



Ingeniería Informática



AUTOMATIZACIÓN Y ROBÓTICA

TEMA 11 (Teoría - Práctica)

Cinemática de los sistemas robóticos 1

Jorge Pomares y Carlos A. Jara

1



Cinemática directa de robots manipuladores

1. Introducción.
2. Espacio articular y espacio cartesiano.
3. Problema cinemático directo.
4. Conclusiones.

2



INTRODUCCIÓN

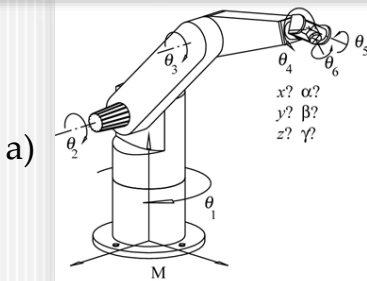
3



Introducción

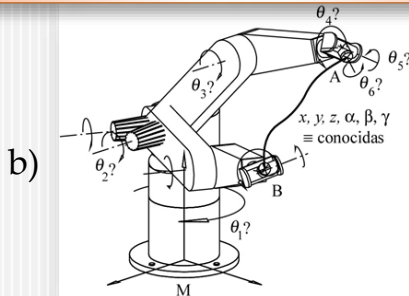
- Modelo cinemático: estudia la localización del robot sin tener en cuenta las fuerzas y/o pares que causan el movimiento.
- Problemas a resolver en un sistema robótico:

Determinar la localización del extremo del robot basándose en la posición de las articulaciones



Cinemática directa

Determinar la posición de las articulaciones del robot si lo que se conoce es la localización del extremo



Cinemática inversa

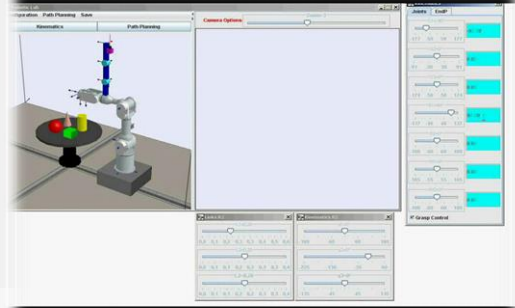
4

Introducción: aplicaciones modelo cinemático

- **Aplicaciones** del modelo cinemático de un robot.
 - Simulación del movimiento de sistemas robóticos.
 - Control cinemático de robots: planificación de trayectorias.
 - Diseño de robots: cálculo de las dimensiones óptimas de los eslabones.



Fuente: Youtube (<https://www.youtube.com/watch?v=cZdtytGM08>)



Fuente: propia

5

Ingeniería Informática



ESPACIO ARTICULAR Y ESPACIO CARTESIANO

6

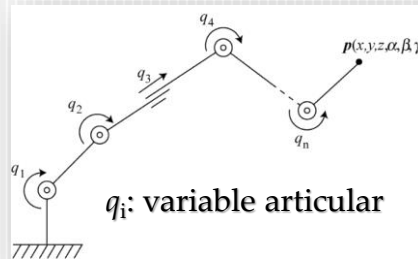
Espacio articular – Espacio cartesiano

Espacio articular

Vector de variables articulares define la posición de todas las articulaciones del robot

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$$

Modelo
cinemático
inverso



Robot de n articulaciones

Modelo
cinemático
directo

Espacio cartesiano

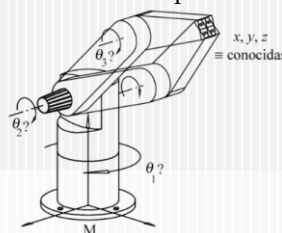
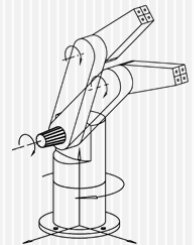
$$\mathbf{p} = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$$

Vector de posición y orientación del extremo del robot en el espacio cartesiano tridimensional euclídeo

7

Espacio articular – Espacio cartesiano

- **Resolución modelo cinemático directo.**
 - Solución única: dado un vector de variables articulares de un sistema robótico, sólo existe una posición y orientación del extremo final.
- **Resolución modelo cinemático inverso.**
 - Posibles diferentes soluciones.
 - *Múltiples soluciones*: diferentes configuraciones del robot para un mismo punto en el espacio cartesiano.
 - *Sin solución*: soluciones fuera del espacio de trabajo o singularidades.

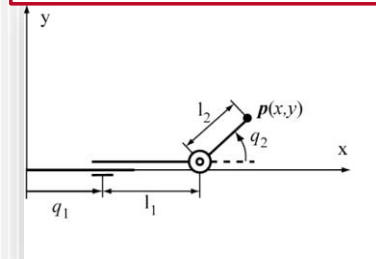


8

Espacio articular – Espacio cartesiano

- Ejemplo de resolución del modelo cinemático
 - Mecanismo de 2 GDL: prismática – rotacional.

Modelo cinemático directo



$$\mathbf{q} = (q_1, q_2)$$



$$\mathbf{p} = (x, y)$$

$$x = q_1 + l_1 + l_2 \cdot \cos q_2$$

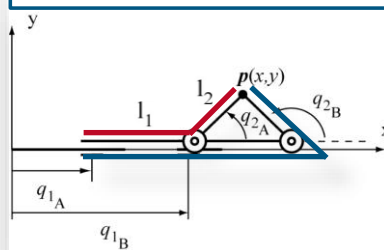
$$y = l_2 \cdot \sin q_2$$

9

Espacio articular – Espacio cartesiano

- Ejemplo de resolución del modelo cinemático
 - Mecanismo de 2 GDL: prismática – rotacional.

Modelo cinemático inverso



$$\mathbf{p} = (x, y)$$



$$\mathbf{q}_{s1} = (q_{1A}, q_{2A}) \quad \mathbf{q}_{s2} = (q_{1B}, q_{2B})$$

$$\frac{y}{l_2} = \sin q_2 \Rightarrow q_2 = \arcsin\left(\frac{y}{l_2}\right)$$

$$q_1 = x - l_1 - l_2 \cdot \cos\left(\arcsin\left(\frac{y}{l_2}\right)\right)$$

$$q_{2A} = \arcsin\left(\frac{y}{l_2}\right) \quad q_{2B} = \pi - \arcsin\left(\frac{y}{l_2}\right)$$



$$q_{1A} \quad q_{1B}$$

10

PROBLEMA CINEMÁTICO DIRECTO

11

Problema cinemático directo

▪ Objetivo

- Obtener la localización del extremo del robot basándose en el valor de las variables articulares.

$$(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) \xrightarrow{\text{blue arrow}} \boxed{p = F(q)} \xrightarrow{\text{orange arrow}} (q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$$

▪ Resolución

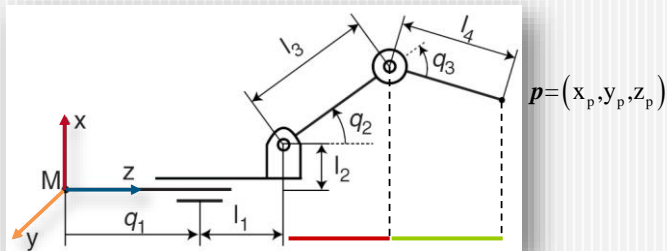
- Método geométrico.
 - Utiliza relaciones trigonométricas para obtener la posición del extremo del robot.
 - Normalmente sólo se utiliza para obtener la posición y no la orientación.
- Mediante transformaciones homogéneas.
 - Algoritmo Denavit-Hartenberg (DH).

