Variables Aleatorias

1.- Sea la función de probabilidad de una variable aleatoria:

x_i	1	2	3	4	5
Probabilidad	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{1}{20}$	k

Se pide. A) La función de distribución. B) Primer cuartil. C) $P(0<X<3)$.

Solución

2. Si la función de densidad de una v. a. continua es $f(x)=\begin{cases} kx^2+\frac{1}{30} & \text{si } x\in[0,3] \\ 0 & \text{si } x\notin[0,3]\end{cases}$.

Se pide: a) Determinar k. b) $P(0<X<2)$. **C) la media.**

Solución

3.- De una estación parte un tren cada 20 minutos. Sabiendo que el tiempo de espera en la estación de cada viajero sigue una v. a. con función de distribución:

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ x/20 \text{ si } 0\le x<20 \\ 1 \text{ si } 20\le x\end{cases}$$

Hallar: a) función de densidad de la v. a. tiempo de espera. b) Probabilidad de que un viajero espere al tren menos de 7 minutos. c) Mediana d) Media e) Varianza.

Solución

4.- Sea la función de probabilidad de una variable aleatoria

x_i	-1	0	3	4
Probabilidad	0,3	0,1	0,5	0,1

Se pide. A) La función de distribución. B) Percentil 30. C) Valor esperado.

Solución

5.- El consumo de electricidad en kilovatios por persona y día en una familia se observó que era una variable aleatoria con la siguiente función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{16} & \text{si} & 0\le x<4 \\ \frac{1}{8} & \text{si} & 4\le x<8 \\ 0 & \text{en el resto} & \end{cases}$$

a) Obtener la función de distribución. b) Calcular el consumo medio por persona y día. c) Calcular la probabilidad de que el consumo esté entre 3 y 5 kW.

Solución

6.- Sea una v. a. X continua con la siguiente función de distribución:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} & x<\sqrt{2} \\ x^2-a & \text{si} & \sqrt{2}\le x<1.5 \\ \frac{x}{b} & \text{si} & 1.5\le x<6 \\ 1 & \text{si} & 6\le x \end{cases}$$

a) Calcular a y b. b) Obtener un valor de x tal que P($X \geq x$)=0.1. c) Obtener la **función de densidad**.

Solución

7.- Sea la **función de probabilidad** de una variable aleatoria

x_i	0	1	2	3	4
Probabilidad	0,1	0,2	0,1	0,4	0,2

Se pide. A) La **función de distribución**. B) $P(2 \leq X < 4)$ C) $P(X < 4)$. D) La **Esperanza matemática**.

Solución

8. Si la **función de densidad** de una v. a. **continua** es:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq x < \frac{7}{2} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Se pide: a) La **función de distribución**. b) $P(2 \leq X < 4)$ c) Obtener x tal que P($X \geq x$)=0.3 d) El primer cuartil e) La varianza

Solución

9.- Sea una v. a. X con la siguiente **función de distribución**:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \frac{x^2}{32} & \text{si} \quad 0 \leq x < 4 \\ \frac{x}{8} & \text{si} \quad 4 \leq x < 8 \\ 1 & \text{si} \quad 8 < x \end{cases}$$

Se pide:

a) La variable aleatoria es **discreta** o **continua.**

b) Obtener un valor de x tal que P($X \geq x$)=0.75.

c) Obtener la **función de densidad**.

Solución

10.- Un miembro del Consejo de Administración de una empresa ha comprobado que, si bien todos los años tiene una junta, ha habido años que tienen hasta cinco. Por la experiencia acumulada durante años, se sabe que el nº. de juntas anuales se distribuye de la siguiente forma:

Nº de juntas al año	1	2	3	4	5
Probabilidad.	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$

Se pide. A) La **función de distribución**. B) **Moda, mediana y media**. C) Probabilidad de que un año, elegido al azar, se celebren más de tres juntas.

Solución

11. Si la **función de densidad** de una v. a. **continua** es $f(x) = \begin{cases} 0{,}1x^2 + k & \text{si} \quad x \in [0, 3] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [0, 3] \end{cases}$.

Se pide: a) Determinar k. b) $P(0 < X < 2)$. c) la **media**. d) el primer **cuartil**.

Solución

12.- De la función de distribución de una cierta variable aleatoria:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ 1-e^{-\lambda x} & \text{si} \quad 0\le x \end{cases}$$

Calcular la función de densidad, la mediana.

Solución

13.- Una variable aleatoria X tiene una función de densidad de la forma

$$f(x)=\begin{cases} kxe^{-x^2} \text{si} \quad x>0 \\ 0 \quad \text{si} \quad x\le 0 \end{cases}$$

a) Hallar el valor de k para que f(x) sea realmente una función de densidad.
b) Hallar la función de distribución de la variable aleatoria X.
c) Calcular $P(-1\le X\le 1)$.

d) Calcular el valor de t tal que $P(X<t)=0.8745$.

e) Hallar el valor de la moda, mediana, media y varianza.

Solución

14.- La demanda semanal de un cierto trabajo, es una variable aleatoria continua X que tiene por función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{4}{\pi\left(1+x^2\right)}, & \text{si} \quad 0<x<1 \\ 0 & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$$

a) Halla la función de distribución, la mediana.
b) Calcular $P(-0,3<X<0,5)$, $P(X<0,5)$, $P(0,25<X<0,75)$; $P(X\ge 0,95)$.
c) El valor esperado de x y su varianza.

Solución

15. Sea c una constante y consideremos la función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases} c+x & \text{si} \quad -1<x<0 \\ c-x & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Calcule el valor de c.
b) Obtenga y represente la función de distribución.
c) Calcule el percentil 95 y la $P(0\le X\le 0.5)$.
d) Calcule la media y varianza

Solución

16. Si la función de densidad de una v. a. continua es $f(x)=\begin{cases} ax^2+b & \text{si} \quad x\in[0,3] \\ 0 & \text{si} \quad x\notin[0,3] \end{cases}$.

Determinar a y b sabiendo que $P(0<X<2)=\dfrac{1}{3}$. **Hallar la media, la varianza y el primer cuartil.**

Solución

17.- Una persona al realizar un disparo hace blanco con probabilidad 0.4.
a) Describir mediante una variable aleatoria el número de blancos al efectuar dos disparos. b) Si cada disparo le cuesta 100 € y por cada blanco recibe 200, describir la apuesta mediante una variable aleatoria. c) Calcular la distribución de probabilidad del

apartado b). d) Calcular la esperanza matemática. ¿Es equitativa la apuesta?, ¿Cuánto tendría que recibir por cada blanco para que lo fuera?

Solución

18. Si la función de densidad de una v. a. continua es:

$$f(x)=\begin{cases} 0{,}15 & \text{si} \quad 1\le x<3 \\ \dfrac{x}{16}-\dfrac{1}{4} & \text{si} \quad 4\le x<8 \\ -\dfrac{2x}{5}+\dfrac{22}{5} & \text{si} \quad 10\le x<11 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Obtener la función de distribución. b) $P(X<9)$, $P(2\le X<10{,}5)$ c) Obtener un valor de x tal que P($X\ge$x)=0.3 d) Esperanza Matemática. e) Varianza.

Solución

19.- Sea X una v. a. que toma los valores 1, 2, 3, 4,.., con probabilidades $\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\frac{1}{2^4},$.. respectivamente. Se pide: a) P(X es par). b) P(X$\ge$5). c) Moda. d) Tercer cuartil. e) Esperanza matemática.

Solución

20.- Sea $f(x)=\begin{cases} 1/2 & x\in[1,2] \\ x-4 & x\in[4,5] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$, a) ¿Es f(x) una función de densidad? ¿qué tipo de v.a.? b) Calcular la función de distribución, suponiendo que f(x) es una función de densidad. c) Esperanza matemática. d) Varianza. e) P(1<X<3), P(1.5<X$\le$5), P(X>3), P(X=4).

Solución

21.- Los artículos en venta en unos grandes almacenes se someten al control diario y, se estima que la probabilidad de que en un día sean vendidos "x" artículos defectuosos es $P(X=x)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^x$. Determinar la probabilidad de que en un día de los artículos vendidos:

- **a. Dos o más sean defectuosos.**
- **b. Cinco sean defectuosos.**
- **c. Tres ó menos sean defectuosos.**
- **d. Hallar P(1 $\le$ X $\le$ 4).**

Solución

22.- Una estructura metálica puede sufrir debido al calor una dilatación que (medida en cm) es una variable aleatoria X con función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{15}x & \text{si } 0\le x\le 3 \\ k & \text{si } 3<x<5 \\ \dfrac{k}{15}(8-x) & \text{si } 5\le x\le 8 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}.$$

a) Sabiendo que f(x) es función de densidad determinar el valor de k.
b) Calcular la probabilidad de que la dilatación sea inferior a 3 cm.
c) Calcular la probabilidad de que la dilatación se encuentre entre 2 y 9 cm.

Solución

23.- Sea X una variable aleatoria con **función de distribución** $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<-2 \\ 0.4 \text{ si } -2\le x<-1 \\ 0.8 \text{ si } -1\le x<1 \\ 1 \text{ si } 1\le x \end{cases}$

a) Representar gráficamente F(x).
b) ¿Es una variable aleatoria **continua**? ¿Por qué?
c) Determinar la **función de probabilidad**.
d) Calcular P(X = 0), P(X = - 1.7), $P(-2<X\le -1)$, P(- 1 < X < 0)

Solución

24.- Una variable aleatoria X tiene una **función de distribución** de la forma

$$F(x)=\begin{cases} k-e^{-x^2} \text{si } x>0 \\ 0 \text{ si } x\le 0 \end{cases}$$

a) Hallar el valor de k para que f(x) sea realmente una función de distribución.
b) Hallar la **función de densidad** de la variable aleatoria X.
c) Calcular $P(-1\le X\le 1)$.
d) Calcular el valor de t tal que $P(X<t)=0.8745$.
e) Hallar el valor de la **moda, mediana**, y **media**.

Solución

25.- Unos estudios realizados por las compañías de seguros de automóviles indican que la probabilidad de que un conductor novel tenga un accidente mortal durante el primer año de conducción es de 0.00278. Aprovechando esta información, una de estas compañías decide realizar una campaña de suscripción de pólizas personales a todo riesgo con carácter anual y condiciones especiales, destinadas únicamente a conductores noveles. El precio de suscripción de una de estas pólizas es de 1750€, y en caso de producirse el fatal accidente, la compañía indemnizaría a los beneficiarios de la póliza con una prima de $3x10^4$ de euros. La compañía evalúa en 48€ los gastos de venta, gestión y administración de cada póliza.

a) Obtenga la **función de distribución** del beneficio que obtendrá la compañía con la suscripción de una de estas pólizas.
b) Calcule el beneficio **esperado** para la compañía por la suscripción de una póliza.

Solución

26.- Sea la **función de distribución** de una variable aleatoria

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} & x<-1 \\ 0{,}3 & \text{si} & -1\le x<0 \\ 0{,}4 & \text{si} & 0\le x<3 \\ 0{,}9 & \text{si} & 3\le x<4 \\ 1 & \text{si} & 4\le x \end{cases}$$

Se pide. A) La **función de probabilidad**. B) **Percentil** 30. C) **Valor esperado**.

Solución

27.- La cantidad producida de un cierto artículo es una variable aleatoria X con función de densidad: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{1000}x^2 & \text{si } 0\le x\le k\\ 0 & \text{si } x\notin[0,k]\end{cases}$

El precio Y del artículo está en función de la cantidad producida según la ecuación Y=40-2X. Se pide: a) El valor de k para que f sea realmente función de densidad. b) Media y varianza de la cantidad producida. c) Media y varianza del precio del artículo.

Solución

28. Sea c una constante y consideremos la función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases}c+x & \text{si } -1<x<0\\ c-x & \text{si } 0\le x<1\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

a) Calcular el valor de c.
b) Obtener la función de distribución.
c) Calcular la $P(-0.5\le X\le 0.5)$**.**
d) Calcular la varianza.

Solución

29.- Se distribuye la probabilidad por unidad de área de modo equiprobable en un círculo de radio r. ¿Cuál es la función de distribución de la variable aleatoria X=" distancia al centro de un punto tomado al azar"? Calcular la media y varianza de X.

Solución

30.- Sea una variable aleatoria X con la siguiente función de probabilidad

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{k}{x!(3-x)!} & \text{para } x=0,\ 1,\ 2,\ 3\\ 0 & \text{en el resto de valores}\end{cases}$$

a) Calcular k para que efectivamente sea una función de probabilidad.
b) Obtener la función de distribución
c) Calcular la mediana
d) Hallar la esperanza matemática

Solución

31.- Sea una variable aleatoria X con la siguiente función de distribución:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \dfrac{1}{8} & \text{si } 0\le x<1\\ \dfrac{1}{2} & \text{si } 1\le x<2\\ \dfrac{7}{8} & \text{si } 2\le x<3\\ 1 & \text{si } 3\le x\end{cases}$$

a) Obtener la función de probabilidad o la función de densidad según proceda. b) Calcular la mediana c) ¿Tiene moda? d) Hallar la esperanza matemática.

Solución

32.- Las ventas diarias de una empresa, X, sigue una función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} & x<300 \\ \frac{1}{300} & \text{si} & 300\le x\le 600 \\ 0 & \text{si} & 600<x \end{cases}$$

Se pide:
a) La venta media diaria.
b) El valor x tal que P(X<x)= 0,95
c) La varianza.
d) La probabilidad de que las ventas en un día superen los 500€

Solución

33.-Sea una variable aleatoria X con función de distribución:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} & x<0 \\ 0.3 & \text{si} & 0\le x<1 \\ 0.7 & \text{si} & 1\le x<2 \\ 1 & \text{si} & 2\le x \end{cases}$$

a) ¿Es una variable aleatoria continua? b) Determinar la distribución de probabilidad de la v.a. c) Obtener P(X=1), P(X=0.7), P(X$\le$0), P(-1<X$\le$1), P(0<X<1). d) Hallar la esperanza matemática. e) Calcular la varianza.

Solución

34.- El número de coches que utilizan un túnel de lavado tiene la siguiente distribución de probabilidad:

x_i	4	5	6	7	8	9
$P(x=x_i)$	0.1	0.1	0.3	0.3	0.15	0.05

a) Hallar la función de distribución. b) Obtener la moda, mediana, media y la varianza.

