Variable aleatoria bidimensional

- Se llama variable aleatoria bidimensional (X, Y) a toda aplicación

$$(X, Y) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

  - Correlación
  - Discretas y continuas
  - Continuas: intervalos → superficies
- Ejemplo: longitud y peso de los peces de una especie.

$$(X, Y) = \{(3'1, 28), (2'5, 19'9), (4'86, 37'222), \ldots\}$$

- Ejemplo: lanzar dos dados, siendo X el nº del primero e Y la suma de ambos resultados.

$$(X, Y) = \{(1, 7), (5, 7), (2, 4), \ldots\}$$

V.A. bidimensional discreta: *fc* conjunta

- Dada una v.a. bidimensional **discreta**, con todos los posibles valores $(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{y_i})$ que puede tomar, se llama **función de cuantía conjunta** a la función real de dos variables

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \mathrm{P}(X = x,\ Y = y) = \mathrm{P}(X = x \cap Y = y)$$

- Propiedades:
  - $0 \leq f(x,y) \leq 1,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
  - $\sum_{x_i} \sum_{x_j} f\left(x_i, y_j\right) = 1$, para todos los valores $X = \{x_i\}$, $Y = \{y_j\}$

Problema 3.9 (*fc* conjunta)

- En una biblioteca hay 8 libros de medicina, 6 de física, 5 de química y 1 de biología. Se cogen dos libros al azar, tomando la v.a. X= {nº de libros de medicina} e Y= {nº de libros de biología}. Hallar la función de cuantía conjunta.

V.A. bidimensional continua: *fd* conjunta

- Dos v.a. X e Y tienen una distribución **continua** conjunta si existe una función $f(x,y)$ no negativa en $\mathbb{R}^2$, tal que para cualquier recinto A del plano

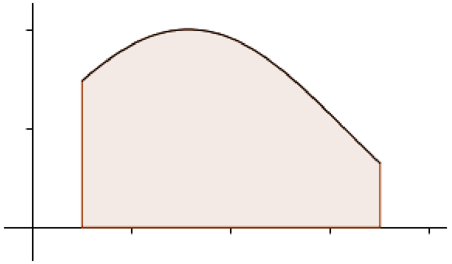
$$P\big((X,Y) \in A\big) = \iint_A f(x,y)\, dxdy$$

  - La probabilidad de tomar un valor discreto es cero, aun cuando una de las dos pertenezca a un intervalo.

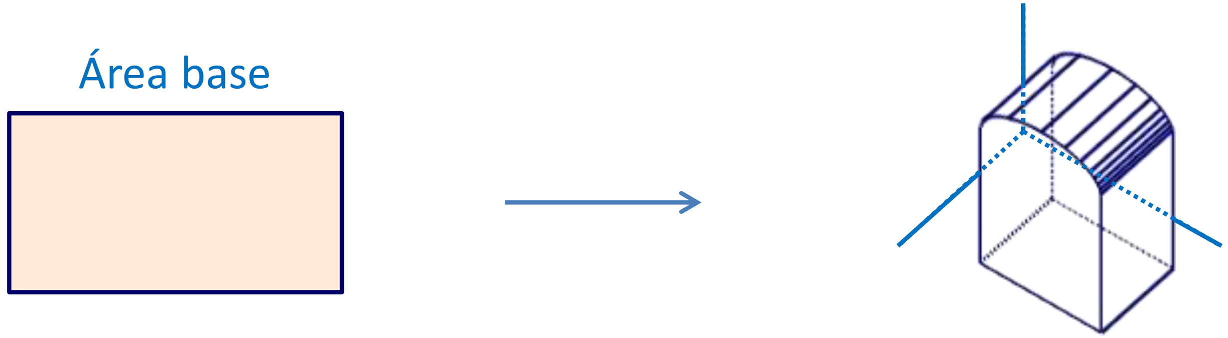
- Se debe verificar:
  - $f(x,y) \geq 0$
  - $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dxdy = 1$

