

Regression

Lösungsskizze

Legen sie mit Hilfe der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung von Gauß eine Kurve der Form

$$y = f_{a,b}(x)$$

durch die Punkte $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Bestimmen sie also a und b.

Bestimme die quadratische Abweichung:

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - f_{a,b}(x_i))^2$$

Nach a und b ableiten. Dann gleich Null setzen und so a und b berechnen.

$$\frac{dQ}{da} Q(a, b) = 0$$

$$\frac{dQ}{db} Q(a, b) = 0$$

Falls $f_{a,b}(x) = a + b \cdot x$:

$$b = \frac{\text{cov}(x, y)}{\text{var}(x)} \text{ und } a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$$

Zur Erinnerung:

$$\text{cov}(x, y) = s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \bar{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$\text{Var}(\vec{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \bar{x^2} - \bar{x}^2$$

Aufgabe 1

x	2	1	3
y	2	1	1.5

Berechnen Sie eine Gerade $f(x) = a + b \cdot x$ die bezüglich der kleinsten Quadrate diese Punkte optimal annähert. Berechnen Sie für diese Funktion sowie die folgenden die quadratische Abweichung.

a) $y = \frac{1}{3}2^x$

b) $y = -x^2 + 4x - 2$

Für eine Kurve $y = a \cdot 2^x$ soll der Parameter a bezüglich der quadratischen Abweichung als optimal bestimmt werden.

Aufgabe 2

Gegeben sei die folgende zweidimensionale Stichprobe zur Abhängigkeit der Dichte D (in Gramm pro Liter) von der Temperatur T (in Grad Celsius) bei trockener Luft:

T	-20	-10	0	10	20
D	1.39	1.34	1.29	1.25	1.20

Man bestimme die Ausgleichsgerade $D = aT + b$, d.h. die Koeffizienten a und b . (SoSe16 Aufgabe 2).

Aufgabe 3

- Legen Sie mit Hilfe der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung von Gauß eine Kurve der Form $y = a \cdot 2^x$ durch die drei Punkte $(0, 2), (1, 4), (2, 13) \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie also a .
- Legt man mit derselben Methode eine Kurve der Form $y = c \cdot x$ durch obige drei Punkte, so erhält man $c = 6$. Welche der beiden Kurven passt besser im Sinne der quadratischen Abweichung?

(Aus WiSe 14/15)

Aufgabe 4

- Legen Sie mit Hilfe der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung von Gauß eine Kurve der Form $y = a \cdot 3^x$ durch die drei Punkte $(0, 1), (1, 4), (2, 13) \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie also a .
- Legt man mit derselben Methode eine Kurve der Form $y = c \cdot x$ durch obige drei Punkte, so erhält man $c = 6$. Welche der beiden Kurven passt besser im Sinne der quadratischen Abweichung?

(Aus WiSe 15/16)

Aufgabe 5

Bei einer Messung ergaben sich für die x -Werte $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ und für die y -Werte $y_1 = 3, y_2 = 7, y_3 = 10$.

- Legen Sie mit Hilfe der Gaußeschen Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Kurve der Form $y = ax^2 + 2$ durch diese Punkte. Berechnen Sie also a .

- b) Legt man mit der selben Methode eine Kurve der Form $y = bx + 2$ durch diese Punkte, so ergibt sich $b = 2.5$. Welche der beiden Kurven passt im Sinne der kleinsten quadratischen Abweichung besser? Begründung!

(Aus SoSe18 Aufgabe 1.)

Aufgabe 6

Bei einer Messung ergaben sich für die x-Werte

$$x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 2$$

und für die y-Werte

$$y_1 = 5, y_2 = 4, y_3 = 1 \text{ und } y_4 = 7$$

Legen sie mit Hilfe der Gaußschen Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Kurve der Form $y = ax^3 + b$ durch diese Punkte. Bestimmen sie also die Parameter a und b.