1 En una casa hay tres llaveros; el primero A con cinco llaves, el segundo B con siete y el tercero C con ocho, de las que sólo una de cada llavero abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero y, de él una llave para abrir el trastero. Se pide:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que se acierte con la llave que abre la puerta?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el llavero escogido sea el tercero y la llave no abra?

(c) Si la llave escogida es la correcta, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al primer llavero A?

Solución: Se consideran los sucesos

- $D = \{$ La llave abre $\}$
- $A = \{$ Se elige el llavero A $\}$
- $B = \{$ Se elige el llavero B $\}$
- $C = \{$ Se elige el llavero C $\}$

Tenemos que

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(C) = 1/3, \mathrm{P}(D \mid A) = \frac{1}{5}, \mathrm{P}(D \mid B) = \frac{1}{7}, \mathrm{P}(D \mid C) = \frac{1}{8}$$

(a) Aplicando el teorema de la probabilidad total
$\mathrm{P}(D) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} = 0'1559$

(b) $\mathrm{P}\left(C \cap \overline{D}\right) = \mathrm{P}(C)\,\mathrm{P}\left(\overline{D} \mid C\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8} = 0'2917$

(c) $\mathrm{P}(A \mid D) = \dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}} = 0'4275$

2 Las marcas obtenidas por un lanzador de peso sigue una variable aleatoria con densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{9}, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

donde las distancias, X, se miden en decámetros.

(a) *(1 punto)* Calcula la probabilidad condicionada de que la marca sea superior a 25 metros sabiendo que es superior a 20 metros.

(b) *(1 punto)* Calcula la distancia media en metros.

Solución:

(a) $\mathrm{P}(X > 2'5 \mid X > 2) = \dfrac{\mathrm{P}(X > 2'5)}{\mathrm{P}(X > 2)}$. Efectuando los cálculos

$$\int_{2'5}^{3} \frac{x^2}{9}\, dx = \left[\frac{x^3}{27}\right]_{2'5}^{3} = 0'4213, \qquad \int_{2}^{3} \frac{x^2}{9}\, dx = \left[\frac{x^3}{27}\right]_{2}^{3} = 0'7037.$$

La solución es, por tanto, $\dfrac{0'4213}{0'7037} = 0'5987$.

(b) $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\int_0^3 x \cdot \frac{x^2}{9}\, dx = \left[\frac{x^4}{36}\right]_0^3 = 2'25$. La media es $22'5$ metros.

3 Se dispone de una caja con 3 piezas aptas y 2 defectuosas. Se extraen aleatoriamente 2 piezas sin reemplazamiento, y se definen las variables aleatorias:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{si la } 1^a \text{ pieza es apta} \\ 0, & \text{si la } 1^a \text{ pieza no es apta} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1, & \text{si la } 2^a \text{ pieza es apta} \\ 0, & \text{si la } 2^a \text{ pieza no es apta} \end{cases}$$

(a) *(1 punto)* Hallar la función de cuantía conjunta y las marginales

(b) *(1 punto)* Hallar la covarianza $\mathrm{Cov}(X, Y)$

Solución:

(a) La función de cuantía es

Y			
1	6/20	6/20	
0	2/20	6/20	
	0	1	X

Las marginales:

X	0	1
f_1	2/5	3/5

Y	0	1
f_2	2/5	3/5

(b) Haciendo cálculos

- $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 3/5$
- $\mathrm{E}(XY) = 6/20 = 3/10$

Por tanto, $\mathrm{Cov}\,(X,Y) = 3/10 - 3/5 \cdot 3/5 = -3/50$

4 Una compañía aérea observa que el $10\,\%$ de las plazas reservadas no se cubren, por ello decide aceptar reservas en un $5\,\%$ más de las disponibles. ¿Cuál es la probabilidad de que en un avión de 500 plazas algún pasajero que ha hecho la reserva se quede sin plaza? *(Supóngase que todas las plazas reservadas han sido vendidas)*

Solución: Se han reservado $500 + 25 = 525$ plazas. Llamando X al número de pasajeros que acuden al vuelo, tenemos que $X \sim B(525, 0'9)$ y se tiene que calcular $\mathrm{P}\,(X > 500)$. Aproximando por la distribución normal, se tiene que

$$X \approx N(472'5, 6'87).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\,(X > 500) &= \mathrm{P}\left(Z > \frac{500 - 472'5}{6'87}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(Z > 4'002\right) \\
&= 1 - 0'999968 \\
&= 0'000032.
\end{aligned}$$

1 Se celebra un casting televisivo en dos sedes, Madrid y Sevilla. En Madrid se seleccionan 20 chicos y 30 chicas, que reunimos en una sala. Allí se mezclan al azar y se colocan en fila india. Lo mismo hacemos en Sevilla, donde se han seleccionado 30 chicos y 50 chicas.

Lanzamos una moneda (equilibrada): si sale cara, llamamos a Sevilla y escogemos al candidato que ocupe la primera posición de la lista. Si sale cruz, hacemos lo mismo, pero en Madrid.

(a) *(0'5 puntos)* ¿Cuál es la probabilidad de que el candidato elegido sea un chico?

(b) *(0'5 puntos)* Juan González es uno de los seleccionados en Sevilla ¿Cuál es la probabilidad de que sea el candidato finalmente elegido?

(c) *(0'5 puntos)* Se ha efectuado el proceso de elección del candidato final, que resulta ser una chica. ¿Con qué probabilidad será madrileña?

(d) *(1 punto)* Ahora cambiamos el procedimiento: reunimos a todos los seleccionados en un hotel de Barcelona, los mezclamos y colocamos en fila india; y elegimos al candidato que ocupe la primera posición. La probabilidad de que Juan González haya sido el elegido ¿coincide con la del apartado (b)? Y la probabilidad de que el candidato sea chico ¿coincide con la del apartado (a)? Medita sobre el asunto

Solución: Llamamos

$$\begin{aligned} M &= \{\text{Se elige alguien de Madrid}\} \\ S &= \{\text{Se elige alguien de Sevilla}\} \\ C_o &= \{\text{Se elige un chico}\} \\ C_a &= \{\text{Se elige una chica}\} \\ J &= \{\text{Es elegido Juan González}\} \end{aligned}$$

Se tienen las probabilidades

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(M) = 1/2 \\ &\mathrm{P}(S) = 1/2 \\ &\mathrm{P}(C_o \mid M) = 2/5 \\ &\mathrm{P}(C_o \mid S) = 3/8 \\ &\mathrm{P}(C_a \mid M) = 3/5 \\ &\mathrm{P}(C_a \mid S) = 5/8 \end{aligned}$$

(a) $\mathrm{P}(C_o) = \mathrm{P}(M)\,\mathrm{P}(C_o \mid M) + \mathrm{P}(S)\,\mathrm{P}(C_o \mid S) = 1/2 \cdot 2/5 + 1/2 \cdot 3/8 = 31/80 = 0'3875$

(b) $\mathrm{P}(J) = \mathrm{P}(M)\,\mathrm{P}(J \mid M) + \mathrm{P}(S)\,\mathrm{P}(J \mid S) = 1/2 \cdot 0 + 1/2 \cdot 1/80 = 1/160 = 0'00625$

(c)

$$\mathrm{P}(M \mid C_a) = \frac{\mathrm{P}(M \cap C_a)}{\mathrm{P}(C_a)} = \frac{\mathrm{P}(M)\,\mathrm{P}(C_a \mid M)}{\mathrm{P}(C_a)} = \frac{1/2 \cdot 3/5}{1 - 0'3875} = 0'4898$$

(d) Al estar todos los candidatos juntos, las probabilidades cambian; en efecto

(1) $\mathrm{P}(C_o) = 50/130 = 0'3846$

(2) $\mathrm{P}(J) = 1/130 = 0'007692$

El experimento es distinto, el espacio muestral otro y, en consecuencia, distintas las probabilidades.

2 Sea X una variable aleatoria discreta que denota el número de averías que un operario resuelve en una jornada de trabajo, con función de cuantía dada por

$$f(x) = \frac{k}{x+1}, \quad x \in \{0, 1, 2, 3\}$$

(a) *(0'75 puntos)* Calcular $\mathrm{P}(X > 1)$ y $\mathrm{P}(X > 0 \mid X < 3)$.

(b) *(0'75 puntos)* Calcula el número medio de averías que soluciona al día.

(c) *(1 punto)* Si su sueldo es de 60 euros por jornada laboral y si le pagan un plus de 20 euros por cada avería solucionada que exceda de una al día ¿cuál es el sueldo diario medio?

Solución: Tenemos que hallar el valor de k; se obtiene sumando las probabilidades e igualando a 1

$$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1 \quad \to \quad \frac{k}{1} + \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} = 1$$
$$\frac{25k}{12} = 1 \quad \to \quad k = \frac{12}{25}.$$

La función de cuantía es, por tanto

X	0	1	2	3
$f(x)$	$12/25$	$6/25$	$4/25$	$3/25$

(a)

$$\mathrm{P}(X > 1) = \frac{4}{25} + \frac{3}{25} = \frac{7}{25}$$
$$\mathrm{P}(X > 0 \mid X < 3) = \frac{\mathrm{P}(0 < X < 3)}{\mathrm{P}(X < 3)} = \frac{6/25 + 4/25}{22/25} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11}.$$

(b)

$$\mathrm{E}(X) = 0 \cdot \frac{12}{25} + 1 \cdot \frac{6}{25} + 2 \cdot \frac{4}{25} + 3 \cdot \frac{3}{25} = \frac{23}{25}.$$

(c) La variable sueldo S tiene los valores

$$S = \begin{cases} 60 & \text{si } X \in \{0,1\} \\ 80 & \text{si } X = 2 \\ 100 & \text{si } X = 3 \end{cases}$$

En consecuencia su cuantía es

S	60	80	100
f_S	18/25	4/25	3/25

Luego $\mathrm{E}(S) = 60 \cdot \frac{18}{25} + 80 \cdot \frac{4}{25} + 100 \cdot \frac{3}{25} = 68.$

3 Se tiene la siguiente función de cuantía de una v.a. (X, Y)

Y					
3	0	3/8	3/8	0	
1	1/8	0	0	1/8	
	0	1	2	3	X

Hallad

(a) *(1 punto)* La covarianza $\mathrm{Cov}(X, Y)$

(b) *(1 punto)* $\mathrm{E}(X \mid Y = 1)$

(c) *(0'5 puntos)* ¿Son independientes? Razónese la respuesta

Solución:

(a) Se debe calcular $\mathrm{E}(X), \mathrm{E}(Y)$ y $\mathrm{E}(XY)$. Las distribuciones marginales son

X	0	1	2	3
f_1	1/8	3/8	3/8	1/8

Y	1	3
f_2	2/8	6/8

Calculando..

- $\mathrm{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$
- $\mathrm{E}(Y) = 1 \cdot \frac{2}{8} + 3 \cdot \frac{6}{8} = \frac{5}{2}$
- $\mathrm{E}(XY) = 1 \cdot 3 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{15}{4}$

Por tanto $\mathrm{Cov}\,(X,Y) = \frac{15}{4} - \frac{3}{2}\frac{5}{2} = 0$

(b) La distribución condicional es

$(X\|Y=1)$	0	3
$g_1(x\|1)$	$1/2$	$1/2$

de donde $\mathrm{E}\,(X \mid Y=1) = \frac{3}{2}$

(c) Como no coinciden las cuantías $f_1(x)$ y $g_1(x|1)$, NO son independientes. Otra prueba: $f(0,1) = \frac{1}{8}$ mientras que $f_1(0)\cdot f_2(1) = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{8} = \frac{1}{32}$

4 *(2'5 puntos)* Un plaguicida se consigue con la mezcla de dos sustancias con concentraciones de insecticida que siguen las siguientes concentraciones normales

$$X_1 \sim N(200, 25), \qquad X_2 \sim N(20, 5)$$

La mezcla se hace utilizando el doble de X_2 que de X_1. Teniendo en cuenta que al fumigar con el plaguicida se produce una pérdida de parte de insecticida producida por diversas causas, cuya distribución X_3 es normal de media 50 y desviación 10, la concentración final de insecticida X queda de la siguiente manera

$$X = X_1 + 2X_2 - \frac{3}{2}X_3$$

¿Cuál es la probabilidad de que la concentración final de insecticida esté entre 150 y 175?