12

Problema cinemático directo

Método geométrico. Ejemplo 1 de resolución.

- Mecanismo robótico planar de 3 GDL.
 - 1 Prismática (q_1).
 - 2 Rotacionales (q_2, q_3).



$$z_p = q_1 + l_1 + l_3 \cos q_2 + l_4 \cos(q_2 + q_3)$$

$$x_p = l_2 + l_3 \sin q_2 + l_4 \sin(q_2 + q_3)$$

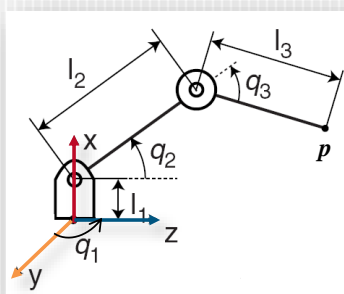
$$y_p = 0$$

13

Problema cinemático directo

Método geométrico. Ejemplo 2 de resolución.

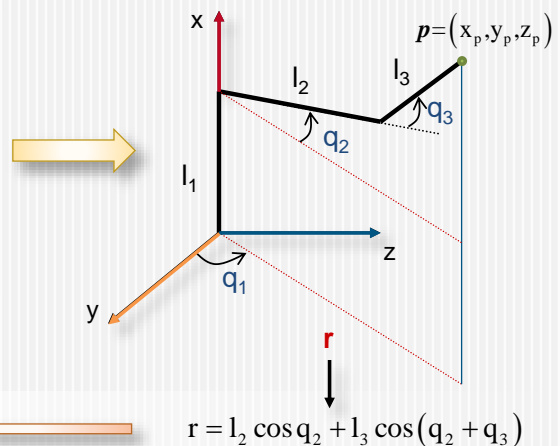
- Mecanismo robótico de 3 GDL rotacionales (q_1, q_2, q_3).



$$x_p = l_1 + l_2 \sin q_2 + l_3 \sin(q_2 + q_3)$$

$$y_p = r \cdot \cos q_1$$

$$z_p = r \cdot \sin q_1$$



$$r = l_2 \cos q_2 + l_3 \cos(q_2 + q_3)$$

14

Problema cinemático directo

Mediante transformaciones homogéneas.

- Asocia Sistemas de Referencia a cada eslabón del mecanismo robótico.
- Calcula las transformaciones homogéneas compuestas de traslaciones y giros básicos para pasar del sistema asociado al eslabón $i-1$ al del i .
- La transformación queda en función de los parámetros de la articulación i .

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \mathbf{F}(q_i)$$



Algoritmo Denavit-Hartenberg (DH)

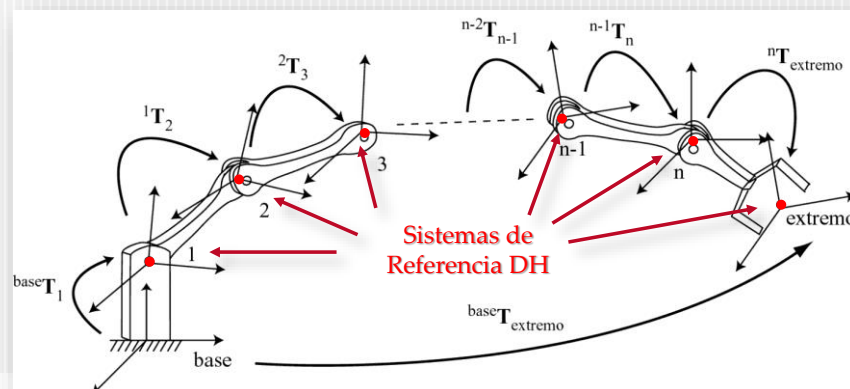
- Definición de reglas para asociar Sistemas de Referencia a los eslabones de un robot
- Definición y cálculo de los Parámetros DH para pasar de un Sistema de Referencia a otro
- Cálculo de la transformación entre el Sistema de Referencia de la base y del extremo

15

Problema cinemático directo

Mediante transformaciones homogéneas.

- Iterando las transformaciones homogéneas desde la base al extremo, se puede obtener ${}^{base}\mathbf{T}_{extremo}$ a partir del vector q .



Robot de n articulaciones

16

Problema cinemático directo

- Mediante transformaciones homogéneas.
 - Definición de los parámetros DH.
 - 4 Transformaciones simples para obtener la matriz ${}^{i-1}\mathbf{T}_i$



Parámetros DH (θ_i d_i a_i α_i)

2 Transformaciones de rotación (θ_i , α_i)

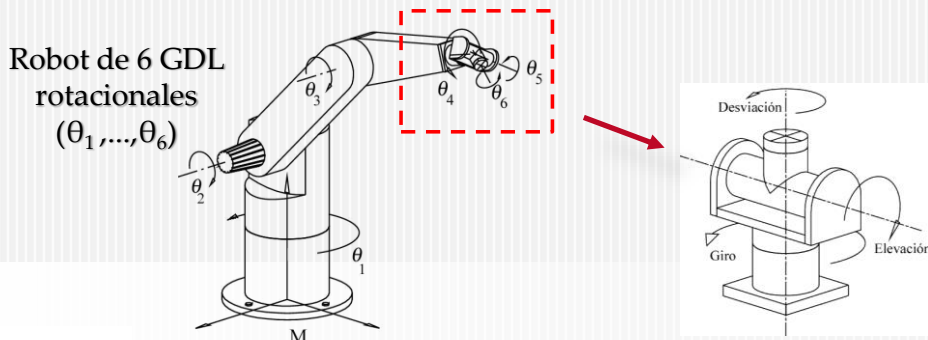
2 Transformaciones de traslación (d_i , a_i)

Parámetros variables relativos a una articulación (rotación, prismática) $\rightarrow \theta_i, d_i$

17

Problema cinemático directo

- Solución cinemática de un robot articular mediante DH.
 - Aplicación del algoritmo DH: reglas para resolver la cinemática directa.
 - 1. Reglas para la definición de los sistemas de referencia \rightarrow 1-9 reglas.
 - 2. Reglas para calcular los parámetros DH que relaciona un sistema de referencia con otro (θ_i d_i a_i α_i) \rightarrow 10-13 reglas.
 - 3. Reglas para calcular la matriz de transformación ${}^{base}\mathbf{T}_{extremo}$, 14-15 reglas.



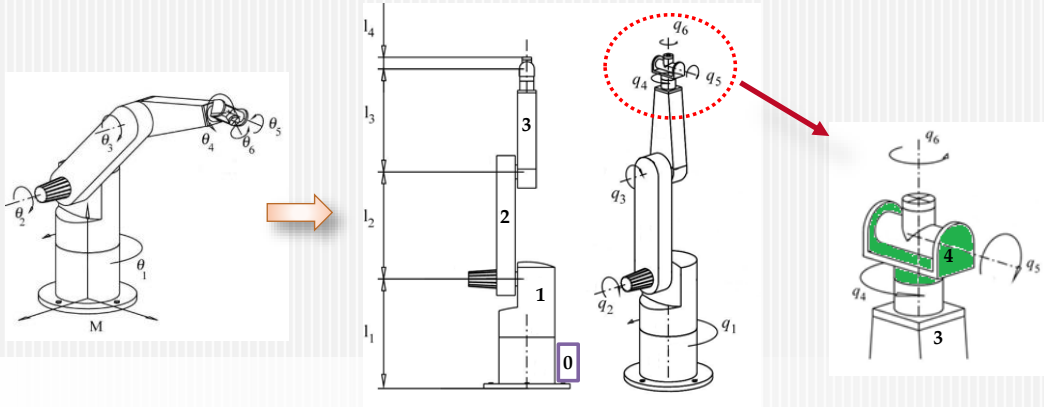
18

Problema cinemático directo

Algoritmo DH.

