

AUTOMATIZACIÓN Y ROBÓTICA

TEMA 12 (Teoría - Práctica)

Cinemática de los sistemas robóticos 2

Jorge Pomares y Carlos A. Jara

1

Cinemática inversa de robots manipuladores

1. Introducción.
2. Solución algebraica.
3. Solución geométrica.
4. Solución de Pieper.
5. Conclusiones.

2



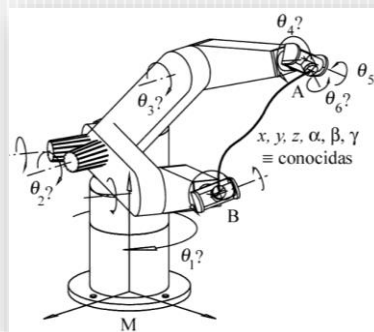
INTRODUCCIÓN

3



Introducción

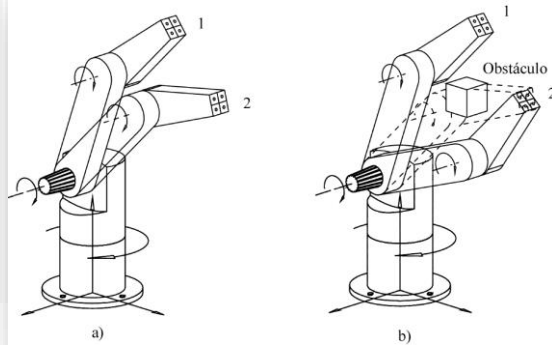
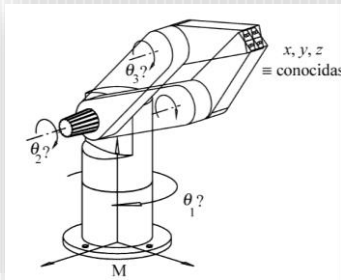
- Cinemática inversa
 - Determinar la posición de las articulaciones del robot si lo que se conoce es la localización del extremo



4

Introducción

- Valores de las variables articulares para que el extremo se encuentre en una localización dada.
 - Sin solución: soluciones fuera del espacio de trabajo o fuera de rango.
 - Múltiples soluciones: codo arriba-abajo, muñeca arriba-abajo.



5

Introducción

- Valores de las variables articulares para que el extremo se encuentre en una localización dada.
 - Sistemas de ecuaciones en la resolución cinemática.

Robot n articulaciones

$${}^{\text{base}}T_{\text{extremo}} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & x_{\text{extremo}}^0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & y_{\text{extremo}}^0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & z_{\text{extremo}}^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cinemática directa



$$\begin{aligned} x_{\text{extremo}}^0 &= f_1(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ y_{\text{extremo}}^0 &= f_2(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ z_{\text{extremo}}^0 &= f_3(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ r_{11} &= f_4(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ r_{12} &= f_5(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ r_{13} &= f_6(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ r_{21} &= f_7(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ r_{22} &= f_8(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ r_{23} &= f_9(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ r_{31} &= f_{10}(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ r_{32} &= f_{11}(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ r_{33} &= f_{12}(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones
en la resolución cinemática

n articulaciones



$$\begin{aligned} x_{\text{extremo}}^0 &= f_x(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ y_{\text{extremo}}^0 &= f_y(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ z_{\text{extremo}}^0 &= f_z(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ \alpha_{\text{extremo}}^0 &= f_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ \beta_{\text{extremo}}^0 &= f_\beta(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ \gamma_{\text{extremo}}^0 &= f_\gamma(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{aligned}$$

Relaciones entre extremo del robot
y variables articulares

6

Introducción

Formas de resolución de la cinemática inversa

- Solución algebraica
 - Consiste en obtener un sistema de n ecuaciones en función de la localización del extremo del robot.
 - Se puede obtener partiendo de la solución de la cinemática directa mediante el algoritmo de Denavit-Hartenberg, despejando de la matriz de transformación final las variables articulares.
- Solución geométrica
 - Consiste en descomponer la cadena cinemática del robot en varios planos geométricos, resolviendo por trigonometría el problema asociado a cada plano.
- Solución de Pieper (desacople cinemático)
 - Consiste en separar las articulaciones de la muñeca del resto, resolviendo ambos conjuntos por separado.

7

Introducción

Formas de resolución de la cinemática inversa:

- Solución algebraica
 - Solución empleada para resolver cualquier tipo de robot. Para robots de un alto número de GDL ($n \leq 6$), las ecuaciones resultantes se resuelven mediante métodos matemáticos numéricos.
- Solución geométrica
 - Robots de pocos grados de libertad ($n \leq 4$) y para robots antropomórficos de 6 GDL con muñeca esférica y composición tipo planar para los 3 primeros GDL.
- Solución de Pieper (desacople cinemático)
 - Para robots antropomórficos de $n = 6$ GDL con muñeca esférica.

8



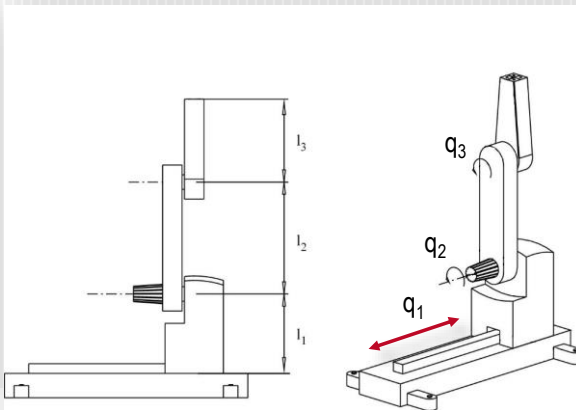
SOLUCIÓN ALGEBRAICA

9



Solución algebraica

- Ejemplo: robot de 3 GDL, una articulación prismática y dos rotacionales.



Aplicación el algoritmo DH

$\text{base}^0 T_{\text{extremo}}$



Resolución de q_1, q_2, q_3

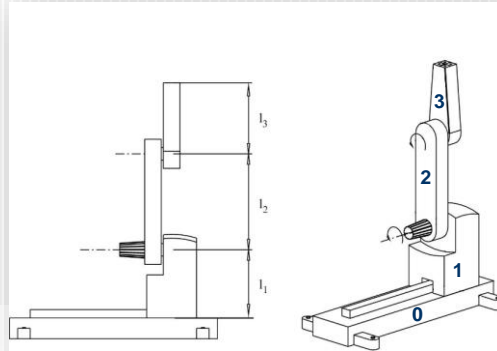
x_{extremo}^0	$= f_x(q_1, q_2, \dots, q_n)$
y_{extremo}^0	$= f_y(q_1, q_2, \dots, q_n)$
z_{extremo}^0	$= f_z(q_1, q_2, \dots, q_n)$
$\alpha_{\text{extremo}}^0$	$= f_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_n)$
β_{extremo}^0	$= f_\beta(q_1, q_2, \dots, q_n)$
$\gamma_{\text{extremo}}^0$	$= f_\gamma(q_1, q_2, \dots, q_n)$

10

Solución algebraica

■ Algoritmo de Denavit-Hartenberg

- 1. Numerar los eslabones comenzando con 1 (primer eslabón móvil de la cadena) y acabando con n (último eslabón móvil). Se numerará como eslabón 0 a la base fija del robot.

