3. Variables Aleatorias

1. **Variables unidimensionales**
    1. **Variables discretas. Función de cuantía**
    2. **Variables continuas. Función de densidad**
    3. **Función de distribución**
2. **Variables bidimensionales**
    1. **Variables bidimensionales discretas**
    2. **Variables bidimensionales continuas**
    3. **Función de distribución**
    4. **Distribuciones marginales**
    5. **Independencia de variables**
    6. **Distribuciones condicionales**

Variable Aleatoria

- Se llama variable aleatoria (v.a.) X a toda aplicación

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

  - A cada elemento o resultado posible del experimento aleatorio, se le asigna un número real.

- Ejemplo: definir una v.a. en el lanzamiento de una moneda:

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \text{cara} &\longrightarrow 1 \\ \text{cruz} &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

  - Abreviadamente: $X = \{0, 1\}$. Si sale cara, $X = 1$, si sale cruz, $X = 0$.

- ¿Para qué?
  - Nos permite pasar del mundo de los sucesos a los números reales, de forma que podamos operar con ellos.

Problema 3.1

- En el lanzamiento de **tres monedas**, definimos X como el nº de caras.
- X puede tomar los valores $\{0, 1, 2, 3\}$.
- Se calculan probabilidades según X.
- Ej: probabilidad de $X = 2$
  - $P(X = 2) = P(\text{ccx, cxc, xcc}) = 3 \cdot (½)^3 = 3/8$
- Ej: probabilidad de $X < 2$
  - $P(X < 2) = P(\text{cxx, xcx, xxc, xxx}) = 4/8$
- Ej: probabilidad de $X < 1'7$
  - $P(X < 1'7) = P(\text{cxx, xcx, xxc, xxx}) = 4/8$

$$
\begin{aligned}
X:\ \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\
\text{ccc} &\longrightarrow 3 \\
\text{ccx} &\longrightarrow 2 \\
\text{cxc} &\longrightarrow 2 \\
\text{xcc} &\longrightarrow 2 \\
\text{cxx} &\longrightarrow 1 \\
\text{xcx} &\longrightarrow 1 \\
\text{xxc} &\longrightarrow 1 \\
\text{xxx} &\longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

V.A. discretas y continuas

- V.A. discretas
  - Pueden tomar un conjunto finito de valores, o infinito numerable.

  $\rightarrow$ Ej: nº de caras al lanzar 3 monedas: $X = \{0, 1, 2, 3\}$

  $\rightarrow$ Ej: nº de apps instaladas en un móvil: $X = \{0, 1, 2, \ldots\}$

  $\rightarrow$ Ej: nº de coches que entran en un *parking* en una hora: $X = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- V.A. continuas
  - Pueden tomar cualquier valor en un intervalo real.

  $\rightarrow$ Ej: altura de las personas adultas: $X = \{1'70, 1'611473, 1'833333, \ldots\}$

  $\rightarrow$ Ej: horas de duración de una batería: $X = \{36'98, 7'22181, 3'99999, \ldots\}$

V.A. discreta. Función de cuantía

- Una v.a. sigue una **distribución de probabilidad** que está determinada por su función de cuantía o densidad.
- Dada una v.a. discreta, con todos los posibles valores $\boldsymbol{x_i}$ que puede tomar, se llama **función de cuantía** a la aplicación

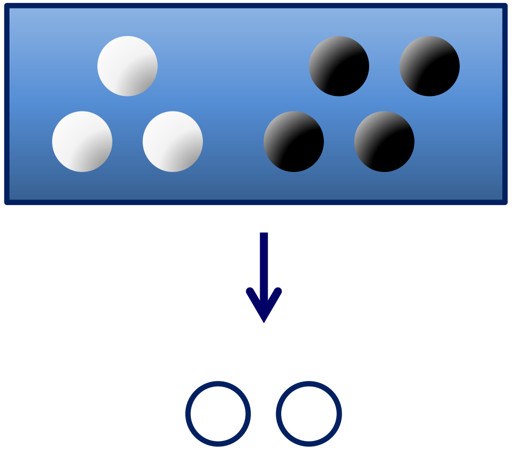
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \mathrm{P}(X = x)$$

