

# Prüfung Sommersemester 2018



TECHNISCHE HOCHSCHULE NÜRNBERG  
GEORG SIMON OHM

Studiengang: IN/WIN/MIN – 4. Semester  
Prüfungsfach: Statistik  
Prüfer: Delfs/ Hufnagel / Wermuth  
Prüfungstermin: 20. Juli 2018, 11.00 Uhr  
Prüfungsdauer: 90 Minuten  
Hilfsmittel: Mathematische Formelsammlung,  
8 Seiten DIN A4 persönliche Aufzeichnungen,  
Taschenrechner

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Unterschrift:

Note:

Prüfer:

1	2	3	4	5	6	Summe

**Bitte beachten:** Zu Beginn der Klausur den Aufgabensatz - bestehend aus diesem Deckblatt und 6 Aufgabenblättern sowie 3 Seiten Tabellen - auf Vollständigkeit überprüfen und Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt eintragen!

NICHT mit Bleistift schreiben!

**Aufgabe 1 (6 von 36 Punkten)**

Bei einer Messung ergaben sich für die  $x$ -Werte  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$  und für die  $y$ -Werte  $y_1 = 3, y_2 = 7, y_3 = 10$ .

- a) Legen Sie mit Hilfe der Gaußschen Methode der kleinsten quadratischen Abweichung (least squares) eine Kurve der Form  $y = ax^2 + 2$  durch diese Punkte. Bestimmen Sie also den Parameter  $a$ .
- b) Legt man mit derselben Methode eine Kurve der Form  $y = bx + 2$  durch diese Punkte, so ergibt sich  $b = 2.5$ . Welche der beiden Kurven passt im Sinne von least squares besser? Begründung!

### Aufgabe 2 (6 von 36 Punkten)

Ein einfacher Spamfilter klassifiziert eine Email als Spammmail, falls sie ein Wort aus einer vorgegebenen Liste von Schlüsselwörtern enthält. Mit dieser Methode erkennt der Spamfilter 95% aller Spammails. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 8% wird auch eine Nicht-Spammail als Spammail ausgewiesen.

- a) Welche bedingten Wahrscheinlichkeiten ergeben sich direkt aus den Aussagen?
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine vom Filter als Spammmail ausgewiesene Mail tatsächlich eine Spammmail, falls es sich bei 20% aller Mails um Spammails handelt?

Sie können hier die Ergebnisse von a) benutzen.

**Aufgabe 3 (6 von 36 Punkten)**

In deutschen Texten tritt der Buchstabe e mit einer Häufigkeit von 17.4% auf. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 80 zufällig aus einem langen deutschen Text ausgewählten Zeichen mindestens 20 mal der Buchstabe e ist? Eine näherungsweise Lösung ist ausreichend.

**Aufgabe 4 (6 von 36 Punkten)**

Von einer reellen Zufallsvariable  $X$  sei bekannt, dass sie nur die Werte  $-1, 1$  und  $4$  annimmt, mit den Wahrscheinlichkeiten

$$P(X = -1) = 5/8, P(X = 1) = 1/8 \quad \text{und} \quad P(X = 4) = 1/4.$$

- a) Zeigen Sie:  $\text{Var}(X) = 4,5$ . Bestimmen Sie dazu zunächst die Erwartungswerte  $E(X)$  und  $E(X^2)$ .
- b) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen  $Y = -2X + 3$ . In der Skizze müssen die Koordinaten der Sprungstellen deutlich erkennbar sein. Welchen Wert hat  $\text{Var}(Y)$ ?
- c) Die Zufallsvariable  $Z$  sei *unabhängig* zu  $X$  und habe die *gleiche Verteilung*. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit  $P(X + Z < 0)$  sowie die Varianz  $\text{Var}(X + Z)$ .

**Aufgabe 5 (6 von 36 Punkten)**

Eine Zufallsvariable  $X$  sei stetig verteilt mit der von einem Parameter  $\alpha > 0$  abhängigen Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{2x}{\alpha} e^{-\frac{x^2}{\alpha}} & \text{für } x > 0 \end{cases}.$$

Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer, der aus einer Zufallsstichprobe  $x_1, \dots, x_n$  den Parameter  $\alpha$  schätzt.