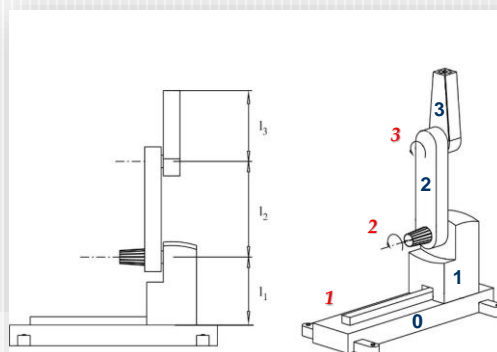


11

Solución algebraica

■ Algoritmo de Denavit-Hartenberg

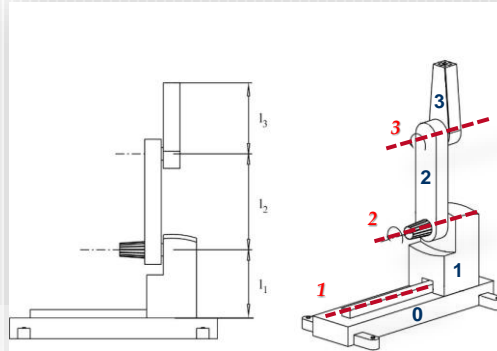
- 2. Numerar cada articulación comenzando por 1 (la correspondiente al primer grado de libertad) y acabando en n .



12

Solución algebraica

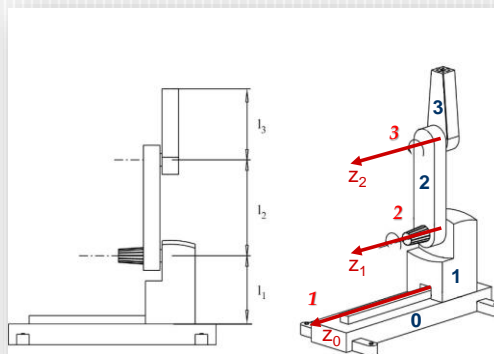
- Algoritmo de Denavit-Hartenberg
 - 3. Localizar el eje de cada articulación. Si ésta es rotativa, el eje será su propio eje de giro. Si es prismática será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento.



13

Solución algebraica

- Algoritmo de Denavit-Hartenberg
 - 4. Para el eje i , de 0 a $n-1$, situar el eje z_i sobre el eje de la articulación $i+1$.

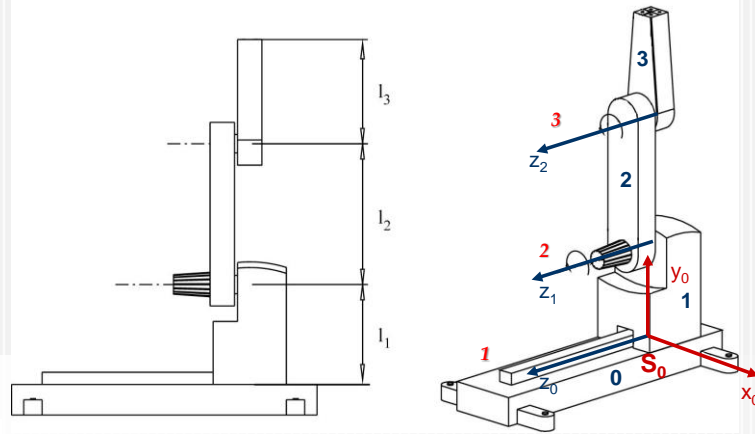


14

Solución algebraica

■ Algoritmo de Denavit-Hartenberg

- 5. Situar el origen del sistema de la base S_0 en cualquier punto del eje z_0 . Los ejes x_0 e y_0 se situarán de modo que formen un sistema dextrógiro con z_0 .

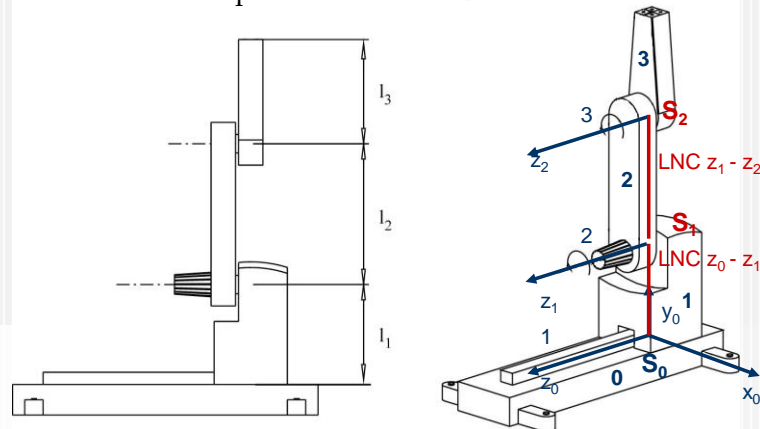


15

Solución algebraica

■ Algoritmo de Denavit-Hartenberg

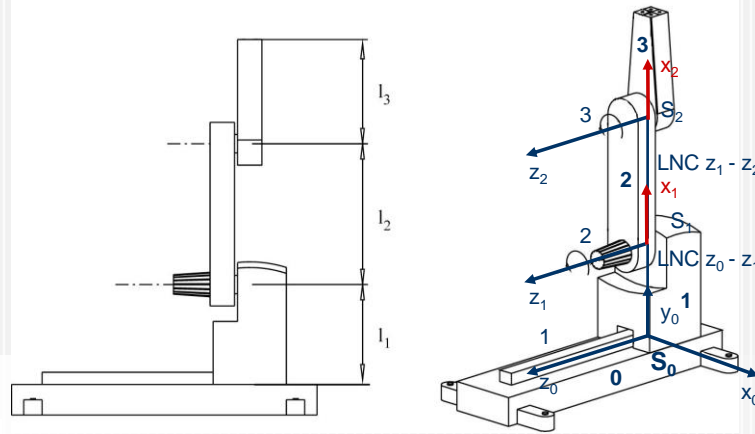
- 6. Para i de 1 a $n-1$, situar el origen del sistema S_i en la intersección del eje z_i con la línea normal común a z_{i-1} y z_{i+1} . Si ambos ejes se cortasen se situaría S_i en el punto de corte. Si fuesen paralelos situaría S_i se situaría en la articulación $i+1$.



16

Solución algebraica

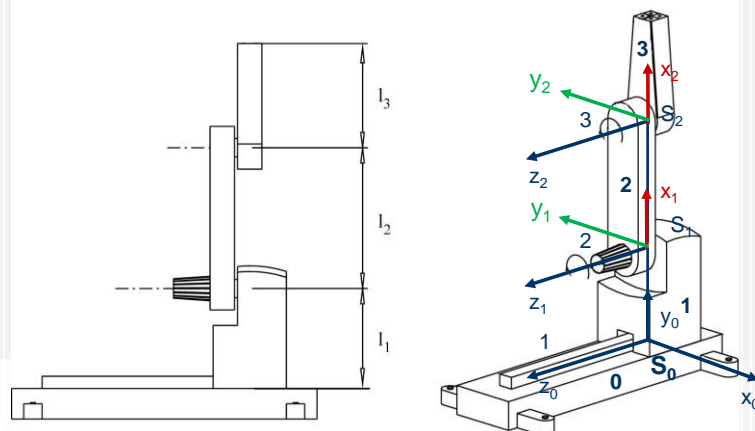
- Algoritmo de Denavit-Hartenberg
 - 7. Situar \mathbf{x}_i en la línea normal común a \mathbf{z}_{i-1} y \mathbf{z}_i .



17

Solución algebraica

- Algoritmo de Denavit-Hartenberg
 - 8. Situar \mathbf{y}_i de modo que forme un sistema dextrógiro con \mathbf{x}_i y \mathbf{z}_i .