Regla nº 1

- 1. Numerar los eslabones comenzando con 1 (primer eslabón móvil de la cadena) y acabando con n (último eslabón móvil). Se numerará como eslabón 0 a la base fija del robot.



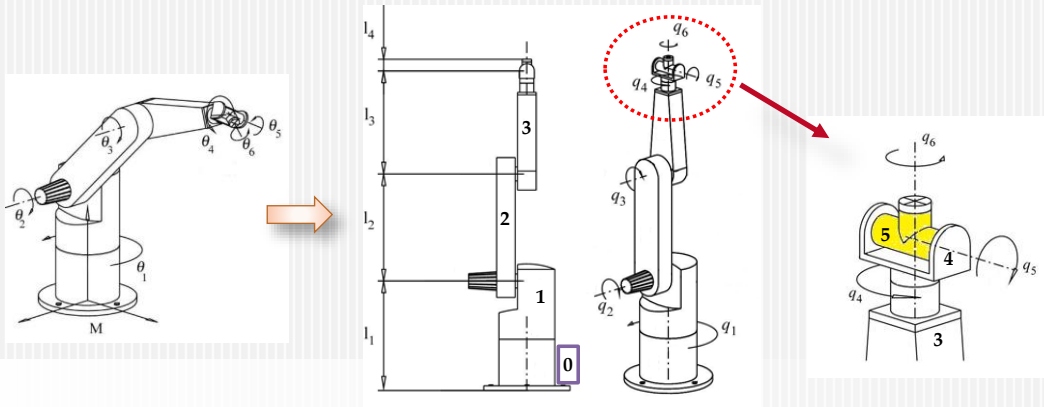
19

Problema cinemático directo

Algoritmo DH.

Regla nº 1

- 1. Numerar los eslabones comenzando con 1 (primer eslabón móvil de la cadena) y acabando con n (último eslabón móvil). Se numerará como eslabón 0 a la base fija del robot.



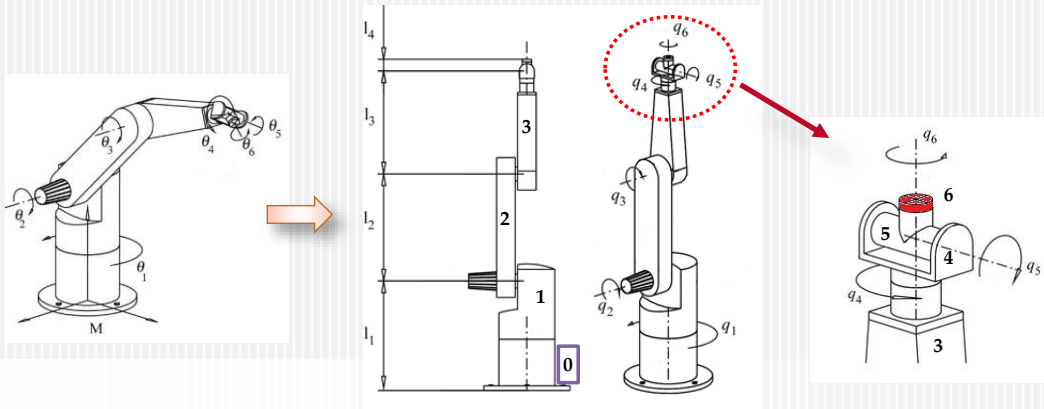
20

Problema cinemático directo

Regla nº 1

Algoritmo DH.

- 1. Numerar los eslabones comenzando con 1 (primer eslabón móvil de la cadena) y acabando con n (último eslabón móvil). Se numerará como eslabón 0 a la base fija del robot.



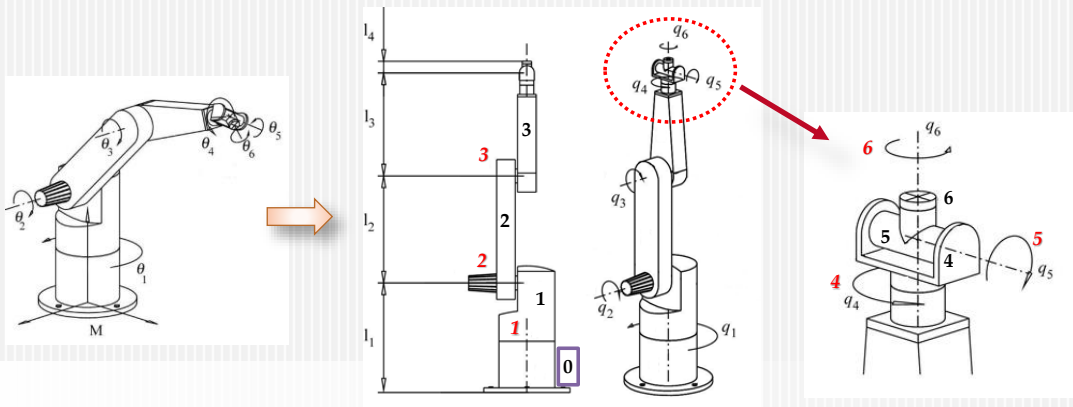
21

Problema cinemático directo

Regla nº 2

Algoritmo DH.

- 2. Numerar cada articulación comenzando por 1 (la correspondiente al primer grado de libertad) y acabando en n .



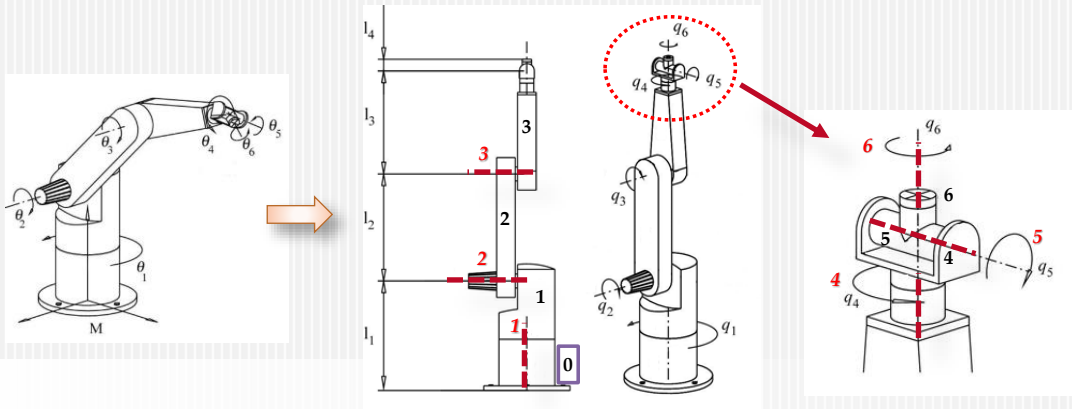
22

Problema cinemático directo

Algoritmo DH.

Regla nº 3

- 3. Localizar el eje de cada articulación. Si ésta es rotativa, el eje será su propio eje de giro. Si es prismática será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento.