Doble integración

- Con una v.a. continua integramos un **intervalo** y obtenemos un área (la probabilidad):



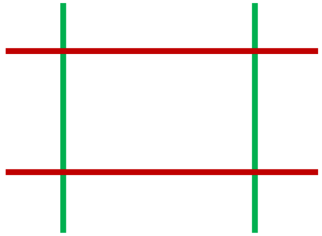
- Con una v.a. bidimensional continua integramos un **área** y obtenemos un volumen (la probabilidad):



Integrales dobles posibles

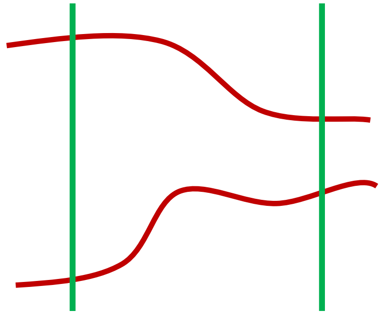
- $A = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy$$



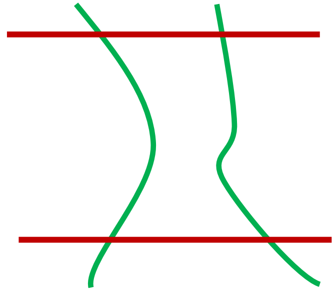
- $A = \{(x, y): a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$

$$\int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)\, dy\right] dx$$



- $A = \{(x, y): g_1(y) \leq x \leq g_2(y), c \leq y \leq d\}$

$$\int_c^d \left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y)\, dx\right] dy$$



Problema 3.10 x e y entre constantes

- Sea la *fd*:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy, & (x,y) \in [0,2] \times [0,1] \\ 0, & resto \end{cases}$$

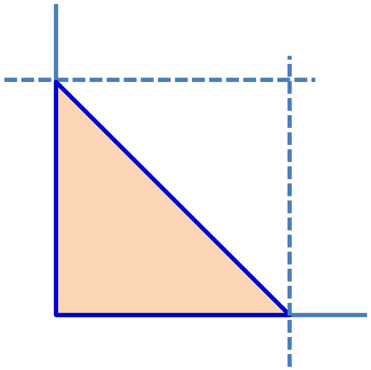
Calcular la probabilidad del área donde está definida.

Problema 3.11 y entre funciones

- Sea la *fd*:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0, & resto \end{cases}$$

Calcular la probabilidad para $x + y \leq 1$

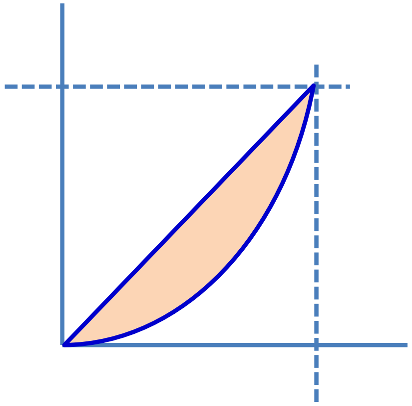


Problema 3.12 x entre funciones

- Sea la *fd*:

$$f(x,y)=\begin{cases} kxy, & y^2\le x\le y, 0\le y\le 1\\ 0, & resto\end{cases}$$

Calcular k.