### Aufgabe 6 (6 von 36 Punkten)

Bei der letzten Wahl hatten die Parteien A, B und C einen Stimmenanteil von 50%, 30% und 20%. Durch eine Stichprobe soll die Hypothese „Der Stimmenanteil hat sich nicht verändert“ überprüft werden. Die Irrtumswahrscheinlichkeit soll höchstens 5% betragen. Die Stichprobe ergibt 470 Stimmen für A, 345 Stimmen für B und 185 Stimmen für C.

- a) Was kann man daraus schließen?
- b) Was ergibt sich bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0.5%?

Tabelle I: Die Standardnormalverteilung  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ 

	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.5279	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.5438	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.6293	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.6591	0.66276	0.6664	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.7054	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.7224
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.7549
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.7673	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.7823	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.8665	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.879	0.881	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.9032	0.9049	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.9222	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.9452	0.9463	0.94738	0.94845	0.9495	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.9608	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.9732	0.97381	0.97441	0.975	0.97558	0.97615	0.9767
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.9803	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.983	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.985	0.98537	0.98574
2.2	0.9861	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.9884	0.9887	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.9901	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.9918	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.9943	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.9952
2.6	0.99534	0.99547	0.9956	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.9972	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.9976	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.999
3.1	0.99903	0.99906	0.9991	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.9994	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.9995
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.9996	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.9997	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.9998	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.9999	0.9999	0.9999	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4.0	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998

Man beachte  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ . (Diese Tabelle wurde mit MAXIMA erzeugt.)

Tabelle II: Quantile  $t_{m;q}$  der t-Verteilung ( $m$  links,  $q$  oben)

	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
1	3.0777	6.3138	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2	1.8856	2.92	4.3027	6.9646	9.9248	22.327	31.599
3	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409	10.215	12.924
4	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041	7.1732	8.6103
5	1.4759	2.015	2.5706	3.3649	4.0321	5.8934	6.8688
6	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	5.2076	5.9588
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.998	3.4995	4.7853	5.4079
8	1.3968	1.8595	2.306	2.8965	3.3554	4.5008	5.0413
9	1.383	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	4.2968	4.7809
10	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	4.1437	4.5869
11	1.3634	1.7959	2.201	2.7181	3.1058	4.0247	4.437
12	1.3562	1.7823	2.1788	2.681	3.0545	3.9296	4.3178
13	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	3.852	4.2208
14	1.345	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	3.7874	4.1405
15	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467	3.7328	4.0728
16	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	3.6862	4.015
17	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	3.6458	3.9651
18	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784	3.6105	3.9216
19	1.3277	1.7291	2.093	2.5395	2.8609	3.5794	3.8834
20	1.3253	1.7247	2.086	2.528	2.8453	3.5518	3.8495
21	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314	3.5272	3.8193
22	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188	3.505	3.7921
23	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.485	3.7676
24	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969	3.4668	3.7454
25	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.4502	3.7251
26	1.315	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787	3.435	3.7066
27	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.421	3.6896
28	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.4082	3.6739
29	1.3114	1.6991	2.0452	2.462	2.7564	3.3962	3.6594
30	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.75	3.3852	3.646
40	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045	3.3069	3.551
50	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778	3.2614	3.496
60	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603	3.2317	3.4602
70	1.2938	1.6669	1.9944	2.3808	2.6479	3.2108	3.435
80	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387	3.1953	3.4163
90	1.291	1.662	1.9867	2.3685	2.6316	3.1833	3.4019
100	1.2901	1.6602	1.984	2.3642	2.6259	3.1737	3.3905
110	1.2893	1.6588	1.9818	2.3607	2.6213	3.166	3.3812
120	1.2886	1.6577	1.9799	2.3578	2.6174	3.1595	3.3735
130	1.2881	1.6567	1.9784	2.3554	2.6142	3.1541	3.3669
140	1.2876	1.6558	1.9771	2.3533	2.6114	3.1495	3.3614
150	1.2872	1.6551	1.9759	2.3515	2.609	3.1455	3.3566
$\infty$	1.2816	1.6449	1.96	2.3263	2.5758	3.0902	3.2905

(Diese Tabelle wurde mit MAXIMA erzeugt.)

