \frac{1}{n} \left[ \left( \frac{a_{1,j} - \mu_j}{\sigma_j} \right)^2 + \left( \frac{a_{2,j} - \mu_j}{\sigma_j} \right)^2 + \dots + \left( \frac{a_{n,j} - \mu_j}{\sigma_j} \right)^2 \right] =$$

$$\underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_{ij} - \mu_j)^2}_{\text{varianza } \sigma_j^2} \frac{1}{\sigma_j^2} = \frac{\sigma_j^2}{\sigma_j^2} = 1$$

# Matrice di correlazione

Richiami di algebra  
delle matrici

A. Iodice

Gli elementi extra-diagonali sono

$$\begin{aligned} r_{kj} &= \frac{1}{n} \left[ \left( \frac{a_{1,k} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \times \left( \frac{a_{1,j} - \mu_j}{\sigma_j} \right) + \left( \frac{a_{2,k} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \times \left( \frac{a_{2,j} - \mu_j}{\sigma_j} \right) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{a_{n,k} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \times \left( \frac{a_{n,j} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right] = \overbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_{i,k} - \mu_k) (a_{i,j} - \mu_j)}^{\text{covarianza } \sigma_{kj}} = \\ &= \frac{\sigma_{kj}}{\sigma_k \sigma_j} = \rho_{kj} \rightarrow \text{coefficiente di correlazione lineare tra le variabili } k \text{ e } j \end{aligned}$$

Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione

# Matrice di correlazione

Richiami di algebra  
delle matrici

A. Iodice

## esempio

$\mathbf{R} =$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0.03 & -0.30 & 1.85 & -0.46 & -1.12 \\ 0.23 & 0.63 & -0.35 & 1.21 & -1.72 \\ -0.32 & 0.64 & 1.12 & 0.32 & -1.77 \end{pmatrix}}_{\mathbf{Z}^T 3 \times 5} \underbrace{\begin{pmatrix} 0.03 & 0.23 & -0.32 \\ -0.30 & 0.63 & 0.64 \\ 1.85 & -0.35 & 1.12 \\ -0.46 & 1.21 & 0.32 \\ -1.12 & -1.72 & -1.77 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U} 5 \times 3} \mathbf{U} 3 \times 3 =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 0.54 & 3.72 \\ 0.54 & 5 & 3.36 \\ 3.72 & 3.36 & 5 \end{pmatrix}}_{(\mathbf{z}^T \mathbf{z})_{3 \times 3}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}}_{\mathbf{U} 3 \times 3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0.11 & 0.74 \\ 0.11 & 1 & 0.67 \\ 0.74 & 0.67 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{R} 3 \times 3}$$

Operazioni di base  
sui vettori

Operazioni di base  
sulle matrici

matrici particolari

Alcune proprietà  
delle operazioni tra  
matrici

Interpretazione  
geometrica di  
vettori

Trasformazioni  
matriciali dei dati  
di partenza

Il coefficiente di  
correlazione