4. Esperanza y Varianza

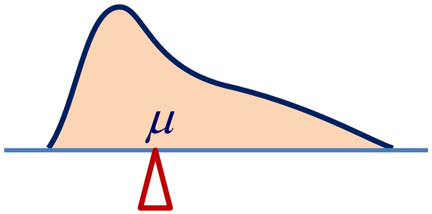
1. Esperanza
2. Varianza
3. Momentos
4. Covarianza y correlación
5. Esperanza condicional
6. Desigualdad de *Chebychev*
7. Media muestral

Esperanza de una v.a.

- Dada una v.a. *X* con función de cuantía o densidad *f(x)*, se llama esperanza matemática (o media) de *X*, E(*X*) al número:
  - V.A. discreta: $\mathrm{E}(X) = \sum_i x_i f(x_i)$

X	1	2	3	5
f	0'4	0'4	0'1	0'1

  - V.A. continua: $\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$
  - Es un número (puede ser un valor de *X*), no una probabilidad.
  - Equivale al centro de masas (equilibrio).



  - Puede no existir (aun siendo simétrica).
  - Distribución simétrica: $\exists \mu\, \forall x :\; f(\mu - x) = f(\mu + x)$

Problemas

- **Problema 4.1**. Obtener el valor medio o esperanza de la puntuación en el lanzamiento de un dado.

- **Problema 4.2**. Obtener la esperanza de la v.a. X con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}x^3, & x \in [1,3] \\ 0, & resto \end{cases}$$

Esperanza de una función

- Dada una v.a. Y que sea función de otra $Y = h(X)$ de la que conocemos su $f(x)$, entonces la esperanza de Y es:
- V.A. discreta: $$\mathrm{E}(Y) = \sum_j y_j f_Y(y_j) = \mathrm{E}(h(X)) = \sum_i h(x_i) f(x_i)$$
- V.A. continua: $$\mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\, dy = \mathrm{E}(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\, dx$$
  - No es necesario calcular f_Y ya que es la misma f.

X	0	1	2
f	0'1	0'3	0'6

$Y = X^2$	0	1	4
f_Y			

Problema 4.3

- Dada la función de cuantía:

X	-1	0	1	2	4
f	0’2	0’1	0’2	0’4	0’1

Hallar la media de $Y = 2X+3$.

Problema 4.4

- Hallar la esperanza de $Y = X^3$ siendo la *fd* de X:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & x \in [0,2] \\ 0, & resto \end{cases}$$

Esperanza de una función de varias v.a.

- Dada una v.a. Z que es función de otras dos $Z = h(X,Y)$ de la que conocemos la función de cuantía/densidad conjunta $f(x,y)$, entonces la esperanza de Z es:

  - V.A. discretas:

$$\mathrm{E}(Z) = E\big(h(X,Y)\big) = \sum_i \sum_j h(x_i, y_j) f(x_i, y_j)$$

  - V.A. continuas:

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}) = \mathrm{E}(h(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) f(x,y)\, dx dy$$

Problema 4.5

- Dada la función de cuantía:

Y				f
1	0’1	0’5	0	
0	0’2	0’1	0’1	
	0	**1**	**2**	X

Hallar la media de $Z = 2X+Y$.

Problema 4.6

- Hallar la esperanza de $Z = 2X + Y$ siendo la *fd* conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy, & (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0, & resto \end{cases}$$

Propiedades de la Esperanza

- Propiedades:
  - $\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X) + b$
  - $\mathrm{E}(X_1 + X_2 + \cdots) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \cdots$
  - Si las v.a. son independientes:

    $$\mathrm{E}(X_1 \cdot X_2 \cdot \cdots) = \mathrm{E}(X_1) \cdot \mathrm{E}(X_2) \cdot \cdots$$
- Esperanza de la distribución uniforme:
  - V.A. discreta (media aritmética): $\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$
  - V.A. continua: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & resto \end{cases}$

    $$\mathrm{E}(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

Problema 4.7

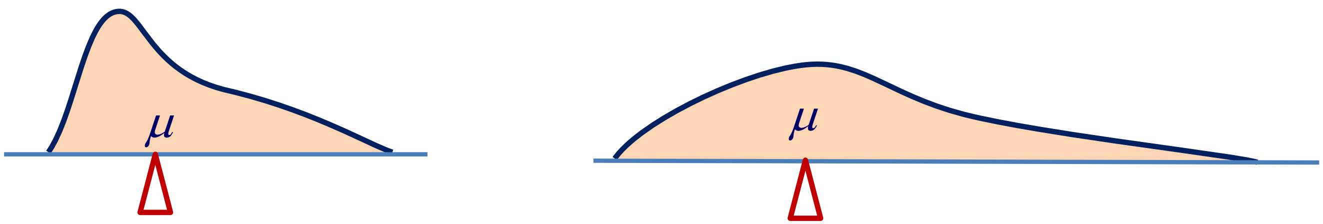
- En una asociación de acampada hay 300 familias. Considerando el nº de hijos, tenemos que 100 familias tienen un hijo, 70 tienen 2 hijos, 40 tienen 3, 10 familias tienen 4, y el resto no tienen hijos.