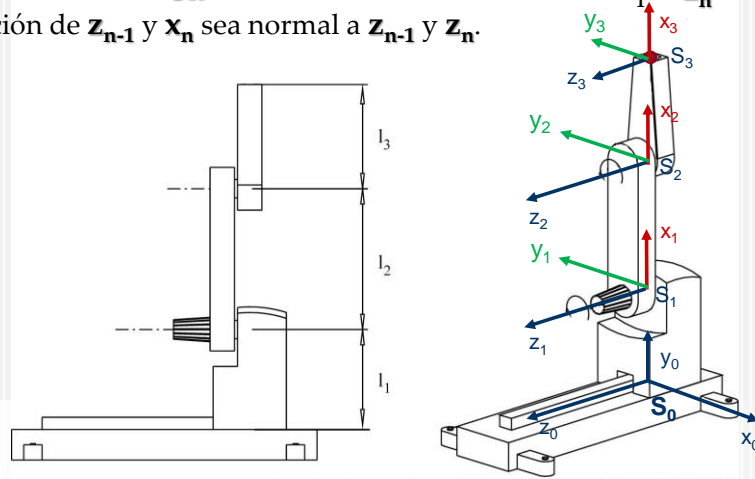


18

Solución algebraica

Algoritmo de Denavit-Hartenberg

- ▣ 9. Situar el sistema S_n en el extremo del robot de modo que z_n coincida con la dirección de z_{n-1} y x_n sea normal a z_{n-1} y z_n .



19

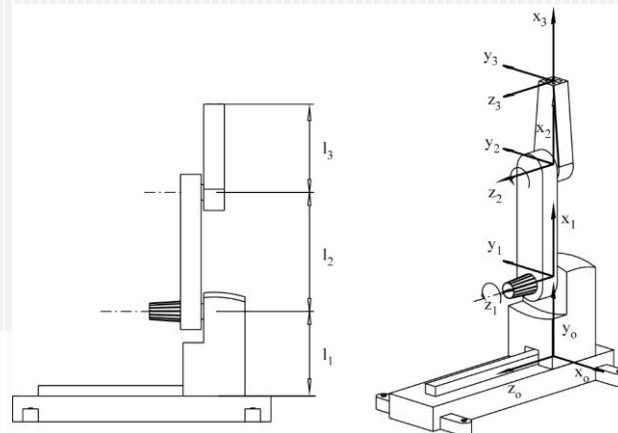
Solución algebraica

Algoritmo de Denavit-Hartenberg

1. Reglas para la definición de los sistemas de referencia → 1-9 reglas.

2. Reglas para calcular los parámetros DH (θ_i , d_i , a_i , α_i) → 10-13 reglas.

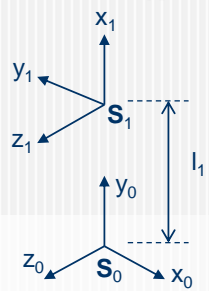
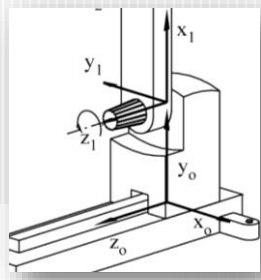
3. Reglas para calcular las matriz de transformación ${}^{base}T_{extremo}$. 14-15 reglas.



20

Solución algebraica

- Algoritmo de Denavit-Hartenberg:
 - 10. θ_i : ángulo que habría que girar en torno a z_{i-1} para que x_{i-1} y x_i queden paralelos.
 - 11. d_i : distancia medida sobre z_{i-1} que habría que desplazar S_{i-1} para alinear x_{i-1} y x_i
 - 12. a_i : distancia medida sobre x_i (que ahora coincidiría con x_{i-1}) que habría que desplazar el nuevo S_{i-1} para que su origen coincidiese con S_i .
 - 13. α_i : ángulo que habría que girar en torno a x_{i-1} (que ahora coincidiría con x_i) para que el nuevo S_{i-1} coincidiese totalmente con S_i .

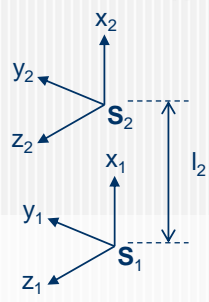
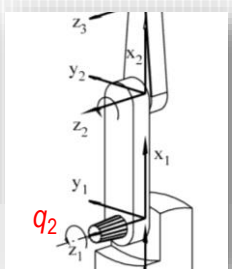


	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	90°	q_1	l_1	0

21

Solución algebraica

- Algoritmo de Denavit-Hartenberg:
 - 10. θ_i : ángulo que habría que girar en torno a z_{i-1} para que x_{i-1} y x_i queden paralelos.
 - 11. d_i : distancia medida sobre z_{i-1} que habría que desplazar S_{i-1} para alinear x_{i-1} y x_i
 - 12. a_i : distancia medida sobre x_i (que ahora coincidiría con x_{i-1}) que habría que desplazar el nuevo S_{i-1} para que su origen coincidiese con S_i .
 - 13. α_i : ángulo que habría que girar en torno a x_{i-1} (que ahora coincidiría con x_i) para que el nuevo S_{i-1} coincidiese totalmente con S_i .

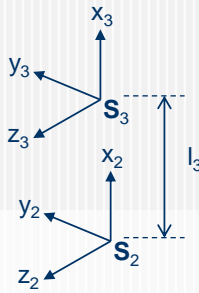
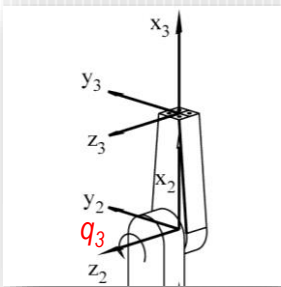


	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	90°	q_1	l_1	0
2	q_2	0	l_2	0

22

Solución algebraica

- Algoritmo de Denavit-Hartenberg:
 - 10. θ_i : ángulo que habría que girar en torno a z_{i-1} para que x_{i-1} y x_i queden paralelos.
 - 11. d_i : distancia medida sobre z_{i-1} que habría que desplazar S_{i-1} para alinear x_{i-1} y x_i
 - 12. a_i : distancia medida sobre x_i (que ahora coincidiría con x_{i-1}) que habría que desplazar el nuevo S_{i-1} para que su origen coincidiese con S_i .
 - 13. α_i : ángulo que habría que girar en torno a x_{i-1} (que ahora coincidiría con x_i) para que el nuevo S_{i-1} coincidiese totalmente con S_i .

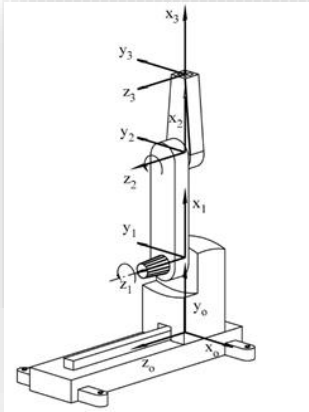


	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	90°	q_1	l_1	0
2	q_2	0	l_2	0
3	q_3	0	l_3	0

23

Solución algebraica

- Algoritmo de Denavit-Hartenberg:
 - Reglas para la definición de los sistemas de referencia \rightarrow 1-9 reglas.
 - Reglas para calcular los parámetros DH que relaciona un sistema de referencia con otro ($\theta_i, d_i, a_i, \alpha_i$) \rightarrow 10-13 reglas.
 - Reglas para calcular las matriz de transformación ${}^{base}T_{extremo}$. 14-15 reglas.