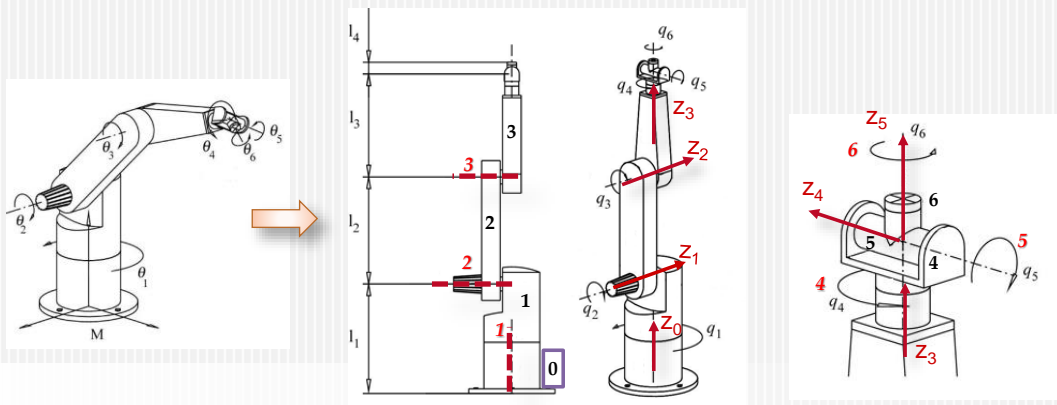
23

Problema cinemático directo

Algoritmo DH.

Regla nº 4

- 4. Para el eje i , de 0 a $n-1$, situar el eje z_i sobre el eje de la articulación $i+1$.



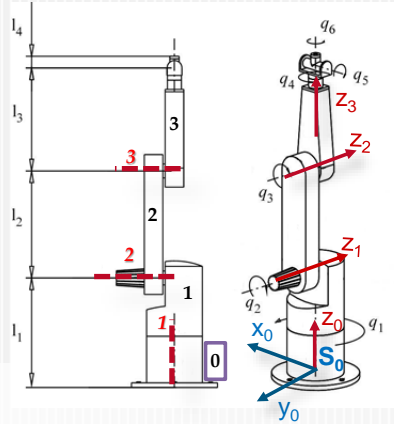
24

Problema cinemático directo

Regla nº 5

Algoritmo DH.

- 5. Situar el origen del sistema de la base S_0 en cualquier punto del eje z_0 . Los ejes x_0 e y_0 se situarán de modo que formen un sistema dextrógiro con z_0 .



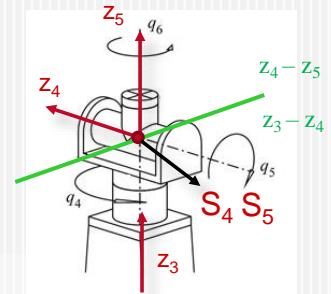
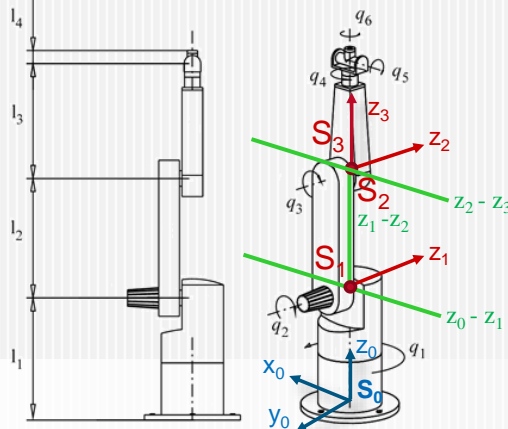
25

Problema cinemático directo

Regla nº 6

Algoritmo DH.

- 6. Para i de 1 a $n-1$, situar el origen del sistema S_i en la intersección del eje z_i con la línea normal común a z_{i-1} y z_{i+1} . Si ambos ejes se cortasen se situaría S_i en el punto de corte. Si fuesen paralelos situaría S_i en la articulación $i+1$.



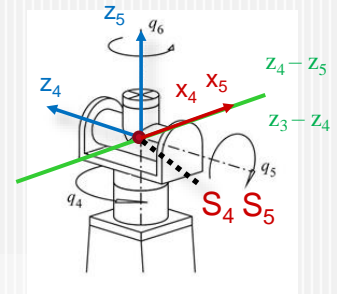
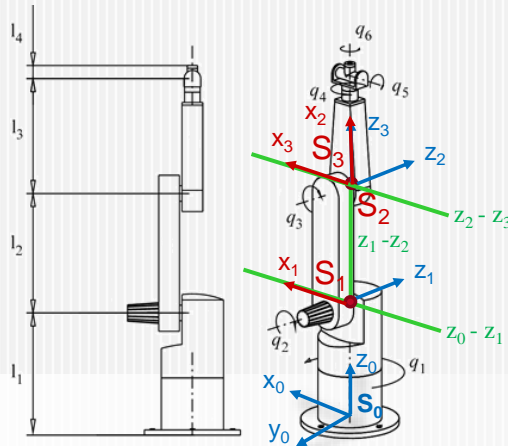
26

Problema cinemático directo

Algoritmo DH.

- 7. Situar x_i en la línea normal común a z_{i-1} y z_i .

Regla nº 7



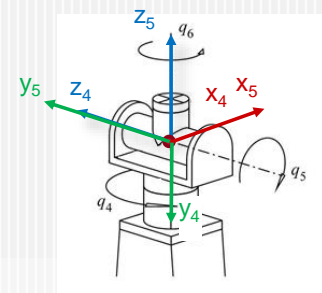
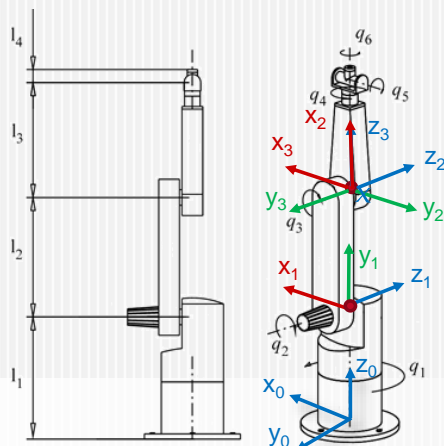
27

Problema cinemático directo

Algoritmo DH.

- 8. Situar y_i de modo que forme un sistema dextrógiro con x_i y z_i .

Regla nº 8



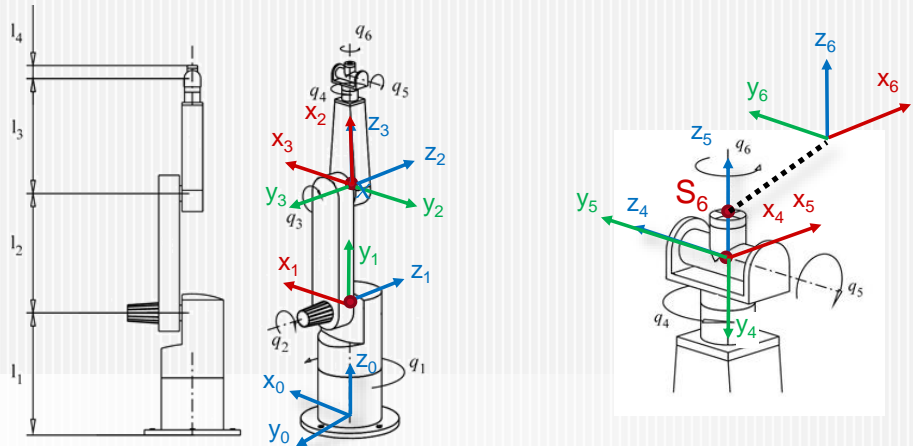
28

Problema cinemático directo

Algoritmo DH.