Solución: La distribución normal resultante es la combinación de las tres distribuciones normales: $X = X_1 + 2X_2 - \frac{3}{2}X_3$, por lo que lo único que hay que hacer es calcular los parámetros de la distribución resultante y la probabilidad pedida $P(150 \le X \le 175)$.

Primero se calcula la esperanza: $\mathrm{E}\,(X) = \mathrm{E}\,(X_1) + 2\cdot\mathrm{E}\,(X_2) - \frac{3}{2}\cdot\mathrm{E}\,(X_3)$. Del enunciado sabemos que $\mathrm{E}\,(X_1) = 200$, $\mathrm{E}\,(X_2) = 20$ y $\mathrm{E}\,(X_3) = 50$, por lo que:

$$\mathrm{E}\,(X) = 200 + 2\cdot 20 - \frac{3}{2}\cdot 50 = 200 + 40 - 75 = 165.$$

La varianza de la distribución resultante se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\,(X) &= \mathrm{Var}\,(X_1) + 2^2\cdot\mathrm{Var}\,(X_2) + \left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\mathrm{Var}\,(X_3) \\
&= 25^2 + 2^2\cdot 5^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot 10^2 \\
&= 625 + 100 + 225 = 950.
\end{aligned}$$

Como necesitamos la desviación típica: $\sigma_X = \sqrt{950} \simeq 30.82$. Así pues,

$$X \sim N(165, 30.82).$$

Normalizando:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(150 \leq X \leq 175\right) &= \mathrm{P}\left(\frac{150-165}{30.82} \leq Z \leq \frac{175-165}{30.82}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(-0.49 \leq Z \leq 0.33\right) \\
&= \Phi(0.33) - \Phi(-0.49) \\
&= 0.6293 + 0.6879 - 1 = 0.3172.
\end{aligned}$$

1 Una compañía de autobuses dispone de tres líneas en una ciudad, de forma que el 45% de los autobuses cubre la línea 1, el 25% cubre la línea 2 y el 30% la línea 3. Se sabe que la probabilidad de que diariamente un autobús se averíe es del 2%, 3% y 1% respectivamente, para cada línea.

(a) (0'75 puntos) Calcular la probabilidad de que en un día un autobús sufra una avería

(b) (0'25 puntos) Calcular la probabilidad de que en un día un autobús no sufra una avería

(c) (1'5 puntos) ¿De qué línea de transporte es más probable que un autobús sufra una avería?

2 De 10 teléfonos, de los que se sabe hay 3 defectuosos, adquiero aleatoriamente 3 de ellos. Sea X la variable que mide el número de defectuosos adquiridos.

(a) (1'5 puntos) Hállese la función de cuantía de X

(b) (1 punto) Media y varianza de X

3 Sea X el número de cámaras digitales Canon vendidas durante una semana particular por una tienda. La función de cuantía de X es

X	0	1	2	3	4
f	0'1	0'2	0'3	0'25	0'15

El número Y de clientes que compran estas cámaras con un seguro es

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{si } X = 0, 1, 2 \\ X - 2, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) (1 punto) Hállese la función de cuantía de (X, Y)

(b) (0'5 puntos) ¿Son independientes?

(c) (1 punto) Calcúlese la cuantía condicional $g_1(x|Y = 1)$

4 (2'5 puntos) En un examen tipo test de 200 preguntas de elección múltiple, cada pregunta tiene una respuesta correcta y una incorrecta. Se aprueba si se contesta a más de 110 respuestas correctas. Suponiendo que se contesta al azar, calcular la probabilidad de aprobar el examen.

1 *(2'5 puntos)* Se dispone de 7 huchas, cada una con 10 billetes de 10 euros, 6 billetes de 20 euros, 4 billetes de 50 euros y 1 billete de 100 euros. Nos dan 7 billetes, extraidos aleatoriamente uno de cada hucha. Hallad el valor medio de la cantidad de euros que recibimos.

2 Sea la variable (X,Y) con función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} ax^2, & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

Hallad

(a) *(0'5 puntos)* La constante a

(b) *(1 punto)* Las función de densidad marginal $f_1(x)$

(c) *(1 punto)* $\mathrm{P}(X>Y)$

3 Una fábrica dispone de 2 máquinas para elaborar determinadas piezas. La máquina A produce los 3/5 de las piezas y la máquina B los 2/5 restantes, envasándose las piezas producidas (sin mezclar) en lotes de 2000. La longitud de las piezas (en milímetros) producidas por la máquina A sigue una distribución $N(65,5)$ y las producidas por la máquina B es $N(66,3)$. Se desean producir piezas que no superen los 70 milímetros por lo que cada lote sufre un control consistente en revisar 100 piezas y rechazarlo si aparecen más de 10 piezas con longitud superior a la especificada.

(a) *(2'5 puntos)* Calcular la probabilidad de rechazar un lote   P(R)

(b) *(1'5 puntos)* Calcular la probabilidad de que un lote rechazado haya sido fabricado por la máquina A   P(R|A)

4 *(1 punto)* Si $X \sim N(\mu,\sigma)$ calcula $\mathrm{P}(|X-\mu|<\sigma)$

ESTADÍSTICA .... enero 2016

1. (2'5 puntos). Un grupo de seis estudiantes está formado por 2 chicas y 4 chicos. Uno de ellos ha aprobado Estadística y acompaña a sus amigos a la revisión del examen con el objetivo de "arañar" lo que sea.

a) Calcular la probabilidad de que el primero de los amigos en entrar a revisión sea una de las chicas
b) Si se produce el hecho de que el que entra el primero a revisar su examen resulta ser chica, calcular la probabilidad de que la otra chica sea la aprobada

Solución:

Sean los sucesos
A = {la aprobada es una chica}
B = {el aprobado es un chico}

P(A) =2/ 6 y P(B) = 4 / 6

a) Definimos el suceso C = {entra primero a revisión una chica}

P(C) = P (C / A) x P(A) + P (C / B) x P(B)

Donde P(C / A) = probabilidad de que entre a revisión una chica si la aprobada es chica = 1/5. (Solo una chica suspendida de cinco amigos).

Donde P(C / B) = probabilidad de que entre a revisión una chica si el aprobado es chico = 2/5. (Dos chicas suspendidas de cinco amigos).

Por tanto: P(C) = P (C / A) x P(A) + P (C / B) x P(B) = 1 /5 x 2/6 + 2 /5 x 4/6 =1/3

b) Aplicando el teorema de Bayes

P(A/C)= P(C/A) P(A) / P(C) = 1 /5 x 2/6 / 1/3 = 6/30 = 1/5

2. (2'5 puntos). Una empresa se dedica a la fabricación de placas. Cada placa está compuesta por una subpieza metálica tipo A, cuya longitud se distribuye normal de media 25 cm y desviación típica 2 cm, que se suelda sin solapamiento a otra subpieza tipo B con longitud distribuida normal de media 20 cm y desviación típica 2 cm. Ambas subpiezas se fabrican independientemente. La soldadura supone la pérdida de material con longitud distribuida normal de media 1 cm y desviación típica 1 cm, independiente de las anteriores. La placa es correcta si su longitud es de 44 ± 2 cm. Se pide:

a) Probabilidad de fabricar placas correctas
b) Un envío está compuesto por 5 placas escogidas al azar de entre las fabricadas. Un envío es correcto si al menos cuatro placas tienen las medidas adecuadas. Calcular la probabilidad de realizar envíos de placas correctos

Solución:

a) Definimos las variables

LA= longitud subpieza tipo A es N(25,2)

LB= longitud subpieza tipo B es N(20,2)

LP= longitud perdida de material es N(1,1)

Las 3 variables son independientes.

La longitud total de la placa será:

LT= LA+LB-LP

E(LT) = E(LA+LB-LP)= 25+20-1= 44

Var (LT) = Var(LA+LB-LP) = 4 + 4 +1=9

Con lo que LT es N(44, 3)

La placa es correcta si su longitud es de 44 ± 2 cm.

$P(42<LT<46)= P(42-44/3<Z<46-44/3)=P(-2/3<Z<2/3)= \Phi (2/3)- \Phi (-2/3)= 2 \Phi (2/3)-1=$

$2 \Phi (0.67) -1= (2x0.7486)-1=0.4972=0.5$

b)

X = número de placas correctas de 5
B (5,0.5)

P(envío correcto) = $P(X\geq 4) = 1 – P(X<4) = 1- P(X\leq 3) =1 – 0.8125 = 0.1875$

3. (2'5 puntos). Una empresa tiene unos gastos de 1000 euros a la semana si la proporción de artículos defectuosos que fabrica supera el 10%, mientras que dichos gastos desaparecen si el porcentaje de defectos es menor. Sabiendo que los ingresos fijos por las ventas semanales son de 13000 euros, y conociendo, además, que el porcentaje de artículos defectuosos es una variable aleatoria X definida entre 0 y 20 con función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{200}x \;\; si\; 0 \leq x \leq 20$$

Calcular el beneficio esperado semanal.

Solución:

Beneficio=Ingreso-Gasto

B = I-G

E[B] = E[I-G]= I –E[G] = 13000- E[G]

Los Ingresos son fijos =13000 euros

El Gasto es una variable aleatoria definida como:

$$G = \begin{cases} 1000 & si\ x > 10 \\ 0 & si\ x < 10 \end{cases}$$

Siendo X= porcentaje semanal de artículos defectuosos

E[G]=0 P(X<10) + 1000 P(X>10)

$$E(G) = 0\int_0^{10} \frac{1}{200} xdx + 1000\int_{10}^{20} \frac{1}{200} xdx = \frac{1000}{200}\int_{10}^{20} xdx = \frac{10}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{10}^{20} = 750$$

E[B] = E[I-G]= I –E[G] = 13000- E[G] =13000-750=12250 euros

4. (2'5 puntos). Se lanza una moneda 3 veces y se definen las siguientes variables:

$$X = \begin{cases} 0 & \text{Si sale cara en la primera tirada} \\ 1 & \text{Si sale cruz en la primera tirada} \end{cases}$$

Y = número de caras en las tres tiradas

Calcular:

a) La función de cuantía (probabilidad) conjunta de (*X*, *Y*)

b) Cov (*X*, *Y*)

Solución: Se tienen las funciones de cuantía

X	0	1
f_1	1/2	1/2

Y	0	1	2	3
f_2	1/8	3/8	3/8	1/8

Y \ X	0	1
3	1/8	0
2	2/8	1/8
1	1/8	2/8
0	0	1/8

De las tablas se calcula la covarianza

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = 1\cdot 1\cdot \frac{2}{8} + 1\cdot 2\cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = -\frac{1}{4}$$

1 Supóngase que el 30 % de las botellas fabricadas en una planta son defectuosas. Si una botella es defectuosa, la probabilidad de que un controlador la detecte y la saque de la cadena de producción es $0'9$. Si una botella no es defectuosa, la probabilidad de que el controlador piense que es defectuosa y la saque de la cadena de producción es $0'2$.

(a) Si una botella se saca de la cadena de producción, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?

(b) Si un cliente compra una botella que no ha sido sacada de la cadena de producción, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?

Solución: Sean los sucesos $D = \{$ la botella es defectuosa $\}$ y $S = \{$ el controlador la saca de la cadena de producción $\}$; se tienen las probabilidades $\mathrm{P}(D) = 0'3$, $\mathrm{P}(S \mid D) = 0'9$ y $\mathrm{P}\left(S \mid \overline{D}\right) = 0'2$

(a) aplicando el teorema de Bayes

$$\mathrm{P}(D \mid S) = \frac{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}(S \mid D)}{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}(S \mid D) + \mathrm{P}\left(\overline{D}\right) \cdot \mathrm{P}\left(S \mid \overline{D}\right)} = \frac{0'3 \cdot 0'9}{0'3 \cdot 0'9 + 0'7 \cdot 0'2} = \frac{27}{41}$$

(b) de la misma forma

$$\mathrm{P}\left(D \mid \overline{S}\right) = \frac{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{S} \mid D\right)}{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{S} \mid D\right) + \mathrm{P}\left(\overline{D}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{S} \mid \overline{D}\right)} = \frac{0'3 \cdot 0'1}{0'3 \cdot 0'1 + 0'7 \cdot 0'8} = \frac{3}{59}$$

2 Se lanza una moneda tres (3) veces y, se definen las siguientes variables:

$$\begin{aligned} X &= \begin{cases} 0 & \text{Si sale cara en la primera tirada} \\ 1 & \text{Si sale cruz en la primera tirada} \end{cases} \\ Y &= \text{número de caras en las tres tiradas} \end{aligned}$$

Determínese:

(a) Las funciones de cuantía (probabilidad) de X e Y.