	θ_i	d_i	a_i	α_i	
1	90°	q_1	l_1	0	$\rightarrow {}^0T_1$
2	q_2	0	l_2	0	$\rightarrow {}^1T_2$
3	q_3	0	l_3	0	$\rightarrow {}^2T_3$

24

Solución algebraica

Algoritmo de Denavit-Hartenberg:

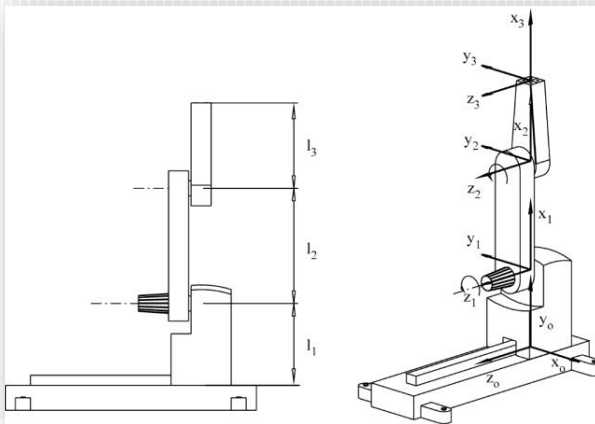
- ▣ 14. Obtener las matrices ${}^{i-1}\mathbf{T}_i$.
- ▣ 15. Obtener la matriz de transformación que relaciona el sistema de la base con el del extremo del robot $\mathbf{T} = {}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 \dots {}^{n-1}\mathbf{T}_n$
- ▣ 16. La matriz \mathbf{T} define la posición y orientación del extremo del robot respecto a la base en función de las n coordenadas articulares.

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_i & -\cos \alpha_i \cdot \sin \vartheta_i & \sin \alpha_i \cdot \sin \vartheta_i & a_i \cdot \cos \vartheta_i \\ \sin \vartheta_i & \cos \alpha_i \cdot \cos \vartheta_i & -\sin \alpha_i \cdot \cos \vartheta_i & a_i \cdot \sin \vartheta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

25

Solución algebraica

Algoritmo de Denavit-Hartenberg:



$${}^0\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} x_{x_{\text{extremo}}}^0 & x_{y_{\text{extremo}}}^0 & x_{z_{\text{extremo}}}^0 & x_{\text{extremo}}^0 \\ y_{x_{\text{extremo}}}^0 & y_{y_{\text{extremo}}}^0 & y_{z_{\text{extremo}}}^0 & y_{\text{extremo}}^0 \\ z_{x_{\text{extremo}}}^0 & z_{y_{\text{extremo}}}^0 & z_{z_{\text{extremo}}}^0 & z_{\text{extremo}}^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

	θ_i	d_i	a_i	α_i	
1	90°	q_1	l_1	0	$\rightarrow {}^0\mathbf{T}_1$
2	q_2	0	l_2	0	$\rightarrow {}^1\mathbf{T}_2$
3	q_3	0	l_3	0	$\rightarrow {}^2\mathbf{T}_3$

26

Solución algebraica

- Resolución matricial a partir de las matrices T obtenidas:

$${}^0\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} x_{\text{extremo}}^0 & y_{\text{extremo}}^0 & z_{\text{extremo}}^0 & x_{\text{extremo}}^0 \\ y_{\text{extremo}}^0 & y_{\text{extremo}}^0 & y_{\text{extremo}}^0 & y_{\text{extremo}}^0 \\ z_{\text{extremo}}^0 & z_{\text{extremo}}^0 & z_{\text{extremo}}^0 & z_{\text{extremo}}^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow {}^0\mathbf{T}_3 = {}^0\mathbf{T}_1 \cdot {}^1\mathbf{T}_2 \cdot {}^2\mathbf{T}_3 \rightarrow \text{Matrices obtenidas con las tabla DH} \rightarrow f(q)$$

Matriz conocida (dato de partida para el cálculo de la cinemática inversa)

$$({}^0\mathbf{T}_1)^{-1} \cdot {}^0\mathbf{T}_3 = {}^1\mathbf{T}_2 \cdot {}^2\mathbf{T}_3$$

$f(q_1)$
 $f(q_2, q_3)$

27

Solución algebraica

- Resolución matricial a partir de las matrices T obtenidas:

$$({}^0\mathbf{T}_1)^{-1} \cdot {}^0\mathbf{T}_3 = {}^1\mathbf{T}_2 \cdot {}^2\mathbf{T}_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3 & -\cos q_2 \sin q_3 - \sin q_2 \cos q_3 \\ \sin q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \sin q_3 & -\sin q_2 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & l_3 \cos q_2 \cos q_3 - l_3 \sin q_2 \sin q_3 + l_2 \cos q_2 \\ 0 & l_3 \sin q_2 \cos q_3 + l_3 \cos q_2 \sin q_3 + l_2 \sin q_2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -l_1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\text{extremo}}^0 & y_{\text{extremo}}^0 & z_{\text{extremo}}^0 & x_{\text{extremo}}^0 \\ y_{\text{extremo}}^0 & y_{\text{extremo}}^0 & y_{\text{extremo}}^0 & y_{\text{extremo}}^0 \\ z_{\text{extremo}}^0 & z_{\text{extremo}}^0 & z_{\text{extremo}}^0 & z_{\text{extremo}}^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

28

Solución algebraica

- Resolución matricial a partir de las matrices T obtenidas:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -l_1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{\text{extremo}}^0 & y_{\text{extremo}}^0 & z_{\text{extremo}}^0 & x_{\text{extremo}}^0 \\ y_{\text{extremo}}^0 & y_{\text{extremo}}^0 & y_{\text{extremo}}^0 & y_{\text{extremo}}^0 \\ z_{\text{extremo}}^0 & z_{\text{extremo}}^0 & z_{\text{extremo}}^0 & z_{\text{extremo}}^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow z_{\text{extremo}}^0 - q_1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$q_1 = z_{\text{extremo}}^0$$

$$\begin{bmatrix} \cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3 & -\cos q_2 \sin q_3 - \sin q_2 \cos q_3 \\ \sin q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \sin q_3 & -\sin q_2 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & l_3 \cos q_2 \cos q_3 - l_3 \sin q_2 \sin q_3 + l_2 \cos q_2 \\ 0 & l_3 \sin q_2 \cos q_3 + l_3 \cos q_2 \sin q_3 + l_2 \sin q_2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

29

Solución algebraica

- Resolución matricial a partir de las matrices T obtenidas:
 - Realizando el mismo procedimiento para aislar el parámetro q3.

$$({}^0T_1)^{-1} \cdot {}^0T_3 = {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \Rightarrow ({}^1T_2)^{-1} \cdot ({}^0T_1)^{-1} \cdot {}^0T_3 = {}^2T_3$$

$$\begin{bmatrix} -\sin q_2 & \cos q_2 & 0 & -l_1 \cos q_2 - l_2 \\ -\cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & l_1 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 1 & -q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{\text{extremo}}^0 & y_{\text{extremo}}^0 & z_{\text{extremo}}^0 & x_{\text{extremo}}^0 \\ y_{\text{extremo}}^0 & y_{\text{extremo}}^0 & y_{\text{extremo}}^0 & y_{\text{extremo}}^0 \\ z_{\text{extremo}}^0 & z_{\text{extremo}}^0 & z_{\text{extremo}}^0 & z_{\text{extremo}}^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & l_3 \cos q_3 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & l_3 \sin q_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

30

Solución algebraica

- Resolución matricial a partir de las matrices T obtenidas:
 - Realizando el mismo procedimiento para aislar el parámetro q_3 .

$$({}^1T_2)^{-1} \cdot ({}^0T_1)^{-1} \cdot {}^0T_3 = {}^2T_3$$

$$\begin{bmatrix} -\sin q_2 & \cos q_2 & 0 & -l_1 \cos q_2 - l_2 \\ -\cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & l_1 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 1 & -q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{\text{extremo}}^0 & y_{\text{extremo}}^0 & z_{\text{extremo}}^0 & x_{\text{extremo}}^0 \\ y_{\text{extremo}}^0 & y_{\text{extremo}}^0 & y_{\text{extremo}}^0 & y_{\text{extremo}}^0 \\ z_{\text{extremo}}^0 & z_{\text{extremo}}^0 & z_{\text{extremo}}^0 & z_{\text{extremo}}^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & l_3 \cos q_3 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & l_3 \sin q_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

31

Solución algebraica

- Resolución matricial a partir de las matrices T obtenidas:
 - Realizando el mismo procedimiento para aislar el parámetro q_3 .