Tabelle III: Quantile  $\chi^2_{m;q}$  der  $\chi^2$ -Verteilung ( $m$  links,  $q$  oben)

	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	$3.927 \cdot 10^{-5}$	$1.5709 \cdot 10^{-4}$	$9.8207 \cdot 10^{-4}$	0.0039321	0.015791	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794
2	0.010025	0.020101	0.050636	0.10259	0.21072	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103	10.597
3	0.071722	0.11483	0.2158	0.35185	0.58437	6.2514	7.8147	9.3484	11.345	12.838
4	0.20699	0.29711	0.48442	0.71072	1.0636	7.7794	9.4877	11.143	13.277	14.86
5	0.41174	0.5543	0.83121	1.1455	1.6103	9.2364	11.07	12.833	15.086	16.75
6	0.67573	0.87209	1.2373	1.6354	2.2041	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.98926	1.239	1.6899	2.1673	2.8331	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.3444	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	13.362	15.507	17.535	20.09	21.955
9	1.7349	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.1559	2.5582	3.247	3.9403	4.8652	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.6032	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	17.275	19.675	21.92	24.725	26.757
12	3.0738	3.5706	4.4038	5.226	6.3038	18.549	21.026	23.337	26.217	28.3
13	3.565	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.0747	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.6009	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.1422	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	23.542	26.296	28.845	32.0	34.267
17	5.6972	6.4078	7.5642	8.6718	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.2648	7.0149	8.2307	9.3905	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.6327	8.9065	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.4338	8.2604	9.5908	10.851	12.443	28.412	31.41	34.17	37.566	39.997
21	8.0337	8.8972	10.283	11.591	13.24	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.6427	9.5425	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.2604	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.8862	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.98	45.559
25	10.52	11.524	13.12	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.16	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.29
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.42	76.154	79.49
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.43	104.21
80	51.172	53.54	57.153	60.391	64.278	96.578	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.57	113.15	118.14	124.12	128.3
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.5	124.34	129.56	135.81	140.17
110	75.55	78.458	82.867	86.792	91.471	129.39	135.48	140.92	147.41	151.95
120	83.852	86.923	91.573	95.705	100.62	140.23	146.57	152.21	158.95	163.65
130	92.222	95.451	100.33	104.66	109.81	151.05	157.61	163.45	170.42	175.28
140	100.65	104.03	109.14	113.66	119.03	161.83	168.61	174.65	181.84	186.85
150	109.14	112.67	117.98	122.69	128.28	172.58	179.58	185.8	193.21	198.36

(Diese Tabelle wurde mit MAXIMA erzeugt.)

**Lösungen**

1. (a)

$$\begin{aligned}\Delta(a) &= (a+2-3)^2 + (2^2a+2-7)^2 + (3^2a+2-10)^2 \\ &= (a-1)^2 + (4a-5)^2 + (9a-8)^2.\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a} = 2(a-1) + 8(4a-5) + 18(9a-8) = 196a - 186.$$

$$0 = \frac{\partial \Delta}{\partial a} \implies 196a = 186 \implies a = \frac{93}{98} = 0.949.$$

$$\Delta(0.949) = 1.745.$$

(b)

$$\Delta_1(2.5) = (2.5+2-3)^2 + (5+2-7)^2 + (7.5+2-10)^2 = 2.50.$$

$\Delta < \Delta_1 \implies$  Die Parabel aus (a) passt besser.

2. (a) Der Filter liefere entweder SPAM oder HAM zurück.

$$P(\text{SPAM} | \text{Spammail}) = 0.95, P(\text{SPAM} | \text{Nicht-Spammail}) = 0.08.$$

(b) Gesucht ist  $P(\text{Spammail} | \text{SPAM})$  für  $P(\text{Spammail}) = 0.2$ .

$$\begin{aligned}P(\text{Spammail} | \text{SPAM}) &= P(\text{SPAM} | \text{Spammail}) \cdot \frac{P(\text{Spammail})}{P(\text{SPAM})} \\ &= 0.95 \cdot \frac{0.2}{P(\text{SPAM})},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(\text{SPAM}) &= P(\text{Spammail}) \cdot P(\text{SPAM} | \text{Spammail}) \\ &\quad + (1 - P(\text{Spammail})) \cdot P(\text{SPAM} | \text{Nicht-Spammail}) \\ &= 0.2 \cdot 0.95 + (1 - 0.2) \cdot 0.08 = 0.254,\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}P(\text{Spammail} | \text{SPAM}) &= 0.95 \cdot \frac{0.2}{0.254} \\ &= 0.748.\end{aligned}$$