Solución

35.- Una variable aleatoria X tiene una función de densidad de la forma

$$f(x)=\begin{cases} kx^2 & \text{si } -1<x<2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se pide:
a) El valor de k para que f(x) sea realmente una función de densidad.
b) La función de distribución de la variable aleatoria X.
c) $P(X\le 1)$, $P(0<X\le 1)$, $P(-2<X\le 0)$
d) El percentil 95.
e) Moda, mediana, media y varianza.

Solución

36.- Disponemos de un dado cargado en el que la probabilidad de que salga un número es proporcional a dicho número. Se pide: a) distribución de probabilidad de la v. a. número de puntos obtenidos al lanzar un dado. b) Probabilidad de que al lanzarlo salga un número par. c) Media o Esperanza Matemática.

Solución

37.- Para la función de distribución $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\text{arctg}(x)$**, determinar:**

a) La función de densidad.

b) Mediana y moda.

b) $P(1 < X < 2)$.

c) x tal que $P(0 < X < x) = 0.4$

Solución

38.- Sea una variable aleatoria X con la siguiente distribución de probabilidad:

$$P(X = k) = \frac{2^k}{k!}\alpha \text{ , para } k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Se pide: a) valor de α para que sea una distribución de probabilidad.

b) Media.

c) Moda.

d) Mediana.

e) $P(1 < X < 2)$, $P(2 \le X \le 3)$

Solución

39.- Para la función $f(x) = k\left(1 + \frac{x^2}{5}\right)^{-3}$, determinar:

a) El valor de k para que f(x) sea la función de densidad de una cierta variable aleatoria.

b) Mediana y moda.

c) Esperanza matemática y varianza.

Solución

40.- Sea la función de probabilidad de la variable aleatoria el número de clientes que llegan a una tienda en una hora:

x_i	$P(X=x_i)$
0	0,1
1	0,3
2	0,3
3	0,2
4	0,05
5	0,05
Sumas	1

Se pide: a) Función de distribución.

b) Media.

c) Moda.

d) Mediana.

e) $P(1 < X < 2)$, $P(2 \le X \le 3)$

Solución

41.- Un almacén distribuye un producto en exclusiva en una gran ciudad y lo recibe semanalmente de fábrica. El nº de millares de artículos vendidos cada mes, X, es una variable aleatoria continua cuya función de densidad viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ k(1-x)^3 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{x^3} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$ Se pide:

a) k para que f(x) sea efectivamente función de densidad.

b) $P(X \le 0.5)$, $P(X \le 2)$, $P(0 \le X \le 2)$, $P(1 < X < 2)$

c) **Media**.
d) **Moda**.

Solución

42.- La longitud de una cierta pieza se distribuye con la función de distribución:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x\le 1 \\ k(x^3-6x^2+9x-4) & \text{si} \quad 1<x<3 \\ 1 & \text{si} \quad 3\le x \end{cases}$$

Se pide:

a) El valor de k para que efectivamente sea una **función de distribución** de una variable aleatoria continua
b) **Mediana** de la distribución
c) **Función de densidad**.
d) **Moda** de la distribución.
e) Si una pieza se considera valida únicamente cuando su longitud está comprendida entre 1,7 y 2,4.
   e_1) ¿Cuál es la probabilidad de una determinada pieza sea útil?
   e_2) Si las piezas se empaquetan en lotes de 5 unidades y se acepta el lote si contiene menos de 2 piezas defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de un cierto lote sea rechazado?

Solución

43.- Existen compañías aéreas que venden más pasajes que los disponibles en el vuelo. Una compañía vende billetes de un avión de 250 plazas. Designemos por X, la variable aleatoria, *número de viajeros que se presentan para tomar el vuelo*. Por experiencias realizadas anteriormente se sabe que la distribución de frecuencias de la variable X es:

x_i	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255
f_i	0.03	0.11	0.14	0.19	0.20	0.15	0.09	0.05	0.03	0.01

Se pide:

a) **Probabilidad** de que todos los pasajeros que llegan a tomar el vuelo tengan plaza.
b) **Probabilidad** de que se quede sin plaza algún viajero.
c) **Probabilidad** de que lleguen entre 240 y 250 pasajeros.
d) ¿Cuál es la **probabilidad** de que la primera persona que esté en lista de espera tenga sitio en el vuelo?
e) Número **medio** de personas que acuden a tomar el vuelo.

Solución

44.- Una variable aleatoria continua X tiene por función de distribución:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<1 \\ ax-\dfrac{3}{5} & \text{si} \quad 1\le x<2 \\ \dfrac{3}{5} & \text{si} \quad 2\le x<4 \\ \dfrac{1}{5}x+b & \text{si} \quad 4\le x<6 \\ 1 & \text{si} \quad 6\le x \end{cases}$$

Hallar la **función de densidad.** Representar las **funciones de densidad y distribución**. Calcular la **mediana**. Obtener la **media** y **varianza** de la variable X. Calcular las probabilidades siguientes. $P(X\le 3)$; $P(2<X<5)$.

Calcular los valores de a y b.

Solución

45.- La remuneración semanal de los empleados comerciales de un concesionario de automóviles de lujo está compuesta por un sueldo fijo de 1000 € y una comisión de 200 € por cada coche vendido. A estas cantidades debe descontarse un 10% en concepto de retención de impuestos y otros gastos. La probabilidad de que un empleado venda un número de coches X en una semana es la siguiente:

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	0.1	0.3	0.3	0.2	0.05	0.05

a) ¿Cuál será la remuneración semanal neta media por empleado y su desviación típica?

b) Obtenga la función de distribución de la remuneración semanal neta por empleado.

c) Si la empresa tiene 7 vendedores, ¿a cuánto debería ascender la comisión por cada coche vendido si se pretende que la empresa destine a pagos para los empleados una cantidad media semanal de 10000 €.

Solución

46.- Sea $f(x)=\begin{cases} 1/2 & x\in[1,2] \\ x-4 & x\in[4,5] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$ **. a) ¿Es f(x) una función de densidad? ¿qué tipo de v.a.? b) Calcular la función de distribución, suponiendo que f(x) es una función de densidad. c) Esperanza matemática. d) Varianza. e) P(1<X<3), P(1.5<X$\leq$5), P(X>3), P(X=4).**

Solución

1.- Sea la función de probabilidad de una variable aleatoria:

x_i	1	2	3	4	5
Probabilidad	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{1}{20}$	**k**

Se pide. A) La función de distribución. B) Primer cuartil. C) $P(0 < X < 3)$.

Solución:

Nº juntas	Prob.	F(x)
1	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$
2	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{13}{20}$	$\frac{18}{20}$
4	$\frac{1}{20}$	$\frac{19}{20}$
5	**k**	**1**
Sumas	**1**	

A)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \frac{2}{20} & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ \frac{5}{20} & \text{si} \quad 2 \le x < 3 \\ \frac{18}{20} & \text{si} \quad 3 \le x < 4 \\ \frac{19}{20} & \text{si} \quad 4 \le x < 5 \\ 1 & \text{si} \quad 5 \le x \end{cases}$$

B) Primer cuartil 2,5

C) P(0<X<3)=P(X=1)+P(X=2) = 2/20+3/20 = **1/4**

2. Si la función de densidad de una v. a. continua es $f(x)=\begin{cases} kx^2+\dfrac{1}{30} & \text{si } x\in[0,3] \\ 0 & \text{si } x\notin[0,3] \end{cases}$**.**

Se pide: a) Determinar k. b) $P(0<X<2)$**. C) la media.**

Solución:

a) Sabemos que por ser f(x) una función de densidad, se verifica $1=\int_0^3\left(kx^2+\frac{1}{30}\right)dx=0{,}1+9k\Rightarrow \boxed{k=\frac{1}{10}}$

b)

$$P(0<X<2)=\int_0^2\left(\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{30}\right)dx=\boxed{\frac{1}{3}}$$

c)

$$\mu=\int_0^3 x\left(\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{30}\right)dx=\boxed{\frac{87}{40}}.$$

3.- De una estación parte un tren cada 20 minutos. Sabiendo que el tiempo de espera en la estación de cada viajero sigue una v. a. con función de distribución:

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ x/20 \text{ si } 0\le x<20 \\ 1 \text{ si } 20\le x \end{cases}$$

Hallar: a) Función de densidad de la variable aleatoria tiempo de espera. b) Probabilidad de que un viajero espere al tren menos de 7 minutos. c) Mediana d) Media e) Varianza de la v. a. tiempo de espera.

Solución:

a) La función de densidad se obtiene derivando la función de distribución:

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=F'(x)=\boxed{\begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ 1/20 \text{ si } 0\le x<20 \\ 0 \text{ si } 20\le x \end{cases}}$$

b)

$$P(X\le 7)=\int_{-\infty}^{7} f(x)dx = F(7)=\boxed{\frac{7}{20}}$$

c) **Mediana** / F(M)=0,5

$$F(x)=\frac{x}{20}=0,5\Rightarrow \boxed{M=10} \textbf{ minutos}$$

d) **Media:**

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int_0^{20} x\cdot\frac{1}{20}dx=\left.\frac{x^2}{40}\right]_0^{20}=\boxed{10} \textbf{ minutos}$$

e) **Varianza:**

$$\sigma^2=V[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\cdot f(x)dx=\int_0^{20}(x-10)^2\frac{1}{20}dx=\left.\frac{(x-10)^3}{60}\right]_0^{20}=\boxed{\frac{100}{3}}$$

4.- Sea la función de probabilidad de una variable aleatoria

x_i	-1	0	3	4
Probabilidad	0,3	0,1	0,5	0,1

Se pide. A) La función de distribución. B) Percentil 30. C) Valor esperado.

Solución:

x_i	Prob.	F(x)	$x_iP(X=x_i)$
-1	0,3	0,3	-0,3
0	0,1	0,4	0
3	0,5	0,9	1,5
4	0,1	1	0,4
Sumas	1		1,6

A)

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} & x\le -1 \\ 0,3 & \text{si} & -1\le x<0 \\ 0,4 & \text{si} & 0\le x<3 \\ 0,9 & \text{si} & 3\le x<4 \\ 1 & \text{si} & 4\le x \end{cases}$$

B) Percentil 30 corresponde $F(P_{30})=0{,}3$, luego entre el -1 y el 0 tomamos el -0,5

C) Media

$$\mu = E[X] = \sum_i x_i P(X=x_i) = \boxed{1,6}$$

5.- El consumo de electricidad en kilovatios por persona y día en una familia se observó que era una variable aleatoria con la siguiente función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{16} & \text{si} \quad 0\le x<4\\ \dfrac{1}{8} & \text{si} \quad 4\le x<8\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

a) Obtener la función de distribución. b) Calcular el consumo medio por persona y día. c) Calcular la probabilidad de que el consumo esté entre 3 y 5 kW.

Solución:

a) $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x<0\\ \dfrac{x^2}{32} & \text{si} \quad 0\le x<4\\ \dfrac{1}{8}x & \text{si} \quad 4\le x<8\\ 1 & \text{si} \quad 8\le x\end{cases}$

b) $\mu=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_0^4 x\dfrac{x}{16}dx+\int_4^8 x\dfrac{1}{8}dx=\boxed{\dfrac{13}{3}}.$

c) $P(3<X<5)=\int_3^5 f(x)dx=\int_3^4 \dfrac{x}{16}dx+\int_4^5 \dfrac{1}{8}dx=\boxed{\dfrac{11}{32}}$

6.- Sea una v. a. X continua con la siguiente función de distribución:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<\sqrt{2} \\ x^2-a & \text{si} \quad \sqrt{2}\le x<1.5 \\ \dfrac{x}{b} & \text{si} \quad 1.5\le x<6 \\ 1 & \text{si} \quad 6\le x \end{cases}$$

a) Calcular a y b. b) Obtener un valor de x tal que P($X\ge$x)=0.1. c) Obtener la función de densidad.

Solución:

a) La función de distribución de una variable aleatoria continua es continua, luego $F\left(\sqrt{2}\right)=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}F(x)\Rightarrow x^2\text{-a=0}\Rightarrow a=2$ para que sea continua en $x=\sqrt{2}$, y además

$F(6)=\lim\limits_{x\to 6}F(x)\Rightarrow 6/b=1\Rightarrow b=6$ para que sea continua en $x=6$

Los valores son **a=2 y b=6**

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<\sqrt{2} \\ x^2-2 & \text{si} \quad \sqrt{2}\le x<1.5 \\ \dfrac{x}{6} & \text{si} \quad 1.5\le x<6 \\ 1 & \text{si} \quad 6\le x \end{cases}$$

b)

$$P(X>x)=0,1\Rightarrow F(x)=P(X\le x)=1-P(X>x)=1-0,1=0,9$$

$$F(x)=\frac{x}{6}=0,9\Rightarrow \boxed{x=5,4}$$

c)

$$\boxed{f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<\sqrt{2} \\ 2x & \text{si} \quad \sqrt{2}<x<1.5 \\ \dfrac{1}{6} & \text{si} \quad 1.5<x<6 \\ 0 & \text{si} \quad 6<x \end{cases}}$$

7.- Sea la función de probabilidad de una variable aleatoria

x_i	0	1	2	3	4
Probabilidad	0,1	0,2	0,1	0,4	0,2

Se pide. A) La función de distribución. B) $P(2 \le X < 4)$ **C)** $P(X < 4)$**. D) La Esperanza matemática.**

Solución:

a)

x_i	0	1	2	3	4
Probabilidad	0,1	0,2	0,1	0,4	0,2
F(x)	0,1	0,3	0,4	0,8	1

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} & x \le 0 \\ 0,1 & \text{si} & 0 \le x < 1 \\ 0,3 & \text{si} & 1 \le x < 2 \\ 0,4 & \text{si} & 2 \le x < 3 \\ 0,8 & \text{si} & 3 \le x < 4 \\ 1 & \text{si} & 4 \le x \end{cases}$$

b)

$$P(2 \le X < 4) = P(X=2)+P(X=3) = 0,1+0,4 = \boxed{0,5}$$

c)

$$P(X<4) = 1-P(X \ge 4) = 1-P(X=4) = 1-0,2 = \boxed{0,8}$$

d)

x_i	0	1	2	3	4	suma
Probabilidad	0,1	0,2	0,1	0,4	0,2	
x_i P(X= x_i)	0	0,2	0,2	1,2	0,8	2,4

$$\mu = \sum_{x_i} x_i P(X = x_i) = \boxed{2,4}$$

8. Si la función de densidad de una v. a. continua es:

$$f(x)=\begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0\le x<\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad \frac{1}{2}\le x<\frac{7}{2} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Obtener la función de distribución. b) $P(2\le X<4)$ **c) Obtener un valor de x tal que P(** $X \geq$ **x)=0.3 d) El primer cuartil e) La varianza**

