Ingeniería Informática

AUTOMATIZACIÓN Y ROBÓTICA
TEMA 10 (Teoría - Práctica)
Fundamentos matemáticos

Jorge Pomares y Carlos A. Jara

1

Fundamentos matemáticos

1. Introducción
2. Descripción de la posición y orientación.
3. Transformaciones básicas.
4. Composición de transformaciones.

2

Introducción

- La manipulación de piezas llevada a cabo por un robot implica el movimiento espacial de su extremo.
- Para que el robot puede recoger una pieza es necesario conocer la posición y orientación de ésta respecto al robot.
- Por esto se requieren unas herramientas matemáticas que permitan especificar la posición y orientación de las piezas en el espacio respecto al robot.
- Consideraremos que las piezas se pueden modelar como cuerpos rígidos, con lo que se les puede asociar un sistema de referencia para conocer su posición y orientación.

3

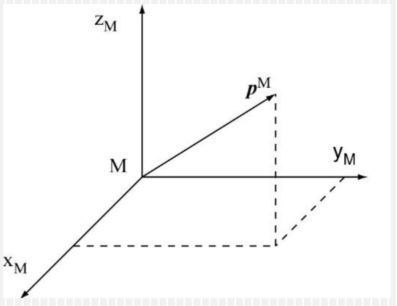
Ingeniería Informática

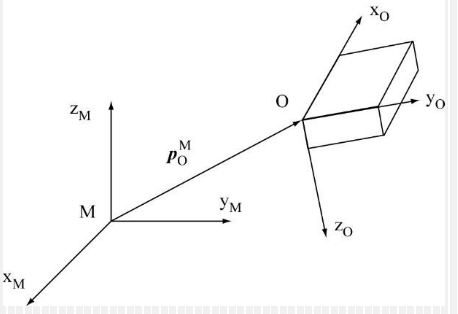
DESCRIPCIÓN DE LA POSICIÓN Y ORIENTACIÓN

4

Descripción de la posición y orientación

- Descripción de la posición
  - Notación

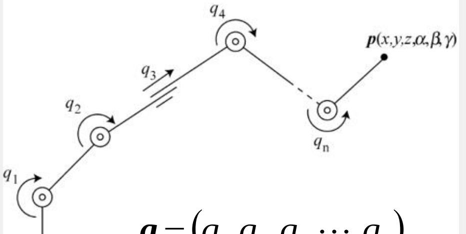




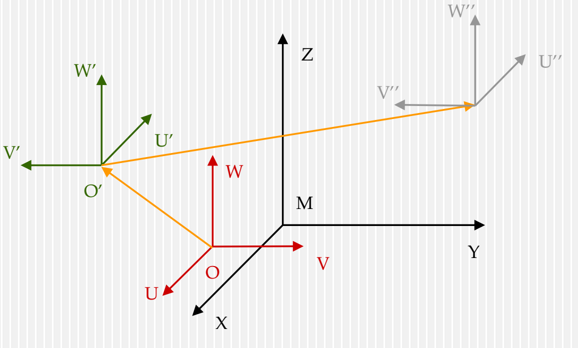
5

Descripción de la posición y orientación

- Descripción de la posición
  - Notación



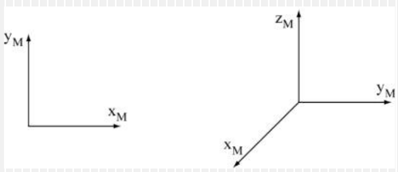
$$\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n)$$

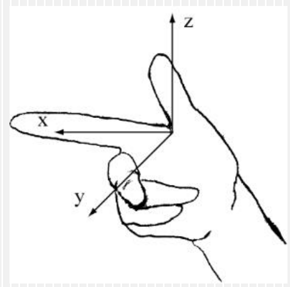


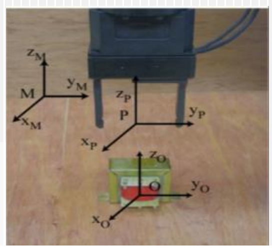
6

Descripción de la posición y orientación

- Introducción:
  - Se van a describir las diferentes herramientas matemáticas y físicas para modelar el comportamiento cinemático y dinámico de un robot.
  - Sistemas de referencia dextrógiros asociados a cada cuerpo rígido.