(b) La función de cuantía (probabilidad) conjunta de (X, Y).

(c) ¿Son independientes?

(d) $\operatorname{Cov}(X, Y)$

Solución:

X	0	1
f_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y	0	1	2	3
f_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y		
3	$\frac{1}{8}$	0
2	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
0	0	$\frac{1}{8}$
	0	1 X

No son independientes pues, por ejemplo $f(0,0) = 0$ mientras que $f_1(0) \cdot f_2(0) = \dfrac{1}{16}$. De las tablas se calcula la covarianza

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \operatorname{E}(XY) - \operatorname{E}(X)\operatorname{E}(Y) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{8} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}$$

3 Se observó durante un largo periodo que la cantidad semanal gastada en el mantenimiento y reparaciones en cierta fábrica tiene aproximadamente una distribución *normal* con una media de 400 euros y una desviación de 20 euros.

(a) Si el presupuesto para la próxima semana es de 450 euros, ¿cuál es la probabilidad de que los costos reales sean mayores que la cantidad presupuestada?

(b) ¿Cuál tendría que ser el presupuesto semanal para que esta cantidad solamente se rebasara con probabilidad de $0'1$?

Solución: Llamando X a la cantidad gastada y tipificando $Z = \dfrac{X - 400}{20}$

(a)

$$\mathrm{P}\left(X > 450\right) = \mathrm{P}\left(Z > 2'5\right) = 1 - 0'993790 = 0'006210$$

(b) Sea a la cantidad por lo que $\mathrm{P}\left(X > a\right) = 0'1 \rightarrow \mathrm{P}\left(Z > \dfrac{a-400}{20}\right) = 0'1$ de donde

$$\Phi\left(\frac{a-400}{20}\right) = 0'9 \rightarrow \frac{a-400}{20} = 1'28 \rightarrow a = 425'6$$

1 Un cofre A contiene 4 monedas de plata y 1 de oro. Otro cofre B contiene 5 monedas de plata. Se pasan, al azar, 4 monedas del cofre A al B y, a continuación, se pasan, tambien aleatoriamente, cuatro monedas de B a A. ¿En qué cofre es mas probable que se encuentre la única moneda de oro?

Solución: Sean los sucesos $A = \{$ la moneda se encuentra en A $\}$ y $B = \{$ la moneda se encuentra en B$\}$. Obviamente son sucesos contrarios; calculemos la probabilidad de B. Para que la moneda se encuentre en B, debe pasar de A a B en el primer traspaso, y no pasar a A en el segundo. Por tanto

$$\mathrm{P}\left(B\right) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{5}{4}} \cdot \frac{\binom{8}{4}}{\binom{9}{4}} = \frac{4}{9}$$

La probabilidad de A es por tanto $\dfrac{5}{9}$ mayor que la de B. Así, que es mas probable que la moneda de oro se encuentre en la caja A que en la B.

2 Supongamos que la duración en horas de un determinado tipo de lámparas es una variable aleatoria con la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{100}{x^2}, & x \geq 100 \\ 0, & x < 100 \end{cases}$$

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de 3 de estas lámparas, ninguna falle durante las 150 primeras horas de uso?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que las 3 lámparas fallen durante las 150 primeras horas de uso?

Solución: La probabilidad de una lámpara falle en las 150 primeras horas de uso es

$$\mathrm{P}\left(F\right) = \int_{100}^{150} \frac{100}{x^2}\,dx = \left[\frac{-100}{x}\right]_{100}^{150} = \frac{1}{3}$$

La probabilidad de que una lámpara no falle en las 150 primeras horas de uso es $\frac{2}{3}$.

$$\mathrm{P}\left(\{\text{No falle ninguna de 3 lámparas}\}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$\mathrm{P}\left(\{\text{Fallen las 3 lámparas}\}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

3 Una urna contiene 5 bolas numeradas de 1 a 5. Se extraen 3 al azar. Calcúlese la función de cuantía y esperanza de la variable

$$X = \{\text{número mas pequeño de las tres bolas extraidas}\}$$

Solución: La función de cuantía es

X	1	2	3
f	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

La media es $\mathrm{E}(X) = 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{2}$.

4 Una empresa fabrica cierto tipo de chips con un promedio del 1 % de defectuosos. Si tomamos una muestra de 500 chips.

(a) Identifíquese la variable $X = \{$ número de chips defectuosos de la muestra $\}$.

(b) ¿Cuál es el valor esperado (media) de X?

(c) Probabilidad de que haya dos o más defectuosos.

Solución:

(a) Es una binomial: $X \sim B(500, 0'01)$

(b) $\mathrm{E}(X) = np = 500 \cdot 0'01 = 5$

(c) $\mathrm{P}(X \geq 2) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 1) = 1 - F(1)$. Como n es grande no podemos usar las tablas de la binomial. El valor exacto es

$$1 - f(0) - f(1) = 1 - 0'99^{500} - 500 \cdot 0'01 \cdot 0'99^{499} = 0'9537$$

Aproximando por la de Poisson se obtiene $0'9596$

1 Una tienda vende CDs de dos marcas: A y B. Un CD de la marca A sale defectuoso el 10 % de las veces, mientras que uno de la marca B sale defectuoso el 6 % de las veces. El 35 % de las veces la tienda tiene CDs de las dos marcas, por lo tanto compro de la marca B, y el resto de las veces sólo tiene de la marca A. Si compro una caja y el CD que grabo sale defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que comprara una caja de la marca B?

Solución: Sean los sucesos $A = \{$ el CD comprado es de la marca A $\}$, $B = \{$ el CD comprado es de la marca B $\}$ y $D = \{$ el CD es defectuoso $\}$. Del enunciado se deduce

$$\mathrm{P}(A) = 0'65 \quad \mathrm{P}(B) = 0'35 \quad \mathrm{P}(D \mid A) = 0'1 \quad \mathrm{P}(D \mid B) = 0'06$$

Nos preguntan sobre el suceso $(B \mid D)$; aplicamos el teorema de Bayes

$$\mathrm{P}(B \mid D) = \frac{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(D \mid B)}{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(D \mid B) + \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(D \mid A)} = \frac{0'35 \cdot 0'06}{0'35 \cdot 0'06 + 0'65 \cdot 0'1} = 0'2442$$

2 La función de cuantía de una variable bidimensional (X, Y) aparece en la siguiente tabla, donde las probabilidades están multiplicadas por 100:

Y				
2	10	7	12	
1	9	15	10	
0	11	18	8	
	0	1	2	X

Calcúlense:

(a) $\mathrm{P}(X + Y \leq 2)$

(b) $\mathrm{P}(X = 2 \mid Y = 2)$

(c) $\mathrm{E}(X), \mathrm{E}(Y)$

(d) ¿Son independientes? (justifíquese la respuesta)

(e) $\mathrm{Cov}(X, Y)$

Solución: Las funciones de cuantia de las distribuciones marginales son

X	0	1	2
f_1	0'3	0'4	0'3

Y	0	1	2
f_2	0'37	0'34	0'29

(a) $\mathrm{P}\left(X+Y \leq 2\right)=0'11+0'09+0'18+0'10+0'15+0'08=0'71$

(b) $\mathrm{P}\left(X=2 \,|\, Y=2\right)=\dfrac{\mathrm{P}\left(X=2; Y=2\right)}{\mathrm{P}\left(Y=2\right)}=\dfrac{0'12}{0'29}=0'4138$

(c) $\mathrm{E}\left(X\right)=0\cdot 0'3+1\cdot 0'4+2\cdot 0'3=1$ $\quad$ $\mathrm{E}\left(Y\right)=0\cdot 0'37+1\cdot 0'34+2\cdot 0'29=$ $0'92$.

(d) No son independientes; por ejemplo $f(0,0)\neq f_1(0)\cdot f_2(0)$.

(e)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\left(X,Y\right) &= \mathrm{E}\left(XY\right)-\mathrm{E}\left(X\right)\mathrm{E}\left(Y\right)\\
&= 1\cdot 1\cdot 0'15+1\cdot 2\cdot 0'07+2\cdot 1\cdot 0'10+2\cdot 2\cdot 0'12-1\cdot 0'92\\
&= 0'05.
\end{aligned}$$

3 La cantidad producida de un cierto artículo es una variable aleatoria X con función de densidad

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{1000}x^2, & 0\leq x\leq 10\\ 0, & x\notin[0,10]\end{cases}$$

El precio Y del artículo está en función de la cantidad producida según la relación

$$Y=40-2X.$$

Calcúlese

(a) Cantidad producida media.

(b) Precio medio.

Solución:

(a)

$$\mathrm{E}\left(X\right)=\int_0^{10} x\frac{3}{1000}x^2\,dx=\frac{3}{1000}\int_0^{10} x^3\,dx=\frac{3}{1000}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{10}=7'5.$$

(b) $\mathrm{E}(Y) = 40 - 2\mathrm{E}(X) = 40 - 15 = 25.$

4 La presencia de un cierto antibiótico en un fármaco viene determinado por una variable X. Este fármaco se consigue mediante la unión de otros tres compuestos que también contienen antibiótico y que se distribuyen independientemente de la siguiente manera: $X_1 \sim N(80, 12)$, $X_2 \sim N(120, 15)$ y $X_3 \sim N(96, 9)$. La fórmula del fármaco, unión de los tres compuestos es la siguiente:

$$X = \frac{3X_1 + X_2 + 2X_3}{6}$$

Calcular la probabilidad de que la concentración de antibiótico en el fármaco esté entre 70 y 90

Solución: La variable X es una combinación lineal de normales, luego es normal con parámetros:

(a) $\mathrm{E}(X) = \dfrac{3 \cdot 80 + 120 + 2 \cdot 96}{6} = 92$

(b) $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{9 \cdot 144 + 225 + 4 \cdot 81}{36} = 51'25.$

Por tanto $X \sim N(92, 7'16)$. Luego

$$\mathrm{P}(70 \leq X \leq 90) = \mathrm{P}\left(-\frac{22}{7'16} \leq Z \leq -\frac{2}{7'16}\right) = \Phi(3'07) - \Phi(0'28) = 0'3886.$$

1 Una empresa de software que diseña juegos para ordenador somete los diseños preliminares de sus productos a la evaluación previa de un grupo seleccionado de clientes. Según muestra la experiencia, el 95 % de los productos que tuvieron un gran éxito en el mercado recibieron buenas evaluaciones, el 60 % de los de éxito moderado recibieron buenas evaluaciones y sólo el 10 % de los que tuvieron escaso éxito fueron valorados favorablemente. Además, globalmente el 40 % de los productos de la empresa han tenido mucho éxito, el 35 % un éxito moderado y el 25 % una baja aceptación.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un producto, elegido al azar entre la producción de la fábrica, obtenga una buena evaluación previa?

(b) Si un nuevo producto obtiene una buena evaluación ¿cuál es la probabilidad de que se convierta en un producto de gran éxito?

(c) Si un producto no obtiene una buena evaluación ¿cuál es la probabilidad de que se convierta en un producto de gran éxito?