Solución:

a) Si x<0 , entonces F(x)=0

si 0<x<1/2, entonces $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{0}^{x} 2tdt=x^2$

si 1/2<x<7/2, entonces $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{0}^{\frac{1}{2}} 2tdt+\int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{1}{4}dt=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}$

si 7/2<x, entonces F(x)=1

$$\boxed{F(x)=P(X\le x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^2 & \text{si} \quad 0\le x<\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{8} & \text{si} \quad \frac{1}{2}\le x<\frac{7}{2} \\ 1 & \text{si} \quad \frac{7}{2}<x \end{cases}}$$

b)

$$P(2\le X<4)=\int_{2}^{4} f(x)dx=\int_{2}^{\frac{7}{2}}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}\left(\frac{7}{2}-2\right)=\boxed{\frac{3}{8}}$$

c)

$$P(X>x)=0,3\Rightarrow F(x)=P(X\le x)=1-P(X>x)=1-0,3=0,7$$

$$F(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}=0,7\Rightarrow \boxed{x=2,3}$$

d)

$$F(x)=P(X\le x)=0,25$$

$$F(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}=0,25\Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}}$$

e) Media

$$\mu=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\cdot dx=\int_{0}^{1/2} x\cdot 2xdx+\int_{1/2}^{7/2} x\cdot\frac{1}{4}dx=\left[2\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2}+\left[\frac{x^2}{8}\right]_{1/2}^{7/2}=\boxed{\frac{19}{12}}$$

Varianza

$$\sigma^2=V[x]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx=\int_{0}^{1/2}\left(x-\frac{19}{12}\right)^2\cdot 2xdx+\int_{1/2}^{7/2}\left(x-\frac{19}{12}\right)^2\cdot\frac{1}{4}dx=\boxed{\frac{313}{288}}$$

9.- Sea una v. a. X con la siguiente función de distribución:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{32} & \text{si} \quad 0\le x<4 \\ \dfrac{x}{8} & \text{si} \quad 4\le x<8 \\ 1 & \text{si} \quad 8<x \end{cases}$$

a) La variable aleatoria es discreta o continua b) Obtener un valor de x tal que P($X\geq$x)=0.75. c) Obtener la función de densidad.

Solución:

a) F(x) es una función continua en R, luego corresponde a una variable aleatoria **continua**

b)

$$P(X>x)=0,75\Rightarrow F(x)=P(X\le x)=1-P(X>x)=1-0,75=0,25$$

$$F(x)=\frac{x^2}{32}=0,25\Rightarrow \boxed{x=2\sqrt{2}}$$

c)

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{x}{16} & \text{si} \quad 0\le x<4 \\ \dfrac{1}{8} & \text{si} \quad 4\le x<8 \\ 0 & \text{si} \quad 8<x \end{cases}$$

10.- Un miembro del Consejo de Administración de una empresa ha comprobado que, si bien todos los años tiene una junta, ha habido años que tienen hasta cinco. Por la experiencia acumulada durante años, se sabe que el nº. de juntas anuales se distribuye de la siguiente forma:

Nº de juntas al año	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Probabilidad.	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$

Se pide. A) La función de distribución. B) Moda, mediana y media. C) Probabilidad de que un año, elegido al azar, se celebren más de tres juntas.

Solución:

Nº juntas	**Prob.**	**F(x)**	**$x_i P(X=x_i)$**
1	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$
2	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$
3	$\frac{5}{15}$	$\frac{8}{15}$	**1**
	$\frac{3}{15}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{12}{15}$
5	$\frac{4}{15}$	**1**	$\frac{20}{15}$
Sumas	**1**		$\frac{51}{15}$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x\le 1 \\ \frac{2}{15} & \text{si} \quad 1\le x<2 \\ \frac{3}{15} & \text{si} \quad 2\le x<3 \\ \frac{8}{15} & \text{si} \quad 3\le x<4 \\ \frac{11}{15} & \text{si} \quad 4\le x<5 \\ 1 & \text{si} \quad 5\le x \end{cases}$$

B) Moda = 3; Mediana = 3; Media: $\mu = E[X] = \sum_i x_i P(X=x_i) = \boxed{\frac{51}{15}}$

C)

P(X>3)=P(X=4)+P(X=5) = 3/15+4/15 =**7/15**

11. Si la función de densidad de una v. a. continua es $f(x)=\begin{cases}0{,}1x^2+k & \text{si } x\in[0,3]\\ 0 & \text{si } x\notin[0,3]\end{cases}$.

Se pide: a) Determinar k. b) $P(0<X<2)$ **. c) la media. d) el primer cuartil.**

Solución

a) Sabemos que por ser f(x) una función de densidad, se verifica $1=\int_0^3\left(0{,}1x^2+k\right)dx=0{,}9+3k\Rightarrow \boxed{k=\frac{1}{30}}$

b) $P(0<X<2)=\int_0^2\left(0{,}1x^2+\frac{1}{30}\right)dx=\boxed{\frac{1}{3}}$

c)

$\mu=\int_0^3 x\left(\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{30}\right)dx=\boxed{\frac{87}{40}}$.

d)

El primer cuartil, es el valor de x que verifica F(x)=0.25

$$F(x)=\int_0^x\left(\frac{1}{10}t^2+\frac{1}{30}\right)dt=\frac{x^3}{30}+\frac{x}{30}=0.25\Rightarrow \boxed{Q_1\approx 1.7876}$$

12.- De la función de distribución de una cierta variable aleatoria:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ 1-e^{-\lambda x} & \text{si} \quad 0\le x \end{cases}$$

Calcular la función de densidad, la mediana.

Solución:

Función de densidad

$$\boxed{f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad 0\le x \end{cases}}$$

Mediana

$$F(M)=1-e^{-\lambda M}=\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{M=\frac{\ln 2}{\lambda}}$$

13.- Una variable aleatoria X tiene una función de densidad de la forma

$$f(x)=\begin{cases} kxe^{-x^2} \text{si} \ \ x>0 \\ 0 \ \ \text{si} \ \ x\le 0 \end{cases}$$

a) Hallar el valor de k para que f(x) sea realmente una función de densidad.
b) Hallar la función de distribución de la variable aleatoria X.
c) Calcular $P(-1\le X\le 1)$**.**
d) Calcular el valor de t tal que $P(X<t)=0.8745$**.**
e) Hallar el valor de la moda, mediana, media y varianza.

Solución:

a) Se tiene que cumplir que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$, luego,

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{\infty} kxe^{-x^2}dx=\frac{k}{2}\Rightarrow \boxed{k=2}$$

b) $F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, en nuestro caso,

si x>0 tenemos $F(x)=P(X\le x)=\int_{0}^{x} 2te^{-t^2}dt=1-e^{-x^2}$, resulta,

$$\boxed{F(x)=\begin{cases} 1-e^{-x^2} \text{si} \ \ x>0 \\ 0 \ \ \text{si} \ \ x\le 0 \end{cases}}$$

c)

$$P(-1<X<1)=\int_{-1}^{1} f(x)\cdot dx=\int_{0}^{1} 2xe^{-x^2}dx=\boxed{1-e^{-1}}$$

d) $P(X<t)=0.8745$

$$P(X<t)=F(t)=1-e^{-t^2}=0,8745\Rightarrow \boxed{t= \ 1,440642051}$$

e) Moda es el máximo de la función de densidad

$$f(x)=2xe^{-x^2}\Rightarrow f'(x)=\left(2-4x^2\right)e^{-x^2}=0\Rightarrow \boxed{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Mediana

$$F(M)=1-e^{-M^2}=0,5\Rightarrow \boxed{M=\sqrt{\ln 2}}$$

Media

$$\mu=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{\infty} x2xe^{-x^2}dx=\boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

Varianza

$$\sigma^2=V[x]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx=\int_{0}^{\infty}\left(x-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 2xe^{-x^2}dx=\boxed{\frac{4-\pi}{4}}$$

14.- La demanda semanal de un cierto trabajo, es una variable aleatoria continua X que tiene por función de densidad: $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{4}{\pi\left(1+x^2\right)}, & \text{si } 0<x<1 \\ 0 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

a) Halla la función de distribución, la mediana.

b) Calcular $P(-0,3<X<0,5)$, $P(X<0,5)$, $P(0,25<X<0,75)$, $P(X\ge 0,95)$.

c) El valor esperado de x y su varianza.

Solución:

a)

$$\boxed{F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \dfrac{4}{\pi}\operatorname{arctg} x & \text{si } 0\le x<1 \\ 1 & \text{si } 1\le x \end{cases}}$$

Mediana $$\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} M=0,5 \Rightarrow \boxed{M=\sqrt{2}-1}$$

b)

$$P(-0,3<X<0,5)=P(0<X<0,5)=\int_0^{0,5} f(x)dx=1-\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)\approx \boxed{0,59033}$$

$$P(X<0,5)=P(0<X<0,5)=\int_0^{0,5} f(x)dx=1-\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)\approx \boxed{0,59033}$$

$$P(0,25<X<0,75)=\int_{0,25}^{0,75} f(x)dx=1-\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{11}{27}\right)\approx \boxed{0,50741}$$

$$P(X\ge 0,95)=\int_{0,95}^{1} f(x)dx=\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{39}\right)\approx \boxed{0,3264}$$

c)

$$\mu=E\left[x\right]=\int_0^1 x f(x)dx=\boxed{\frac{2\ln 2}{\pi}}$$

$$\sigma^2=V\left[x\right]=\int_0^1 (x-\mu)^2 f(x)dx=\boxed{-\frac{8\ln 2}{\pi^2}-\frac{\pi-4}{\pi}}$$

15. Sea c una constante y consideremos la función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases} c+x & \text{si} \quad -1<x<0 \\ c-x & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Calcule el valor de c.
b) Obtenga y represente la función de distribución.
c) Calcule el percentil 95 y la $P(0\le X\le 0.5)$**.**
d) Calcule la media y varianza.

Solución:

A) $\int_{-1}^{0}(c+x)\,dx+\int_{0}^{1}(c-x)\,dx=1\Rightarrow \frac{2c-1}{2}+\frac{2c-1}{2}=1\Rightarrow \boxed{c=1}$

B) Si $-1<x<0$**,** $F(x)=\int_{-1}^{x}(1+t)\,dt=\frac{1}{2}+x+\frac{x^2}{2}$.

Si $0\le x<1$, $F(x)=F(0)+\int_{0}^{x}(1-t)\,dt=\frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2}$.

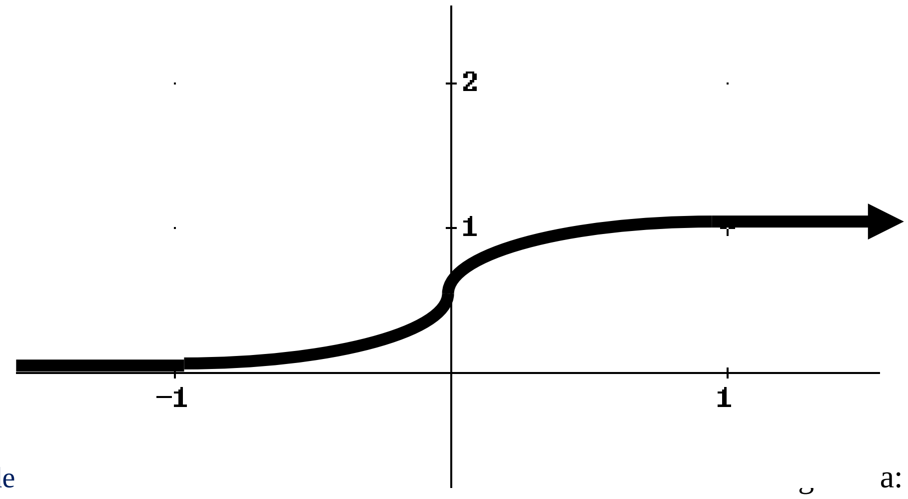
$$\boxed{F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<-1 \\ \frac{1}{2}+x+\frac{x^2}{2} & \text{si} \quad -1\le x<0 \\ \frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2} & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ 1 & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}}$$

C) $F(x)=0.95\Rightarrow \quad \frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2}=0.95\Rightarrow x=1-\frac{\sqrt{10}}{10}\approx \boxed{0.68377}$

$P(0\le X\le 0.5)=F(0.5)-F(0)=\boxed{\frac{3}{8}}$

D) $\mu=\int_{-1}^{0}x(1+x)\,dx+\int_{0}^{1}x(1-x)\,dx=\boxed{0}$.

$\sigma^2=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)\,dx+\int_{0}^{1}x^2(1-x)\,dx=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\boxed{\frac{1}{6}}$



16. Si la función de densidad de una v. a. continua es $f(x)=\begin{cases} ax^2+b & \text{si } x\in[0,3] \\ 0 & \text{si } x\notin[0,3] \end{cases}$.

Determinar a y b sabiendo que $P(0<X<2)=\frac{1}{3}$. **Hallar la media, la varianza y el primer cuartil.**

Solución:

Sabemos que $\frac{1}{3}=\int_0^2\left(ax^2+b\right)dx=\frac{8}{3}a+2b$; además por ser f(x) una función de densidad, se verifica $1=\int_0^3\left(ax^2+b\right)dx=9a+3b$, y del sistema de dos ecuaciones lineales y dos incógnitas obtenemos los valores de a y b.

$$\left.\begin{cases} 9a+3b=1 \\ \frac{8}{3}a+2b=\frac{1}{3} \end{cases}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a=\frac{1}{10} \\ b=\frac{1}{30} \end{cases}}$$

Media:

$$\mu=\int_0^3 x\left(\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{30}\right)dx=\boxed{\frac{87}{40}}$$

Varianza:

$$\sigma^2=\int_0^3\left(x-\frac{87}{40}\right)^2\left(\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{30}\right)dx=\boxed{\frac{687}{1600}}$$

El primer cuartil, es el valor de x que verifica F(x)=0.25

$$F(x)=\int_0^x\left(\frac{1}{10}t^2+\frac{1}{30}\right)dt=\frac{x^3}{30}+\frac{x}{30}=0.25\Rightarrow \boxed{Q_1\approx 1.7876}$$

17.- Una persona al realizar un disparo hace blanco con probabilidad 0.4.
a) Describir mediante una variable aleatoria el número de blancos al efectuar dos disparos. b) Si cada disparo le cuesta 100 € y por cada blanco recibe 200, describir la apuesta mediante una variable aleatoria. c) Calcular la distribución de probabilidad del apartado b). d) Calcular la esperanza matemática. ¿Es equitativa la apuesta?, ¿Cuánto tendría que recibir por cada blanco para que lo fuera?