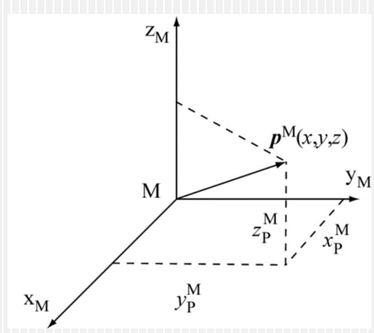




7

Descripción de la posición y orientación

- Descripción de la posición:

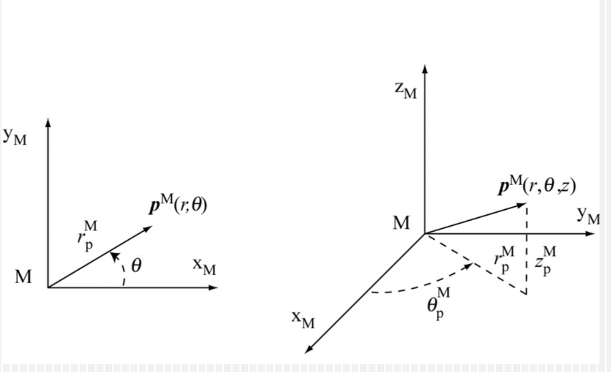


Coordenadas cartesianas
$\boldsymbol{p}^M(x,y,z)$

8

Descripción de la posición y orientación

- Descripción de la posición:

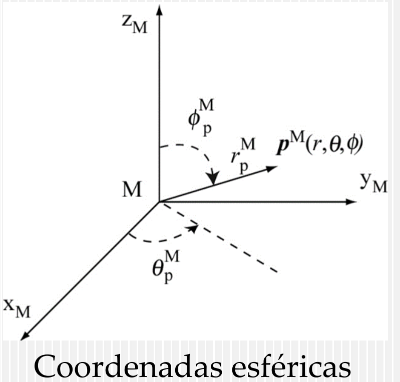


Coordenadas cilíndricas (polares en 2D)
$\boldsymbol{p}^M(r, \vartheta, z)$

9

Descripción de la posición y orientación

- Descripción de la posición:

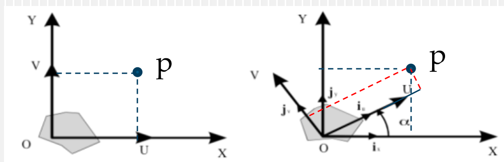


Coordenadas esféricas
$\boldsymbol{p}^M(r,\vartheta,\Phi)$

10

Descripción de la posición y orientación

- Descripción de la orientación. Matrices de rotación 2D:
  - Matriz de rotación: Define la orientación de un sistema móvil (U,V) respecto del sistema de referencia estático O.
  - Proyecciones de los vectores unitarios U, V sobre los ejes del sistema O (X, Y).



$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_{xy} = \left[p_x, p_y\right]^T = p_x \cdot \mathbf{i}_x + p_y \cdot \mathbf{j}_y$$

$$\mathbf{p}_{uv} = \left[p_u, p_v\right]^T = p_u \cdot \mathbf{i}_u + p_v \cdot \mathbf{j}_v$$

Matriz rotación entre UV y XY

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Proyección de **U** sobre **X,Y** — Proyección de **V** sobre X,**Y**

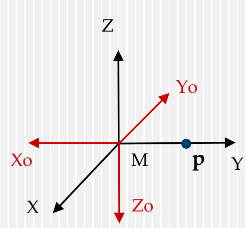
11

Descripción de la posición y orientación

- Descripción de la orientación. Matrices de rotación 3D:
  - Proyecciones de los vectores unitarios x_O, y_O, z_O sobre los ejes del sistema M.

