

Zufallsvariablen

Zufallsvariable

Eine Abbildung X , mit:

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \rightarrow X(\omega)$$

heißt Zufallsvariable auf Ω .

Verteilungsfunktion

Sei X eine Zufallsvariable auf Ω dann heißt die Abbildung:

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1], \quad F := \mathbb{P}(X(\omega) \leq x) =: \mathbb{P}(X \leq x)$$

Verteilungsfunktion F von X . Eine Verteilungsfunktion ist immer monoton wachsend:

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$$

und es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

Diskrete Zufallsvariablen: Wahrscheinlichkeitsfunktion

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion gibt die Wahrscheinlichkeit einzelner Ausprägungen an:

$$f(x) := \mathbb{P}(X = x) = \lim_{h \rightarrow > 0} F(x + h) - \lim_{h \rightarrow > 0} F(x - h)$$

Stetige Zufallsvariablen: Wahrscheinlichkeitsdichte

Wahrscheinlichkeitsdichte ist die Ableitung der Verteilungsfunktion:

$$f(x) := F(x)'$$

und hat die Eigenschaften:

$$f(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Interpretation

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X einen Wert kleiner oder gleich a annimmt:

$$\mathbb{P}(X \leq a) = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X einen Wert größer a annimmt:

$$\mathbb{P}(a < X) = 1 - \mathbb{P}(X \leq a) = 1 - F(a) = 1 - \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X einen Wert zwischen a und b annimmt:

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

Aufgabe 1

Bei einem Münzwurfspiel kann man Geld gewinnen. Es werden zwei Münzen geworfen und die Werte addiert. Kopf entspricht dabei 0 und Zahl 1. Bei einer Summe von 0 verliert der Spieler 1€, bei einer Summe von 1 gibt es weder Verlust noch Gewinn. Bei einer Summe von 2 gewinnt der Spieler 1€. Bestimme und zeichne Verteilungsfunktion und Wahrscheinlichkeitsfunktion.

Aufgabe 2

Es sei X eine stetige Zufallsvariable, mit Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{x}{10} & \text{für } 0 < x \leq 10 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1)$$

Zeichne die Verteilungsfunktion. Bestimme und zeichne die zugehörige Dichtefunktion f . Berechne $\mathbb{P}(X \leq 10)$, $\mathbb{P}(X \leq 5)$, $\mathbb{P}(X > 10)$, $\mathbb{P}(5 < X \leq 7)$.

Aufgabe 3

Die Dichte f einer stetigen Zufallsgröße X sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{für } 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{2} & \text{für } 3 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2)$$

Bestimme α und skizziere f . Bestimme und skizziere die Verteilungsfunktion F von X . Berechne $\mathbb{P}(X \leq 3)$.

Aufgabe 4

Bei einem Würfelspiel gewinnt bzw. verliert der Spieler immer die Differenz zur Vier. Würfelt der Spieler zum Beispiel eine Vier gewinnt er 0€, würfelt er eine 1 so verliert er 3€, würfelt er aber eine 6 so gewinnt er 2€. Bestimme und zeichne Verteilungsfunktion

und Wahrscheinlichkeitsfunktion.

Aufgabe 5

Es sei X eine stetige Zufallsvariable, mit Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 1 \\ \frac{x}{4} - \frac{1}{4} & \text{für } 1 < x \leq 3 \\ \frac{x}{2} - 1 & \text{für } 3 < x \leq 4 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3)$$

Zeichne die Verteilungsfunktion. Bestimme und zeichne die zugehörige Dichtefunktion f . Berechne $\mathbb{P}(X \leq 2)$, $\mathbb{P}(X \leq 3)$, $\mathbb{P}(X > 3)$, $\mathbb{P}(3 < X \leq 4)$.

Aufgabe 6

Es sei X eine stetige Zufallsvariable, für die gilt:

$$\mathbb{P}(X > x) = \begin{cases} x^{-3} & \text{für } x > 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4)$$

Berechnen Sie die zugehörige Dichtefunktion f . (SoSe20)

Aufgabe 7

Die Dichte f einer stetigen Zufallsgröße X sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5)$$

Bestimme α und skizziere f . Bestimme und skizziere die Verteilungsfunktion F von X . Berechne $\mathbb{P}(X \leq 1)$.

Aufgabe 8

Die Dichte f einer stetigen Zufallsgröße X sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ \frac{1}{4} & \text{für } 5 \leq x \leq 7 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6)$$

Bestimme α und skizziere f . (Ergebnis: $\alpha = \frac{1}{8}$)
Bestimme und skizziere die Verteilungsfunktion F von X .
(SoSe16).