Regla nº 9

- 9. Situar el sistema S_n en el extremo del robot de modo que z_n coincida con la dirección de z_{n-1} y x_n sea normal a z_{n-1} y z_n .

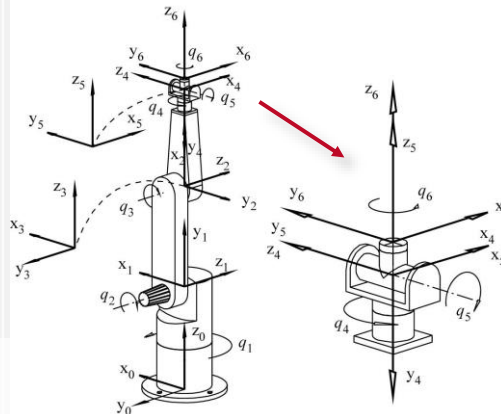


29

Problema cinemático directo

Algoritmo DH.

1. Reglas para la definición de los sistemas de referencia → 1-9 reglas.
2. Reglas para calcular los parámetros DH que relaciona un sistema de referencia con otro (θ_i d_i a_i α_i) → 10-13 reglas.
3. Reglas para calcular las matriz de transformación ${}^{base}T_{extremo}$. 14-15 reglas.



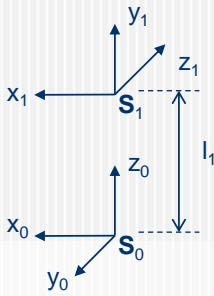
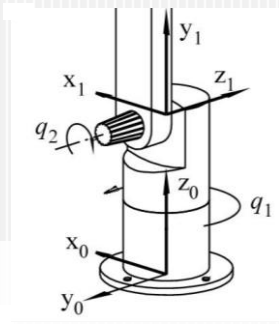
30



Problema cinemático directo

Reglas 10-13

- **Algoritmo DH.**
 - 10. θ_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{z}_{i-1} para que \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i queden paralelos.
 - 11. d_i : distancia medida sobre \mathbf{z}_{i-1} que habría que desplazar \mathbf{S}_{i-1} para alinear \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i
 - 12. a_i : distancia medida sobre \mathbf{x}_i (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_{i-1}) que habría que desplazar el nuevo \mathbf{S}_{i-1} para que su origen coincidiese con \mathbf{S}_i .
 - 13. α_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{x}_{i-1} (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_i) para que el nuevo \mathbf{S}_{i-1} coincidiese totalmente con \mathbf{S}_i .



	θ_i	d_i	a_i	α_i
1				

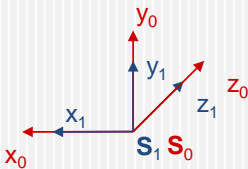
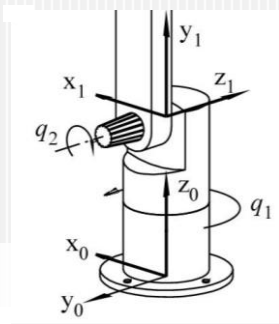
31



Problema cinemático directo

Reglas 10-13

- **Algoritmo DH.**
 - 10. θ_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{z}_{i-1} para que \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i queden paralelos.
 - 11. d_i : distancia medida sobre \mathbf{z}_{i-1} que habría que desplazar \mathbf{S}_{i-1} para alinear \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i
 - 12. a_i : distancia medida sobre \mathbf{x}_i (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_{i-1}) que habría que desplazar el nuevo \mathbf{S}_{i-1} para que su origen coincidiese con \mathbf{S}_i .
 - 13. α_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{x}_{i-1} (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_i) para que el nuevo \mathbf{S}_{i-1} coincidiese totalmente con \mathbf{S}_i .



	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	0	90°

32

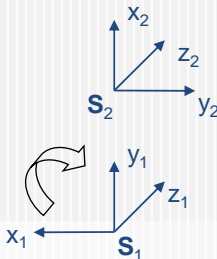
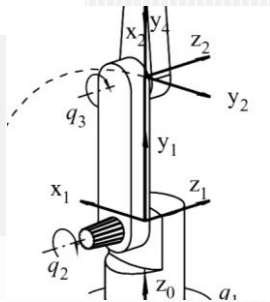


Problema cinemático directo

Reglas 10-13

Algoritmo DH.

- 10. θ_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{z}_{i-1} para que \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i queden paralelos.
- 11. d_i : distancia medida sobre \mathbf{z}_{i-1} que habría que desplazar \mathbf{S}_{i-1} para alinear \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i
- 12. a_i : distancia medida sobre \mathbf{x}_i (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_{i-1}) que habría que desplazar el nuevo \mathbf{S}_{i-1} para que su origen coincidiese con \mathbf{S}_i .
- 13. α_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{x}_{i-1} (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_i) para que el nuevo \mathbf{S}_{i-1} coincidiese totalmente con \mathbf{S}_i .



	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	0	90°
2				

33

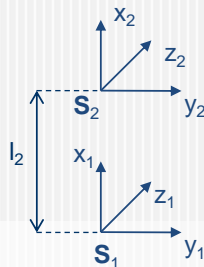
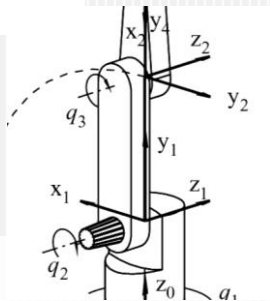


Problema cinemático directo

Reglas 10-13

Algoritmo DH.

- 10. θ_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{z}_{i-1} para que \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i queden paralelos.
- 11. d_i : distancia medida sobre \mathbf{z}_{i-1} que habría que desplazar \mathbf{S}_{i-1} para alinear \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i
- 12. a_i : distancia medida sobre \mathbf{x}_i (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_{i-1}) que habría que desplazar el nuevo \mathbf{S}_{i-1} para que su origen coincidiese con \mathbf{S}_i .
- 13. α_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{x}_{i-1} (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_i) para que el nuevo \mathbf{S}_{i-1} coincidiese totalmente con \mathbf{S}_i .



	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	0	90°
2	$q_2 + 90^\circ$			

34

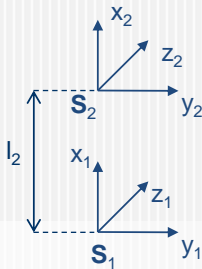
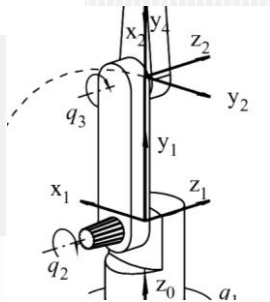


Problema cinemático directo

Reglas 10-13

Algoritmo DH.

- 10. θ_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{z}_{i-1} para que \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i queden paralelos.
- 11. d_i : distancia medida sobre \mathbf{z}_{i-1} que habría que desplazar \mathbf{S}_{i-1} para alinear \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i
- 12. a_i : distancia medida sobre \mathbf{x}_i (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_{i-1}) que habría que desplazar el nuevo \mathbf{S}_{i-1} para que su origen coincidiese con \mathbf{S}_i .
- 13. α_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{x}_{i-1} (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_i) para que el nuevo \mathbf{S}_{i-1} coincidiese totalmente con \mathbf{S}_i .