$${}^{M}\mathbf{Rot}_O = \begin{bmatrix} x_O^M & y_O^M & z_O^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{x_O^M} & x_{y_O^M} & x_{z_O^M} \\ y_{x_O^M} & y_{y_O^M} & y_{z_O^M} \\ z_{x_O^M} & z_{y_O^M} & z_{z_O^M} \end{bmatrix}$$

Proyecciones de **X**o, **Y**o, **Z**o sobre **X,Y,Z**



$${}^{M}\mathbf{Rot}_O = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$(p_{xo}, p_{yo}, p_{zo}) = (-1, 0, 0)$

$$\begin{bmatrix} px \\ py \\ pz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) = (0, 1, 0)$

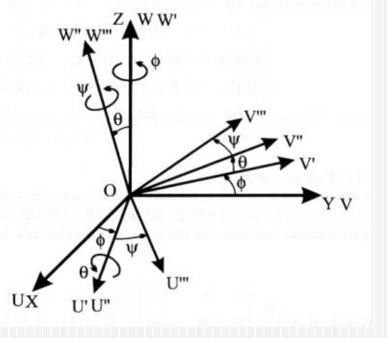
  - Propiedades: una matriz de rotación es ortonormal

$$\left({}^{M}\mathbf{Rot}_O\right)^T = \left({}^{M}\mathbf{Rot}_O\right)^{-1}$$

12

Descripción de la posición y orientación

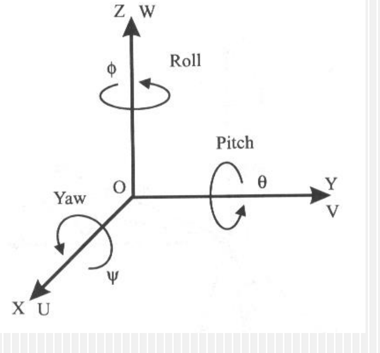
- Descripción de la orientación. Ángulos de Euler:
  - Todo sistema OUVW solidario al cuerpo cuya orientación se quiere describir, puede definirse respecto al sistema OXYZ mediante 3 ángulos ϕ, θ, ψ que representan valores de giros sobre 3 ejes ortogonales.
  - Ángulos de Euler WUW. Estando OXYZ y OUVW inicialmente coincidentes se puede colocar OUVW en cualquier orientación siguiendo:
    - Girar el sistema OUVW un ángulo ϕ con respecto al eje OZ, convirtiéndose en el OU'V'W'.
    - Girar el sistema OU'V'W' un ángulo θ con respecto al eje OU', convirtiéndose en el OU''V''W''.
    - Girar el sistema OU''V''W'' un ángulo ψ con respecto al eje OW'', convirtiéndose en el OU'''V'''W'''.



13

Descripción de la posición y orientación

- Descripción de la orientación. Ángulos de Euler:
  - Ángulos de Euler XYZ. Estando OXYZ y OUVW inicialmente coincidentes se puede colocar OUVW en cualquier orientación siguiendo:
    - Girar el sistema OUVW un ángulo ϕ con respecto al eje OX. Es el denominado Yaw o guiñada.
    - Girar el sistema OUVW un ángulo θ con respecto al eje OY. Es el denominado Pitch o cabeceo.
    - Girar el sistema OUVW un ángulo ψ con respecto al eje OZ. Es el denominado Roll o alabeo.



