Erwartungswert und Varianz von Zufallsvariablen

Erwartungswert - Diskret

$$\mathbb{E}(x) = x_1 \cdot \mathbb{P}(x = x_1) + x_2 \cdot \mathbb{P}(x = x_2) \cdot ... = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Erwartungswert - Stetig

$$\mathbb{E}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

Eigenschaften des Erwartungswerts

Sei $h(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, dann gilt:

Diskret: $\mathbb{E}(h(x)) = \sum_{i=1}^{n} h(x_i) p_i$

Stetig: $\mathbb{E}(h(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot f(x) dx$

Außerdem gilt:

$\mathbb{E}(h(x) + g(x)) = \mathbb{E}(h(x)) + \mathbb{E}(g(x))$

$\mathbb{E}(aX + c) = a\mathbb{E}(X) + c$

Varianz

$$\mathbb{V}(x) = \mathbb{E}((x - \mathbb{E}(x))^2)$$

Oder alternativ:

$$\mathbb{V}(x) = \mathbb{E}(x^2) - \mathbb{E}(x)^2$$

Varianz - Diskret

$$\mathbb{V}(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathbb{E}(x))^2 p_i$$

Varianz - Stetig

$$\mathbb{V}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(x))^2 \cdot f(x)dx$$

Rechenregeln

Für X,Y unabhängige Zufallsvariablen:

$$\mathbb{V}(aX + bY) = a^2 \cdot \mathbb{V}(X) + b^2 \cdot \mathbb{V}(Y)$$

$$\mathbb{V}(X + a) = \mathbb{V}(X)$$

Aufgabe 2

Seien X und Y unabhängige Zufallsgrößen mit den Erwartungswerten $\mathbb{E}(X) = 5$, $\mathbb{E}(Y) = 3$ und den Varianzen $\mathbb{V}(X) = 1$, $\mathbb{V}(Y) = 2$. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz folgender Zufallsgrößen:

a) $Z_1 = 2 \cdot X$

b) $Z_1 = X + Y$

c) $Z_1 = X - Y$

Aufgabe 2

Seien X und Y unabhängige Zufallsgrößen mit den Erwartungswerten $\mathbb{E}(X) = 10$, $\mathbb{E}(Y) = 12$ und den Varianzen $\mathbb{V}(X) = 4$, $\mathbb{V}(Y) = 18$. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz folgender Zufallsgrößen:

a) $Z_1 = \frac{1}{2}X + \frac{1}{3}Y$

b) $Z_1 = \frac{1}{2}X - \frac{1}{3}Y$

c) $Z_1 = \frac{1}{2}X - \frac{1}{3}X$

(WiSe15/16)

Aufgabe 3

Die Zufallsvariablen $X, Y, Z, X_1, ...X_{100}$ seien unabhängig mit dem Erwartungswert 5 und der Varianz 20.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $2 \cdot X + 3 \cdot Y - Z$

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $S := X_1 + ... + X_{100}$.

(WiSe14/15)

Aufgabe 5

Von einer reellen Zufallsvariable X sei bekannt, dass sie nur die Werte -1,1 und 4 annimmt, mit den Wahrscheinlichkeiten

$$P(X=-2)=\frac{1}{4},\quad P(X=-1)=\frac{1}{8}\quad P(X=0)=\frac{1}{8}\quad und\quad P(X=1)=\frac{1}{2}$$

a) Berechnen Sie die $\mathbb{V}(X)$. Bestimmen Sie dafür $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{E}(X^2)$.

b) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X und $Y=-X+1$. Berechnen Sie $\mathbb{V}(Y)$ und $\mathbb{E}(Y)$.

Aufgabe 6

Von einer reellen Zufallsvariable X sei bekannt, dass sie nur die Werte -1,1 und 4 annimmt, mit den Wahrscheinlichkeiten

$$P(X=-1)=\frac{5}{8},\quad P(X=1)=\frac{1}{8}\quad und\quad P(X=4)=\frac{1}{4}$$

a) Berechnen Sie die $\mathbb{V}(X)$. Bestimmen Sie dafür $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{E}(X^2)$.

b) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $Y=-2X+3$. Berechnen Sie $\mathbb{V}(Y)$.

c) Die Zufallsvariable Z sei unabhänging von X und habe die gleiche Verteilung. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X+Z<0)$ sowie $\mathbb{V}(X+Z)$.

(SoSe18/19)

Aufgabe 7

Es sei X eine stetige Zufallsvariable, mit Dichtefunktion:

$$f(x)=\begin{cases}3\cdot x^2, & \text{für } 0<x<1\\ 0 & \text{sonst}\end{cases} \tag{1}$$

Bestimmen sie $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{V}(X)$.

Aufgabe 8

Es sei X eine stetige Zufallsvariable, mit Dichtefunktion:

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{für } 0<x<1\\ 1, & \text{für } 1<x<1.5\\ 0 & \text{sonst}\end{cases} \tag{2}$$

Bestimmen sie $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{V}(X)$.

Aufgabe 9

Es sei X eine stetige Zufallsvariable, mit Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} 3 \cdot x^{-4}, & \text{für } x > 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3}$$

Bestimmen sie $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{V}(X)$. (SoSe20)