

ML-Schätzung

Gegeben ist eine Zufallsvariable X mit einer Verteilung $f_\lambda(x)$ die von dem Parameter λ abhängt und eine Stichprobe unabhängiger Messwerte x_1, \dots, x_n . Ziel: Bestimme den Parameter λ so, dass die Stichprobe am Wahrscheinlichsten ist.

Wahrscheinlichkeit der Stichprobe

$$L(\lambda) = f_\lambda(x_1) \cdot f_\lambda(x_2) \cdot \dots \cdot f_\lambda(x_n)$$

Maximum der Wahrscheinlichkeit

Ableiten und Null setzen.

$$L(\lambda)' = 0$$

Log-Likelihood-Trick

$$l(\lambda) = \ln(L(\lambda))$$

Ableiten und Null setzen geht oft einfacher und gibt das gleiche Ergebnis, da der Logarithmus streng monoton steigend ist.

$$l(\lambda)' = 0$$

Aufgabe 1

Die stetige Zufallsvariable X besitze die Dichte:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1)$$

Eine Stichprobe ergab für X die Werte $x_1 = 13, x_2 = 9, x_3 = 8, x_4 = 10$. Berechnen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer für λ .

Aufgabe 2

Die stetige Zufallsvariable X besitze die Dichte:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ c \cdot (x+1)^{-c-1} & \text{sonst} \end{cases} \quad (2)$$

Mit $c > 0$. Eine Stichprobe ergab für X die Werte $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 7$. Berechnen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer für c . (WiSe15/16)

Aufgabe 3

Eine stetige Zufallsgröße X habe die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \lambda^5 \cdot \frac{x^4}{4!} \cdot e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3)$$

Man bestimme den Maximum-Likelihood-Schätzer, der anhand einer Stichprobe x_1, \dots, x_n den Parameter λ schätzt. (SoSe16).

Aufgabe 4

Für eine Zufallsvariable X mit Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \cdot x^{\alpha-1} & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4)$$

mit $\alpha > 0$ ergab eine Stichprobe die Werte x_1, \dots, x_n . Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood Schätzer für α . (WiSe14/15)

Aufgabe 5

Eine Zufallsvariable X sei stetig verteilt mit der von einem Parameter $\alpha > 0$ abhängigen Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\alpha} e^{-\frac{x^2}{\alpha}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5)$$

Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer, der aus einer Zufallsstichprobe x_1, \dots, x_n den Parameter α schätzt. (SoSe18)