14

Descripción de la posición y orientación

- Matrices y coordenadas homogéneas:
  - Las coordenadas homogéneas en un espacio n-dimensional son n+1. En 3D un punto $\boldsymbol{p}$(x,y,z) en coordenadas homogéneas es: $\boldsymbol{p}$(wx,wy,wz,w) donde w es un factor de escala (se considera w=1).
  - Matriz de transformación homogénea. Representación de la posición y orientación de forma conjunta de un sistema de coordenadas.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\boldsymbol{x}_O^M} & x_{\boldsymbol{y}_O^M} & x_{\boldsymbol{z}_O^M} & x_O^M \\ y_{\boldsymbol{x}_O^M} & y_{\boldsymbol{y}_O^M} & y_{\boldsymbol{z}_O^M} & y_O^M \\ z_{\boldsymbol{x}_O^M} & z_{\boldsymbol{y}_O^M} & z_{\boldsymbol{z}_O^M} & z_O^M \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

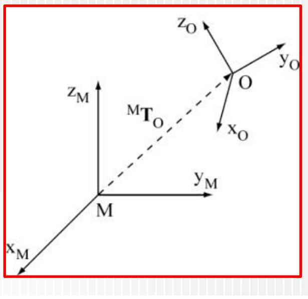
  - Propiedades:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \text{Rotación}^{\mathrm{T}} & -\text{Rotación}^{\mathrm{T}} \cdot \text{Traslación} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

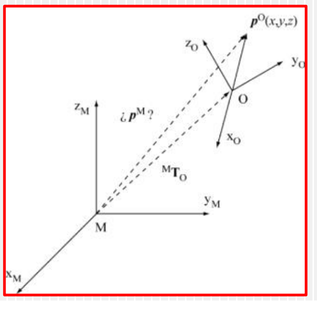
Descripción de la posición y orientación

- Matrices y coordenadas homogéneas. Uso en robótica:
  - Representar la posición y orientación de un sistema O'UVW resultado de rotar y trasladar el sistema OXYZ según una matriz de traslación y rotación dadas.
  - Conocer las coordenadas $\boldsymbol{r}$ $[x, y, z, 1]^{\mathrm{T}}$ del vector $\boldsymbol{r}$ en el sistema OXYZ a partir de sus coordenadas $\boldsymbol{r}'$ $[u, v, w, 1]^{\mathrm{T}}$ en el sistema O'UVW.
  - Expresar la rotación y traslación de un vector respecto de un sistema de referencia fijo OXYZ de tal manera que un vector $\boldsymbol{r}$ $[x, y, z, 1]^{\mathrm{T}}$ transformado según $\mathbf{T}$ se convierte en el vector $\boldsymbol{r}'$ $[x', y', z', 1]^{\mathrm{T}}$ dado por: $\boldsymbol{r}' = \mathbf{T}\,\boldsymbol{r}$.

$${}^{M}\mathbf{T}_O = \begin{bmatrix} {}^{M}\mathbf{Rot}_O & {}^{M}\mathbf{Tras}_O \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{p}^M = \begin{bmatrix} p_x^M \\ p_y^M \\ p_z^M \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{M}\mathbf{T}_O \begin{bmatrix} p_x^O \\ p_y^O \\ p_z^O \\ 1 \end{bmatrix}$$



Ingeniería Informática

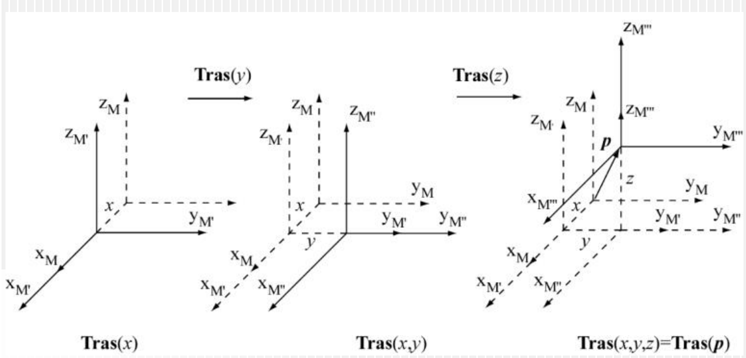
TRANSFORMACIONES BÁSICAS

17

Transformaciones básicas

- Translación:

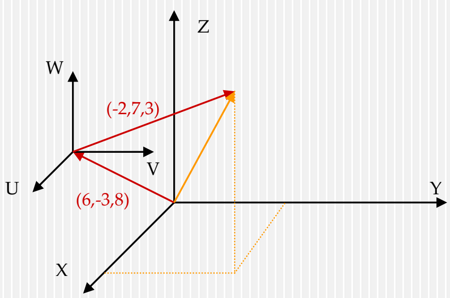
$$\mathbf{Tras}(\boldsymbol{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x'} \\ p_{y'} \\ p_{z'} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{x'} + x \\ p_{y'} + y \\ r_{z'} + z \\ 1 \end{bmatrix}$$



18

Transformaciones básicas

- Ejemplo. El sistema O'UVW se encuentra trasladado un vector ***p*** (6, -3, 8) con respecto al sistema OXYZ. Calcular las coordenadas ***r*** (x, y, z) del vector ***r*** cuyas coordenadas con respecto al sistema O'UVW son ***r'*** (-2, 7, 3)



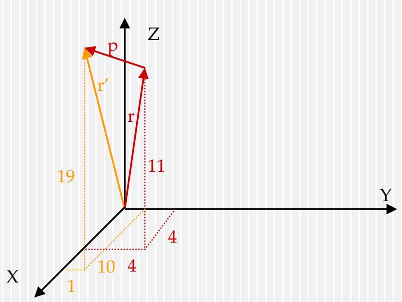
$$\mathbf{Tras}(\boldsymbol{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix}$$

19

Transformaciones básicas

- Ejemplo. Calcular el vector ***r'*** resultante de trasladar el vector ***r*** (4, 4, 11) según la transformación **Tras**(***p***) con ***p***(6,-3,8).



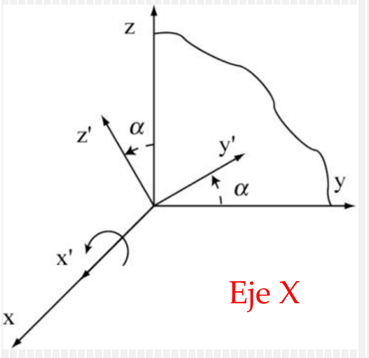
$$\mathbf{Tras}(\boldsymbol{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 19 \\ 1 \end{bmatrix}$$

20

Transformaciones básicas

- Rotación:

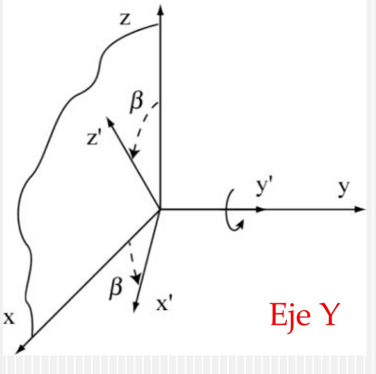


$$\mathbf{Rot}(x,\alpha)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0\\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

21

Transformaciones básicas

- Rotación:

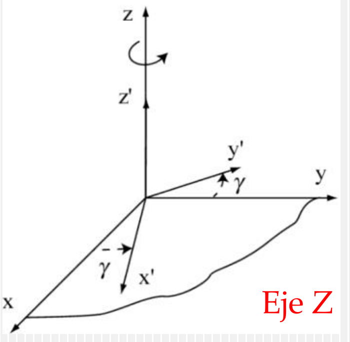


$$\mathbf{Rot}(y,\beta)=\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & \operatorname{sen}\beta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\operatorname{sen}\beta & 0 & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

22

Transformaciones básicas

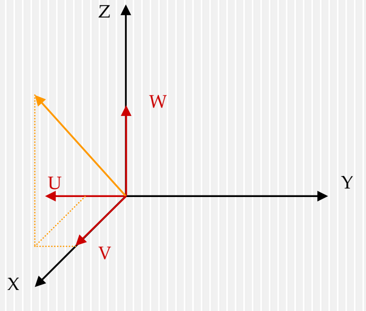
- Rotación:



$$\mathbf{Rot}(z,\gamma)=\begin{bmatrix}\cos\gamma & -\operatorname{sen}\gamma & 0 & 0\\ \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Transformaciones básicas

- Ejemplo. El sistema O'UVW se encuentra girado -90º alrededor del eje OZ con respecto al sistema OXYZ. Calcular las coordenadas del vector ***r*** (x, y, z) si sus coordenadas en el sistema O'UVW son ***r'*** (4, 8, 12).