Solución: Sean los sucesos

$$\begin{array}{ll} G = \{\text{el producto tiene mucho éxito}\} & M = \{\text{el producto tiene éxito moderado}\} \\ E = \{\text{el producto tiene escaso éxito}\} & B = \{\text{el producto tiene buena evaluación}\} \end{array}$$

Se tienen las probabilidades

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}\,(G) = 0'4 & \mathrm{P}\,(M) = 0'35 & \mathrm{P}\,(E) = 0'25 \\ \mathrm{P}\,(B\,|\,G) = 0'95 & \mathrm{P}\,(B\,|\,M) = 0'4 & \mathrm{P}\,(B\,|\,E) = 0'1. \end{array}$$

(a)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\,(B) &= \mathrm{P}\,(G)\cdot\mathrm{P}\,(B\,|\,G) + \mathrm{P}\,(M)\cdot\mathrm{P}\,(B\,|\,M) + \mathrm{P}\,(E)\cdot\mathrm{P}\,(B\,|\,E) \\ &= 0'95\cdot 0'4 + 0'6\cdot 0'35 + 0'1\cdot 0'25 \\ &= 0'615. \end{aligned}$$

(b)

$$\mathrm{P}\,(G\,|\,B) = \frac{\mathrm{P}\,(G)\cdot\mathrm{P}\,(B\,|\,G)}{\mathrm{P}\,(B)} = \frac{0'4\cdot 0'95}{0'615} = 0'6179.$$

(c) Puesto que $\mathrm{P}\left(\overline{B}\right) = 1 - 0'615 = 0'385$ y $\mathrm{P}\left(\overline{B}\,|\,G\right) = 1 - 0'95 = 0'05$, se tiene

$$\mathrm{P}\left(G\,|\,\overline{B}\right) = \frac{\mathrm{P}\left(G\right)\cdot \mathrm{P}\left(\overline{B}\,|\,G\right)}{\mathrm{P}\left(\overline{B}\right)} = \frac{0'4\cdot 0'05}{0'385} = 0'0519.$$

2 De una urna que contiene 3 bolas blancas y 2 negras se extraen las bolas una a una sin reemplazamiento, hasta que hayan salido 2 bolas blancas. Si X es la variable que mide el número total de bolas extraidas e Y el número de bolas negras extraidas, hállese la función de cuantía conjunta de (X, Y). ¿Son independientes?

Solución: La siguiente tabla muestra los casos posibles con los valores de X e Y, y las probabilidades

	X	Y	p
bb	2	0	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{3}{10}$
bnb	3	1	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{5}$
nbb	3	1	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{5}$
nnbb	4	2	$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{2}{2} = \frac{1}{10}$
nbnb	4	2	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2} = \frac{1}{10}$
bnnb	4	2	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2} = \frac{1}{10}$

Como, obviamente, es $Y = X - 2$, hay dependencia funcional entre ambas. Las funciones de cuantía son

X	2	3	4
f_1	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$

Y	0	1	2
f_2	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$

La función de cuantía conjunta aparece en la siguiente tabla

Y				
2	0	0	$\frac{3}{10}$	
1	0	$\frac{2}{5}$	0	
0	$\frac{3}{10}$	0	0	
	2	3	4	X

La tabla confirma la dependencia entre las variable; por ejemplo:

$$f(2,0) = \frac{3}{10} \neq f_1(2)\cdot f_2(0) = \frac{9}{100}.$$

3 La duración en minutos de una llamada telefónica de larga distancia, se asocia a una variableleatoria X cuya función de distribución es

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}, \quad \text{para } x \geq 0.$$

Calcúlese:

(a) La función de densidad

(b) La duración media de una llamada.

(c) La probabilidad de que la duración de una llamada esté comprendida entre 2 y 5 minutos.

Solución:

(a) Derivando la función de distribución

$$f(x) = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}} \quad \text{para } x \geq 0.$$

(b)

$$\mathrm{E}\,(X) = \int_0^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{3} x\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}\, dx = 3.$$

Luego las llamadas tienen una duración media de 3 minutos.

(c)

$$\mathrm{P}\,(2 < X < 5) = F(5) - F(2) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{5}{3}} - 1 + \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}} = 0'3245.$$

4 Un juego consiste en lanzar dos dados; el jugador gana 3 euros si la suma de los dos dados es 7 ó 9, y paga uno en otro caso. Tras 200 lanzamientos ¿cuál es la probabilidad de que el saldo de ganancias sea positivo?

Solución: La probabilidad de sacar 7 ó 9 al lanzar dos dados es $\dfrac{5}{18}$ (hágase!). El número X de éxitos en 200 lanzamientos tiene una distribución binomial $X \sim B\left(200, \dfrac{5}{18}\right)$; el número de fracasos es $200 - X$ y la ganancia es

$G = 3X - (200 - X) = 4X - 200$. Para que $G > 0$ ha de ser $X > 50$; por tanto hemos de calcular $\mathrm{P}(X > 50)$. Aproximamos por la normal

$$Z \approx \frac{X - 200 \cdot \frac{5}{18}}{\sqrt{200 \cdot \frac{5}{18} \frac{13}{18}}} = \frac{X - 55'56}{6'33}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X > 50) = 1 - \mathrm{P}(X < 50) &= 1 - \mathrm{P}\left(Z < \frac{50 - 55'56}{6'33}\right) \\
&= 1 - \Phi(-0'88) \\
&= \Phi(0'88) \\
&= 0'8106.
\end{aligned}$$

1 En una etapa de producción de un artículo se aplica soldadura y para eso se usan tres robots. La probabilidad de que la soldadura sea defectuosa, así como la proporción de artículos procesados varía para cada robot de acuerdo a la tabla siguiente

Robot	Prob. Defectos	% artículos proc.
A	$0'002$	18
B	$0'005$	42
C	$0'001$	40

Calcúlese

(a) La proporción global de defectos producidos por los tres robots.

(b) La probabilidad de que un artículo con defectos haya sido soldado por el robot C.

Solución: Sea el suceso $D = \{$ La soldadura de un artículo es defectuosa$\}$ y sean A, B, C los sucesos $\{$ la soldadura la efectúa $\}$ el robot A,B,C respectivamente.

(a) Hay que hallar $\mathrm{P}(D)$ para lo que contamos con los datos

$$\mathrm{P}(D \mid A) = 0'002 \quad \mathrm{P}(D \mid B) = 0'005 \quad \mathrm{P}(D \mid C) = 0'001$$

Por el teorema de la probabilidad total

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(D) &= \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(D \mid A) + \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(D \mid B) + \mathrm{P}(C) \cdot \mathrm{P}(D \mid C) \\ &= 0'18 \cdot 0'002 + 0'42 \cdot 0'005 + 0'40 \cdot 0'001 = 0'00286. \end{aligned}$$

Así que globalmente, el 3 por mil (aproximadamente) de las piezas son defectuosas.

(b)
$$\mathrm{P}(C \mid D) = \frac{\mathrm{P}(C) \cdot \mathrm{P}(D \mid C)}{\mathrm{P}(D)} = \frac{0'40 \cdot 0'001}{0'00286} = 0'1399.$$

2 Se elige al azar un comité de 2 alumnos de entre 3 delegados de 3^{o}, 2 de 2^{o} y 1 de 1^{o}. Sean $X = \{$ número de alumnos de 2^{o} en el comité $\}$ e $Y = \{$ número de alumnos de 1^{o} en el comité $\}$. Hállese $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Solución: La función de cuantía conjunta viene dada por la tabla

$$\begin{array}{c|cccc} Y & & & & \\ 1 & \frac{3}{15} & \frac{2}{15} & 0 & \\ 0 & \frac{3}{15} & \frac{6}{15} & \frac{1}{15} & \\ \hline & 0 & 1 & 2 & \mathrm{X} \end{array}$$

y las marginales

X	0	1	2
f_1	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

Y	0	1
f_2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

De las tablas se obtiene

$$\mathrm{E}\,(XY) = \frac{2}{15}, \quad \mathrm{E}\,(X) = \frac{2}{3}, \quad \mathrm{E}\,(Y) = \frac{1}{3}.$$

Por tanto

$$\mathrm{Cov}\,(X,Y) = \mathrm{E}\,(XY) - \mathrm{E}\,(X)\,\mathrm{E}\,(Y) = -\frac{4}{45}.$$

3 Los artículos que produce una máquina se empaquetan en lotes de 4. La máquina produce el 10 % de defectuosos y el comprador devuelve los defectuosos para su reparación, lo que le supone a la empresa un coste de $3X^2 + X + 2$, siendo X el número de artículos defectuosos por lote. Hállese el coste medio de reparación.

Solución: Dado que X sigue una distribución binomial $B(4, 0'1)$, su función de cuantía viene dada por la tabla

X	0	1	2	3	4
f	$0'6561$	$0'2916$	$0'0486$	$0'0036$	$0'0001$

De la tabla

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(3X^2 + X + 2\right) &= (3 \cdot 0^2 + 0 + 2) \cdot 0'6561 + (3 \cdot 1^2 + 1 + 2) \cdot 0'2916 \\ &+ (3 \cdot 2^2 + 2 + 2) \cdot 0'0486 + (3 \cdot 3^2 + 3 + 2) \cdot 0'0036 \\ &+ (3 \cdot 4^2 + 4 + 2) \cdot 0'0001 = 3'96. \end{aligned}$$

Otra forma de resolverlo es la siguiente: dado que $X \sim B(4, 0'1)$ es sabido que $\mathrm{E}\,(X) = n \cdot p = 4 \cdot 0'1 = 0'4$ y $\mathrm{Var}\,(X) = n \cdot p \cdot q = 4 \cdot 0'1 \cdot 0'9 = 0'36$. Entonces $\mathrm{E}\left(X^2\right) = \mathrm{Var}\,(X) + (\mathrm{E}\,(X))^2 = 0'36 + 0'16 = 0'52$ por lo que

$$\mathrm{E}\left(3X^2 + X + 2\right) = 3\mathrm{E}\left(X^2\right) + \mathrm{E}\,(X) + 2 = 3 \cdot 0'52 + 0'4 + 2 = 3'96.$$

4 Se quiere repoblar un río con un tipo de pez autóctono para evitar su extinción. Para ello se ha realizado un estudio previo de la concentración de oxígeno en el río. Este estudio proporciona los siguientes resultados: la concentración de oxígeno en el agua sigue una distribución normal de media 9 y desviación típica $0'8$; así mismo, el oxígeno consumido por la fauna del río sigue, también, una distribución normal de media 4 y desviación típica $0'2$ y, por último, el oxígeno producido por las bacterias y algas del río sigue una distribución normal de media 5 y desviación típica $1'2$. Se considera que las tres distribuciones son independientes y que la concentración de oxígeno en el agua para la existencia de vida ha de ser mayor o igual a 5. ¿Cuál es la probabilidad de que al repoblar el río, multiplicándose por 2 la fauna del mismo, el agua del río siga siendo apto para la vida?

Solución: Sean las variables

$$\begin{array}{l} X_1 = \text{concentración de oxígeno en el río}, \quad X_1 \sim N(9, 0'8) \\ X_2 = \text{cantidad de oxígeno consumido por la fauna}, \quad X_2 \sim N(4, 0'2) \\ X_3 = \text{cantidad de oxígeno producido por bacterias}, \quad X_3 \sim N(5, 1'2) \end{array}$$

La concentración de oxígeno total es $X_1 - X_2 + X_3$, pero si se dobla la fauna, el oxígeno consumido es doble y la concentración total es $X_1 - 2X_2 + X_3$. Hay que hallar $\mathrm{P}\left(X_1 - 2X_2 + X_3 \geq 5\right)$. Sea $Y = X_1 - 2X_2 + X_3$, que tiene una distribución normal de parámetros

$$\mathrm{E}\left(Y\right) = 9 - 2 \cdot 4 + 5 = 6, \quad \mathrm{Var}\left(Y\right) = 0'8^2 + 4 \cdot 0'2^2 + 1'2^2 = 2'24.$$

Tipificando

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(Y \geq 5\right) &= \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{5-6}{\sqrt{2'24}}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(Z \geq -0'67\right) = \Phi(0'67) = 0'7486. \end{aligned}$$

1 Pepe y Manolo son dos viejos amigos que han decidido darle un giro a su vida y están dudando entre dedicar sus ahorros a montar una empresa de desarrollo de software o invertir en renta variable. Su asesor fiscal les ofrece dos alternativas atrayentes, pero ante su falta de formación bursátil, confían al azar su decisión. Invertirán en el sector eléctrico si sacan una bola roja de una urna que contiene 20 bolas, de las cuales 8 son rojas, 3 verdes y 9 negras. Si la bola no es roja lanzarán dos dados y si obtienen una suma de 6 entre ambos dados invertirán en el sector inmobiliario; en caso contrario se decidirán por la empresa de desarrollo de software. ¿Cuál es la probabilidad de que finalmente monten una empresa de desarrollo de software?