- Propiedades:
  - $0 \leq f(x) \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$
  - $\sum_{x_i} f(x_i) = 1$, para todos los posibles sucesos $X = \{x_i\}$

Problema 3.2 *(fc)*

- De una urna con 3 bolas blancas y 4 negras se extraen 2. Se define $X = \{\text{nº de bolas blancas extraídas}\}$. Hallar la función de cuantía.



V.A. continua. Función de densidad

- Una v.a. X es continua si existe una función $f(x)$ no negativa, tal que para cualquier intervalo real I

$$P(X \in I) = \int_I f(x)dx$$

gráfico

  - En una v.a. continua, la probabilidad de tomar un valor discreto es cero, $P(X = a) = 0$.
  - La forma del intervalo I no importa.
- Se debe verificar:
  - $f(x) \geq 0$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

Problema 3.3 *(fd)*

- Los meses de vida de determinada especie de peces en una piscifactoría es una v.a. continua con función de densidad:

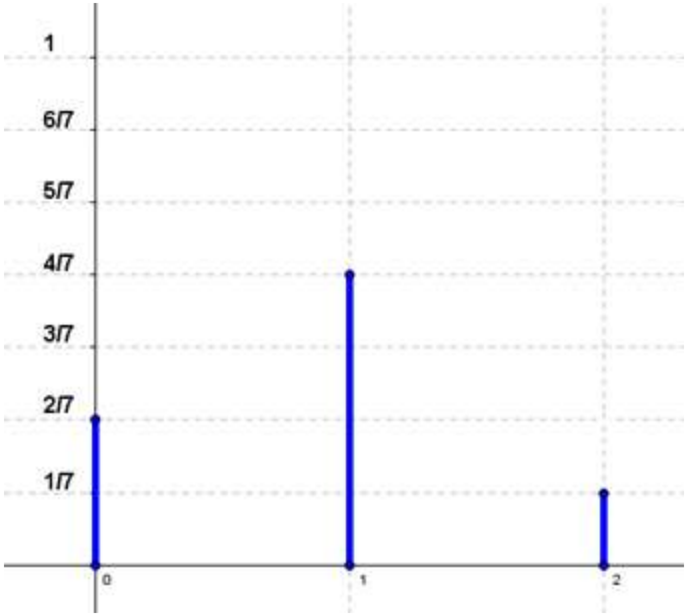
$$f(x) = \begin{cases} x/6, & x \in [2,4] \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Tomando un pez al azar, ¿cuál es la probabilidad de que viva más de dos meses y medio?