Solución:

a)

P(blanco)=P(B)=0,4; P(no hacer blanco)= $P\left(\overline{B}\right)=$ 1-0,4=0,6

El espacio muestral al efectuar dos disparos es:

$$E=\left\{BB, B\overline{B}, \overline{B}B, \overline{B}\,\overline{B}\right\}$$

Sea la variable aleatoria X= “número de blancos”

$$\begin{array}{ll} E \xrightarrow{X} R & \\ BB \to & 2 \\ B\overline{B} \to & 1 \\ \overline{B}B \to & 1 \\ \overline{B}\,\overline{B} \to & 0 \end{array}$$

b) La nueva variable aleatoria será: Y=200X-200, es decir, la ganancia:

$$\begin{array}{ll} E \xrightarrow{Y} R & \\ BB \to & 200 \\ B\overline{B} \to & 0 \\ \overline{B}B \to & 0 \\ \overline{B}\,\overline{B} \to & -200 \end{array}$$

c) Son sucesos independientes, luego

$$P(Y=200)=P(BB)=0,4\cdot 0,4=0,16$$

$$P(Y=0)=P\left(B\overline{B}\right)+P\left(\overline{B}B\right)=0,6\cdot 0,4+0,4\cdot 0,6=0,48$$

$$P(Y=0)=P\left(\overline{B}\,\overline{B}\right)=0,6\cdot 0,6=0,36$$

La función de probabilidad es:

y_i	Prob.
-200	**0,36**
0	**0,48**
200	**0,16**
Sumas	**1**

d) Esperanza Matemática

x_i	Prob.	$x_iP(X=x_i)$
-200	0,36	-72
0	0,48	0
200	0,16	32
Sumas	1	-40

$$\mu = E[Y] = \sum_i y_i P(Y = y_i) = \boxed{-40}$$

No es equitativa, puesto que da negativo.

Supongamos que recibe k € por cada blanco:

La función de probabilidad es:

z_i	Prob.	$x_iP(X=x_i)$
-200	0,36	-72
k-200	0,48	0,48k-96
2k-200	0,16	0,32k-32
Sumas	1	0,8k-200

$$\mu = E[Z] = \sum_i z_i P(Z = z_i) = 0,8k - 200 = 0 \Rightarrow \boxed{k = 250}$$

18. Si la función de densidad de una v. a. continua es:

$$f(x)=\begin{cases} 0,15 & \text{si} \quad 1\le x<3 \\ \dfrac{x}{16}-\dfrac{1}{4} & \text{si} \quad 4\le x<8 \\ -\dfrac{2x}{5}+\dfrac{22}{5} & \text{si} \quad 10\le x<11 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Obtener la función de distribución. b) $P(X<9)$, $P(2\le X<10,5)$ **c) Obtener un valor de x tal que P(** $X\ge$ **x)=0.3 d) Esperanza Matemática. e) Varianza.**

Solución:

a)

Obtenemos la función de distribución por trozos.

Si $x<1$, $F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dt=0$

Si $1\le x<3$, $F(x)=\int_{-\infty}^{1} 0dx+\int_{1}^{x} 0{,}15dt = F(1)+\int_{1}^{x} 0{,}15dt=0{,}15(x-1)$

Si $3\le x<4$, $F(x)=F(3)+\int_{3}^{x} 0dt=0{,}3$

Si $4\le x<8$, $F(x)=F(4)+\int_{4}^{x}\left(\dfrac{t}{16}-\dfrac{1}{4}\right)dt=0{,}3+\dfrac{x^2}{32}-\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x^2}{32}-\dfrac{x}{4}+0{,}8$

Si $8\le x<10$, $F(x)=F(8)+\int_{8}^{x} 0dt=0{,}8$

Si $10\le x<11$, $F(x)=F(10)+\int_{10}^{x}\left(-\dfrac{2t}{5}+\dfrac{22}{5}\right)dt=0{,}8-\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{22}{5}x-24=-\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{22}{5}x-23{,}2$

Si $11\le x$, $F(x)=1$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<1 \\ 0{,}15(x-1) & \text{si} \quad 1\le x<3 \\ 0{,}3 & \text{si} \quad 3\le x<4 \\ \dfrac{x^2}{32}-\dfrac{x}{4}+0{,}8 & \text{si} \quad 4\le x<8 \\ 0{,}8 & \text{si} \quad 8\le x<10 \\ -\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{22x}{5}-23{,}2 & \text{si} \quad 10\le x<11 \\ 1 & \text{si} \quad 11\le x \end{cases}$$

b)

$$P(X<9)=\int_{-\infty}^{9} f(x)dx = F(9)=\boxed{0{,}8}$$

$$P(2<X<10{,}5)=\int_{2}^{10{,}5} f(x)dx = F(10{,}5)-F(2)=-\frac{10{,}5^2}{5}+\frac{22}{5}10{,}5-23{,}2-0{,}15=\boxed{0{,}8}$$

c)

$$P(X>x)=0,3 \Rightarrow F(x)=P(X\le x)=1-P(X>x)=1-0,3=0,7$$

$$\frac{x^2}{32}-\frac{x}{4}+0,8=0,7 \Rightarrow x=4\pm\frac{\sqrt{5}}{5}\in(4,8) \Rightarrow \boxed{x=4-\frac{\sqrt{5}}{5}}$$

d) Esperanza Matemática

$$\mu=E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int_1^3 x\cdot 0,15\cdot dx+\int_4^8 x\cdot\left(\frac{x}{16}-\frac{1}{4}\right)dx+\int_{10}^{11} x\cdot\left(-\frac{2x}{5}+\frac{22}{5}\right)dx=\boxed{6}.$$

e) Varianza

$$\sigma^2=V[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx=\int_1^3 (x-6)^2\cdot 0,15\cdot dx+\int_4^8 (x-6)^2\left(\frac{x}{16}-\frac{1}{4}\right)dx+$$

$$+\int_{10}^{11}(x-6)^2\left(-\frac{2x}{5}+\frac{22}{5}\right)dx=\boxed{\frac{28}{3}}.$$

19.- Sea X una v. a. que toma los valores 1, 2, 3, 4, …., con probabilidades $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}$,.... respectivamente. Se pide: a) P(X es par). b) P(X≥5). c) Moda. d) Tercer cuartil. e) Esperanza matemática.

Solución:

Tenemos una variable aleatoria discreta con función de probabilidad

$$P(X=k)=\frac{1}{2^k} \text{ para k= 1, 2, 3, 4, …}$$

a) $P(X=n^o\,par)=P(X=2)+P(X=4)+P(X=6)+...=\sum_{k=1}^{\infty}P(X=2k)=\sum_{k=1}\frac{1}{2^{2k}}=\boxed{\frac{1}{3}}$

b) $P(X\geq 5)=1-P(X<5)=1-\left(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)\right)=1-\sum_{1}^{4}\frac{1}{2^k}=$

$$\boxed{\frac{1}{16}}$$

c) Moda, podemos observar los primeros valores de la función de probabilidad

X	Prob.
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$
4	$\frac{1}{16}$
….	**…**
Sumas	**1**

Y vemos que el máximo corresponde a **k=1**

d) Para buscar el tercer cuartil obtenemos previamente la Función de distribución

$$F(x)=P(X\leq x)=\sum_{k=1}^{x}\frac{1}{2^k}$$

El tercer cuartil corresponde a un valor x tal que F(x)=0,75 que en este caso coincide con el valor 2, pero al ser discreta queda entre 2 y 3, adoptamos el valor medio **2,5**

c) Esperanza matemática

$$\mu=E[X]=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{1}{2^k}=\boxed{2}$$

20.- Sea $f(x)=\begin{cases} 1/2 & x\in[1,2] \\ x-4 & x\in[4,5] \\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$ **, a) ¿Es f(x) una función de densidad? ¿qué tipo de v.a.? b) Calcular la función de distribución, suponiendo que f(x) es una función de densidad. c) Esperanza matemática. d) Varianza. e) P(1<X<3), P(1.5<X≤5), P(X>3), P(X=4).**

Solución:

$$f(x)=\begin{cases} 1/2 & x\in[1,2] \\ x-4 & x\in[4,5] \\ 0 & \text{en el resto}\end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si} & x<1 \\ \frac{1}{2} & \text{si} & 1\le x\le 2 \\ 0 & \text{si} & 2<x<4 \\ x-4 & \text{si} & 4\le x\le 5 \\ 0 & \text{si} & 5<x \end{cases}$$

a) Es una función de densidad de una **variable aleatoria continua**, puesto que cumple las dos condiciones:

1) $f(x)\ge 0, \quad \forall x\in R$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{2}\,dx + \int_4^5 (x-4)\,dx = 1$

b) Obtenemos la función de distribución por trozos.

Si $x<1, \quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$

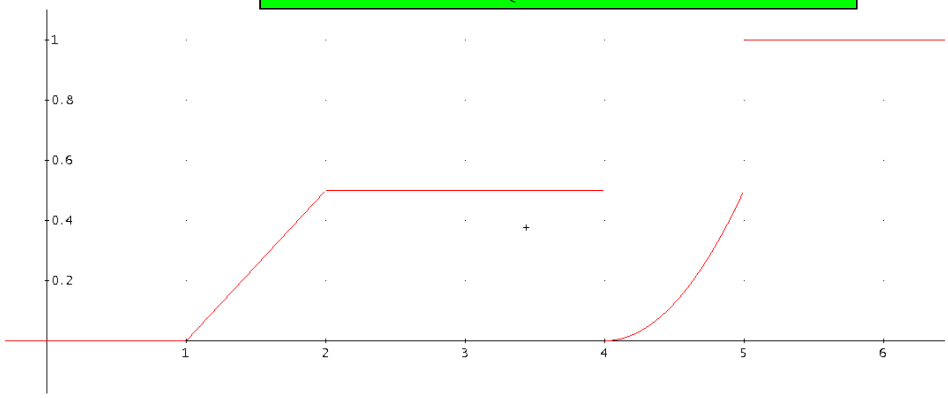
Si $1\le x<2, \quad F(x)=\int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_1^x 0{,}15dt = F(1)+\int_1^x 0{,}5dt = 0{,}5(x-1)$

Si $2\le x<4, \quad F(x)=F(2)+\int_2^x 0dt = 0{,}5$

Si $4\le x<5, \quad F(x)=F(4)+\int_4^x (t-4)dt = 0{,}5+\frac{x^2}{2}-4x+8=\frac{x^2}{2}-4x+\frac{17}{2}$

Si $5\le x, \quad F(x)=1$

$$\boxed{F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si} & x<1 \\ 0{,}5(x-1) & \text{si} & 1\le x\le 2 \\ 0{,}5 & \text{si} & 2<x<4 \\ \frac{x^2}{2}-4x+8 & \text{si} & 4\le x\le 5 \\ 1 & \text{si} & 5\le x \end{cases}}$$



c) Esperanza Matemática

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_1^2 x \cdot 0,5 \cdot dx + \int_4^5 x \cdot (x-4)\, dx = \boxed{\frac{37}{12}}.$$

d) Varianza

$$\sigma^2 = V[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(x - \frac{37}{12}\right)^2 \cdot 0,5 \cdot dx + \int_4^5 \left(x - \frac{37}{12}\right)^2 (x-4)\, dx = \boxed{\frac{371}{144}}.$$

e)

$$P(1 < X < 3) = \int_1^3 f(x)dx = F(3) - F(1) = 0,5 - 0 = \boxed{0,5}$$

$$P(1,5 < X < 5) = \int_{1,5}^5 f(x)dx = F(5) - F(1,5) = 1 - 0,25 = \boxed{0,75}$$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \le 3) = 1 - \int_{-\infty}^3 f(x)dx = 1 - F(3) = 1 - 0,5 = \boxed{0,5}$$

$$P(X = 4) = \int_4^4 f(x)dx = F(4) - F(4) = \boxed{0}$$

21.- Los artículos en venta en unos grandes almacenes se someten al control diario y, se estima que la probabilidad de que en un día sean vendidos "x" artículos defectuosos es $P(X=x)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$. Determinar la probabilidad de que en un día de los artículos vendidos:

a. Dos o más sean defectuosos.

b. Cinco sean defectuosos.

c. Tres ó menos sean defectuosos.

d. Hallar P(1 ≤ X ≤ 4).

Solución:

Sea X el número de artículos defectuosos vendidos en un día; $P(X=x)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$

a) $P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-\left(\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\right)=\boxed{\frac{1}{9}}$.

b) $P(X=5)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{5}=\boxed{\frac{2}{729}}$.

c) $P(X\le 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\boxed{\frac{80}{81}}$.

d) $P(1\le X\le 4)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=\boxed{\frac{80}{243}}$

22.- Una estructura metálica puede sufrir debido al calor una dilatación que (medida en cm) es una variable aleatoria X con función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{15}x & \text{si } 0\le x\le 3\\ k & \text{si } 3<x<5\\ \frac{k}{15}(8-x) & \text{si } 5\le x\le 8\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}.$$

a) Sabiendo que f(x) es función de densidad determinar el valor de k.
b) Calcular la probabilidad de que la dilatación sea inferior a 3 cm.
c) Calcular la probabilidad de que la dilatación se encuentre entre 2 y 9 cm.