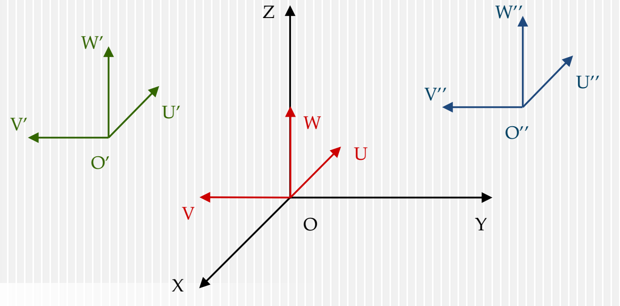


$$\mathbf{Rot}(z,\gamma)=\begin{bmatrix}\cos\gamma & -\operatorname{sen}\gamma & 0 & 0\\ \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}r_x\\ r_y\\ r_z\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 8\\ 12\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\ -4\\ 12\\ 1\end{bmatrix}$$

Transformaciones básicas

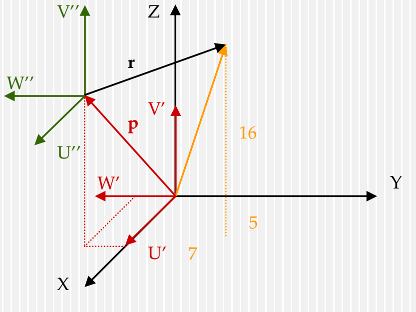
- Traslación junto con rotación.
  - No conmutativa:
    - O'U'V'W': Primero se rota 180º alrededor de z y después se traslada.
    - O''U''V''W'': Primero se traslada y después se rota 180º alrededor de z.



25

Transformaciones básicas

- Un sistema OUVW ha sido girado 90º alrededor del eje OX y, posteriormente, trasladado un vector **p**(8,-4,12) con respecto al sistema OXYZ. Calcular las coordenadas (r_x, r_y, r_z) del vector **r** con coordenadas $\mathbf{r}_{u''v''w''}(-3,4,-11)$.



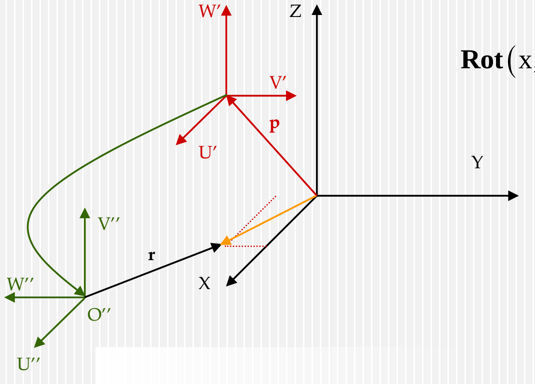
$$\mathbf{T}(\mathbf{p})\mathbf{Rot}(x,\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & \cos\phi & -\mathrm{sen}\phi & p_y \\ 0 & \mathrm{sen}\phi & \cos\phi & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 16 \\ 1 \end{bmatrix}$$

26

Transformaciones básicas

- Un sistema OUVW trasladado un vector **p**(8,-4,12) con respecto al sistema OXYZ y girado 90º alrededor del eje OX. Calcular las coordenadas (r_x,r_y,r_z) del vector **r** con coordenadas $\mathbf{r}_{u''v''w''}$(-3,4,-11).