Comparación gráfica prob. 2 y 3

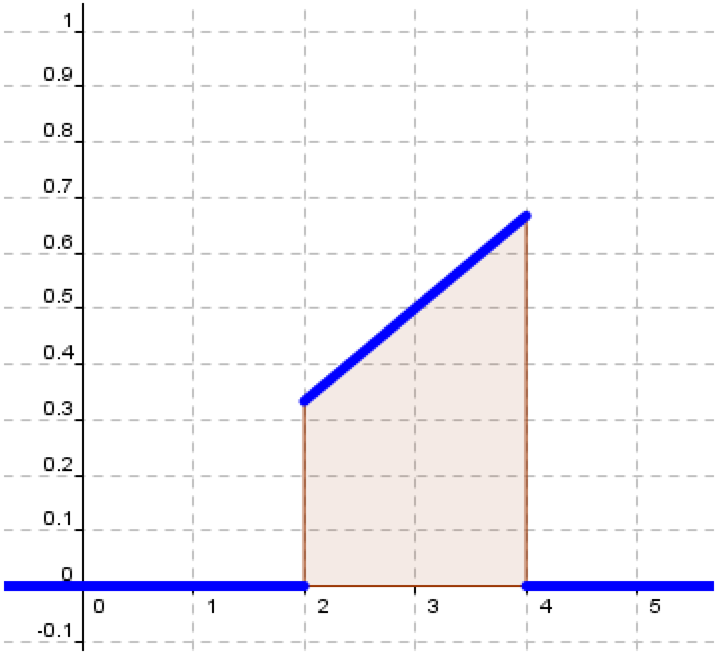
- V.A. discreta

X	0	1	2
f	2/7	4/7	1/7



- V.A. continua

$$f(x) = \begin{cases} x/6, & x \in [2,4] \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$



Función de distribución

- Dada una v.a. discreta o continua, se llama **función de distribución** (FD) a la función

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x) = P(X \leq x) = P(]-\infty, x])$$

  - Si la v.a. es continua, es indiferente si es $\leq$ ó $<$.
- Propiedades:
  - $0 \leq F(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
  - $F(\infty) = P(X < \infty) = 1.$ $F(-\infty) = P(X < -\infty) = 0.$
  - Sea $a < b$, entonces $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
  - $P(X > a) = 1 - F(a)$
  - $F(x)$ es no decreciente: $a < b \rightarrow F(a) \leq F(b)$

Relación fc, fd ↔ FD

- Variable **discreta**
  - Función de **distribución** *vs* función de **cuantía**

$$F(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} \mathrm{P}(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

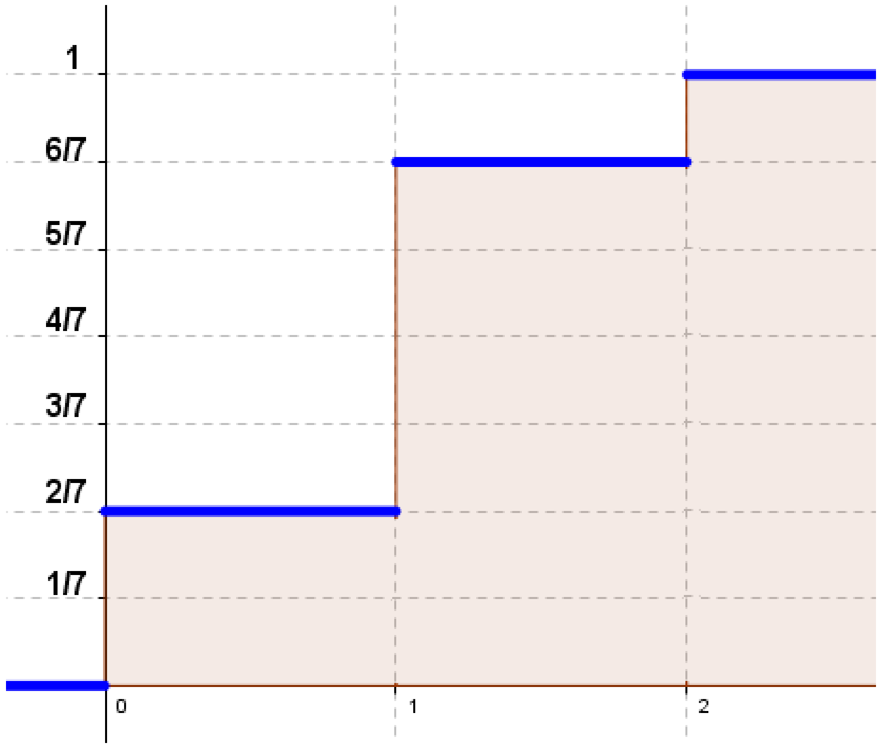
- Variable **continua**
  - Función de **distribución** *vs* función de **densidad**

$$F(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$$

Problema 3.4 (*FD* discreta)

- De una urna con 3 bolas blancas y 4 negras se extraen 2. Sea $X = \{$nº de bolas blancas extraídas$\}$. Hallar la función de distribución.