Distr. conjunta discreta uniforme

- Una v.a. bidimensional **discreta** (X, Y) es **uniforme** si todos los pares (x_i , y_j) que puede tomar son equiprobables.
  - Si hay n pares (x_i , y_j) la probabilidad de cada uno será:

$$f(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j) = \frac{1}{n}$$

Distr. conjunta continua uniforme

- Una v.a. bidimensional **continua** (X,Y) es **uniforme** si la fd conjunta es uniforme en el recinto A del plano donde está definida:
  - La *fd* tendrá la forma: $f(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y) \in A \\ 0, & (x,y) \notin A \end{cases}$
  - La constante se halla:

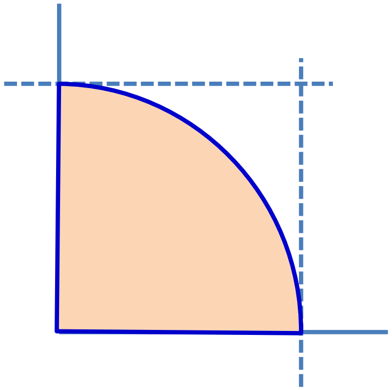
$$\iint_A k\,dxdy = 1 = k \cdot \iint_A dxdy = k \cdot \text{á}rea(A) \rightarrow k = \frac{1}{\text{á}rea(A)}$$

  - La prob. de un recinto será proporcional al área que ocupa:

$$\iint_B k\,dxdy = k \cdot \text{á}rea(B) = \frac{\text{á}rea(B)}{\text{á}rea(A)}$$

Problema 3.13 (distr. cjta. continua uniforme)

- Calcular la *fd* de una v.a. dada por las coordenadas de un punto aleatorio del primer cuadrante del círculo unidad.



Función de distribución conjunta

- Dada una v.a. bidimensional discreta o continua, se llama **función de distribución** conjunta (*FD*) a la función

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x,y) = \mathrm{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathrm{P}(X \leq x \cap Y \leq y)$$

- Propiedades:
  - $0 \leq F(x,y) \leq 1,\ \forall x,y \in \mathbb{R}$
  - $F(-\infty, y) = \mathrm{P}(X < -\infty, Y \leq y) = 0. \quad F(x, -\infty) = 0.$
  - $F(+\infty, +\infty) = \mathrm{P}(X < +\infty, Y < +\infty) = 1$
  - $P(a_1 < X \leq a_2, b_1 < Y \leq b_2) =$
    $= F(a_2, b_2) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1) + F(a_1, b_1)$

Relación fc, fd $\leftrightarrow$ FD

- Variable **discreta**
  - Función de **cuantía** *vs* Función de **distribución**

$$F(x,y) = \mathrm{P}(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f(x_i, y_j)$$

- Variable **continua**
  - Función de **densidad** *vs* Función de **distribución**

$$F(x,y) = \mathrm{P}(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(s,t)\, dtds$$

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Problema 3.14 (*FD* conjunta discreta)

- Dada la v.a. bidimensional discreta dada por la función de cuantía conjunta:

Y				
2	1/17	0	1/17	0
1	3/17	5/17	0	1/17
0	0	4/17	1/17	1/17
***f*(*x*,*y*)**	**20**	**30**	**40**	**50**

X

Obtener $F(30, 1)$

Problema 3.15 (*FD* conjunta continua)

- Obtener la *FD* para la *fd*:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4}xy^2, & (x,y) \in [0,1] \times [0,2] \\ 0, & resto \end{cases}$$

X, Y	**$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$**
$x \leq 0$ ó $y \leq 0$	0
$0 \leq x \leq 1$ **$0 \leq y \leq 2$**	$\int_0^x \int_0^y \frac{3}{4} st^2\, dtds = \int_0^x \frac{3}{4} s \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^y ds = \int_0^x s\frac{y^3}{4} ds = \frac{y^3}{4}\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2y^3}{8}$
$1 \leq x$ **$0 \leq y \leq 2$**	$\int_0^1 \int_0^y \frac{3}{4} st^2\, dtds = \cdots = \frac{y^3}{8}$
$0 \leq x \leq 1$ **$2 \leq y$**	$\int_0^x \int_0^2 \frac{3}{4} st^2\, dtds = \cdots = x^2$
$1 \leq x$ **$2 \leq y$**	$\int_0^1 \int_0^2 \frac{3}{4} st^2\, dtds = \cdots = 1$