Solución: Sean los sucesos

$$
\begin{aligned}
E &= \{\text{Invertir en el sector eléctrico.}\} \\
I &= \{\text{Invertir en el sector inmobiliario.}\} \\
S &= \{\text{Invertir en la empresa de desarrollo de software.}\} \\
R &= \{\text{La bola es roja.}\} \\
D &= \{\text{La suma de los dados es 6.}\}
\end{aligned}
$$

El suceso pedido es $S = \overline{R} \cap \overline{D}$ que son independientes, por lo que

$$\mathrm{P}(S) = \mathrm{P}\left(\overline{R}\right) \mathrm{P}\left(\overline{D}\right) = \frac{12}{20}\frac{31}{36} = \frac{31}{60}.$$

2 Sean las variables X e Y con f.d.d

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & x \in [0,2] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad f(y) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Se obtienen 3 valores de X. Hállese la función de cuantía del número de valores mayores que 1.

(b) Se obtienen 3 valores de Y. Hállese el máximo valor $a \in [0,1]$ para que al menos uno de ellos exceda el valor a con probabilidad mínima de 0'999.

Solución:

(a) La probabilidad del suceso $A_i = \{$ el valor $-i$ es mayor que $1\}$

$$\mathrm{P}\left(A_i\right) = \mathrm{P}\left(X > 1\right) = \int_1^2 \frac{x}{2}\, dx = \frac{3}{4}.$$

La variable $N =$ número de valores mayores que 1 toma los valores $0, 1, 2, 3$ con función de cuantía

X	0	1	2	3
f	1/64	9/64	27/64	27/64

(b) $\mathrm{P}\left(Y > a\right) = 1 - a$ y $\mathrm{P}\left(Y < a\right) = a$. Para tres valores, la probabilidad de que ninguno exceda a es a^3 y la de que al menos uno exceda a es $1 - a^3$. Por tanto $1 - a^3 \geq 0'999 \to a^3 \leq 0'001 \to a \leq 0'1$. El valor máximo es 0'1.

3

(a) Si la variable X tiene media μ y varianza $\sigma^2 \neq 0$, hállense los valores de a y b para que la variable $Y = aX + b$ cumpla $\mathrm{E}\left(Y\right) = 0$, $\mathrm{Var}\left(Y\right) = 1$.

(b) Demuéstrese que no pueden existir dos variables X e Y tales que

$$\mathrm{E}\left(X\right) = 3, \quad \mathrm{E}\left(Y\right) = 2, \quad \mathrm{E}\left(X^2\right) = 10, \quad \mathrm{E}\left(Y^2\right) = 29, \quad \mathrm{E}\left(XY\right) = 0$$

(*Sugerencia: hállese la correlación*)

Solución:

(a) $\mathrm{Var}\left(Y\right) = a^2 \mathrm{Var}\left(X\right) = a^2\sigma^2 = 1$ por lo que $a = \dfrac{\pm 1}{\sigma}$. Como $\mathrm{E}\left(Y\right) = a\mu + b = 0$ debe ser $b = -a\mu = \dfrac{\mp\mu}{\sigma}$. La variable Y puede ser

$$Y = \frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}, \quad \text{o bién } Y = -\frac{1}{\sigma}X + \frac{\mu}{\sigma}$$

(b)

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}\left(X, Y\right)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{0 - 6}{1 \cdot 5} = -1'2$$

Los datos no son posibles pues se obtiene $\rho < -1$.

4 En una carrera de Fórmula 1, el consumo de combustible de un determinado coche sigue un distribución normal de media $3'5$ litros y desviación típica de $0'5$, por vuelta. Cuando quedan 12 vueltas para el final de la carrera entra en boxes a repostar ¿Cuál es la cantidad mínima de combustible que tiene que repostar, para que la probabilidad de que acabe la carrera (en ausencia de accidente) sea mayor que 0'95?

Solución: El consumo por vuelta tiene una distribución $N(3'5, 0'5)$. Luego el consumo para cada una de las 12 vueltas que quedan vendrá determinado por una distribución normal: $X_i \sim N(3'5, 0'5)$, con $i \in \{1, \ldots, 12\}$. Así pues, la cantidad total de combustible consumido en las 12 vueltas será una suma de distribuciones normales independientes: $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{12} \sim N(42, \sqrt{3})$. Nos piden la cantidad mínima k de combustible a repostar, para que la probabilidad de cubrir el consumo en las 12 vueltas sea mayor que 0'95, es decir, para que se cumpla $\mathrm{P}(X < k) > 0'95$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X < k) &= \mathrm{P}\left(\frac{X-42}{\sqrt{3}} < \frac{k-42}{\sqrt{3}}\right) > 0'95 \\
&\to \mathrm{P}\left(Z < \frac{k-42}{\sqrt{3}}\right) > 0'95 \\
&\to \Phi(\frac{k-42}{\sqrt{3}}) > 0'95 \\
&\to \frac{k-42}{\sqrt{3}} = 1'65 \\
&\to k = 42 + 1'65 \cdot \sqrt{3} = 44'8545
\end{aligned}$$

Por tanto, la cantidad mínima sería de aproximadamente 45 litros.

1 Supóngase que el 5 % de los microprocesadores fabricados en una planta son defectuosas. Si uno de ellos es defectuoso, la probabilidad de que un controlador lo detecte y lo saque de la cadena de producción es $0'9$. Si un microprocesador no es defectuoso, la probabilidad de que el controlador piense que lo es y lo saque de la cadena de producción es $0'2$.

(a) (1 punto) Si un microprocesador se saca de la cadena de producción, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

(b) (1 punto) ¿Cuál es el porcentaje de defectuosos que se ponen a la venta?

Solución: Sean los sucesos $D = \{$ el microprocesador es defectuoso $\}$ y $S = \{$ el controlador lo saca de la cadena de producción $\}$; se tienen las probabilidades $\mathrm{P}(D) = 0'05$, $\mathrm{P}(S \mid D) = 0'9$ y $\mathrm{P}\left(S \mid \overline{D}\right) = 0'2$

(a) aplicando el teorema de Bayes

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(D \mid S) &= \frac{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}(S \mid D)}{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}(S \mid D) + \mathrm{P}\left(\overline{D}\right) \cdot \mathrm{P}\left(S \mid \overline{D}\right)} \\ &= \frac{0'05 \cdot 0'9}{0'05 \cdot 0'9 + 0'95 \cdot 0'2} = \frac{9}{47}. \end{aligned}$$

(b) La probabilidad de que un microprocesador en venta sea defectuoso es

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(D \mid \overline{S}\right) &= \frac{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{S} \mid D\right)}{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{S} \mid D\right) + \mathrm{P}\left(\overline{D}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{S} \mid \overline{D}\right)} \\ &= \frac{0'05 \cdot 0'1}{0'05 \cdot 0'1 + 0'95 \cdot 0'8} = 0'0065. \end{aligned}$$

Por tanto el $0'65$ % son defectuosos.

2 Se lanza un dado y se consideran las variables:

$$X = \{\text{número de puntos}\}, \quad Y = \begin{cases} 0, & \text{si en el dado sale } 1, 2, 3 \\ 1, & \text{si en el dado sale } 4, 5, 6. \end{cases}$$

(a) (0'75 puntos) Calcular la función (tabla) de cuantía conjunta.

(b) (0'25 puntos) ¿son independientes?

(c) (1 punto) Calcular $\mathrm{Cov}\,(X, Y)$.

Solución: La tabla es

$$
\begin{array}{c|cccccc}
Y & & & & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\
0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \quad X
\end{array}
$$

Las marginales son

X	1	2	3	4	5	6
f_1	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Y	0	1
f_2	1/2	1/2

De las tablas se deduce que NO son independientes y además

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\,(X) &= \frac{7}{2} \\
\mathrm{E}\,(Y) &= \frac{1}{2} \\
\mathrm{E}\,(X \cdot Y) &= \frac{1}{6}(4+5+6) = \frac{5}{2} \\
\mathrm{Cov}\,(X, Y) &= \frac{5}{2} - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$

3 Se lanza un dado n veces y se considera la variable X= "suma de puntos".

(a) (1 punto) Hállese n para que X tenga una media de 35 puntos.

(b) (1 punto) Hállese $\mathrm{Var}\,(X)$ en el apartado anterior.

Solución: Llamando X_i a la puntuación del dado en el lanzamiento $-i-$ésimo, la suma total es $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Las variables X_i tienen la función de cuantía de la variable X del problema **(2)**, cuya media es $\frac{7}{2}$ y la varianza es

$$\mathrm{E}\left(X_i^2\right) = \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = \frac{91}{6}$$
$$\mathrm{Var}\left(X_i\right) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}.$$

Por tanto $\mathrm{E}\left(X\right) = \frac{7}{2} \cdot n$ y $\mathrm{Var}\left(X\right) = \frac{35}{12} \cdot n$

(a) Si $\mathrm{E}\left(X\right) = \frac{7}{2} \cdot n = 35 \rightarrow n = 10$.

(b) $\mathrm{Var}\left(X\right) = \frac{35}{12} \cdot 10 = \frac{175}{6}$

4 (2 puntos) El número de visitas que realiza un comercial de cierta empresa por semana tiene una distribución normal de media 45 y desviación 3. Las visitas fallidas (no hay nadie en casa) sigue una distribución normal de media 10 y desviación 2. Considerando independientes las visitas realizadas de las fallidas ¿cuál es la probabilidad de que en una semana realice más de 40 visitas efectivas?

Solución: Si X_1 es el número de visitas y X_2 el de fallidas, el número de visitas efectivas es $X_1 - X_2$ que es normal de media $45 - 10 = 35$ y desviación $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$. Por tanto

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(X > 40\right) &= 1 - \mathrm{P}\left(X \leq 40\right) \\ &= 1 - \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{40 - 35}{\sqrt{13}}\right) \\ &= 1 - \Phi(1{,}39) = 1 - 0'9177 = 0'0823. \end{aligned}$$

1 Supóngase que 5 terminales están conectados mediante una línea compartida a un computador central. El computador central va preguntando por turno a los diversos terminales si tienen algo que transmitir. Si la respuesta es afirmativa, el terminal accede a la línea. Entonces, si hay 3 terminales que quieren enviar un mensaje, calcular la probabilidad de que el computador haga 2 preguntas hasta encontrar un terminal que quiera transmitir.

Solución: Para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sean los sucesos $\{T_i =$ el terminal $-i-$ solicita transmitir $\}$. Si el computador central hace 2 preguntas es que el segundo terminal solicita transmitir; entonces, la probabilidad de que el primer terminal preguntado no quiera transmitir pero el segundo sí es

$$\mathrm{P}\left(\overline{T}_1 \cap T_2\right) = \mathrm{P}\left(\overline{T}_1\right) \mathrm{P}\left(T_2 \mid \overline{T}_1\right) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}.$$

2 De un grupo de 3 españoles, 2 franceses y 1 alemán se elige un grupo de 3. LLamando X al número de españoles e Y al de alemanes, hállese

(a) (1 punto) La función de cuantía conjunta.

(b) (0'3 puntos) Media de X y de Y.

(c) (0'4 puntos) Covarianza.

(d) (0'3 puntos) $\mathrm{E}(X \mid Y = 1)$.

Solución:

(a) Los casos posibles son $\binom{6}{3} = 20$. La tabla es la siguiente

Y					
1	1/20	6/20	3/20	0	
0	0	3/20	6/20	1/20	
	0	1	2	3	X

(b) Las funciones de cuantía marginales son

X	0	1	2	3
f_1	1/20	9/20	9/20	1/20

Y	0	1
f_2	1/2	1/2

$\mathrm{E}(X) = 1 \cdot \frac{9}{20} + 2 \cdot \frac{9}{20} + 3 \cdot \frac{1}{20} = \frac{3}{2}$.
$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{2}$.

(c) Como $\mathrm{E}(XY) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{6}{20} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{20} = \frac{3}{5}$, la covarianza es

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{3}{5} - \frac{3}{2}\frac{1}{2} = -\frac{3}{20}.$$

(d) La distribución condicional es

$X \mid Y=1$	0	1	2	3
g_1	1/10	6/10	3/10	0

La esperanza es

$$\mathrm{E}(X \mid Y=1) = 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} = 1'2.$$

3 Un vendedor puede visitar cada día a un cliente con probabilidad 0'7 ó a ninguno. En cada visita puede vender y ganar 100€ con probabilidad 0'6 ó no vender (y no ganar). Calcular

(a) (1 punto) La función de cuantía del número de ventas diarios.