	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	0	90°
2	$q_2 + 90^\circ$	0		

35

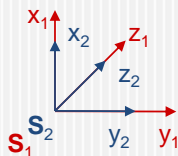
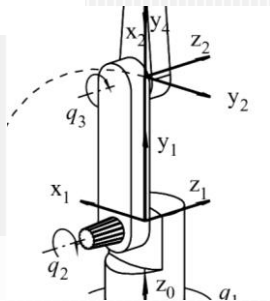


Problema cinemático directo

Reglas 10-13

Algoritmo DH.

- 10. θ_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{z}_{i-1} para que \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i queden paralelos.
- 11. d_i : distancia medida sobre \mathbf{z}_{i-1} que habría que desplazar \mathbf{S}_{i-1} para alinear \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i
- 12. a_i : distancia medida sobre \mathbf{x}_i (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_{i-1}) que habría que desplazar el nuevo \mathbf{S}_{i-1} para que su origen coincidiese con \mathbf{S}_i .
- 13. α_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{x}_{i-1} (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_i) para que el nuevo \mathbf{S}_{i-1} coincidiese totalmente con \mathbf{S}_i .



	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	0	90°
2	$q_2 + 90^\circ$	0	l_2	

36

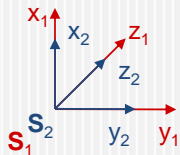
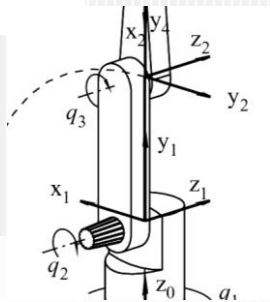


Problema cinemático directo

Reglas 10-13

Algoritmo DH.

- 10. θ_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{z}_{i-1} para que \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i queden paralelos.
- 11. d_i : distancia medida sobre \mathbf{z}_{i-1} que habría que desplazar \mathbf{S}_{i-1} para alinear \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i
- 12. a_i : distancia medida sobre \mathbf{x}_i (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_{i-1}) que habría que desplazar el nuevo \mathbf{S}_{i-1} para que su origen coincidiese con \mathbf{S}_i .
- 13. α_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{x}_{i-1} (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_i) para que el nuevo \mathbf{S}_{i-1} coincidiese totalmente con \mathbf{S}_i .



	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	0	90°
2	$q_2 + 90^\circ$	0	l_2	0

37

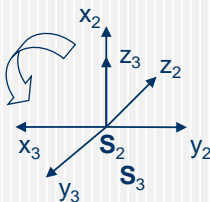
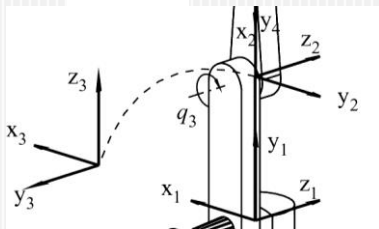


Problema cinemático directo

Reglas 10-13

Algoritmo DH.

- 10. θ_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{z}_{i-1} para que \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i queden paralelos.
- 11. d_i : distancia medida sobre \mathbf{z}_{i-1} que habría que desplazar \mathbf{S}_{i-1} para alinear \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i
- 12. a_i : distancia medida sobre \mathbf{x}_i (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_{i-1}) que habría que desplazar el nuevo \mathbf{S}_{i-1} para que su origen coincidiese con \mathbf{S}_i .
- 13. α_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{x}_{i-1} (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_i) para que el nuevo \mathbf{S}_{i-1} coincidiese totalmente con \mathbf{S}_i .



	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	0	90°
2	$q_2 + 90^\circ$	0	l_2	0
3				

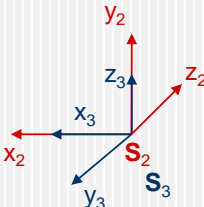
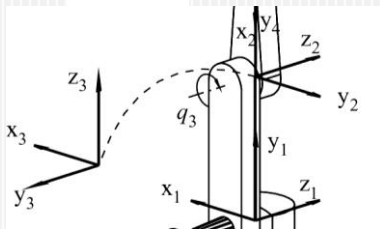
38



Problema cinemático directo

Reglas 10-13

- **Algoritmo DH.**
 - 10. θ_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{z}_{i-1} para que \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i queden paralelos.
 - 11. d_i : distancia medida sobre \mathbf{z}_{i-1} que habría que desplazar \mathbf{S}_{i-1} para alinear \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i
 - 12. a_i : distancia medida sobre \mathbf{x}_i (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_{i-1}) que habría que desplazar el nuevo \mathbf{S}_{i-1} para que su origen coincidiese con \mathbf{S}_i .
 - 13. α_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{x}_{i-1} (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_i) para que el nuevo \mathbf{S}_{i-1} coincidiese totalmente con \mathbf{S}_i .



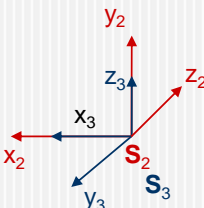
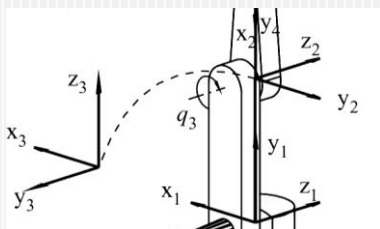
	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	0	90°
2	$q_2 + 90^\circ$	0	l_2	0
3	$q_3 - 90^\circ$			



Problema cinemático directo

Reglas 10-13

- **Algoritmo DH.**
 - 10. θ_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{z}_{i-1} para que \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i queden paralelos.
 - 11. d_i : distancia medida sobre \mathbf{z}_{i-1} que habría que desplazar \mathbf{S}_{i-1} para alinear \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i
 - 12. a_i : distancia medida sobre \mathbf{x}_i (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_{i-1}) que habría que desplazar el nuevo \mathbf{S}_{i-1} para que su origen coincidiese con \mathbf{S}_i .
 - 13. α_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{x}_{i-1} (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_i) para que el nuevo \mathbf{S}_{i-1} coincidiese totalmente con \mathbf{S}_i .



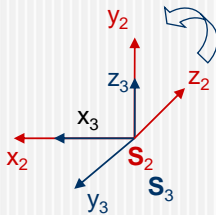
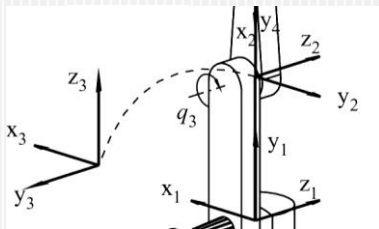
	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	0	90°
2	$q_2 + 90^\circ$	0	l_2	0
3	$q_3 - 90^\circ$	0		

Problema cinemático directo

Reglas 10-13

■ Algoritmo DH.

- 10. θ_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{z}_{i-1} para que \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i queden paralelos.
- 11. d_i : distancia medida sobre \mathbf{z}_{i-1} que habría que desplazar \mathbf{S}_{i-1} para alinear \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i
- 12. a_i : distancia medida sobre \mathbf{x}_i (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_{i-1}) que habría que desplazar el nuevo \mathbf{S}_{i-1} para que su origen coincidiese con \mathbf{S}_i .
- 13. α_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{x}_{i-1} (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_i) para que el nuevo \mathbf{S}_{i-1} coincidiese totalmente con \mathbf{S}_i .