Solución:

a) Se tiene que cumplir que: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{3}\frac{x}{15}dx+\int_{3}^{5}kdx+\int_{5}^{8}\frac{k}{15}(8-x)dx+\int_{8}^{\infty}0dx=1\Rightarrow \boxed{k=\frac{7}{23}}$$

b) $P(X<3)=\int_{-\infty}^{3} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{3}\frac{x}{15}dx=\boxed{\frac{3}{10}}$

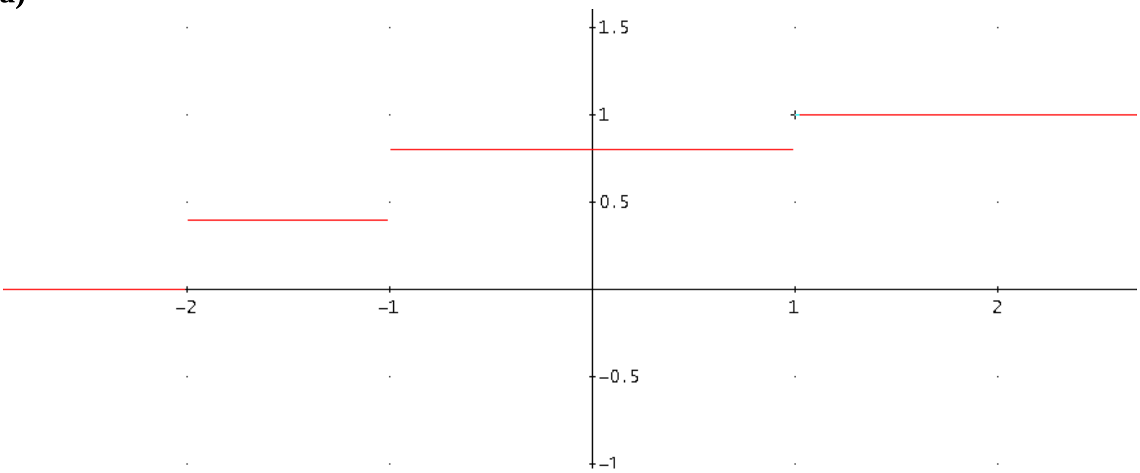
c) $P(2<X<9)=\int_{2}^{9} f(x)dx=\int_{2}^{3}\frac{x}{15}dx+\int_{3}^{5}\frac{7}{23}dx+\int_{5}^{8}\frac{7/23}{15}(8-x)dx+\int_{8}^{9}0dx=\boxed{\frac{13}{15}}$

23.- Sea X una variable aleatoria con función de distribución $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<-2 \\ 0.4 \text{ si } -2\le x<-1 \\ 0.8 \text{ si } -1\le x<1 \\ 1 \text{ si } 1\le x \end{cases}$

a) Representar gráficamente F(x).
b) ¿Es una variable aleatoria continua? ¿Por qué?
c) Determinar la función de probabilidad.
d) Calcular P(X = 0), P(X = - 1.7), $P(-2<X\le -1)$ **, P(- 1 < X < 0)**

Solución:

a)



b) No es continua, ya que F(x) es discontinua.

c) La probabilidad se obtiene en cada punto de discontinuidad y su valor es el salto finito.

x_i	$P(X=x_i)$
-2	0,4
-1	0,4
1	0,2
Suma	1

d)

P(X=0)=**0**;

P(X=-1.7)=**0**;

$P(-2<X\le -1)=P(X=-1)=$ **0,4**;

P(-1<X≤0)=**0**

24.- Una variable aleatoria X tiene una función de distribución de la forma

$$F(x)=\begin{cases} k-e^{-x^2} \text{si } x>0 \\ 0 \text{ si } x\le 0 \end{cases}$$

a) Hallar el valor de k para que f(x) sea realmente una función de distribución.
b) Hallar la función de densidad de la variable aleatoria X.
c) Calcular $P(-1\le X\le 1)$**.**
d) Calcular el valor de t tal que $P(X<t)=0.8745$**.**
e) Hallar el valor de la moda, mediana, y media.

Solución:

a) Se tiene que cumplir que $\lim_{x\to\infty} F(x)=1$, luego, $1=\lim_{x\to\infty}\left(k-e^{-x^2}\right)=k \Rightarrow \boxed{k=1}$

b) $F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt \Rightarrow f(x)=F'(x)$, en nuestro caso,

$$\boxed{f(x)=\begin{cases} 2xe^{-x^2} \text{si } x>0 \\ 0 \text{ si } x\le 0 \end{cases}}$$

c)
$P(-1<X<1)=F(1)-F(-1)=\boxed{1-e^{-1}}$

d) $P(X<t)=0.8745$
$P(X<t)=F(t)=1-e^{-t^2}=0{,}8745 \Rightarrow \boxed{t=\ 1{,}440642051}$

e)
Moda es el máximo de la función de densidad
$f(x)=2xe^{-x^2} \Rightarrow f'(x)=\left(2-4x^2\right)e^{-x^2}=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Mediana
$F(M)=1-e^{-M^2}=0{,}5 \Rightarrow \boxed{M=\sqrt{\ln 2}}$

Media
$\mu=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{\infty} x2xe^{-x^2}dx=\boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

25.- Unos estudios realizados por las compañías de seguros de automóviles indican que la probabilidad de que un conductor novel tenga un accidente mortal durante el primer año de conducción es de 0.00278. Aprovechando esta información, una de estas compañías decide realizar una campaña de suscripción de pólizas personales a todo riesgo con carácter anual y condiciones especiales, destinadas únicamente a conductores noveles. El precio de suscripción de una de estas pólizas es de 1750€, y en caso de producirse el fatal accidente, la compañía indemnizaría a los beneficiarios de la póliza con una prima de $3x10^4$ de euros. La compañía evalúa en 48€ los gastos de venta, gestión y administración de cada póliza.

c) Obtenga la función de distribución del beneficio que obtendrá la compañía con la suscripción de una de estas pólizas.

d) Calcule el beneficio esperado para la compañía por la suscripción de una póliza.

Solución:

Sea X= ”beneficio obtenido por la suscripción de una póliza”

Si el asegurado no tiene un accidente mortal, el beneficio obtenido por la compañía será: 1750-48=1702€ con probabilidad 1-0,00278=0,99722

Si el asegurado tiene un accidente, el resultado para la compañía será una perdida 1702-$3x10^4$=-28298€

La distribución de probabilidad queda:

x_i	$P(X=x_i)$
-28298	0,00278
1702	0,99722
Sumas	1

a) La función de distribución:

x_i	$P(X=x_i)$	F(x)
-28298	0,00278	0,00278
1702	0,99722	1
Sumas	1	

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<-28298 \\ 0,00278 & \text{si} \quad -28298\le x<1702 \\ 1 & \text{si} \quad 1702\le x \end{cases}$$

b) El beneficio esperado

x_i	$P(X=x_i)$	$x_iP(X=x_i)$
-28298	0,00278	-78,66844
1702	0,99722	1697,26844
Sumas	1	1618,6

$$\mu=E[X]=\sum_{i=1}^{2}x_iP(X=x_i)=\boxed{1618,6}$$

26.- Sea la función de distribución de una variable aleatoria

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x<-1\\ 0,3 & \text{si} \quad -1\le x<0\\ 0,4 & \text{si} \quad 0\le x<3\\ 0,9 & \text{si} \quad 3\le x<4\\ 1 & \text{si} \quad 4\le x\end{cases}$$

Se pide. A) La función de probabilidad. B) Percentil 30. C) Valor esperado.

Solución:

x_i	F(x)	$P(X=x_i)$	$x_iP(X=x_i)$
-1	0,3	0,3	-0,3
0	0,4	0,4-0,3=0,1	0
3	0,9	0,9-0,4=0,5	1,5
4	1	1-0,9=0,1	0,4
Sumas		1	1,6

B) Percentil 30 corresponde $F(P_{30})=0,3$, luego entre el -1 y el 0 tomamos el -0,5

C) Media

$$\mu=E[\xi]=\sum_i x_iP(X=x_i)=\boxed{1,6}$$

27.- La cantidad producida de un cierto artículo es una variable aleatoria X con función de densidad: $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{1000}x^2 & \text{si } 0\le x\le k\\ 0 & \text{si } x\notin[0,k]\end{cases}$

El precio Y del artículo está en función de la cantidad producida según la ecuación Y=40-2X. Se pide: a) El valor de k para que f sea realmente función de densidad. b) Media y varianza de la cantidad producida. c) Media y varianza del precio del artículo.

Solución:

a) El área encerrada por la función de densidad es 1, por tanto

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cdot dx=\int_0^k\frac{3}{1000}x^2dx=\frac{1}{1000}k^3\Rightarrow\boxed{k=10}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{1000}x^2 & \text{si } 0\le x\le 10\\ 0 & \text{si } x\notin[0,10]\end{cases}$$

b) X="cantidad producida"

Esperanza matemática:

$$\mu=E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)\cdot dx=\int_0^{10}x\frac{3}{1000}x^2dx=\boxed{7,5}$$

Varianza

$$\sigma^2=V[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\cdot f(x)\cdot dx=\int_0^{10}(x-7,5)^2\frac{3}{1000}x^2dx=\boxed{\frac{15}{4}}$$

c) Y="precio"

Esperanza matemática:

$$E[Y]=E[40-2X]=40-2E[X]=40-2\cdot 7,5=\boxed{25}$$

Varianza

$$V[Y]=V[40-2X]=2^2V[X]=4\cdot\frac{15}{4}=\boxed{15}$$

28. Sea c una constante y consideremos la función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases} c+x & \text{si } -1<x<0 \\ c-x & \text{si } 0\le x<1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Calcular el valor de c.
b) Obtener la función de distribución.
c) Calcular la $P(-0.5\le X\le 0.5)$**.**
d) Calcular la varianza.

Solución:

a) $\int_{-1}^{0}(c+x)\,dx+\int_{0}^{1}(c-x)\,dx=1\Rightarrow \frac{2c-1}{2}+\frac{2c-1}{2}=1\Rightarrow \boxed{c=1}$

b)

Si $-1<x<0$**,** $F(x)=\int_{-1}^{x}(1+t)\,dt=\frac{1}{2}+x+\frac{x^2}{2}$**.**

Si $0\le x<1$, $F(x)=F(0)+\int_{0}^{x}(1-t)\,dt=\frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2}$**.**

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<-1 \\ \frac{1}{2}+x+\frac{x^2}{2} & \text{si } -1\le x<0 \\ \frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2} & \text{si } 0\le x<1 \\ 1 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$$

c)

$$P(-0.5\le X\le 0.5)=\int_{-0.5}^{0.5}f(x)dx=\int_{-0.5}^{0}(1+x)\,dx+\int_{0}^{0.5}(1-x)\,dx=\boxed{\frac{3}{4}}$$

O bien,

$$P(-0.5\le X\le 0.5)=F(0.5)-F(-0.5)=0.5-0.5+\frac{0.5^2}{2}-\left(0.5-0.5-\frac{(-0.5)^2}{2}\right)=\boxed{\frac{3}{4}}$$

d)

$$\mu=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)\cdot dx=\int_{-1}^{0}x(1+x)\,dx+\int_{0}^{1}x(1-x)\,dx=\boxed{0}.$$

$$\sigma^2=V[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\cdot f(x)\cdot dx=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)\,dx+\int_{0}^{1}x^2(1-x)\,dx=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\boxed{\frac{1}{6}}$$

29.- Se distribuye la probabilidad por unidad de área de modo equiprobable en un círculo de radio r. ¿Cuál es la función de distribución de la variable aleatoria X= "distancia al centro de un punto tomado al azar". Calcular la media y varianza de X.

Solución:

El círculo de radio r tiene un área total de πr^2. La probabilidad correspondiente a cualquier porción del círculo será: $\dfrac{\text{área}}{\pi r^2}$

La función de distribución correspondiente para la variable X:

$$\boxed{F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{\pi x^2}{\pi r^2} & \text{si} \quad 0\le x\le r \\ 1 & \text{si} \quad r<x \end{cases}}$$

La función de densidad correspondiente para la variable X:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{2x}{r^2} & \text{si} \quad 0\le x\le r \\ 0 & \text{si} \quad r<x \end{cases}$$

Media.

$$\mu=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\cdot dx=\int_0^r x\frac{2x}{r^2}dx=\boxed{\frac{2}{3}r}.$$

Varianza

$$\sigma^2=V[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\cdot f(x)\cdot dx=\int_0^r\left(x-\frac{2}{3}r\right)^2\frac{2x}{r^2}dx=\boxed{\frac{1}{18}r^2}$$

30.- Sea una variable aleatoria X con la siguiente función de probabilidad

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{k}{x!(3-x)!} & \text{para x=0, 1, 2, 3}\\ 0 & \text{en el resto de valores}\end{cases}$$

a) Calcular k para que efectivamente sea una función de probabilidad.
b) Obtener la función de distribución
c) Calcular la mediana
d) Hallar la esperanza matemática

Solución:

a) Para que sea una función de probabilidad se tiene que cumplir que:

$$1=\sum_{i=0}^{3}P(X=i)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=$$

$$=\frac{k}{0!(3-0)!}+\frac{k}{1!(3-1)!}+\frac{k}{2!(3-2)!}+\frac{k}{3!(3-3)!}=k\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=\frac{4}{3}k\Rightarrow \boxed{k=\frac{3}{4}}$$

Por tanto,

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{3/4}{x!(3-x)!} & \text{para x=0, 1, 2, 3}\\ 0 & \text{en el resto de valores}\end{cases}$$

b) Función de distribución

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{i=0}^{x}\frac{3}{4}\frac{1}{i!(3-i)!}$$

Resultando $\boxed{F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \dfrac{1}{8} & \text{si } 0\le x<1\\ \dfrac{1}{2} & \text{si } 1\le x<2\\ \dfrac{7}{8} & \text{si } 2\le x<3\\ 1 & \text{si } 3\le x\end{cases}}$

c) La mediana es cualquier valor x_i tal que $F(x_{i-1})<\frac{1}{2}\le F(x_i)$. En nuestro caso se cumple para [1,2), diremos que la mediana es el punto medio: **1,5**

d) Esperanza matemática

$$\mu=E[X]=\sum_{i=0}^{3}iP(X=i)=0\cdot P(X=0)+1\cdot P(X=1)+2\cdot P(X=2)+3\cdot P(X=3)=$$

$$=\frac{3}{4}\left(0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{6}\right)=\boxed{\frac{3}{2}}$$

31.- Sea una variable aleatoria X con la siguiente función de distribución:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \frac{1}{8} & \text{si } 0\le x<1\\ \frac{1}{2} & \text{si } 1\le x<2\\ \frac{7}{8} & \text{si } 2\le x<3\\ 1 & \text{si } 3\le x\end{cases}$$

a) Obtener la función de probabilidad o la función de densidad según proceda.

b) Calcular la mediana

c) ¿Tiene moda?

d) Hallar la esperanza matemática

Solución:

a) X es una variable aleatoria discreta y la probabilidad corresponde a los saltos de discontinuidad de la función de distribución

x_i	F(x).	P(X=x)	$x_iP(X=x_i)$
0	**1/8**	**1/8**	**0**
1	**1/2**	**3/8**	**3/8**
2	**7/8**	**3/8**	**6/8**
3	**1**	**1/8**	**3/8**
Sumas		1	3/2

b) La **mediana** es cualquier valor x_i tal que $F(x_{i-1})<\frac{1}{2}\le F(x_i)$

En nuestro caso se cumple para [1,2), diremos que la mediana es el punto medio:

$$\boxed{1{,}5}$$

c) Tiene dos **modas**: los valores $\boxed{\{1,2\}}$

d) Esperanza matemática

$$\mu=E\left[X\right]=\sum_{i=0}^{3} iP\left(X=i\right)=0\cdot P\left(X=0\right)+1\cdot P\left(X=1\right)+2\cdot P\left(X=2\right)+3\cdot P\left(X=3\right)=\boxed{\frac{3}{2}}$$