$$({}^1T_2)^{-1} \cdot ({}^0T_1)^{-1} \cdot {}^0T_3 = {}^2T_3$$

$$\begin{bmatrix} -\sin q_2 & \cos q_2 & 0 & -l_1 \cos q_2 - l_2 \\ -\cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & l_1 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 1 & -q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{\text{extremo}}^0 & y_{\text{extremo}}^0 & z_{\text{extremo}}^0 & x_{\text{extremo}}^0 \\ y_{\text{extremo}}^0 & y_{\text{extremo}}^0 & y_{\text{extremo}}^0 & y_{\text{extremo}}^0 \\ z_{\text{extremo}}^0 & z_{\text{extremo}}^0 & z_{\text{extremo}}^0 & z_{\text{extremo}}^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-x_{\text{extremo}}^0 \sin q_2 + y_{\text{extremo}}^0 \cos q_2 - l_1 \cos q_2 - l_2$$

$$-x_{\text{extremo}}^0 \cos q_2 - y_{\text{extremo}}^0 \sin q_2 + l_1 \sin q_2$$



$$-x_{\text{extremo}}^0 \sin q_2 + (y_{\text{extremo}}^0 - l_1) \cos q_2 - l_2$$

$$-x_{\text{extremo}}^0 \cos q_2 - (y_{\text{extremo}}^0 - l_1) \sin q_2$$

32

Solución algebraica

- Resolución matricial a partir de las matrices T obtenidas:
 - Realizando el mismo procedimiento para aislar el parámetro q_3 .

$$\underbrace{({}^1\mathbf{T}_2)^{-1} \cdot ({}^0\mathbf{T}_1)^{-1} \cdot {}^0\mathbf{T}_3}_{\text{matriz}} = {}^2\mathbf{T}_3$$

$$\begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & l_3 \cos q_3 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & l_3 \sin q_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -x_{\text{extremo}}^0 \sin q_2 + (y_{\text{extremo}}^0 - l_1) \cos q_2 - l_2 &= l_3 \cos q_3 \\ -x_{\text{extremo}}^0 \cos q_2 - (y_{\text{extremo}}^0 - l_1) \sin q_2 &= l_3 \sin q_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x_{\text{extremo}}^0 \sin q_2 + (y_{\text{extremo}}^0 - l_1) \cos q_2 &= l_3 \cos q_3 + l_2 \\ -x_{\text{extremo}}^0 \cos q_2 - (y_{\text{extremo}}^0 - l_1) \sin q_2 &= l_3 \sin q_3 \end{aligned}$$

33

Solución algebraica

- Resolución matricial a partir de las matrices T obtenidas:
 - Realizando el mismo procedimiento para aislar el parámetro q_3 .

$$\begin{aligned} -x_{\text{extremo}}^0 \sin q_2 + (y_{\text{extremo}}^0 - l_1) \cos q_2 &= l_3 \cos q_3 + l_2 \\ -x_{\text{extremo}}^0 \cos q_2 - (y_{\text{extremo}}^0 - l_1) \sin q_2 &= l_3 \sin q_3 \end{aligned}$$



Cálculo q3: elevar al cuadrado y sumar ecuaciones
Cálculo q2: conocido q3, despejar $\sin q_2$ en una ecuación y sustituir en la otra

$$q_3 = \arccos \left(\frac{x_{\text{extremo}}^0{}^2 + (y_{\text{extremo}}^0 - l_1)^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3} \right)$$

$$q_2 = \arccos \left(\frac{(l_2 + l_3 \cos q_3)(y_{\text{extremo}}^0 - l_1)^2 - x_{\text{extremo}}^0 l_3 \sin q_3}{x_{\text{extremo}}^0{}^2 + (y_{\text{extremo}}^0 - l_1)^2} \right)$$

34



Solución algebraica

- Resolución matricial a partir de las matrices T obtenidas:
 - Solución de los parámetros articulares q1,q2,q3.

$$q_1 = z_{extremo}^0$$
$$q_3 = \arccos\left(\frac{x_{extremo}^0{}^2 + (y_{extremo}^0 - l_1)^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}\right)$$
$$q_2 = \arccos\left(\frac{(l_2 + l_3 \cos q_3)(y_{extremo}^0 - l_1)^2 - x_{extremo}^0 l_3 \sin q_3}{x_{extremo}^0{}^2 + (y_{extremo}^0 - l_1)^2}\right)$$

$${}^0T_3 = \begin{bmatrix} x_{extremo}^0 & x_{y_{extremo}^0} & x_{z_{extremo}^0} & x_{extremo}^0 \\ y_{extremo}^0 & y_{y_{extremo}^0} & y_{z_{extremo}^0} & y_{extremo}^0 \\ z_{extremo}^0 & z_{y_{extremo}^0} & z_{z_{extremo}^0} & z_{extremo}^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	90°	q_1	l_1	0
2	q_2	0	l_2	0
3	q_3	0	l_3	0

35



Ingeniería Informática

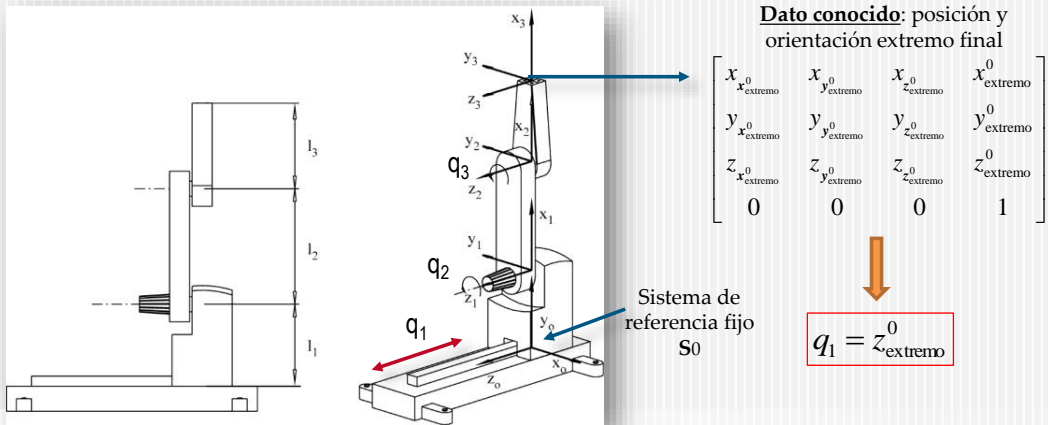


SOLUCIÓN GEOMÉTRICA

36

Solución geométrica

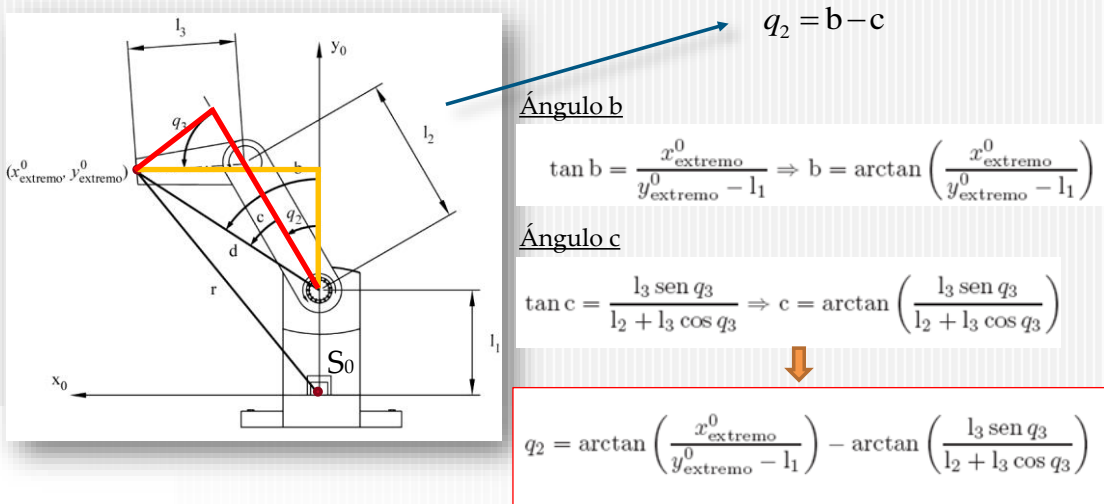
- Resolución del problema mediante geometría y trigonometría.
 - Resolución q_1