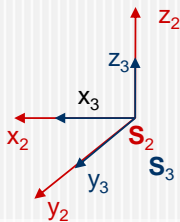
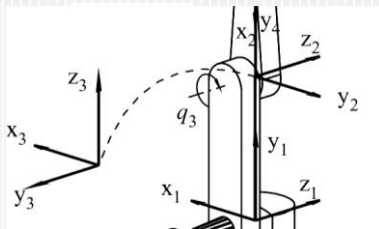
	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	0	90°
2	$q_2 + 90^\circ$	0	l_2	0
3	$q_3 - 90^\circ$	0	0	

Problema cinemático directo

Reglas 10-13

■ Algoritmo DH.

- 10. θ_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{z}_{i-1} para que \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i queden paralelos.
- 11. d_i : distancia medida sobre \mathbf{z}_{i-1} que habría que desplazar \mathbf{S}_{i-1} para alinear \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i
- 12. a_i : distancia medida sobre \mathbf{x}_i (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_{i-1}) que habría que desplazar el nuevo \mathbf{S}_{i-1} para que su origen coincidiese con \mathbf{S}_i .
- 13. α_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{x}_{i-1} (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_i) para que el nuevo \mathbf{S}_{i-1} coincidiese totalmente con \mathbf{S}_i .



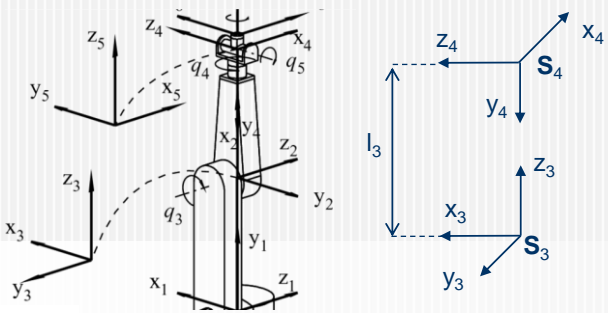
	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	0	90°
2	$q_2 + 90^\circ$	0	l_2	0
3	$q_3 - 90^\circ$	0	0	-90°



Problema cinemático directo

Reglas 10-13

- **Algoritmo DH.**
 - 10. θ_i : ángulo que habría que girar en torno a z_{i-1} para que x_{i-1} y x_i queden paralelos.
 - 11. d_i : distancia medida sobre z_{i-1} que habría que desplazar S_{i-1} para alinear x_{i-1} y x_i
 - 12. a_i : distancia medida sobre x_i (que ahora coincidiría con x_{i-1}) que habría que desplazar el nuevo S_{i-1} para que su origen coincidiese con S_i .
 - 13. α_i : ángulo que habría que girar en torno a x_{i-1} (que ahora coincidiría con x_i) para que el nuevo S_{i-1} coincidiese totalmente con S_i .



	θ_i	d_i	a_i	α_i
4				

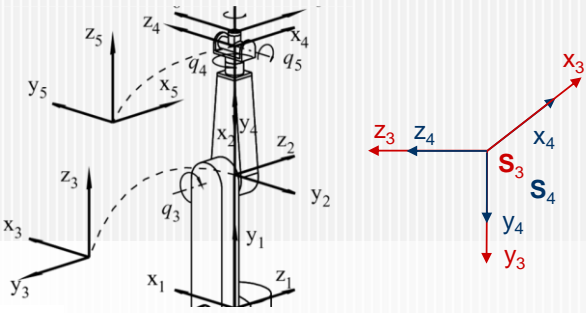
43



Problema cinemático directo

Reglas 10-13

- **Algoritmo DH.**
 - 10. θ_i : ángulo que habría que girar en torno a z_{i-1} para que x_{i-1} y x_i queden paralelos.
 - 11. d_i : distancia medida sobre z_{i-1} que habría que desplazar S_{i-1} para alinear x_{i-1} y x_i
 - 12. a_i : distancia medida sobre x_i (que ahora coincidiría con x_{i-1}) que habría que desplazar el nuevo S_{i-1} para que su origen coincidiese con S_i .
 - 13. α_i : ángulo que habría que girar en torno a x_{i-1} (que ahora coincidiría con x_i) para que el nuevo S_{i-1} coincidiese totalmente con S_i .



	θ_i	d_i	a_i	α_i
4	$q_4 - 90^\circ$	l_3	0	-90°

44

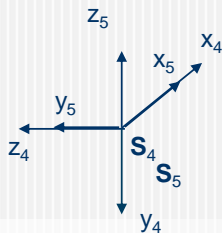
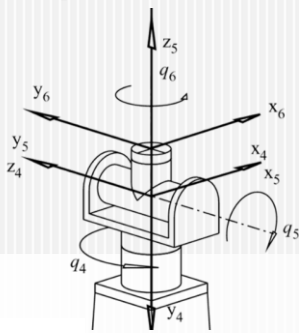


Problema cinemático directo

Reglas 10-13

Algoritmo DH.

- 10. θ_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{z}_{i-1} para que \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i queden paralelos.
- 11. d_i : distancia medida sobre \mathbf{z}_{i-1} que habría que desplazar \mathbf{S}_{i-1} para alinear \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i
- 12. a_i : distancia medida sobre \mathbf{x}_i (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_{i-1}) que habría que desplazar el nuevo \mathbf{S}_{i-1} para que su origen coincidiese con \mathbf{S}_i .
- 13. α_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{x}_{i-1} (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_i) para que el nuevo \mathbf{S}_{i-1} coincidiese totalmente con \mathbf{S}_i .



	θ_i	d_i	a_i	α_i
4	$q_4 - 90^\circ$	l_3	0	-90°
5				

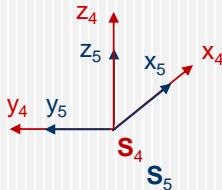
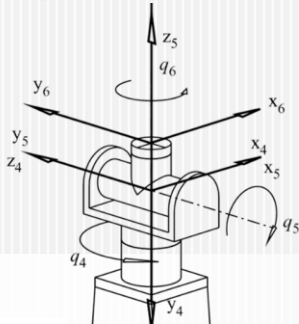


Problema cinemático directo

Reglas 10-13

Algoritmo DH.

- 10. θ_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{z}_{i-1} para que \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i queden paralelos.
- 11. d_i : distancia medida sobre \mathbf{z}_{i-1} que habría que desplazar \mathbf{S}_{i-1} para alinear \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i
- 12. a_i : distancia medida sobre \mathbf{x}_i (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_{i-1}) que habría que desplazar el nuevo \mathbf{S}_{i-1} para que su origen coincidiese con \mathbf{S}_i .
- 13. α_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{x}_{i-1} (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_i) para que el nuevo \mathbf{S}_{i-1} coincidiese totalmente con \mathbf{S}_i .



	θ_i	d_i	a_i	α_i
4	$q_4 - 90^\circ$	l_3	0	-90°
5	q_5	0	0	90°

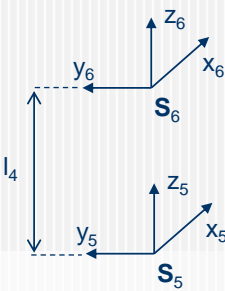
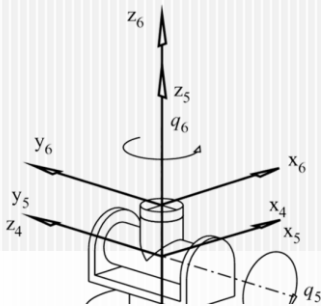


Problema cinemático directo

Reglas 10-13

Algoritmo DH.