32.- Las ventas diarias de una empresa, X, sigue una función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<300 \\ \dfrac{1}{300} & \text{si} \quad 300\le x\le 600 \\ 0 & \text{si} \quad 600<x \end{cases}$$

Se pide:
a) La venta media diaria.
b) El valor x tal que P(X<x)= 0,95
c) La varianza.
d) La probabilidad de que las ventas en un día superen los 500€

Solución:
a) Media

$$\mu=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\cdot dx=\int_{300}^{600} x\cdot\frac{1}{300}dx=\frac{1}{300}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{300}^{600}=\boxed{450}$$

Nota:
Se trata de una distribución Uniforme de parámetros a=300 y b=600, cuya media es (a+b)/2.

b) La función de distribución es:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<300 \\ \dfrac{x-300}{300} & \text{si} \quad 300\le x\le 600 \\ 1 & \text{si} \quad 600<x \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$F(x)=P(X\le x)=\frac{x-300}{300}=0,95\Rightarrow\boxed{x=585}$$

O bien,

$$0,95=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{300}^{x}\frac{1}{300}dt\Rightarrow\boxed{x=585}$$

c) Varianza

$$\sigma^2=V[x]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx=\int_{300}^{600}(x-450)^2\cdot\frac{1}{300}dx=\boxed{7500}$$

d)

$$P(X>500)=\int_{500}^{\infty} f(x)dx=\int_{500}^{600}\frac{1}{300}dx=\boxed{\frac{1}{3}}$$

O bien,

$$P(X>500)=1-P(X\le 500)=1-F(500)=1-\frac{500-300}{300}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

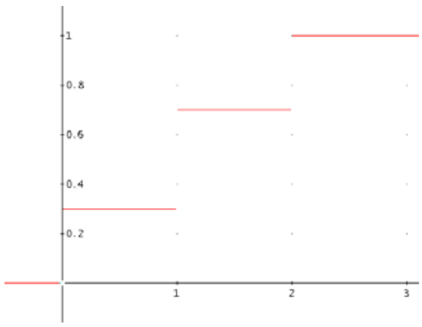
33.-Sea una variable aleatoria X con función de distribución:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ 0.3 & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ 0.7 & \text{si} \quad 1\le x<2 \\ 1 & \text{si} \quad 2\le x \end{cases}$$

a) ¿Es una variable aleatoria continua? b) Determinar la distribución de probabilidad de la v.a. c) Obtener P(X=1), P(X=0.7), P(X≤0), P(-1<X≤1), P(0<X<1). d) Hallar la esperanza matemática. e) Calcular la varianza.

Solución:

a)



No es continua, ya que F(x) es discontinua.

b)

x_i	$P(X=x_i)$	$x_i\,P(X=x_i)$	$x_i^2\,P(X=xi)$
0	0,3	0	0
1	0,4	0,4	0,4
2	0,3	0,6	1,2
Suma	1	**1**	1,6

c) P(X=1)=**0,4**; P(X=0.7)=**0**; P(X≤0)=F(0)=**0,3**; P(-1<X≤1)=F(1)=**0,7**; P(0<X<1)=**0**

d) Esperanza Mateática

$$\mu=E[X]=\sum_{x_i} x_i\cdot P(X=x_i)=\boxed{1}$$

e) Varianza

$$\sigma^2=V[X]=E\left[X^2\right]-E[X]^2=1,6-(1)^2=\boxed{0,6}$$

34.- El número de coches que utilizan un túnel de lavado tiene la siguiente distribución de probabilidad:

x_i	4	5	6	7	8	9
$P(x = x_i)$	0.1	0.1	0.3	0.3	0.15	0.05

a) Hallar la función de distribución. b) Obtener la moda, mediana, media y la varianza.

Solución:

a) $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} & x < 4 \\ 0,1 & \text{si} & 4 \le x < 5 \\ 0,2 & \text{si} & 5 \le x < 6 \\ 0,5 & \text{si} & 6 \le x < 7 \\ 0,8 & \text{si} & 7 \le x < 8 \\ 0,95 & \text{si} & 8 \le x < 9 \\ 1 & \text{si} & 9 \le x \end{cases}$$

b) Moda = {6,7} corresponde a valores con máxima probabilidad.

Mediana = 6,5; ya que F(x)=0,5 corresponde a un intervalo.

x_i	$P(X=x_i)$	$x_i\, P(X=x_i)$	$x_i^2\, P(X=x_i)$
4	0,1	0,4	1,6
5	0,1	0,5	2,5
6	0,3	1,8	10,8
7	0,3	2,1	14,7
8	0,15	1,2	9,6
9	0,05	0,45	4,05
Suma	1	**6,45**	43,25

Media $\mu = E[X] = \sum_{x_i} x_i \cdot P(X = x_i) = 6,45$

Varianza

$$\sigma^2 = V[X] = E\left[X^2\right] - E[X]^2 = 43,25 - (6,45)^2 = 1,6475$$

35.- Una variable aleatoria X tiene una función de densidad de la forma

$$f(x)=\begin{cases} kx^2 & \text{si } -1<x<2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se pide:
a) El valor de k para que f(x) sea realmente una función de densidad.
b) La función de distribución de la variable aleatoria X.
c) $P(X\le 1)$, $P(0<X\le 1)$, $P(-2<X\le 0)$
d) El percentil 95.
e) Moda, mediana, media y varianza.

Solución:

a) Se tiene que cumplir que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$, luego,

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{-1}0dx+\int_{-1}^{2}kx^2dx+\int_{2}^{\infty}0dx=3k\Rightarrow \boxed{\mathbf{k=1/3}}$$

b) $F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$**,** en nuestro caso,

si x≤-1 tenemos $F(x)=P(X\le x)=0$,

si -1<x<2 tenemos $F(x)=P(X\le x)=\int_{-1}^{x}\frac{t^2}{3}dt=\frac{x^3+1}{9}$,

si 2≤x tenemos F(x)=1, resulta,

$$\boxed{F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} & x\le -1 \\ \frac{x^3+1}{9} & \text{si} & -1<x<2 \\ 1 & \text{si} & 2\le x \end{cases}}$$

c)

$$P(X\le 1)=\int_{-1}^{1} f(x)\cdot dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{3}\cdot dx=F(1)=\boxed{\frac{2}{9}}$$

$$P(0<X\le 1)=\int_{0}^{1} f(x)\cdot dx=\int_{0}^{1}\frac{x^2}{3}\cdot dx=F(1)-F(0)=\boxed{\frac{1}{9}}$$

$$P(-2<X\le 0)=\int_{-1}^{0} f(x)\cdot dx=\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{3}\cdot dx=F(0)-F(-2)=\boxed{\frac{1}{9}}$$

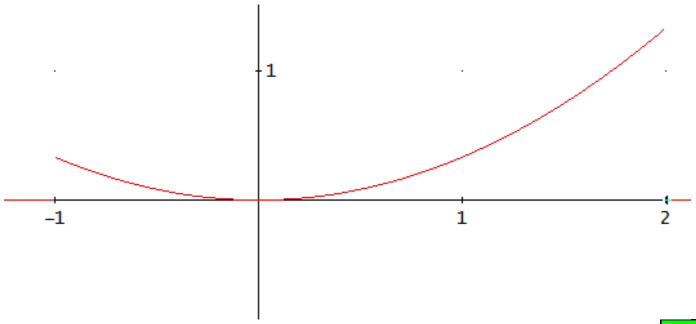
d) $P(X<x)=0{,}95$

$$P(X<x)=F(t)=\frac{x^3+1}{9}=0{,}95\Rightarrow \boxed{x=1{,}961774042}$$

e) Moda es el máximo de la función de densidad

$f(x)=\frac{x^2}{3}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x}{3}=0\Rightarrow\ x=0$; pero $f''(x)=\frac{2}{3}>0\Rightarrow$ corresponde a un mínimo local.

Buscaremos el máximo en los puntos frontera x= -1 y x=2. Representamos y=f(x):



Resulta f(2)=0, por tanto no se alcanza el máximo y no hay el máximo. **No hay moda**.

Mediana

$$F(M)=\frac{M^3+1}{9}=0,5\Rightarrow \boxed{M=\sqrt[3]{3,5}\approx 1,518294485}$$

Media

$$\mu=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{-1}^{2}x\frac{x^2}{3}dx=\boxed{\frac{5}{4}}$$

Varianza

$$\sigma^2=V[x]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2f(x)dx=\int_{-1}^{2}\left(x-\frac{5}{4}\right)^2\frac{x^2}{3}dx=\boxed{\frac{51}{80}}$$

36.- Disponemos de un dado cargado en el que la probabilidad de que salga un número es proporcional a dicho número. Se pide: a) distribución de probabilidad de la v. a. número de puntos obtenidos al lanzar un dado. b) Probabilidad de que al lanzarlo salga un número par. c) Media o Esperanza Matemática.

Solución:

Nº	Prob.
1	k
2	2k
3	3k
4	4k
5	5k
6	6k
Sumas	21k

a) Para que sea distribución de probabilidad debe cumplir que:

$$1=\sum_{i=1}^{6} P\left(X=x_i\right)=21k \Rightarrow k=\frac{1}{21}$$

Nº	Prob.
1	1/21
2	2/21
3	3/21
4	4/21
5	5/21
6	6/21
Sumas	1

b) $P(X=n^o\,par)=\sum_{i=1}^{3} P\left(X=2i\right)=P\left(X=2\right)+P\left(X=4\right)+P\left(X=6\right)=\boxed{\frac{12}{21}}$

c) Media

Nº	Prob.	$x_iP(X=x_i)$.
1	1/21	1/21
2	2/21	4/21
3	3/21	9/21
4	4/21	16/21
5	5/21	25/21
6	6/21	36/21
Sumas	1	91/21

$$\mu=E\left[X\right]=\sum_{i} x_iP\left(X=x_i\right)=\boxed{\frac{91}{21}}$$

37.- Para la función de distribución $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(x)$, determinar:

a) La función de densidad.

b) Mediana y moda.

c) $P(1<X<2)$.

d) x tal que $P(0<X<x)=0.4$

Solución:

a) La función de densidad se obtiene derivando la función de distribución:

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=F'(x)=\boxed{\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}}$$

b) Mediana / F(M)=0,5

$$F(M)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(M)=0,5\Rightarrow\boxed{M=0}$$

Moda:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{\pi}\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}=0\Rightarrow\boxed{x=0}$$

c) $P(1<X<2)=\int_1^2 f(x)dx=F(2)-F(1)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)\approx\boxed{0,1024163823}$

d) $P(0<X<x)=\int_0^x f(t)dt=F(x)-F(0)=0,4\Rightarrow F(x)=F(0)+0,4=0,9$

$$F(M)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(M)=0,9\Rightarrow\boxed{x=\sqrt{2+5\sqrt{5}}\approx 3.077683537}$$

38.- Sea una variable aleatoria X con la siguiente distribución de probabilidad:

$$P(X=k)=\frac{2^k}{k!}\alpha \text{, para k= 0, 1, 2, 3, 4}$$

Se pide: a) valor de α para que sea una distribución de probabilidad.
b) Media.
c) Moda.
d) Mediana.
e) $P(1<X<2)$, $P(2\le X\le 3)$

Solución:
Tenemos una variable aleatoria discreta con función de probabilidad

$$P(X=k)=\frac{2^k}{k!}\alpha \text{, para k= 0, 1, 2, 3, 4}$$

a) Debe cumplir que:

$$1=\sum_{k=0}^{4}P(X=k)=\sum_{k=0}^{4}\frac{2^k}{k!}\alpha=\alpha\left(\frac{2^0}{0!}+\frac{2^1}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}\right)=\alpha\left(1+2+2+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right)=7\alpha$$, entonces

$$\boxed{\alpha=\frac{1}{7}}$$

b) Media

$$\mu=E\left[X\right]=\sum_{k=0}^{4}k\cdot P\left(X=k\right)=\sum_{k=0}^{4}k\frac{2^k}{k!}\frac{1}{7}=\frac{1}{7}\sum_{k=0}^{4}\frac{2^k}{(k-1)!}=\boxed{\frac{38}{21}}$$

c) Moda
Es bimodal, ya que la máxima probabilidad se obtiene para **{1,2}**

d) Mediana

X	Prob.	F(x)
0	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
1	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$
2	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$
3	$\frac{4}{21}$	$\frac{19}{21}$
4	$\frac{2}{21}$	**1**
Sumas	**1**	

La mediana, M, es tal F(M)>0,5; se cumple para **M=2**

e) $P(1<X<2)=\boxed{0}$

$$P(2\le X\le 3)=P\left(X=2\right)+P\left(X=3\right)=\frac{2}{7}+\frac{4}{21}=\boxed{\frac{10}{21}}$$

39.- Para la función $f(x)=k\left(1+\frac{x^2}{5}\right)^{-3}$, determinar:

a) El valor de k para que f(x) sea la función de densidad de una cierta variable aleatoria.

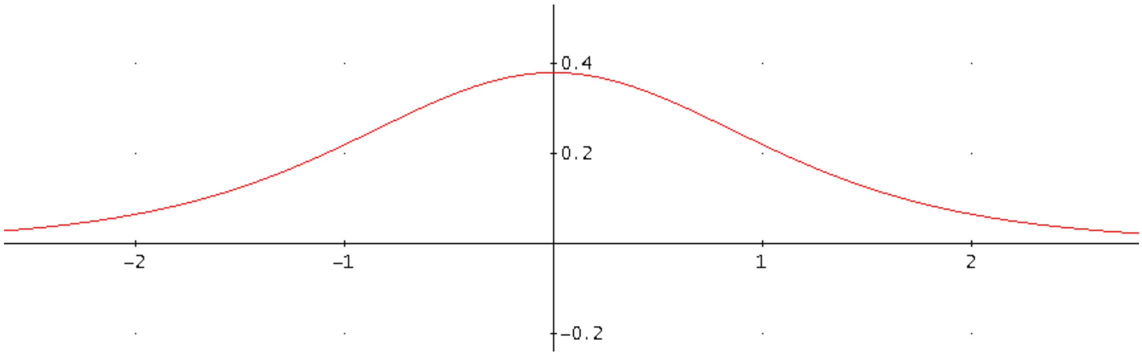
b) Mediana y moda.

c) Esperanza matemática y varianza.