37

Solución geométrica

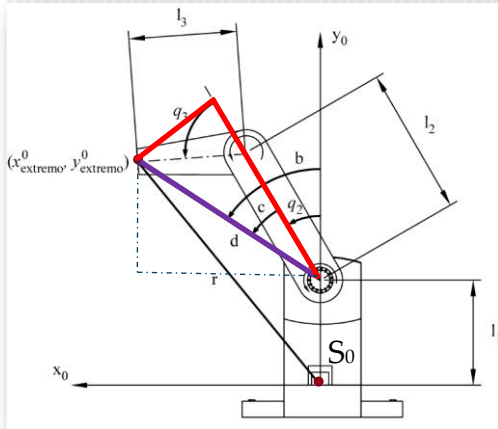
- Resolución del problema mediante geometría y trigonometría.
 - Resolución q_2



38

Solución geométrica

- Resolución del problema mediante geometría y trigonometría.
 - Resolución q_3



$$d^2 = (x_{\text{extremo}}^0)^2 + (y_{\text{extremo}}^0 - l_1)^2$$



$$d^2 = (l_2 + l_3 \cos q_3)^2 + l_3^2 \sin^2 q_3$$



$$(x_{\text{extremo}}^0)^2 + (y_{\text{extremo}}^0 - l_1)^2 = l_2^2 + l_3^2 \cos^2 q_3 + 2l_2l_3 \cos q_3 + l_3^2 \sin^2 q_3$$



$$(x_{\text{extremo}}^0)^2 + (y_{\text{extremo}}^0 - l_1)^2 = l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3 \cos q_3$$



$$q_3 = \arccos \left(\frac{(x_{\text{extremo}}^0)^2 + (y_{\text{extremo}}^0 - l_1)^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3} \right)$$

39

Ingeniería Informática

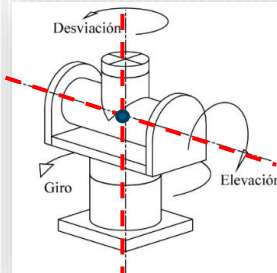


SOLUCIÓN DE PIEPER

40

Solución de Pieper

- Consiste en separar las articulaciones de la muñeca del resto, resolviendo ambos conjuntos por separado.



3 GDL muñeca
rotación robot

Muñeca esférica

Los 3 GDL se cortan en un punto denominado punto muñeca



El movimiento de las articulaciones de la muñeca no altera la posición espacial del punto de corte



3 primeros GDL = posicionan el robot en el punto muñeca

41

Solución de Pieper

- Desacoplo cinemático.
 - La posición de la muñeca es: $p_5^0 = p_{\text{muñeca}}^0$
 - La posición del extremo es: $p_6^0 = p_{\text{extremo}}^0$

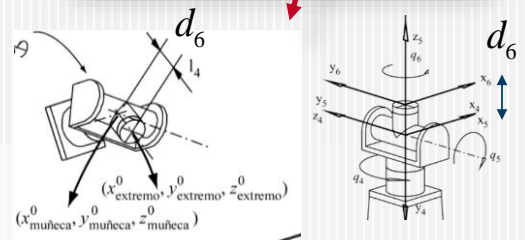
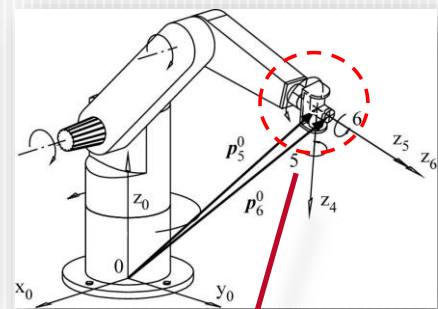


d_i : distancia, medida a lo largo de z_{i-1} que habría que desplazar S_{i-1} para que x_i y x_{i-1} queden alineados.

$$p_5^0 = p_6^0 - d_6 \cdot z_6$$



$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} x_{\text{extremo}}^0 & y_{\text{extremo}}^0 & \boxed{x_{\text{extremo}}^0} & x_{\text{extremo}}^0 \\ y_{\text{extremo}}^0 & y_{\text{extremo}}^0 & \boxed{y_{\text{extremo}}^0} & y_{\text{extremo}}^0 \\ z_{\text{extremo}}^0 & z_{\text{extremo}}^0 & \boxed{z_{\text{extremo}}^0} & z_{\text{extremo}}^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



42

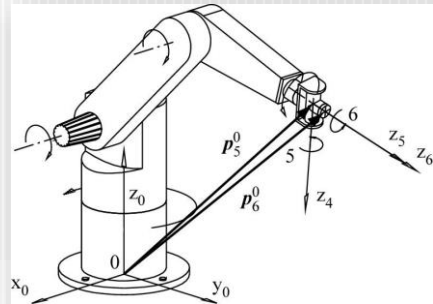
■ Solución de Pieper

- Resolución cinemática inversa con Pieper.
 - Obtenido el punto muñeca (p_5^0): resolución mediante el método geométrico de q_1, q_2, q_3 .
 - Para el cálculo de las últimas tres se emplea la orientación:

$$\underbrace{{}^0\text{Rot}_{\text{extremo}}}_{\text{conocida}} = \underbrace{{}^0\text{Rot}_3}_{\text{conocida}} \cdot {}^3\text{Rot}_{\text{extremo}}$$

$${}^3\text{Rot}_{\text{extremo}} = {}^3\text{Rot}_6$$

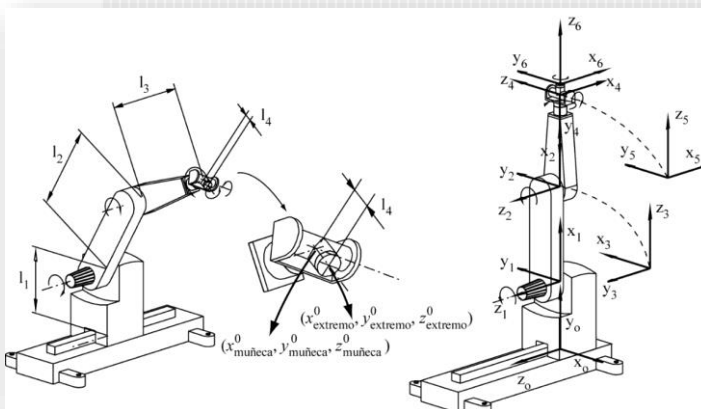
$${}^3\text{Rot}_6 = ({}^0\text{Rot}_3)^{-1} \cdot {}^0\text{Rot}_{\text{extremo}}$$



43

■ Solución de Pieper

- Ejemplo de resolución de un robot de 6 GDL.



Pasos a seguir

1. Resolver cinemática directa (DH).
2. Calcular el punto muñeca
3. Resolver cinemática inversa para obtener q_1, q_2, q_3 con el punto muñeca.
4. Obtener ${}^0\text{Rot}_3$ que depende de q_1, q_2, q_3 que son conocidos.
5. Calcular q_4, q_5, q_6 a partir de las matrices de rotación.