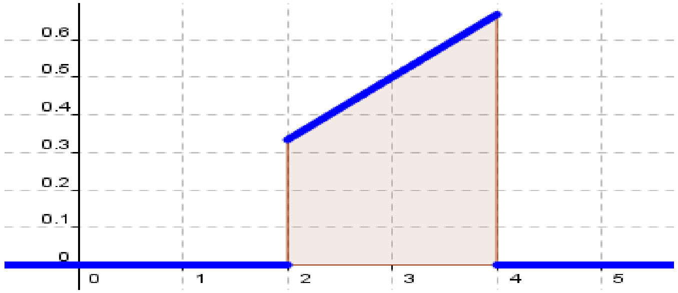


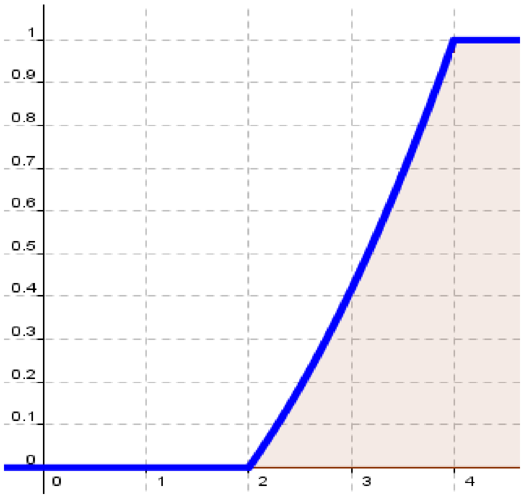
Problema 3.5 (*FD* continua)

- Los meses de vida de determinada especie de peces en una piscifactoría es una v.a. continua con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} x/6, & x \in [2,4] \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

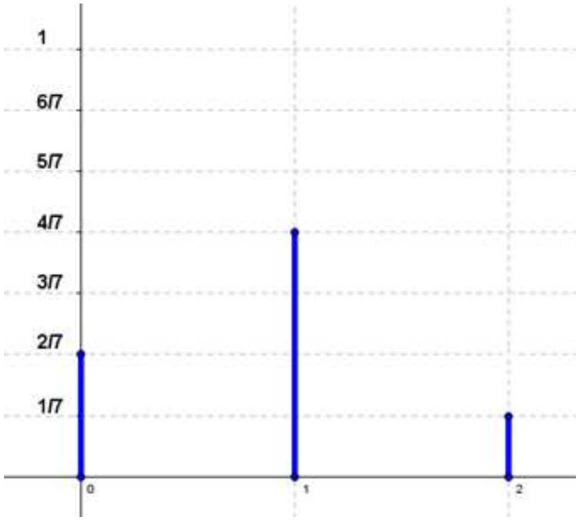
Obtener la función de **distribución**.