Solución:

a) Se cumple que: $1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} k\left(1+\frac{x^2}{5}\right)^{-3} dx=\frac{3\sqrt{5}}{8}\pi k \Rightarrow \boxed{k=\frac{8\sqrt{5}}{15\pi}}$

Gráfica de la función de densidad



b)
La mediana, es el valor de x que verifica F(x)=0,5

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} \frac{3\sqrt{5}}{15\pi}\left(1+\frac{t^2}{5}\right)^{-3} dt=0,5 \Rightarrow \boxed{M=0}$$

Moda: es el máximo de la función de densidad

$$f(x)=\frac{8\sqrt{5}}{15\pi}\left(1+\frac{x^2}{5}\right)^{-3} \Rightarrow f'(x)=-\frac{400\sqrt{5}x}{\pi\left(5+x^2\right)^4}=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

c)
Media o Esperanza matemática:

$$\mu=E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\frac{8\sqrt{5}}{15\pi}\left(1+\frac{x^2}{5}\right)^{-3} dx=\boxed{0}$$

Varianza:

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}(x-0)^2\frac{8\sqrt{5}}{15\pi}\left(1+\frac{x^2}{5}\right)^{-3} dx=\boxed{\frac{5}{3}}$$

40.- Sea la función de probabilidad de la variable aleatoria el número de clientes que llegan a una tienda en una hora:

x_i	$P(X=x_i)$
0	0,1
1	0,3
2	0,3
3	0,2
4	0,05
5	0,05
Sumas	1

Se pide: a) Función de distribución.
b) Media.
c) Moda.
d) Mediana.
e) $P(1 < X < 2)$, $P(2 \leq X \leq 3)$

Solución:

a)

x_i	$P(X=x_i)$	$F(x)$
0	0,1	0,1
1	0,3	0,4
2	0,3	0,7
3	0,2	0,9
4	0,05	0,95
5	0,05	1
Sumas	1	

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 0,1 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0,4 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0,7 & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 0,9 & \text{si} \quad 3 \leq x < 4 \\ 0,95 & \text{si} \quad 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{si} \quad 5 \leq x \end{cases}$$

b) Media

x_i	$P(X=x_i)$	$x_i\, P(X=x_i)$
0	0,1	0
1	0,3	0,3
2	0,3	0,6
3	0,2	0,6
4	0,05	0,2
5	0,05	0,25
Sumas	1	1,95

$$\mu = E[X] = \sum_{k=0}^{5} k \cdot P(X = k) = \boxed{1,95}$$

c) Moda

Es bimodal, ya que la máxima probabilidad se obtiene para **{1,2}**

d) Mediana

La mediana, M, es tal F(M)>0,5; se cumple para **M=2**

e) $P(1 < X < 2) = \boxed{0}$

$$P(2 \leq X \leq 3) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0,3 + 0,2 = \boxed{0,5}$$

41.- Un almacén distribuye un producto en exclusiva en una gran ciudad y lo recibe semanalmente de fábrica. El nº de millares de artículos vendidos cada mes, X, es una variable aleatoria continua cuya función de densidad viene dada por:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ k(1-x)^3 & \text{si } 0\le x<1\\ \dfrac{1}{x^3} & \text{si } x\ge 1\end{cases}$$ **Se pide:**

a) k para que f(x) sea efectivamente función de densidad.

b) $P(X\le 0.5), P(X\le 2), P(0\le X\le 2), P(1<X<2)$

c) Media.

d) Moda.

Solución:

a) Se cumple que: $1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_0^1 k(1-x)^3 dx+\int_1^{\infty}\frac{1}{x^3}dx=\frac{k+2}{4}\Rightarrow \boxed{k=2}$

b) $P(X\le 0.5)=\int_0^{0,5} 2(1-x)^3 dx=\boxed{\frac{15}{32}}$

$P(X\le 2)=\int_0^1 2(1-x)^3 dx+\int_1^2\frac{1}{x^3}dx=\boxed{\frac{7}{8}}$

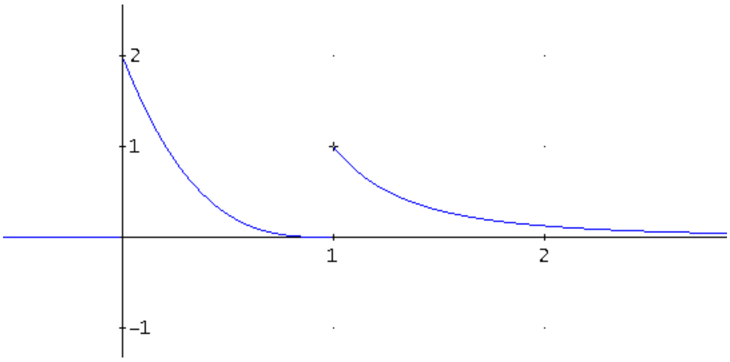
$P(0\le X\le 2)=P(X\le 2)=\int_0^1 2(1-x)^3 dx+\int_1^2\frac{1}{x^3}dx=\boxed{\frac{7}{8}}$

$P(1<X<2)=\int_1^2\frac{1}{x^3}dx=\boxed{\frac{3}{8}}$

c) Media o Esperanza matemática:

$\mu=E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int_0^1 x2(1-x)^3 dx+\int_1^{\infty} x\frac{1}{x^3}dx=\boxed{\frac{11}{10}}$

d) Moda: es el máximo de la función de densidad



la Moda es $\boxed{x=0}$, ya que f(1)=1 y f(0)=2.

42.- La longitud de una cierta pieza se distribuye con la función de distribución:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x\le 1 \\ k(x^3-6x^2+9x-4) & \text{si} \quad 1<x<3 \\ 1 & \text{si} \quad 3\le x \end{cases}$$

Se pide:

a) El valor de k para que efectivamente sea una función de distribución de una variable aleatoria continua.

b) Mediana de la distribución.

c) Función de densidad.

d) Moda de la distribución.

e) Si una pieza se considera valida únicamente cuando su longitud está comprendida entre 1,7 y 2,4.

e_1) ¿Cuál es la probabilidad de una determinada pieza sea útil?

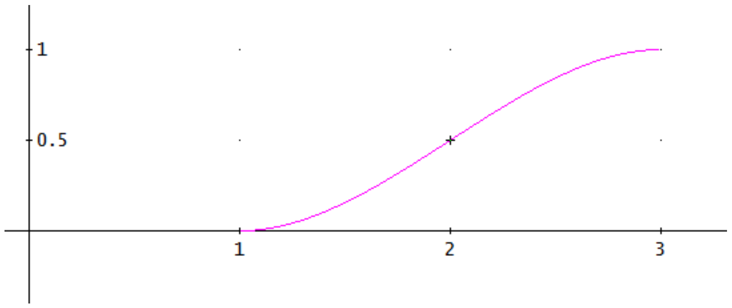
e_2) Si las piezas se empaquetan en lotes de 5 unidades y se acepta el lote si contiene menos de 2 piezas defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de un cierto lote sea rechazado?

Solución:

a) Se tiene que cumplir que $\lim\limits_{x\to 1} F(x)=F(1)=0; \lim\limits_{x\to 3} F(x)=F(3)=1$, luego,

$$1=k(3^3-6\cdot 3^2+9\cdot 3-4)=-4k \Rightarrow \boxed{\mathbf{k=-1/4}}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x\le 1 \\ -\dfrac{x^3-6x^2+9x-4}{4} & \text{si} \quad 1<x<3 \\ 1 & \text{si} \quad 3\le x \end{cases}$$



b)

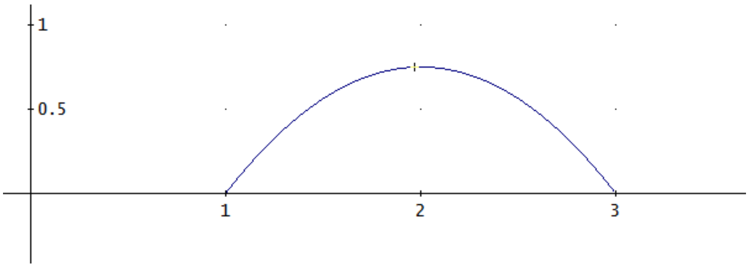
$$F(M)=-\frac{M^3-6M^2+9M-4}{4}=0,5 \Rightarrow \boxed{M=2}$$

d)

$f(x)=F'(x)$, en nuestro caso,

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{4}(3x^2-12x+9) & \text{si } 1<x<3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

c) La moda se corresponde con el máximo de la función de densidad



$$f'(x)=-\frac{1}{4}(6x-12)=0 \Rightarrow x=2$$

$$\boxed{M=2}$$

d₁)

$$P(1,7<X\le 2,4)=\int_{1,7}^{2,4} f(x)\cdot dx=\int_{1,7}^{2,4} -\frac{1}{4}(3x^2-12x+9)\cdot dx=F(2,4)-F(1,7)=\boxed{0,50225}$$

d₂)

Consideramos la variable aleatoria X=”pieza defectuosa”, donde la probabilidad es

$$p=1-P(1,7<X\le 2,4)=1-0,50225=0,49775$$

Tenemos una distribución B(5,0.49775)

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k.(1-p)^{n-k}=\binom{5}{k}0,49775^k(1-0,49775)^{5-k}$$

Un lote se rechaza cuando de las 5 piezas se encuentra 2 o más defectuosas

$$P(X\ge 2)=1-P(X<2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-\binom{5}{0}0,50225^5+\binom{5}{1}0,49775^1\cdot 0,50255^{5-1}\approx$$
$$1-0,1903251561\approx\boxed{0,8096748438}$$

43.- Existen compañías aéreas que venden más pasajes que los disponibles en el vuelo. Una compañía vende billetes de un avión de 250 plazas. Designemos por X, la variable aleatoria, *número de viajeros que se presentan para tomar el vuelo.* Por experiencias realizadas anteriormente se sabe que la distribución de frecuencias de la variable X es:

x_i	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255
f_i	0.03	0.11	0.14	0.19	0.20	0.15	0.09	0.05	0.03	0.01

Se pide:

a) Probabilidad de que todos los pasajeros que llegan a tomar el vuelo tengan plaza.

b) Probabilidad de que se quede sin plaza algún viajero.

c) Probabilidad de que lleguen entre 240 y 250 pasajeros.

d) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera persona que esté en lista de espera tenga sitio en el vuelo?

e) Número medio de personas que acuden a tomar el vuelo.

Solución:

a) $P(X \le 250) = P(X = 246) + P(X = 247) + P(X = 248) + P(X = 249) + P(X = 250) = \boxed{0.67}$

b) $P(X > 250) = 1 - P(X \le 250) = \boxed{0.33}$.

c) $P(240 \le X \le 250) = P(X = 246) + P(X = 247) +$
$+P(X = 248) + P(X = 249) + P(X = 250) = = \boxed{0.67}$.

d) $P(X < 250) = P(X \le 249) = \boxed{0.47}$.

e) $\mu = \sum_{x_i=246}^{255} x_i P(X = x_i) = 246 \cdot 0.03 + ... + 255 \cdot 0.01 = \boxed{249.73}$

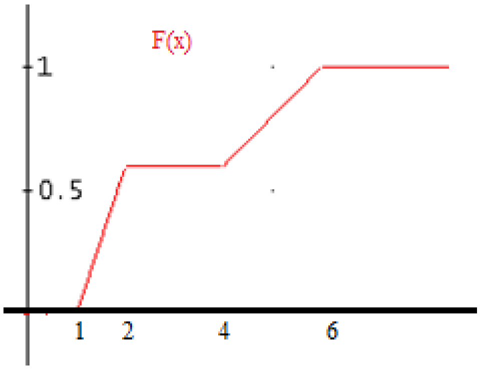
44.- Una variable aleatoria continua X tiene por función de distribución:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<1 \\ ax-\frac{3}{5} & \text{si} \quad 1\le x<2 \\ \frac{3}{5} & \text{si} \quad 2\le x<4 \\ \frac{1}{5}x+b & \text{si} \quad 4\le x<6 \\ 1 & \text{si} \quad 6\le x \end{cases}$$

Calcular los valores de a y b. Hallar la función de densidad. Representar las funciones de densidad y distribución. Calcular la mediana. Obtener la media y varianza de la variable X. Calcular las probabilidades siguientes. $P(X\le 3)$; $P(2<X<5)$.

Solución:

Si X es una variable aleatoria continua, la función F(x) debe ser continua, por tanto,



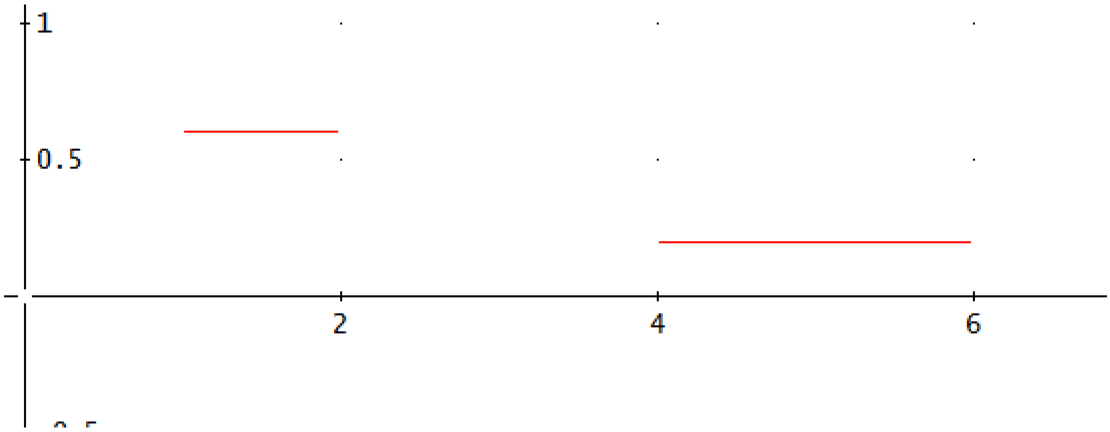
$$F(2)=F(2^+)\Rightarrow a\cdot 2-\frac{3}{5}=\frac{3}{5}\Rightarrow a=\frac{3}{5},$$

$$F(4)=F(4^+)\Rightarrow \frac{3}{5}=\frac{1}{5}4+b\Rightarrow \boxed{b=-\frac{1}{5}},$$

La mediana es un valor x de la variable tal que F(x)=0.5.

$$F(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{3}{5}x-\frac{3}{5}=\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{x=\frac{55}{30}}$$

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\begin{cases}\frac{3}{5} & \text{si } 1\le x<2\\ \frac{1}{5} & \text{si } 4\le x<6\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$



La media de la variable x, es el valor

$$\mu=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_1^2 x\frac{3}{5}dx+\int_4^6 x\frac{1}{5}dx=\boxed{\frac{29}{10}}.$$

La varianza de la variable x, es el valor

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx=\int_1^2\left(x-\frac{29}{10}\right)^2\frac{3}{5}dx+\int_4^6\left(x-\frac{29}{10}\right)^2\frac{1}{5}dx=\boxed{\frac{937}{300}}.$$

$$P(X\le 3)=F(3)=\boxed{\frac{3}{5}}$$

$$P(2<X<5)=F(5)-F(2)==\boxed{\frac{3}{5}}.$$

45.- La remuneración semanal de los empleados comerciales de un concesionario de automóviles de lujo está compuesta por un sueldo fijo de 1000 € y una comisión de 200 € por cada coche vendido. A estas cantidades debe descontarse un 10% en concepto de retención de impuestos y otros gastos. La probabilidad de que un empleado venda un número de coches X en una semana es la siguiente:

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	0.1	0.3	0.3	0.2	0.05	0.05

a) ¿Cuál será la remuneración semanal neta media por empleado y su desviación típica?
b) Obtenga la función de distribución de la remuneración semanal neta por empleado.
c) Si la empresa tiene 7 vendedores, ¿a cuánto debería ascender la comisión por cada coche vendido si se pretende que la empresa destine a pagos para los empleados una cantidad media semanal de 10000 €.