- 10. θ_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{z}_{i-1} para que \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i queden paralelos.
- 11. d_i : distancia medida sobre \mathbf{z}_{i-1} que habría que desplazar \mathbf{S}_{i-1} para alinear \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i
- 12. a_i : distancia medida sobre \mathbf{x}_i (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_{i-1}) que habría que desplazar el nuevo \mathbf{S}_{i-1} para que su origen coincidiese con \mathbf{S}_i .
- 13. α_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{x}_{i-1} (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_i) para que el nuevo \mathbf{S}_{i-1} coincidiese totalmente con \mathbf{S}_i .



	θ_i	d_i	a_i	α_i
4	$q_4 - 90^\circ$	l_3	0	-90°
5	q_5	0	0	90°
6				

47

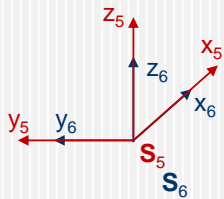
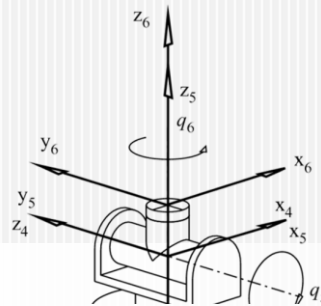


Problema cinemático directo

Reglas 10-13

Algoritmo DH.

- 10. θ_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{z}_{i-1} para que \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i queden paralelos.
- 11. d_i : distancia medida sobre \mathbf{z}_{i-1} que habría que desplazar \mathbf{S}_{i-1} para alinear \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i
- 12. a_i : distancia medida sobre \mathbf{x}_i (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_{i-1}) que habría que desplazar el nuevo \mathbf{S}_{i-1} para que su origen coincidiese con \mathbf{S}_i .
- 13. α_i : ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{x}_{i-1} (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_i) para que el nuevo \mathbf{S}_{i-1} coincidiese totalmente con \mathbf{S}_i .



	θ_i	d_i	a_i	α_i
4	$q_4 - 90^\circ$	l_3	0	-90°
5	q_5	0	0	90°
6	q_6	l_4	0	0

48

Problema cinemático directo

■ Algoritmo DH.

- 1. Reglas para la definición de los sistemas de referencia → 1-9 reglas.
- 2. Reglas para calcular los parámetros DH que relaciona un sistema de referencia con otro ($\theta_i, d_i, a_i, \alpha_i$) → 10-13 reglas.
- 3. Reglas para calcular las matriz de transformación ${}^{base}T_{extremo}$. 14-15 reglas.

	θ_i	d_i	a_i	α_i	
1	q_1	l_1	0	90°	$\rightarrow {}^0T_1$
2	q_2+90°	0	l_2	0	$\rightarrow {}^1T_2$
3	q_3-90°	0	0	-90°	$\rightarrow {}^2T_3$
4	q_4-90°	l_3	0	-90°	$\rightarrow {}^3T_4$
5	q_5	0	0	90°	$\rightarrow {}^4T_5$
6	q_6	l_4	0	0	$\rightarrow {}^5T_6$

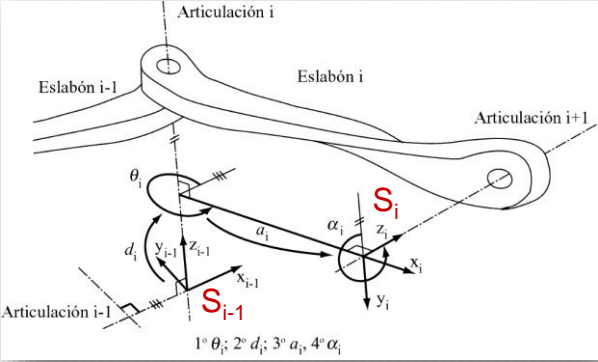
49

Problema cinemático directo

■ Algoritmo DH.

- 14. Calcular las matrices ${}^{i-1}T_i$.

Regla nº 14



θ_i	d_i	a_i	α_i
------------	-------	-------	------------

${}^{i-1}T_i = Rot(z_{i-1}, \theta_i) \cdot Tras(z_{i-1}, d_i) \cdot Tras(x_i, a_i) \cdot Rot(x_i, \alpha_i)$

50



Problema cinemático directo

Regla nº 14

■ **Algoritmo DH.**

- 14. Calcular las matrices ${}^{i-1}\mathbf{T}_i$.

θ_i	d_i	a_i	α_i
------------	-------	-------	------------

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \mathbf{Rot}(z_{i-1}, \theta_i) \cdot \mathbf{Tras}(z_{i-1}, d_i) \cdot \mathbf{Tras}(x_i, a_i) \cdot \mathbf{Rot}(x_i, \alpha_i)$$

Rotación



Traslación

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \cdot \text{sen} \theta_i & \text{sen} \alpha_i \cdot \text{sen} \theta_i & a_i \cdot \cos \theta_i \\ \text{sen} \theta_i & \cos \alpha_i \cdot \cos \theta_i & -\text{sen} \alpha_i \cdot \cos \theta_i & a_i \cdot \text{sen} \theta_i \\ 0 & \text{sen} \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

51



Problema cinemático directo

Regla nº 15

■ **Algoritmo DH.**

- 15. Calcular la matriz de transformación que relaciona el sistema de la base con el del extremo del robot: \mathbf{T} .

$$\mathbf{T} = {}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 \dots {}^{n-1}\mathbf{T}_n$$

Robot n articulaciones

	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	0	90°
2	q_2+90°	0	l_2	0
3	q_3-90°	0	0	-90°
4	q_4-90°	l_3	0	-90°
5	q_5	0	0	90°
6	q_6	l_4	0	0

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \cdot \text{sen} \theta_i & \text{sen} \alpha_i \cdot \text{sen} \theta_i & a_i \cdot \cos \theta_i \\ \text{sen} \theta_i & \cos \alpha_i \cdot \cos \theta_i & -\text{sen} \alpha_i \cdot \cos \theta_i & a_i \cdot \text{sen} \theta_i \\ 0 & \text{sen} \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = {}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_3 {}^3\mathbf{T}_4 {}^4\mathbf{T}_5 {}^5\mathbf{T}_6$$

\mathbf{T} define la posición y orientación del extremo del robot respecto a la base en función de las n coordenadas articulares

52

CONCLUSIONES

53

Conclusiones

- Resolución del problema cinemático directo: localización del extremo del robot en función de las coordenadas articulares:
 - Método geométrico.
 - Basado en relaciones trigonométricas.
 - Se emplea para robots de pocos grados de libertad, normalmente para obtener la posición y no la orientación.
 - Método de Denavit-Hartenberg.
 - Basado en matrices de transformación homogénea.
 - Metodología muy empleada para cualquier tipo de robot manipulador o antropomórfico.

54



Bibliografía

	Torres, F., Pomares, J. Gil, P., Puente, S. T., Aracil, R. "Robots y sistemas sensoriales", Prentice Hall, Madrid (2005) ISBN: 84-205-3574-5.
	A. Barrientos, A. L. F. Peñín, C. Balaguer, R. Aracil. "Fundamentos de Robótica", Mc Graw Hill (2007) ISBN: 978-84-481-5636-7



AUTOMATIZACIÓN Y ROBÓTICA

TEMA 11 (Teoría - Práctica)

Cinemática de los sistemas robóticos 1

Jorge Pomares y Carlos A. Jara