44

Solución de Pieper

- Ejemplo de resolución de un robot de 6 GDL.
 - 1. Resolver la cinemática directa

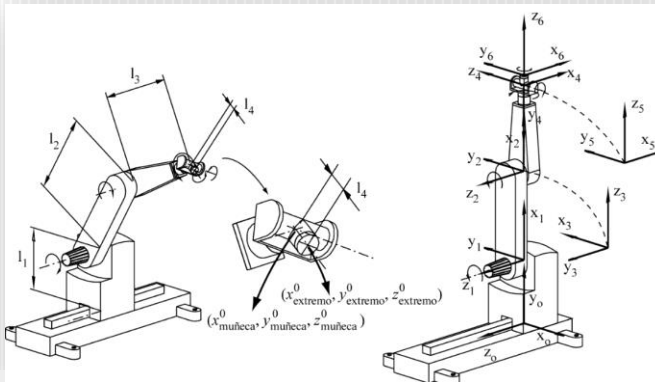


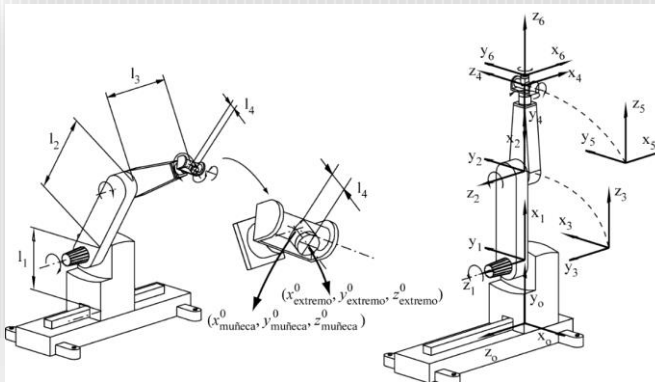
Tabla de parámetros DH

	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	90°	q_1	l_1	0
2	q_2	0	l_2	0
3	q_3+90°	0	0	90°
4	q_4-90°	l_3	0	-90°
5	q_5	0	0	90°
6	q_6	l_4	0	0

45

Solución de Pieper

- Ejemplo de resolución de un robot de 6 GDL.
 - 2. Calcular el punto muñeca.
 - 3. Resolver mediante el método geométrico q_1, q_2, q_3



Datos cinemática directa

$$\begin{bmatrix} x_{muñeca}^0 \\ y_{muñeca}^0 \\ z_{muñeca}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{extremo}^0 \\ y_{extremo}^0 \\ z_{extremo}^0 \end{bmatrix} - l_4 z_6$$

Método geométrico

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

46

Solución de Pieper

- Ejemplo de resolución de un robot de 6 GDL.
 - 4. Obtener ${}^0\text{Rot}_3$ que depende de q_1, q_2, q_3 que son conocidos.

$$\underbrace{{}^0\text{Rot}_{\text{extremo}}}_{\text{conocida}} = \underbrace{{}^0\text{Rot}_3}_{\text{conocida}} \cdot \underbrace{{}^3\text{Rot}_{\text{extremo}}}_{\text{conocida}}$$

$${}^3\text{Rot}_{\text{extremo}} = {}^3\text{Rot}_6 = {}^3\text{Rot}_4 {}^4\text{Rot}_5 {}^5\text{Rot}_6$$



	θ_i	d_i	a_i	α_i
4	$q_4 - 90^\circ$	l_3	0	-90°
5	q_5	0	0	90°
6	q_6	l_4	0	0

47

Solución de Pieper

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \cdot \sin \theta_i & \sin \alpha_i \cdot \sin \theta_i & a_i \cdot \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cdot \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cdot \cos \theta_i & a_i \cdot \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ejemplo de resolución de un robot de 6 GDL.
 - 4. Obtener ${}^0\text{Rot}_3$ que depende de q_1, q_2, q_3 que son conocidos.

$${}^3\text{Rot}_{\text{extremo}} = {}^3\text{Rot}_6 = {}^3\text{Rot}_4 {}^4\text{Rot}_5 {}^5\text{Rot}_6$$

	θ_i	d_i	a_i	α_i
4	$q_4 - 90^\circ$	l_3	0	-90°
5	q_5	0	0	90°
6	q_6	l_4	0	0

$${}^3\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} \cos(q_4 - 90^\circ) & 0 & -\sin(q_4 - 90^\circ) & 0 \\ \sin(q_4 - 90^\circ) & 0 & \cos(q_4 - 90^\circ) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin q_4 & 0 & \cos q_4 & 0 \\ -\cos q_4 & 0 & \sin q_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4\mathbf{T}_5 = \begin{bmatrix} \cos q_5 & 0 & \sin q_5 & 0 \\ \sin q_5 & 0 & -\cos q_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^5\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} \cos q_6 & -\sin q_6 & 0 & 0 \\ \sin q_6 & \cos q_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

48

$${}^3\mathbf{Rot}_6 = {}^0\mathbf{Rot}_3^T \cdot \begin{bmatrix} X_{x_{extremo}}^0 & X_{y_{extremo}}^0 & X_{z_{extremo}}^0 \\ Y_{x_{extremo}}^0 & Y_{y_{extremo}}^0 & Y_{z_{extremo}}^0 \\ Z_{x_{extremo}}^0 & Z_{y_{extremo}}^0 & Z_{z_{extremo}}^0 \end{bmatrix}$$
$${}^3\mathbf{Rot}_6 = {}^0\mathbf{Rot}_3^T \cdot \begin{bmatrix} X_{x_{extremo}}^0 & X_{y_{extremo}}^0 & X_{z_{extremo}}^0 \\ Y_{x_{extremo}}^0 & Y_{y_{extremo}}^0 & Y_{z_{extremo}}^0 \\ Z_{x_{extremo}}^0 & Z_{y_{extremo}}^0 & Z_{z_{extremo}}^0 \end{bmatrix}$$


$${}^3\text{Rot}_6 = \begin{bmatrix} \sin q_4 \cos q_5 \cos q_6 + \cos q_4 \sin q_6 & & & \\ -\cos q_4 \cos q_5 \cos q_6 + \sin q_4 \sin q_6 & & & \\ & -\sin q_5 \cos q_6 & & \\ & & -\sin q_4 \cos q_5 \sin q_6 + \cos q_4 \cos q_6 & \sin q_4 \sin q_5 \\ & & \cos q_4 \cos q_5 \sin q_6 + \sin q_4 \cos q_6 & -\cos q_4 \sin q_5 \\ & & \sin q_5 \sin q_6 & \cos q_5 \end{bmatrix}$$



$${}^0\mathbf{Rot}_3^T = \begin{bmatrix} \sin q_2 \sin q_3 - \cos q_2 \cos q_3 & \cos q_2 \sin q_3 - \sin q_2 \cos q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \sin q_3 & \cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución de Pieper

- Ejemplo de resolución de un robot de 6 GDL.
 - 5. Calcular q_4, q_5, q_6 a partir de las matrices de rotación.

$${}^3\text{Rot}_6 = {}^0\text{Rot}_3^T \cdot \begin{bmatrix} X_{\text{extremo}}^0 & Y_{\text{extremo}}^0 & Z_{\text{extremo}}^0 \\ X_{\text{extremo}}^0 & Y_{\text{extremo}}^0 & Z_{\text{extremo}}^0 \\ X_{\text{extremo}}^0 & Y_{\text{extremo}}^0 & Z_{\text{extremo}}^0 \end{bmatrix}$$

$${}^3\text{Rot}_6 = \begin{bmatrix} \sin q_4 \cos q_5 \cos q_6 + \cos q_4 \sin q_6 & -\cos q_4 \cos q_5 \cos q_6 + \sin q_4 \sin q_6 & -\sin q_5 \cos q_6 \\ -\sin q_4 \cos q_5 \sin q_6 + \cos q_4 \cos q_6 & \cos q_4 \cos q_5 \sin q_6 + \sin q_4 \cos q_6 & \sin q_5 \sin q_6 \\ \sin q_4 \sin q_5 & -\cos q_4 \sin q_5 & \cos q_5 \end{bmatrix}$$