(b) (1 punto) La media y desviación de las ganancias diarias.

Solución: Llamemos X al número de visitas, Y al de ventas y G a las ganancias. La tabla de la cuantía de X es

X	0	1
f	0'3	0'7

(a) El número de ventas puede ser 1, con probabilidad $0'7 \cdot 0'6 = 0'42$ (ha de visitar y tener éxito en la visita) ó 0 con probabilidad $0'58$; por tanto

Y	0	1
f	0'58	0'42

Se deduce que

- $\mathrm{E}(Y) = 0'42$.
- $\mathrm{E}(Y^2) = 0'42$.
- $\mathrm{Var}(Y) = 0'42 - 0'42^2 = 0'2436$

(b) Como $G = 100Y$, se tiene

- $\mathrm{E}(G) = 100 \cdot 0'42 = 42$€
- $\mathrm{Var}(G) = 100^2 \cdot 0'2436 = 2436$
- $\sigma_G = \sqrt{2436} = 49'36$€

4 (2 puntos) Se sabe que la talla media de una población en edad escolar sigue una distribución normal con media 165 cm y desviación típica de 12 cm. Si un centro tiene 1400 alumnos matriculados, se pide:

(a) ¿Cuál es el número de alumnos que miden más de 155 cm?

(b) ¿Qué proporción (%) de alumnos miden entre 150 y 178 cm?

(c) ¿Qué talla permite asegurar que el 67 % de la población está por debajo de ella?

Solución:

(a) Hay que calcular la probabilidad de que un alumno mida más de 155 cm y aplicarlo a los 1400 alumnos. Como la variable no es una $N(0,1)$, hay que tipificar:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X > 155) &= 1 - \mathrm{P}(X \leq 155) \\
&= 1 - \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{155-165}{12}\right) \\
&= 1 - \Phi(-0'83) = \Phi(0'83) = 0'7967.
\end{aligned}$$

Luego, la cantidad de alumnos es $1400 \cdot 0'7967 = 1115,38 \approx 1116$.

(b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(150 \leq X \leq 178) &= \mathrm{P}\left(\frac{150-165}{12} \leq Z \leq \frac{178-165}{12}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\frac{-15}{12} \leq Z \leq \frac{13}{12}\right) \\
&= \Phi(1'08) - \Phi(-1'25) = 0'8599 - 1 + 0'8944 = 0'7543.
\end{aligned}$$

Luego el $75'43$ % miden entre 150 y 165 cm.

(c) Se pide una talla k tal que $\mathrm{P}\left(X<k\right)=0'67$. Así pues:

$$\mathrm{P}\left(X<k\right)=\mathrm{P}\left(Z<\frac{k-165}{12}\right)=\Phi\left(\frac{k-165}{12}\right)=0'67.$$

Buscando en las tablas, para $z=0'44\Rightarrow\Phi=0'6700$, luego $\dfrac{k-165}{12}=0'44\Rightarrow k=165+12\cdot 0'44=170'28$. Solución: $k=170'28$ cm.

1 Una empresa de software que diseña juegos para ordenador somete los diseños preliminares de sus productos a la evaluación previa de un grupo seleccionado de clientes. Según muestra la experiencia, el 95 % de los productos que tuvieron un gran éxito en el mercado recibieron buenas evaluaciones, el 60 % de los de éxito moderado recibieron buenas evaluaciones y sólo el 10 % de los que tuvieron escaso éxito fueron valorados favorablemente. Además, globalmente el 40 % de los productos de la empresa han tenido mucho éxito, el 35 % un éxito moderado y el 25 % una baja aceptación.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un producto, elegido al azar entre la producción de la fábrica, obtenga una buena evaluación previa?

(b) Si un nuevo producto obtiene una buena evaluación ¿cuál es la probabilidad de que se convierta en un producto de gran éxito?

(c) Si un producto no obtiene una buena evaluación ¿cuál es la probabilidad de que se convierta en un producto de gran éxito?

Solución: Sean los sucesos

$$\begin{array}{ll} G = \{\text{el producto tiene mucho éxito}\} & M = \{\text{el producto tiene éxito moderado}\} \\ E = \{\text{el producto tiene escaso éxito}\} & B = \{\text{el producto tiene buena evaluación}\} \end{array}$$

Se tienen las probabilidades

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(G) = 0'4 & \mathrm{P}(M) = 0'35 & \mathrm{P}(E) = 0'25 \\ \mathrm{P}(B \mid G) = 0'95 & \mathrm{P}(B \mid M) = 0'4 & \mathrm{P}(B \mid E) = 0'1. \end{array}$$

(a)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}(G)\cdot\mathrm{P}(B \mid G) + \mathrm{P}(M)\cdot\mathrm{P}(B \mid M) + \mathrm{P}(E)\cdot\mathrm{P}(B \mid E) \\ &= 0'95\cdot 0'4 + 0'6\cdot 0'35 + 0'1\cdot 0'25 \\ &= 0'615. \end{aligned}$$

(b)

$$\mathrm{P}(G \mid B) = \frac{\mathrm{P}(G)\cdot\mathrm{P}(B \mid G)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{0'4\cdot 0'95}{0'615} = 0'6179.$$

(c) Puesto que $\mathrm{P}\left(\overline{B}\right) = 1 - 0'615 = 0'385$ y $\mathrm{P}\left(\overline{B} \mid G\right) = 1 - 0'95 = 0'05$, se tiene

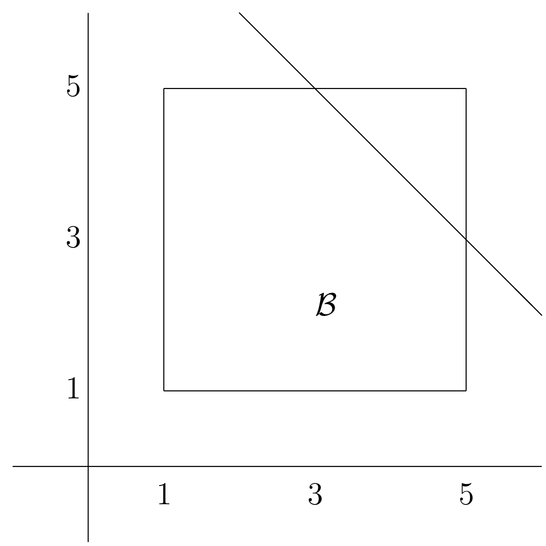
$$\mathrm{P}\left(G \mid \overline{B}\right) = \frac{\mathrm{P}(G) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{B} \mid G\right)}{\mathrm{P}\left(\overline{B}\right)} = \frac{0'4 \cdot 0'05}{0'385} = 0'0519.$$

2 Se eligen dos números aleatorios en el intervalo [1, 5]. Calcular la probabilidad de que la suma sea menor que 8.

Solución: Llamando (X, Y) al par de números, tenemos una v.a. bidimensional uniforme en $[1,5] \times [1,5]$. La función de densidad (aunque no es necesaria) es

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/16, & (x,y) \in [1,5] \times [1,5] \\ 0, & (x,y) \notin [1,5] \times [1,5] \end{cases}$$

La figura siguiente representa la región posible y la favorable $\mathcal{B}$



La probabilidad es el cociente entre áreas

$$\mathrm{P}(X + Y < 8) = \frac{\text{área}(\mathcal{B})}{\text{área}(\mathcal{A})} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}.$$

3 Un juego de azar consiste en lanzar tres dados, de manera que el jugador elige un número entre 1 y 6 y recibe una cantidad K, si su número aparece una vez, el doble si aparece dos veces y el triple si aparece tres veces. Si el número elegido no figura entre los resultados, el jugador paga K. Calcula el beneficio medio del jugador.

Solución: La probabilidad de que el número elegido aparezca una sóla vez es $3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{75}{216}$. De que aparezca dos veces es $3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$. De que aparezca tres veces es $\cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$. De que no aparezca es $\cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$. Luego la variable $B =$ beneficio tiene la cuantía

X	$-K$	K	$2K$	$3K$
f	125/216	75/216	15/216	1/216

La media es

$$\mathrm{E}\,(B) = (-K)\frac{125}{216} + K\frac{75}{216} + 2K\frac{15}{216} + 3K\frac{1}{216} = -\frac{17K}{216}$$

4 El 2 % de los tornillos fabricados por una máquina presentan defectos. Si se empaquetan en lotes de 2000 tornillos,

(a) ¿cuál es la probabilidad de que en un determinado lote no haya más de 50 defectuosos?

(b) Si se inspecciona un lote en busca de tornillos defectuosos y se han encontrado ya más de 40 ¿cuál es la probabilidad de que este número no supere los 50?

(c) ¿Cuál es el mínimo número k parea que se pueda asegurar que la probabilidad de que no haya más de k tornillos defectuosos sea superior a $0'9$?

Solución: La probabilidad de que un tornillo sea defectuoso es $0'02$. El número X de tornillos defectuosos en una muestra de 2000 sigue la distribución binomial $B(2000, 0'02)$ que podemos considerar como normal de parámetros $\mu = 40$ y desviación $\sigma = \sqrt{39'20} = 6'26$.

(a)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(X \leq 50\right) &= \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{50-40}{6'26}\right) \\ &= \Phi(1'60) = 0'9452. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(X \leq 50 \mid X > 40\right) &= \frac{\mathrm{P}\left(40 < X \leq 50\right)}{\mathrm{P}\left(X > 40\right)} \\ &= \frac{\mathrm{P}\left(0 < Z \leq 1'60\right)}{1-\Phi(0)} \\ &= \frac{0'9452-0'5}{0'5} \\ &= 0'8904. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(X \leq k\right) > 0'9 &\rightarrow \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{k-40}{6'26}\right) > 0'9 \\ &\rightarrow \Phi\left(\frac{k-40}{6'26}\right) > 0'9 \end{aligned}$$

Llamando $a = \dfrac{k-40}{6'26}$ se tiene

$$\begin{aligned} &\Phi\left(a\right) > 0'9 \\ &\qquad \rightarrow a > 1'29 \\ &\qquad \rightarrow \frac{k-40}{6'26} > 1'29 \rightarrow k > 40 - 6'26 \cdot 1'29 = 31'93 \end{aligned}$$

Luego la solución es 32 tornillos.

1 (2 puntos) Dos compañías producen software informático. La primera A, proporciona el 70 % y la segunda B el 30 % de la producción total. Por otra parte, se sabe que el 83 % del software suministrado por la primera compañía se ajusta a las normas establecidas, mientras que sólo el 63 % del suministrado por la segunda, se ajusta a dichas normas. Calcular la probabilidad de que un determinado software haya sido suministrado por la compañía A, si se sabe que se ajusta a las normas.

Solución: Sean los sucesos

$$\begin{aligned} A &= \{ \text{ el software lo produce la empresa A} \} \\ B &= \{ \text{ el software lo produce la empresa B} \} \\ N &= \{ \text{ el software se ajusta a las normas.} \} \end{aligned}$$

Se pide $\mathrm{P}(A \mid N)$ y conocemos las siguientes probabilidades

$$\mathrm{P}(A) = 0'7, \quad \mathrm{P}(B) = 0'3, \quad \mathrm{P}(N \mid A) = 0'83, \quad \mathrm{P}(N \mid B) = 0'63.$$

Aplicando Bayes

$$\mathrm{P}(A \mid N) = \frac{0'7 \cdot 0'83}{0'7 \cdot 0'83 + 0'3 \cdot 0'63} = 0'7545.$$

2 Sea X una variable aleatoria discreta que denota el número de averías que un operario resuelve en una jornada de trabajo, con función de cuantía dada por

$$f(x) = \frac{k}{x+1}, \quad x \in \{0, 1, 2, 3\}$$

(a) (1 punto) Calcular $\mathrm{P}(X > 1)$ y $\mathrm{P}(X > 0 \mid X < 3)$.

(b) (0'5 puntos) Calcula el número medio de averías que soluciona al día.

(c) (0'5 puntos) Si su sueldo es de 60 € por jornada laboral y si le pagan un plus de 20 € por cada avería solucionada que exceda de una al día ¿cuál es el sueldo diario medio?