Solución:

x_i	$P(X=x_i)$	F(x)	$x_iP(X=x_i)$	$x^2_i P(X=x_i)$
0	0,1	0,1	0	0
1	0,3	0,4	0,3	0,3
2	0,3	0,7	0,6	1,2
3	0,2	0,9	0,6	1,8
4	0,05	0,95	0,2	0,8
5	0,05	1	0,25	1,25
Sumas	1		1,95	5,35

a)

$$\mu = E[X] = \sum_{i=0}^{5} x_i P(X = x_i) = \boxed{1,95}$$

$$\sigma^2 = V[X] = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(X = x_i) = \sum_i x_i^2 P(X = x_i) - \mu^2 = 5,35 - 1,95^2 = 1,5475$$

Y=" remuneración semanal"= 900+180X

$$E[Y] = E[900 + 180X] = 900 + 180E[X] = 900 + 180 \cdot 1,95 = 1251€$$

$$V[Y] = V[900 + 180X] = 180^2 v[X] = 180^2 \cdot 1,5475 = 50139 \Rightarrow \sigma = \sqrt{V[Y]} = 223,917395$$

b)

x_i	y_i=900+180x_i	F(y)
0	900	**0,1**
1	1080	**0,4**
2	1260	**0,7**
3	1440	**0,9**
4	1620	**0,95**
5	1800	**1**

$$F(y)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad y<900 \\ 0{,}1 & \text{si} \quad 900\le y<1080 \\ 0{,}4 & \text{si} \quad 1080\le y<1260 \\ 0{,}7 & \text{si} \quad 1260\le y<1440 \\ 0{,}9 & \text{si} \quad 1440\le y<1620 \\ 0{,}95 & \text{si} \quad 1620\le y<1800 \\ 1 & \text{si} \quad 1800\le y \end{cases}$$

c)

Si consideremos k la comisión para cada uno de los 7 vendedores

Z= ”remuneración semanal”= (1000+kX)0,9

$$E[Z]=E[0,9(1000+kX)]=0,9(1000+kE[X])=0,9(1000+1,95k)=\frac{10000}{7}\,€$$

k = 301,18€

46.- Sea $f(x)=\begin{cases} 1/2 & x\in[1,2] \\ x-4 & x\in[4,5] \\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$ **. a) ¿Es f(x) una función de densidad? ¿qué tipo de v.a.? b) Calcular la función de distribución, suponiendo que f(x) es una función de densidad. c) Esperanza matemática. d) Varianza. e) P(1<X<3), P(1.5<X≤5), P(X>3), P(X=4).**

Solución:

$$f(x)=\begin{cases} 1/2 & x\in[1,2] \\ x-4 & x\in[4,5] \\ 0 & \text{en el resto}\end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si} & x<1 \\ \frac{1}{2} & \text{si} & 1\le x\le 2 \\ 0 & \text{si} & 2<x<4 \\ x-4 & \text{si} & 4\le x\le 5 \\ 0 & \text{si} & 5<x \end{cases}$$

a) Es una función de densidad de una **variable aleatoria continua**, puesto que cumple las dos condiciones:

1) $f(x)\ge 0, \quad \forall x\in R$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{2}\,dx + \int_4^5 (x-4)\,dx = 1$

b) Obtenemos la función de distribución por trozos.

Si $x<1, \quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$

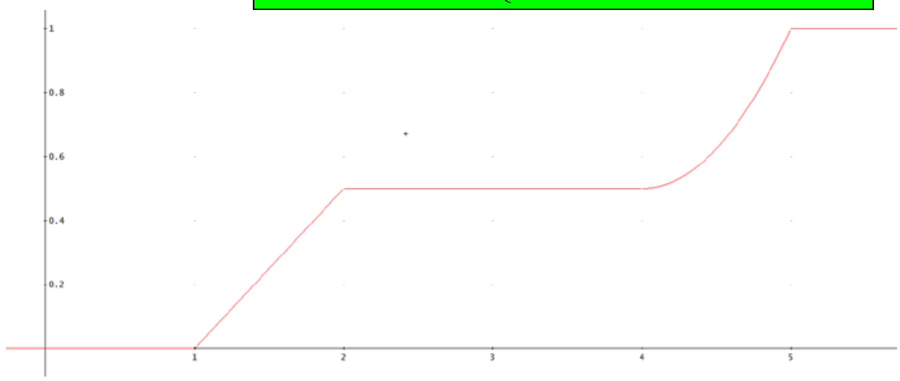
Si $1\le x<2, \quad F(x)=\int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_1^x 0,5dt = F(1)+\int_1^x 0,5dt = 0,5(x-1)$

Si $2\le x<4, \quad F(x)=F(2)+\int_2^x 0dt = 0,5$

Si $4\le x<5, \quad F(x)=F(4)+\int_4^x (t-4)dt = 0,5+\frac{x^2}{2}-4x+8=\frac{x^2}{2}-4x+\frac{17}{2}$

Si $5\le x, \quad F(x)=1$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si} & x<1 \\ 0,5(x-1) & \text{si} & 1\le x\le 2 \\ 0,5 & \text{si} & 2<x<4 \\ \frac{x^2}{2}-4x+\frac{17}{2} & \text{si} & 4\le x\le 5 \\ 1 & \text{si} & 5\le x \end{cases}$$



c) Esperanza Matemática

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{1}^{2} x \cdot 0,5 \cdot dx + \int_{4}^{5} x \cdot (x-4)dx = \boxed{\frac{37}{12}}.$$

d) Varianza

$$\sigma^2 = V[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{1}^{2} \left(x - \frac{37}{12}\right)^2 \cdot 0,5 \cdot dx + \int_{4}^{5} \left(x - \frac{37}{12}\right)^2 (x-4)dx = \boxed{\frac{371}{144}}.$$

e)

$$P(1 < X < 3) = \int_{1}^{3} f(x)dx = F(3) - F(1) = 0,5 - 0 = \boxed{0,5}$$

$$P(1,5 < X < 5) = \int_{1,5}^{5} f(x)dx = F(5) - F(1,5) = 1 - 0,25 = \boxed{0,75}$$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \int_{-\infty}^{3} f(x)dx = 1 - F(3) = 1 - 0,5 = \boxed{0,5}$$

$$P(X = 4) = \int_{4}^{4} f(x)dx = F(4) - F(4) = \boxed{0}$$

Función de densidad

Una variable aleatoria ξ con función de distribución $F(x)$, se dice que es una variable aleatoria **continua** si $F(x)$ es una función absolutamente continua (o simplemente continua) de x cuya derivada $F'(x) = f(x)$ existe y es continua salvo, como mucho, en un número finito de puntos. La función $f(x)$ definida, se denomina **función de densidad de** ξ.

Media aritmética

La **media** de una variable estadistica es la suma ponderada de los valores posibles por sus respectivas frecuencias: $\overline{X} = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{N} x_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i$

x_i = valores que toma la variable o marca de clase.

f_i = frecuencias relativas.

n_i = frecuencias absolutas.

N = número total de la población o muestra.

La media o esperanza matemática de una variable aleatoria es: $m_1 = E[\xi] = \overline{x} = \mu$

$E[\xi] = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X_i)$ para una variable discreta y finita.

$E[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x).dx$ cuando la variable ξ es continua con función de densidad f(x).

Varianza

Varianza o momento de segundo orden respecto de la media en una variable estadística es la media de los cuadrados de las desviaciones a la media:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i - \overline{X})^2 n_i}{N}$$

x_i = valores de la variable o marcas de clase.

La **varianza** de una variable aleatoria es el momento de segundo orden respecto a la media: $\mu_2 = \sigma^2 = E\left[\left(x - \overline{x}\right)^2\right]$

$V[\xi] = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2 P(X_i)$ para una variable discreta y finita.

$V[\xi] = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \overline{x}\right)^2 f(x).dx$ cuando la variable ξ es continua con función de densidad f(x).

Distribución de probabilidad asociada a una variable aleatoria discreta

Es la tabla formada por los valores que toma la variable junto con sus probabilidades.

Sea ξ una variable aleatoria discreta. A cada valor x_i le podemos asociar un número $P(x_i) = P(\xi = x_i) \in [0,1]$, hemos definido asi una función P(x) sobre la variable aleatoria ξ. Si en el espacio muestral los sucesos que corresponden a los diferentes valores de x_i constituyen una partición de **E**, se verifica que $\sum P(x_i) = 1$.

En estas condiciones $P(x_i)$ se llama **distribución de probabilidad de ξ**

Cuantiles

Cuantil de orden α es un valor de la variable estadística que deja a su izquierda una parte α de la población y a la derecha una parte $1-\alpha$ de la población.
El Cuantil de orden α $(0 \leq \alpha \leq 1)$ es $x_\alpha \mid F(x_\alpha)=\alpha$.

Los más utilizados son los **cuartiles Q_1, Q_2 y Q_3** que dejan a su izquierda 1/4, 1/2 y 3/4 de la población respectivamente. Obsérvese que $Q_2 = M$ (Mediana).

Los **deciles** D_1, D_2, ..., D_9 dejan a su izquierda 1/10, 2/10, ..., 9/10 de la población respectivamente.

Los **percentiles** P_1, P_2, ..., P_{99} dejan a su izquierda 1/100, 2/100, ... 99/100 de la población respectivamente.

El cálculo de los mismos es similar al cálculo de la mediana.

Variable aleatoria

Sea (**E**, **B**, **P**) un espacio probabilistico asociado a un experimento aleatorio. Una **variable aleatoria** es una función definida sobre el espacio muestral **E** que toma valores en el cuerpo de los números reales R, es decir,

$$\xi: \mathbf{E} \to R$$

$$A \to \xi(A)$$

Una variable aleatoria ξ se dice que es **discreta** cuando toma un número finito o infinito numerable de valores reales, es decir, cuando es un conjunto de puntos aislados.

Hay variables aleatorias que no toman valores aislados, sino que pueden tomar cualquier valor de un intervalo real. A las variables de este tipo las definiremos como variables aleatorias **continuas**.

Mediana

Mediana de un triángulo es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

Mediana de un triángulo esférico es el arco de circunferencia máxima que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

En Estadística:
La mediana es el valor de la variable que ocupa el lugar central, es decir, que la mitad de la población es menor y la otra mitad es mayor que él.

La **mediana** es un valor **M** tal que F(M)=1/2, se define así como raíz de una ecuación.

- Para **variables aleatorias** F es la función de distribución

Si la variable aleatoria es discreta puede ocurrir que ningún valor posible x_i corresponde a $F(x_i)=1/2$ se conviene en considerar como **mediana** el valor x_i tal que: $F(x_{i-1}) < \frac{1}{2} < F(x_i)$

- Para las **variables estadísticas** se ordenan en forma creciente, dejando igual número de observaciones inferiores que superiores a ella.

a) En las distribuciones sin agrupar, en general, no tiene solución, puesto que la función F(x) varía por saltos:

1) Si ningún valor posible x_i corresponde a $F(x_i)=1/2$ se conviene en considerar como mediana el valor x_i tal que: $F(x_{i-1}) < \frac{1}{2} < F(x_i)$

2) Si uno de los valores x_i corresponde a $F(x_i) = \frac{1}{2}$ (lo que ocurre solamente si el total N de la población es par) la mediana está indeterminada entre los valores x_i y x_{i+1}. El intervalo (x_i, x_{i+1}) se denomina **mediano**, o bien llamamos mediana al punto medio de dicho intervalo.

b) En las agrupadas pueden darse dos casos:

INTERVALO	x_i	n_i	N_i
e_0 -- e_1	x_1	n_1	N_1
e_1 -- e_2	x_2	n_2	N_2
....	...	...	....
$e_{j-2} - e_{j-1}$	x_{j-1}	N_{j-1}	N_{j-1}
e_{j-1} -- e_j	x_j	n_j	N_j
....	...	...	...
e_{k-1} -- e_k	x_k	n_k	**N**

1) $\frac{N}{2}$ coincide con uno de los recogidos en la columna de frecuencias acumuladas, por ejemplo N_j, en este caso la mediana es e_j.

2) $\frac{N}{2}$ está entre N_{j-1} y N_j. La mediana se encontrará en el intervalo (e_{j-1}, e_j). La mediana será $M = e_{j-1} + h$ y por interpolación lineal se obtiene h.

Amplitud del intervalo: $a = e_j - e_{j-1}$

$$\left.\begin{array}{l} n_j \leftrightarrow a \\ \dfrac{N}{2} - N_{j-1} \leftrightarrow h \end{array}\right. \Rightarrow \; h = \frac{(\frac{N}{2} - N_{j-1})a}{n_j} \Rightarrow M = e_{j-1} + \frac{(\frac{N}{2} - N_{j-1})a}{n_j}$$

Moda

Moda es el valor de la variable que se presenta con más frecuencia dentro de la distribución.

En las distribuciones sin agrupar se observa directamente el valor de mayor frecuencia.

En las agrupadas, definimos la clase **modal** como la que tiene mayor frecuencia.

NOTA: Algunas distribuciones pueden presentar varias modas. Cada moda corresponde a un máximo absoluto del diagrama de barras o histograma.