Cálculo q_5

$${}^0\text{Rot}_3^T = \begin{bmatrix} \sin q_2 \sin q_3 - \cos q_2 \cos q_3 & \cos q_2 \sin q_3 - \sin q_2 \cos q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \sin q_3 & \cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3 & 0 \end{bmatrix}$$

51

Solución de Pieper

- Ejemplo de resolución de un robot de 6 GDL.
 - 5. Calcular q_4, q_5, q_6 a partir de las matrices de rotación.

$${}^3\text{Rot}_6 = \begin{bmatrix} \sin q_4 \cos q_5 \cos q_6 + \cos q_4 \sin q_6 & -\cos q_4 \cos q_5 \cos q_6 + \sin q_4 \sin q_6 & -\sin q_5 \cos q_6 \\ -\sin q_4 \cos q_5 \sin q_6 + \cos q_4 \cos q_6 & \cos q_4 \cos q_5 \sin q_6 + \sin q_4 \cos q_6 & \sin q_5 \sin q_6 \\ \sin q_4 \sin q_5 & -\cos q_4 \sin q_5 & \cos q_5 \end{bmatrix}$$

Cálculo q_5

$${}^0\text{Rot}_3^T = \begin{bmatrix} \sin q_2 \sin q_3 - \cos q_2 \cos q_3 & \cos q_2 \sin q_3 - \sin q_2 \cos q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \sin q_3 & \cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{\text{extremo}}^0 & Y_{\text{extremo}}^0 & Z_{\text{extremo}}^0 \\ X_{\text{extremo}}^0 & Y_{\text{extremo}}^0 & Z_{\text{extremo}}^0 \\ X_{\text{extremo}}^0 & Y_{\text{extremo}}^0 & Z_{\text{extremo}}^0 \end{bmatrix}$$

$$q_5 = \arccos \left(x_{\text{extremo}}^0 (-\sin q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \sin q_3) + y_{\text{extremo}}^0 (\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) \right)$$

52

Solución de Pieper

- Ejemplo de resolución de un robot de 6 GDL.
 - 5. Calcular q_4, q_5, q_6 a partir de las matrices de rotación.

$${}^3\text{Rot}_6 = \begin{bmatrix} \text{sen } q_4 \cos q_5 \cos q_6 + \cos q_4 \text{sen } q_6 & & & \\ -\cos q_4 \cos q_5 \cos q_6 + \text{sen } q_4 \text{sen } q_6 & & & \\ & -\text{sen } q_5 \cos q_6 & & \\ & -\text{sen } q_4 \cos q_5 \text{sen } q_6 + \cos q_4 \cos q_6 & \text{sen } q_4 \text{sen } q_5 & \\ & \cos q_4 \cos q_5 \text{sen } q_6 + \text{sen } q_4 \cos q_6 & -\cos q_4 \text{sen } q_5 & \\ & \text{sen } q_5 \text{sen } q_6 & \cos q_5 & \end{bmatrix}$$

Cálculo q_4

$${}^0\text{Rot}_3^T = \begin{bmatrix} \text{sen } q_2 \text{sen } q_3 - \cos q_2 \cos q_3 & \cos q_2 \text{sen } q_3 - \text{sen } q_2 \cos q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\text{sen } q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \text{sen } q_3 & \cos q_2 \cos q_3 - \text{sen } q_2 \text{sen } q_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{\text{extremo}}^0 & X_{\text{extremo}}^0 & X_{\text{extremo}}^0 \\ Y_{\text{extremo}}^0 & Y_{\text{extremo}}^0 & Y_{\text{extremo}}^0 \\ Z_{\text{extremo}}^0 & Z_{\text{extremo}}^0 & Z_{\text{extremo}}^0 \end{bmatrix}$$

$$q_4 = \arccos \left(-\frac{z_{\text{extremo}}^0}{\text{sen } q_5} \right)$$

53

Solución de Pieper

- Ejemplo de resolución de un robot de 6 GDL.
 - 5. Calcular q_4, q_5, q_6 a partir de las matrices de rotación.

$${}^3\text{Rot}_6 = \begin{bmatrix} \text{sen } q_4 \cos q_5 \cos q_6 + \cos q_4 \text{sen } q_6 & & & \\ -\cos q_4 \cos q_5 \cos q_6 + \text{sen } q_4 \text{sen } q_6 & & & \\ & -\text{sen } q_5 \cos q_6 & & \\ & -\text{sen } q_4 \cos q_5 \text{sen } q_6 + \cos q_4 \cos q_6 & \text{sen } q_4 \text{sen } q_5 & \\ & \cos q_4 \cos q_5 \text{sen } q_6 + \text{sen } q_4 \cos q_6 & -\cos q_4 \text{sen } q_5 & \\ & \text{sen } q_5 \text{sen } q_6 & \cos q_5 & \end{bmatrix}$$

Cálculo q_6

$${}^0\text{Rot}_3^T = \begin{bmatrix} \text{sen } q_2 \text{sen } q_3 - \cos q_2 \cos q_3 & \cos q_2 \text{sen } q_3 - \text{sen } q_2 \cos q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\text{sen } q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \text{sen } q_3 & \cos q_2 \cos q_3 - \text{sen } q_2 \text{sen } q_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{\text{extremo}}^0 & X_{\text{extremo}}^0 & X_{\text{extremo}}^0 \\ Y_{\text{extremo}}^0 & Y_{\text{extremo}}^0 & Y_{\text{extremo}}^0 \\ Z_{\text{extremo}}^0 & Z_{\text{extremo}}^0 & Z_{\text{extremo}}^0 \end{bmatrix}$$

$$q_6 = \arccos \left(-\frac{x_{\text{extremo}}^0 (-\text{sen } q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \text{sen } q_3)}{\text{sen } q_5} - \frac{y_{\text{extremo}}^0 (\cos q_2 \cos q_3 - \text{sen } q_2 \text{sen } q_3)}{\text{sen } q_5} \right)$$

54

Solución de Pieper

- Ejemplo de resolución de un robot de 6 GDL.
 - 5. Calcular q_4, q_5, q_6 a partir de las matrices de rotación

$$q_4 = \arccos \left(-\frac{z_{\text{extremo}}^0}{\text{sen } q_5} \right)$$

$$q_5 = \arccos \left(x_{\text{extremo}}^0 (-\text{sen } q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \text{sen } q_3) + \right. \\ \left. + y_{\text{extremo}}^0 (\cos q_2 \cos q_3 - \text{sen } q_2 \text{sen } q_3) \right)$$

$$q_6 = \arccos \left(-\frac{x_{\text{extremo}}^0 (-\text{sen } q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \text{sen } q_3)}{\text{sen } q_5} - \right. \\ \left. - \frac{y_{\text{extremo}}^0 (\cos q_2 \cos q_3 - \text{sen } q_2 \text{sen } q_3)}{\text{sen } q_5} \right)$$

55



CONCLUSIONES

56

Conclusiones

- Cinemática inversa: configuración articular necesaria para alcanzar una localización y rotación dada.
 - Método geométrico.
 - Método algebraico.
 - Solución de Pieper.
- Bibliografía:
 - Robots y Sistemas Sensoriales. F. Torres, J. Pomares, P. Gil, S. Puente, R. Aracil. Prentice Hall. 2002.
 - Introduction to Robotics: Mechanics and Control. John Craig. Addison Wesley. 2004.
 - Fundamentos de Robótica. A. Barrientos, L. F. Peñín, C. Balaguer, R. Aracil. Mc Graw Hill. 2007.

57

Ingeniería Informática



AUTOMATIZACIÓN Y ROBÓTICA

TEMA 12 (Teoría - Práctica)

Cinemática de los sistemas robóticos 2

Jorge Pomares y Carlos A. Jara

58