Solución: Tenemos que hallar el valor de k; se obtiene sumando las probabilidades e igualando a 1

$$\begin{aligned} f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1 \quad &\to \quad \frac{k}{1} + \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} = 1 \\ \frac{25k}{12} = 1 \quad &\to \quad k = \frac{12}{25}. \end{aligned}$$

La función de cuantía es, por tanto

X	0	1	2	3
$f(x)$	12/25	6/25	4/25	3/25

(a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X > 1) &= \frac{4}{25} + \frac{3}{25} = \frac{7}{25} \\
\mathrm{P}(X > 0 \mid X < 3) &= \frac{\mathrm{P}(0 < X < 3)}{\mathrm{P}(X < 3)} = \frac{6/25 + 4/25}{22/25} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11}.
\end{aligned}$$

(b)

$$\mathrm{E}(X) = 0 \cdot \frac{12}{25} + 1 \cdot \frac{6}{25} + 2 \cdot \frac{4}{25} + 3 \cdot \frac{3}{25} = \frac{23}{25}.$$

(c) La variable sueldo es

$$S = \begin{cases} 60, & X = 0 \\ 60 + 20(X-1) & X = 1,2,3 \end{cases}$$

Para los valores de $X = 0, 1, 2, 3$ se obtiene

X	0	1	2	3
S	60	60	80	100

Teniendo en cuenta las probabilidades de X, la cuantía de S es

S	60	80	100
f_S	18/25	4/25	3/25

La media es

$$60 \cdot \frac{18}{25} + 80 \cdot \frac{4}{25} + 100 \cdot \frac{3}{25} = \frac{1700}{25} = 68.$$

3

(a) (1 punto) Supóngase que se selecciona al azar una palabra de la frase "ESPAÑA GANARÁ EL CAMPEONATO MUNDIAL DE FÚTBOL". Si X es el número de letras de la palabra seleccionada, calcular $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

(b) (1 punto) En una lotería se venden 30000 boletos a 20€ cada uno. El primer premio es de 200000 € , el segundo de 100000€ y el tercero de 20000€ ¿Cuál es la ganancia esperada de un individuo que ha comprado una papeleta?

Solución:

(a) La frase consta de 7 palabras con 6,6,2, 10,7,2 y 6 letras respectivamente. Por tanto X toma los valores 2,6,7 y 10 con probabilidades

X	2	6	7	10
$f(x)$	2/7	3/7	1/7	1/7

Se tiene $\mathrm{E}(X) = 4/7 + 18/7 + 7/7 + 10/7 = 39/7$. Para hallar la varianza calculamos $\mathrm{E}(X^2) = 8/7 + 108/7 + 49/7 + 100/7 = 265/7$ con lo que

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{265}{7} - \left(\frac{39}{7}\right)^2 = \frac{334}{49}.$$

(b) Llamando G a la variable ganancia, se tiene

G	199980	99980	19980	-20
$f(x)$	1/30000	1/30000	1/30000	29997/30000

Por tanto la media es

$$\mathrm{E}\left(G\right)=\frac{199980+99980+19980-599940}{30000}=\frac{-280000}{30000}=-\frac{28}{3}.$$

4 Una empresa de informática produce y saca a la venta tiradas de 20000 ordenadores de los que sólo un 3 % salen defectuosos. Para darse a conocer lanza una campaña de publicidad en la que asegura que si el número de ordenadores defectuosos de una tirada supera en más de un 5 % el valor esperado, promete devolver el dinero a cada uno de los compradores afectados y, además, regalarles un ordenador nuevo a cada uno.

(a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa tenga que llevar a cabo la promesa de la campaña publicitaria?

(b) (1 punto) Si del total de ordenadores que se llevan vendidos, se sabe que ya hay más de 620 defectuosos ¿cuál es la probabilidad de que la empresa no tenga que llevar a cabo su promesa?

Solución: Sea X = numero de ordenadores defectuosos de los 20000. Se trata de una distribución binomial, donde $X \sim B\left(20000, 0'03\right)$. Por tanto, el valor esperado para una distribución binomial es:

$$E\left(X\right)=n\cdot p=20000\cdot 0'03=600.$$

Para que la empresa lleve a cabo la promesa de la campaña publicitaria, el número de ordenadores defectuosos debe superar en un 5 % el valor esperado, o sea, a 630. Aproximamos por la Normal:

$$Z=\frac{X-E\left(X\right)}{\sqrt{Var\left(X\right)}}=\frac{X-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}=\frac{X-20000\cdot 0'03}{\sqrt{20000\cdot 0'03\cdot 0'97}}=\frac{X-600}{\sqrt{582}}\sim N\left(0,1\right)$$

(a) $\mathrm{P}\left(X>630\right)=\mathrm{P}\left(Z>\dfrac{30}{\sqrt{582}}\right)=1-\Phi(1'24)=1-0'8925=0'1075.$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(X\leq 630 \mid X>620\right) &= \frac{\mathrm{P}\left(620<X\leq 630\right)}{\mathrm{P}\left(X>620\right)} \\
&= \frac{\mathrm{P}\left(\dfrac{20}{\sqrt{582}}<Z\leq\dfrac{30}{\sqrt{582}}\right)}{\mathrm{P}\left(Z>\dfrac{20}{\sqrt{582}}\right)} \\
&= \frac{\mathrm{P}\left(0'83<Z\leq 1'24\right)}{\mathrm{P}\left(Z>0'83\right)} \\
&= \frac{\Phi(1'24)-\Phi(0'83)}{1-\Phi(0'83)} \\
&= \frac{0'8925-0'7967}{0'7967} \\
&= 0'1202.
\end{aligned}$$

ESTADÍSTICA . . . . enero 2020

---

1. (2'5 puntos). La temperatura corporal de cierta especie animal es una variable aleatoria que tiene una distribución normal de media 36,7ºC y desviación típica 3,8ºC. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 ejemplares de esa especie. Hallar la probabilidad de que la temperatura corporal de la media muestral:

a) Sea menor o igual a 36,9ºC
b) Esté comprendida entre 36,5ºC y 37,3ºC

Solución:

La media muestral $\bar{X}$ tiene una distribución N(36.7 , 3.8/10)= N(36.7, 0.38)

a)

$$P(\overline{X} \leq 36{,}9) = P\left(Z \leq \frac{36{,}9 - 36{,}7}{0{,}38}\right) = P(Z \leq 0{,}52) = 0{,}6985$$

(NOTA: SI SE HA BUSCADO EN LAS TABLAS P(Z≤0,53)=0,7019)

b)

$$P(36{,}5 \leq \overline{X} \leq 37{,}3) = P\left(\frac{36{,}5 - 36{,}7}{0{,}38} Z \leq \frac{37{,}3 - 36{,}7}{0{,}38}\right) =$$

$$P(-0{,}52 \leq Z \leq 1{,}58) = P(Z \leq 1{,}58) - P(Z \leq (-0{,}52) =$$

$$P(Z \leq 1{,}58) + P(Z \leq (0{,}52) - 1 = 0{,}695 + 0{,}9429 - 1 = 0{,}6379$$

(NOTA: SI SE HA BUSCADO EN LAS TABLAS P(Z≤0,53), ENTONCES: 0,9429+0,7019-1= 0,6448)

2. (2'5 puntos). Dos amigos inventan un peculiar juego usando una baraja de 40 cartas (10 números o figuras y 4 palos). El juego consiste en extraer dos cartas al azar.
Si aparecen dos ases, el amigo A recibe 5 puntos y el amigo B recibe 1. Si aparece un solo as, el amigo B recibe 4 puntos y A ninguno. Si no aparece ningún as pero ambas cartas son del mismo palo, el amigo A recibe 3 puntos y B ninguno. En cualquier otro caso, ninguno recibe puntos.
Sean X e Y las puntuaciones de los amigos A y B respectivamente,

a) Construye la función de cuantía conjunta (función de probabilidad conjunta) para las puntuaciones de una partida
b) Calcula las funciones de cuantía marginales (funciones de probabilidad marginales)
c) Calcula la función de cuantía condicional (función de probabilidad condicional) $g_1(x|Y = 0)$

Solución:

a)

Y				
4	$\frac{\binom{4}{1}\binom{36}{1}}{\binom{40}{2}} = \frac{144}{780} = 0.1846$	0	0	
1	0	0	$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{40}{2}} = \frac{6}{780} = 0.0077$	
0	$1 - \frac{144}{780} - \frac{144}{780} - \frac{6}{780} = \frac{486}{780} = 0.6231$	$\frac{\binom{9}{2}\binom{4}{1}}{\binom{40}{2}} = \frac{144}{780} = 0.1846$	0	
f(x,y)	**0**	**3**	**5**	***X***

b)

f₁(x)	$\frac{144}{780} + \frac{486}{780} = \frac{630}{780} = 0.8077$	$\frac{144}{780} = 0.1846$	$\frac{6}{780} = 0.0077$
X	**0**	**3**	**5**

4	$\frac{144}{780} = 0.1846$
1	$\frac{6}{780} = 0.0077$
0	$\frac{486}{780} + \frac{144}{780} = \frac{630}{780} = 0.8077$
Y	***f₂(y)***

c)

$$g_1(x|Y=0) = \frac{f(x,0)}{f_2(0)}$$

$g_1(x\|Y=0) = \frac{f(x,0)}{f_2(0)}$	$\frac{486}{780} \Big/ \frac{630}{780} = 0.7714$	$\frac{144}{780} \Big/ \frac{630}{780} = 0.2286$	$0 \Big/ \frac{630}{780} = 0$
X	**0**	**3**	**5**

3. (2'5 puntos). La concentración de dos componentes químicos en cierto compuesto viene dada por una variable bidimensional según la función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Determina si las variables X e Y son independientes
b) Calcula $Var(X-Y)$ de la forma: $Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$.
c) Calcula $E\left(2X^2 - 3Y^2 + \frac{1}{2}\right)$

Solución:

Todos los cálculos para Y son análogos.

a)

$$f_1(x) = \int_0^1 (x+y)\,dy = \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = x + \frac{1}{2}; \quad x \in [0,1]$$

$$f(x,y) \neq f_1(x) \cdot f_2(x)$$

Luego no son independientes.

b)

$$E(X) = \int_0^1 x f_1(x)\,dx = \int_0^1 x\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = 7/12$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 f_1(x)\,dx = \int_0^1 x^2\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6}\right]_0^1 = 5/12$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = 0.0763\hat{8}$$

$$E(XY) = \int_0^1\int_0^1 xyf(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\,dy\,dx = \int_0^1\left[\frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3}\right]_0^1 dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}dx = \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Y de ahí:

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{3} - \frac{7}{12}\cdot\frac{7}{12} = -0.0069\hat{4}$$

$$Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y) = 0.0763\hat{8} + 0.0763\hat{8} - 2\cdot(-0.0069\hat{4}) = 0.1\hat{6}$$

c)

$$E\left(2X^2 - 3Y^2 + \frac{1}{2}\right) = 2E(X^2) - 3E(Y^2) + \frac{1}{2} = 2\cdot\frac{5}{12} - 3\cdot\frac{5}{12} + \frac{1}{2} = \frac{1}{12} = 0.08\hat{3}$$

4. (2'5 puntos). Los 30 alumnos de una Escuela de Idiomas estudian inglés y francés. En las pruebas finales de estas materias se han obtenido los siguientes resultados: 18 han aprobado inglés, 14 han aprobado francés y 6 han aprobado los 2 idiomas.

a) Se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya aprobado inglés ni francés?
b) Se elige un estudiante al azar entre los aprobados de francés, ¿cuál es la probabilidad de que también haya aprobado inglés?

Solución:

I={aprobar inglés}; F={aprobar francés}

P(I) = 18/30=3/5=0,6; P(F)= 14/30=7/15=0,46666; P(I $\cap$ F)= 6/30=1/5=0,2

a) $P(\bar{I} \cap \bar{F}) = 1 - P(I \cup F) = 1 - \big(P(I) + P(F) - P(I \cap F)\big) = 1 - \left(\frac{3}{5} + \frac{7}{15} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{15} = 0{,}133333$

b)

$$P(I|F) = \frac{P(I \cap F)}{P(F)} = \frac{3}{7} = 0,428$$

ESTADÍSTICA . . . . enero 2017

1. (2'5 puntos). La probabilidad de que un cliente compre un producto de la marca A es 0,6 mientras que la probabilidad de que compre un producto de la marca E es 0,5. Se sabe también que la probabilidad de que un cliente compre un producto de la marca E no habiendo comprado el producto de la marca A es 0,4.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente haya comprado sólo el producto de la marca E?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente no haya comprado productos de ninguna de las dos marcas?