3.  $X$  sei die Anzahl der Buchstaben e:

$$X \sim \text{Bi}(n; p), n = 80, p = 0.174, \mu = np = 80 * 0.174 = 13.9.$$

$$\sigma^2 = np(1-p) = 80 * 0.174 * (1 - 0.174) = 11.5 \geq 9$$

$\implies$  Approximation mit der Normalverteilung möglich:

$$X \sim N(\mu; \sigma^2) = N(13.9; 11.5), \sigma = 3.4.$$

$$\begin{aligned}P(X \geq 20) &= 1 - P(X \leq 19) = 1 - F_B(19) \approx 1 - \Phi\left(\frac{19 + 0.5 - 13.9}{3.4}\right) \\ &= 1 - \Phi(1.65) = 1 - 0.9505 = 0.0495 = 5\%\end{aligned}$$

4. (a)

$$E(X) = -\frac{5}{8} + \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad E(X^2) = \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{8}\right) \cdot 1 + 4^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + 4 = 4.75.$$

$$\text{Es folgt } \text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 4.5.$$

- (b) Stufen an den Stellen  $(-5; \frac{1}{4}), (1; \frac{3}{8})$  und  $(5; 1)$ . Rechtsseitig stetig.  $\text{Var}(Y) = 2^2 \text{Var}(X) = 18$ .  
(c)  $X + Z < 0$  nur möglich, wenn  $X = Z = -1$ . Die Wahrscheinlichkeit ist  $(\frac{5}{8})^2 = 0,39$ . Wegen der Unabhängigkeit ist  $\text{Var}(X + Z) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Z) = 9$ .

## 5. Likelihoodfunktion

$$L(x_1, \dots, x_n, \alpha) := \frac{2^n}{\alpha^n} \left( \prod_{i=1}^n x_i \right) e^{-\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Log-Likelihoodfunktion

$$\ln L(x_1, \dots, x_n, \alpha) := n \ln(2) - n \ln(\alpha) + \sum_{i=1}^n \ln(x_i) - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Maximiere die Log-Likelihoodfunktion

$$0 = \frac{d}{d\alpha} \ln L(x_1, \dots, x_n, \alpha) := -n \cdot \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

$$\iff \frac{1}{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \iff \alpha = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}$$

Bemerkung:  $X^2$  ist exponentialverteilt mit Parameter  $\frac{1}{\alpha}$ , d.h. mit Erwartungswert  $\alpha$ .

6. (a) Es ist  $n = 470 + 345 + 185 = 1000$ . Die Hypothese  $p_1 = 0.5, p_2 = 0.3, p_3 = 0.2$  kann mit dem  $\chi^2$ -Anpassungstest geprüft werden, da  $n \cdot p_i \geq 1000 \cdot 0.2 = 200 > 5$ .

Der Prüfwert

$$\begin{aligned} y &:= \sum_{i=1}^3 \frac{(h_i - np_i)^2}{np_i} \\ &= \frac{(470 - 500)^2}{500} + \frac{(345 - 300)^2}{300} + \frac{(185 - 200)^2}{200} \\ &= \frac{9}{5} + \frac{27}{4} + \frac{9}{8} = \frac{387}{40} = 9.675 \end{aligned}$$

- ist  $\chi^2$ -verteilt mit 2 Freiheitsgraden. Es ist  $\chi^2_{2;0.95} = 5.991 < y$ , also wird die Hypothese, dass sich die Stimmenanteile nicht geändert hätten, verworfen, bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5%.
- (b) Es ist  $\chi^2_{2;0.995} = 10.60 > y$ . Also wird die Nullhypothese bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0.5% nicht mehr verworfen.  
Etwas genauer (war nicht verlangt) ist es so: Es ist  $\chi^2_{2;0.99} = 9.210 < y$  und  $\chi^2_{2;0.995} = 10.60 > y$ . Also wird die Nullhypothese bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1% noch verworfen, bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0.5% nicht mehr. Der  $p$ -Wert liegt demnach zwischen 0.5% und 1%. Genauer gilt:  $P(Y \geq 9.675) = 0.00793$ , der  $p$ -Wert ist also ca. 0.8%.