$$\mathbf{Rot}(x,\phi)\mathbf{T}(\mathbf{p})=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & p_x\\ 0 & \cos\phi & -\text{sen}\phi & p_y\cos\phi - p_z\text{sen}\phi\\ 0 & \text{sen}\phi & \cos\phi & p_y\text{sen}\phi + p_z\cos\phi\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}r_x\\ r_y\\ r_z\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 8\\ 0 & 0 & -1 & -12\\ 0 & 1 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\ 4\\ -11\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ -1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

27

Ingeniería Informática

COMPOSICION DE TRANSFORMACIONES

28

Composición de transformaciones

- Para describir diversos giros y traslaciones consecutivas.
  - Si el sistema OXYZ y el sistema transformado O'UVW son coincidentes la matriz de transformación es la identidad.
  - Si el sistema O'UVW se obtiene mediante rotaciones y traslaciones definidas con respecto al sistema fijo OXYZ, la matriz homogénea que representa cada transformación se deberá premultiplicar sobre las matrices de las transformaciones previas.
  - Si el sistema O'UVW se obtiene mediante rotaciones y traslaciones definidas con respecto al sistema móvil, la matriz homogénea que representa cada transformación se deberá postmultiplicar sobre las matrices de las transformaciones previas.

29

Composición de transformaciones

- Ejemplo. Obtener la matriz de transformación que representa al sistema obtenido a partir de un sistema de referencia fijo sobre el que se le ha aplicado un giro de 90º alrededor del eje X, un giro de 180º alrededor del eje Y (estas dos rotaciones se realizan respecto al sistema de coordenadas fijo OXYZ); y por último un giro de -90º alrededor del eje V del sistema transformado.

30

Composición de transformaciones

- Ejemplo. Obtener la matriz de transformación que representa al sistema obtenido a partir de un sistema de referencia fijo sobre el que se le ha aplicado un giro de 90º alrededor del eje X, un giro de 180º alrededor del eje Y (estas dos rotaciones se realizan respecto al sistema de coordenadas fijo OXYZ); y por último un giro de -90º alrededor del eje V del sistema transformado.

$$\mathbf{T} = \mathbf{Rot}(y,180^o)\cdot\mathbf{Rot}(x,90^o)\cdot\mathbf{Rot}(v,-90^o)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

31

Composición de transformaciones

- Ejemplo. Obtener la matriz de transformación que representa las siguientes transformaciones sobre un sistema OXYZ fijo de referencia: traslación de un vector (-3,10,10); giro de -90º sobre el eje O'U del sistema trasladado y giro de 90º sobre el eje O'V' del sistema girado.

32

Composición de transformaciones

- Ejemplo. Obtener la matriz de transformación que representa las siguientes transformaciones sobre un sistema OXYZ fijo de referencia: traslación de un vector (-3,10,10); giro de -90º sobre el eje O'U del sistema trasladado y giro de 90º sobre el eje O'V' del sistema girado.

$$\mathbf{T} = \mathbf{Tras}(-3,10,10)\cdot\mathbf{Rot}(u,-90^{o})\cdot\mathbf{Rot}(v',90^{o})$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

33

Composición de transformaciones

- Ejemplo. La localización del extremo de un robot viene determinada por la siguiente matriz homogénea:

$$\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con respecto al sistema de coordenadas situado en la base. Obtener la localización del extremo si éste sufre en primer lugar una traslación de un vector p(5,10,5) y posteriormente una rotación de -90º con respecto al eje y, expresando ambas transformaciones con respecto al sistema de coordenadas de la base del robot.

$$\mathbf{T} = \mathbf{Rot}(y,-90^{o})\cdot\mathbf{Tras}(5,10,5)\cdot\mathbf{T}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

34

Ingeniería Informática

AUTOMATIZACIÓN Y ROBÓTICA

TEMA 10 (Teoría - Práctica)

Fundamentos matemáticos

Jorge Pomares y Carlos A. Jara

35