<u>Solución</u>:

A= compra producto de la marca A $\bar{A}$ = no compra producto de la marca A

E = compra producto de la marca E $\bar{E}$ = no compra producto de la marca E

P(A) = 0,6

P($\bar{A}$)=0,4

P(E) = 0,5

P(E/$\bar{A}$)= 0,4

a) $P(E \cap \bar{A}) = P(\bar{A})P(E/\bar{A}) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$

b) $P(\bar{A} \cap \bar{E}) = P(\bar{A})P(\bar{E}/\bar{A}) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$

$P(\bar{E}/\bar{A}) = 1 - P(E/\bar{A}) = 1 - 0,4 = 0,6$

2. (2'5 puntos). Sea *X* el número de iPhone 7 vendidos durante una semana en un Centro Comercial. La función de cuantía (función de probabilidad) de X es:

X	0	1	2	3	4
f(*x*)	0,1	0,2	0,3	0,25	0,15

El número *Y* de clientes que compra el IPhone con un seguro es:

$$Y = \begin{cases} 0 & si\ X = 0,1,2 \\ X - 2 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Calcular la función de cuantía (función de probabilidad) de la variable (*X*,*Y*)
b) ¿Son independientes *X* e *Y*?
c) Calcular la función de cuantía condicional (función de probabilidad condicional) $g_1(x/Y=1)$

Solución:

Solución: Y toma valores $\in \{0, 1, 2\}$. La cuantía conjunta es

Y						
2	0	0	0	0	0'15	
1	0	0	0	0'25	0	
0	0'1	0'2	0'3	0	0	
	0	1	2	3	4	X

La cuantía marginal de X es conocida y la de Y es

Y	0	1	2
f_2	0'6	0'25	0'15

Se observa que NO son independientes. La cuantía condicional es

$(X\|Y=1)$	0	1	2	3	4
g_1	0	0	0	1	0

El resultado era previsible pues si $Y = 1$, necesariamente es $X = 3$

3. (2'5 puntos). Un juego consiste en extraer una bola de una urna que contiene 2 bolas blancas, 3 rojas y 5 negras. Si la bola extraída es negra pierde lo apostado y finaliza el juego. Si es roja, recibe lo apostado y deja de jugar. Y, finalmente, si la bola extraída es blanca lanza una moneda, cobrando el doble de lo apostado si obtiene cruz, o cuatro veces lo apostado si sale cara. Si para jugar hay que pagar 1€ y el jugador juega 15 veces, ¿cuál será el posible beneficio o pérdida que tendrá?

Solución:

Sea X_i = {Beneficio de una jugada i}

x_i	$f(x_i)$
-1	$\frac{CF}{CP} = \frac{C_{5,1}}{C_{10,1}} = \frac{5}{10}$
0	$\frac{CF}{CP} = \frac{C_{3,1}}{C_{10,1}} = \frac{3}{10}$
-1+2 = 1	$\frac{C_{2,1}}{C_{10,1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$
-1+4 = 3	$\frac{C_{2,1}}{C_{10,1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$

El beneficio esperado tras las 15 veces que juega será: $E(X) = E(\sum_{i=1}^{15} X_i) = \sum_{i=1}^{15} E(X_i) = 15 \cdot E(X_i)$. Por tanto, hay que calcular $E(X_i)$:

$$E(X_i) = \sum_i x_i \cdot f(x_i) = (-1) \cdot \frac{5}{10} + 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} = -\frac{1}{10}$$

Por lo que el beneficio esperado tras las 15 jugadas será: $E(X) = 15 \cdot E(X_i) = 15 \cdot \frac{-1}{10} = -1'5$

4. (2'5 puntos). En un programa de televisión, se propone un juego al concursante que consiste en lo siguiente. Sabiendo que aproximadamente el 70% de la población no fuma, debe elegir 50 personas del público. Para ganar debe elegir una de las dos siguientes condiciones y que se cumpla:

a) El número de no fumadores que hay entre los elegidos es mayor de 30
b) Se va preguntando uno a uno a los elegidos y se tienen ya más de 10 fumadores. Teniendo en cuenta esto, no deben superarse los 18 fumadores

¿Cuál es la más probable que se cumpla?

<u>Solución</u>:

X = {NO FUMADORES} => X~B(50,0'7) ; Y = {FUMADORES} => Y~B(50,0'3)

a) ¿P(X > 30)?

$P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30)$; como n=50, no se pueden utilizar las tablas de la Binomial. Aproximando por la Normal: $Z = \frac{X-E(X)}{+\sqrt{VAR(X)}} \sim N(0,1)$

$E(X) = n \cdot p = 50 \cdot 0'7 = 35$ y $VAR(X) = n \cdot p \cdot q = 50 \cdot 0'7 \cdot 0'3 = 10'5$

$$P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30) = [Aprox. Normal] = 1 - P(Z \leq \frac{30-35}{+\sqrt{10'5}})$$
$$= 1 - \phi(\frac{-5}{3'24}) =$$
$$= 1 - \phi(-1'54) = 1 - [1 - \phi(1'54)] = \phi(1'54) = [Tablas] = 0'938220$$

b) ¿$P(Y \leq 18 \,/\, Y > 10)$?

$P(Y \leq 18 \,/\, Y > 10) = \frac{P(\,(Y \leq 18) \cap (Y > 10)\,)}{P(Y>10)} = \frac{P(10 < Y \leq 18))}{1-P(Y\leq 10)} = \frac{F(18) - F(10)}{1 - P(Y \leq 10)}$; como n=50, no se pueden utilizar las tablas de la Binomial.

Aproximando por la Normal: $Z = \frac{Y-E(Y)}{+\sqrt{VAR(Y)}} \sim N(0,1)$

$E(Y) = n \cdot p = 50 \cdot 0'3 = 15$ y $VAR(Y) = n \cdot p \cdot q = 50 \cdot 0'3 \cdot 0'7 = 10'5$

$$F(18) = P(Y \leq 18) = [Aprox. Normal] = P(Z \leq \frac{18-15}{+\sqrt{10'5}}) = \phi(\frac{3}{3'24}) =$$
$$= \phi(0'93) = [Tablas] = 0'823814$$

$$F(10) = P(Y \leq 10) = [Aprx. Normal] = P(Z \leq \frac{10-15}{+\sqrt{10'5}}) = \phi(\frac{-5}{3'24}) = 1 - \phi(\frac{5}{3'24}) =$$
$$= 1 - \phi(1'54) = [Tablas] = 1 - 0'938220 = 0'06178$$

Así pues, $P(Y \leq 18 \,/\, Y > 10) = \frac{F(18) - F(10)}{1 - P(Y \leq 10)} = \frac{0'823814 - 0'06178}{1 - 0'06178} = \frac{0'762034}{0'938220} = 0'81221$

Por tanto, la opción más probable es la ***a)***

ESTADÍSTICA .... julio 2017

1. (2'5 puntos). Sabemos que el 8% de las personas que entran en una tienda de Informática son mujeres jóvenes y que en esa misma tienda, de las mujeres que entran el 40% son jóvenes. Calcular la probabilidad de que si en la tienda tropezamos aleatoriamente con una persona, ésta sea un hombre.

Solución:

J= {ser joven}
M= {ser mujer}
H= {ser hombre}

Si P(M ∩ J)=0,08 y además P(J/M)=0,4

P(J/M)= P(M ∩ J)/P(M) = 0,08/P(M) → P(M) = 0,08/ 0,4 = 0, 2
P(M) = 0, 2

luego P(H)= 1- P(M) =1- 0,2 =0,8

2. (2'5 puntos). El número de coches que llegan a una gasolinera en una hora es por término medio de 3. Calcular la probabilidad de que, después de abrir, en cada una de las siguientes 3 horas lleguen más de dos coches por hora.

Solución:

X= número de coches que llega a la gasolinera en 1 hora
X se distribuye Poisson con parámetro λ= 3 X ~P(λ= 3)
P(lleguen más de dos coches en 1 hora) = P(X>2) = 1- P(X ≤ 2) = 1 – 0,4232 = 0,5768

Como tiene que ocurrir en cada una de las siguientes 3 horas (y son independientes):
P({lleguen más de dos coches en la primera hora} ⋂{lleguen más de dos coches en la segunda hora}⋂{lleguen más de dos coches en la tercera hora}) = $(0,5768)^3$ = 0,1919

3. (2'5 puntos). Sea una variable aleatoria bidimensional con la siguiente función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = kxy, \text{ para } 2 \leq x \leq 4 \text{ y } 2 \leq y \leq 4$$

Se pide:

a) Calcular el valor de k.
b) Calcular las funciones de densidad marginales.
c) Calcular las funciones de densidad condicionales.
d) Calcular $P(2 < x \leq 3 \ / \ 1{,}5 < y \leq 3{,}75)$

Solución:

a)

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_2^4\int_2^4 kxy\ dxdy = k\int_2^4 x\left[\int_2^4 y\ dy\right]dx =$$

$$= k\int_2^4 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_2^4 dx = k\int_2^4 x\cdot\left(\frac{16}{2}-\frac{4}{2}\right)\ dx = k\int_2^4 \frac{12}{2}x\ dx =$$

$$= 6\cdot k\int_2^4 x\ dx = 6\cdot k\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4 = 6\cdot k\left(\frac{16}{2}-\frac{4}{2}\right) = 6\cdot 6\cdot k = 36\cdot k = 1 \to k = \frac{1}{36}$$

b)

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_2^4 \frac{1}{36}xy\ dy = \frac{1}{36}x\int_2^4 y\ dy = \frac{1}{36}x\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]_2^4 =$$

$$= \frac{1}{36}x\cdot\left(\frac{16}{2}-\frac{4}{2}\right) = \frac{1}{36}\cdot\frac{12}{2}x = \frac{1}{6}x; 2\le x\le 4; 0\ en\ el\ resto.$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_2^4 \frac{1}{36}xy\ dx = \frac{1}{36}y\int_2^4 x\ dx = \frac{1}{36}y\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4 =$$

$$= \frac{1}{36}y\cdot\left(\frac{16}{2}-\frac{4}{2}\right) = \frac{1}{36}\cdot\frac{12}{2}y = \frac{1}{6}y; 2\le y\le 4; 0\ en\ el\ resto.$$

c) Como son independientes porque $f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y), para\ todo\ (x,y)$

$$g_1\left({}^{x}/_{y}\right) = f_1(x) = \frac{1}{6}x; 2\le x\le 4; 0\ en\ el\ resto.$$

y

$$g_2\left({}^{y}/_{x}\right) = f_2(y) = \frac{1}{6}y; 2\le y\le 4; 0\ en\ el\ resto.$$

d) Como son independientes porque $f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y), para\ todo\ (x,y)$

$$P\left({}^{2<x\le 3}/_{y\le 3}\right) = P(2<x\le 3) = \int_2^3 f_1(x)\ dx = \int_2^3 \frac{1}{6}x\ dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int_2^3 x\ dx = \frac{1}{6}\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3 = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{9}{2}-\frac{4}{2}\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{2} = \frac{5}{12}$$

4. (2'5 puntos). Un jugador lanza dos monedas. Gana 1€ ó 2 € si aparecen una o dos caras. Por otra parte pierde 5€ si no aparece cara. Determinar la ganancia esperada del juego.

Solución:

G = {GANANCIA DEL JUEGO} => Se pide E(G)

Ω = {(C,C);(C,X);(X,C);(X,X)} => CP = $VR_{2,2}=2^2=4$

Función de cuantía de G:

- Para:
  - G=+1 => UNA CARA => {(C,X),(X,C)} => CF=2
  - G=+2 => DOS CARAS => {(C,C)} => CF=1
  - G=-5 => NINGUNA CARA => {(X,X)} => CF=1

G	+1	+2	-5
f(G)=CF/CP	2/4	1/4	1/4

$$E(G) = \sum_i g_i \cdot f(g_i) = 1 \cdot \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + (-5) \cdot \frac{1}{4} = 1 - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4}$$