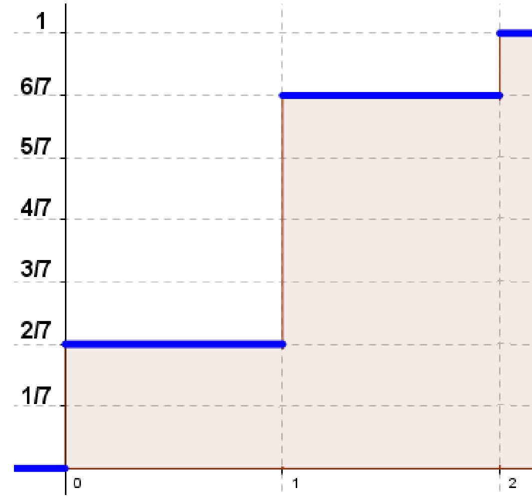




Comparación gráfica fc, fd ↔ FD

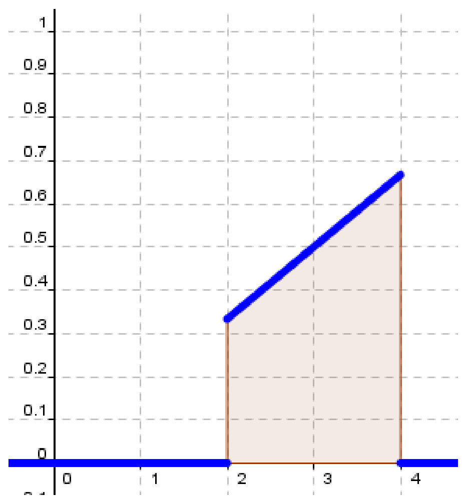
X	f
0	2/7
1	4/7
2	1/7

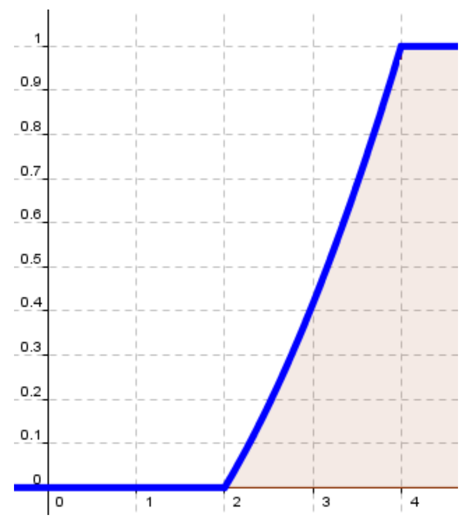




X	F
$x < 0$	0
$0 \leq x < 1$	2/7
$1 \leq x < 2$	6/7
$2 \leq x$	1

X	f
$x \leq 2$	0
$2 < x \leq 4$	$x / 6$
$4 < x$	0





X	F
$x \leq 2$	0
$2 < x \leq 4$	$\frac{x^2 - 4}{12}$
$4 < x$	1

Problema 3.6 (del 3.3)

- Los meses de vida de determinada especie de peces en una piscifactoría es una v.a. continua con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} x/6, & x \in [2,4] \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Tomando un pez al azar, ¿cuál es la probabilidad de que viva más de dos meses y medio?

Utilizar la Función de Distribución para resolverlo.

Distribución discreta uniforme

- Una v.a. **discreta** X es **uniforme** si todos los valores x_i que puede tomar son equiprobables.
  - Como debe ser finita, si hay n valores x_i la probabilidad de cada uno será $\mathrm{P}(X = x_i) = 1/n$.

- **Problema 3.7**: Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas. Sea X la v.a. que se corresponde con el número obtenido. Calcular su función de cuantía.

Distribución continua uniforme

- Una v.a. **continua** es **uniforme** sobre un intervalo [a,b] si su función de densidad es constante en el intervalo y nula fuera de él.
  - La fd tendrá la forma: $f(x) = \begin{cases} k, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$
  - La constante se halla:
    $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 = \int_{a}^{b} k\, dx = k(b-a) \rightarrow k = \frac{1}{b-a}$$
  - La probabilidad de cualquier subintervalo será proporcional a su longitud.

Problema 3.8 (distr. cont. uniforme)

- La longitud de un tipo de bacteria es una v.a. continua distribuida uniformemente entre 3 y 8 μm.

  Hallar la probabilidad de que una de esas bacterias mida menos de 7 μm.

Distribución exponencial

- Una v.a. es exponencial de parámetro $\lambda > 0$ cuando tiene la *fd*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

  - Es una función de probabilidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lambda \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^{\infty} = \lambda \left(0 - \frac{1}{-\lambda}\right) = 1$$

  - Es una función no negativa, para todo *x* se cumple:

$$\lambda \cdot e^{-\lambda x} > 0$$