  A un campamento se inscriben 30 familias de la asociación sin indicar el número de hijos.

  Aparte de los adultos, calcula cuántos niños esperamos que vayan al campamento.

Varianza

- La varianza es una medida de la dispersión de una v.a. en torno a su media $\mu = \mathrm{E}(X)$.



- Se define como: $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}((X-\mu)^2)$
- Se calcula como: $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$
  - Puede no existir (es una esperanza).
  - Siempre es <u>positiva</u>.
  - **Desviación típica $\boldsymbol{\sigma}$**: raíz cuadrada <u>positiva</u> de la varianza.

Problema 4.8

- Dada la función de cuantía:

X	-1	0	1	2	4
f	0'2	0'1	0'2	0'4	0'1

Hallar la varianza y la desviación típica.

Problema 4.9

- Hallar la varianza y la desviación típica de la v.a. X con fd:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & x \in [0,2] \\ 0, & resto \end{cases}$$

Propiedades de la Varianza

- Propiedades:
  - $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$ $\rightarrow$ no está afectada por traslaciones.
  - Si las v.a. son independientes:

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \cdots) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \cdots$$

- Varianza de la distribución uniforme:
  - V.A. discreta: $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \mu^2$
  - V.A. continua:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & resto \end{cases}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

Problema 4.10

- En una fábrica se producen neumáticos cuyo índice de degradación es una v.a. X con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} x/8, & x \in [0,4] \\ 0, & resto \end{cases}$$

El precio base del neumático se calcula como $Y = 3X + 20$ €. Obtener la esperanza y la varianza de Y.

Momentos

- Los momentos son parámetros que permiten caracterizar la distribución aportando información sobre la misma.
- Momentos <u>centrales</u>
  - Dada una v.a. X con media μ, momento central de orden k es:

$$E((X-\mu)^k)$$

    - Momento central de orden 2 es la varianza: $\mathrm{Var}(X) = E((X-\mu)^2)$

- Momentos respecto al <u>origen</u>
  - Dada una v.a. X, momento de orden k respecto al origen es:

$$E(X^k)$$

    - Momento de orden 1 es la media: $\mu = E(X)$.

Función generatriz de momentos

- Dada una v.a. X, se llama f.g.m. a la función real de variable t:

$$\psi(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$$

- Si la f.g.m. existe en un entorno de 0, entonces es derivable en $t = 0$ un número arbitrario de veces:

$$\psi^{(k)}(0) = \mathrm{E}\left(X^k\right)$$

  - La f.g.m. por tanto permite generar los momentos respecto al origen:
    1. Obtener la f.g.m. calculando la esperanza de e^{tX} (debemos conocer la función de cuantía o densidad).
    2. Realizamos derivadas sucesivas hasta el orden del momento buscado.
    3. Sustituimos en las derivadas $t = 0$ obteniendo los momentos.

Problema 4.11

- Dada la función de cuantía:

X	-1	0	1	2	4
f	0'2	0'1	0'2	0'4	0'1

Hallar la esperanza y la varianza usando la f.g.m.

$$\psi(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} f(x) = e^{-t} \cdot 0'2 + e^{0t} \cdot 0'1 + e^{t} \cdot 0'2 + e^{2t} \cdot 0'4 + e^{4t} \cdot 0'1$$

$$\psi'(t) = -0'2e^{-t} + 0'2e^{t} + 0'8e^{2t} + 0'4e^{4t}$$

$$E(X) = \psi'(0) = -0'2 + 0'2 + 0'8 + 0'4 = 1'2$$

$$\psi''(t) = 0'2e^{-t} + 0'2e^{t} + 1'6e^{2t} + 1'6e^{4t}$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \psi''(0) = 0'2 + 0'2 + 1'6 + 1'6 = 3'6$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3'6 - 1'2^2 = 2'16$$

Propiedades de la f.g.m.

- Sea una v.a. con f.g.m. ψ_X y sea $Y = aX + b$, entonces
$$\psi_Y(t) = e^{bt}\psi_X(at)$$
- Sean n v.a. independientes X_i con f.g.m. ψ_i y sea Y la variable suma $Y = X_1 + \cdots + X_n$ con f.g.m. ψ_Y, entonces
$$\psi_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} \psi_i(t)$$
- Si las f.g.m. de dos v.a. X e Y son idénticas en un entorno de 0, entonces las distribuciones de X e Y son idénticas.
  - Básicamente, si dos v.a. tienen los mismos momentos, entonces tienen la misma distribución.