Prüfung Wintersemester 2015/16

TECHNISCHE HOCHSCHULE NÜRNBERG
GEORG SIMON OHM

Studiengang	Informatik IN 3/4
Prüfungsfach	Statistik
Prüfer	Stieber
Prüfungstermin	26.01.2016, 08:30 Uhr
Prüfungsdauer	90 Minuten
Hilfsmittel	Mathematische Formelsammlung, 6 Seiten DIN A4 Skriptenauszug, Taschenrechner (nicht programmierbar)
Prüfungsunterlagen	Aufgabensatz (Deckblatt, 6 Aufgabenblätter und 3 Seiten Tabellen)

Name	
Vorname	
Matrikelnr.	
Unterschrift	

Note	3,3
Punktezahl	19
Erstkorrektor	
Zweitkorrektor	

Bitte beachten: Zu Beginn der Klausur den Aufgabensatz – bestehend aus diesem Deckblatt 6 Aufgabenblättern und 3 Seiten Tabellen - auf Vollständigkeit überprüfen.
Nicht mit Bleistift schreiben!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
Punkte	6	2	0	5	6	0

Aufgabe 1 (6 Punkte)

a) Legen Sie mit Hilfe der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung von Gauß (least squares) eine Kurve der Form $y = a \cdot 3^x$ durch die drei Punkte $(0, 1), (1, 4), (2, 13) \in \mathbb{R}^2$ Bestimmen Sie also a.

x y

b) Legt man mit derselben Methode (least squares) eine Kurve der Form $y = c \cdot x$ durch obige drei Punkte, so erhält man $c = 6$. Welche der beiden Kurven passt besser im Sinne von least squares?

a)

$n=3$

$$F_a(a) = \sum_{i=1}^{3} (a \cdot 3^{x_i} - y_i)^2$$

$$= (a \cdot 3^0 - 1)^2 + (a \cdot 3^1 - 4)^2 + (a \cdot 3^2 - 13)^2$$

$$= (a-1)^2 + (3a-4)^2 + (9a-13)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial a} F_a = 2 \cdot (a-1) + 2 \cdot (3a-4) \cdot 3 + 2 \cdot (9a-13) \cdot 9$$

$$= 2 \cdot (a-1) + 6 \cdot (3a-4) + 18 \cdot (9a-13)$$

$$= 2a - 2 + 18a - 24 + 162a - 234$$

$$= 182a - 260$$

$$0 = 182a - 260 \quad | +260$$

$$260 = 182a \quad | :182$$

$$\frac{10}{7} = a$$

b)

$$F_c(c) = \sum_{i=1}^{3} (c \cdot x_i - y_i)^2$$

$$= (c \cdot 0 - 1)^2 + (c \cdot 1 - 4)^2 + (c \cdot 2 - 13)^2$$

$$= (-1)^2 + (c-4)^2 + (2c-13)^2$$

$$F_c(6) = (-1)^2 + (6-4)^2 + (2 \cdot 6 - 13)^2 = 6$$

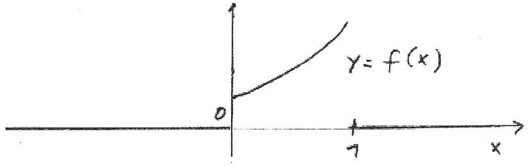
$$F_a\left(\frac{10}{7}\right) = \left(\frac{10}{7} - 1\right)^2 + \left(3 \cdot \frac{10}{7} - 4\right)^2 + \left(9 \cdot \frac{10}{7} - 13\right)^2 = \frac{2}{7} \approx 0{,}286$$

$\Rightarrow$ Kurve (aus a)) $y = \frac{10}{7} \cdot 3^x$ passt besser!

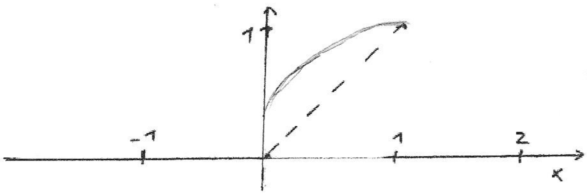
6/6

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Werten im Interval $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ und Dichtefunktion f wie im folgenden Bild:



a) Skizieren Sie die Verteilungsfunktion F von X im Bereich $x \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Beachten Sie hierbei besonders die Werte *F(0)* und *F(1)*, sowie die Steigung von F in den Punkten 0 und 1. Beachten Sie auch die gestrichelte Hilfslinie (Winkelhalbierende)



f

b) Seien $\mu = E(X)$ der Erwartungswert und $\sigma = \sqrt{Var(X)}$ die Standardabweichung von X. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

a) $\mu > 0.5$ wahr

b) $\sigma < 1$ ~~falsch~~ wahr

c) $P(X \leq 0.5) \leq 0.5$ ~~wahr~~ ~~falsch~~

d) $f(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ~~falsch~~

2/6

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Die stetige Zufallsvariable X besitze die **Dichte**:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \textit{für } x\leq 0 \\ c\cdot(x+1)^{-c-1} & \textit{für } x>0 \end{cases}, \quad \text{hierbei sei } c>0$$

Eine Stichprobe ergab für X die Werte $x_1=3,\ x_2=1,\ x_3=7$. Berechnen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer für c.

0/6

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Seien X und Y unabhängige Zufallsgrößen mit den Erwartungswerten $\overset{\mu}{E}(X)=10\,,E(Y)=12$ und den Varianzen $\underset{\sigma^2}{Var}(X)=4$, $Var(Y)=18$.

Bestimmen Sie (mit Hilfe bekannter Rechenregeln) die **Mittelwerte** und **Standardabweichungen (!)** folgender Zufallsgrößen:

a) $Z_1 := \frac{1}{2}X + \frac{1}{3}Y$

b) $Z_2 := \frac{1}{2}X - \frac{1}{3}Y$

c) $Z_3 := \frac{1}{2}X - \frac{1}{3}X$

a) Mittelwert:

$$\mu_{Z_1} = \frac{1}{2}\cdot 10 + \frac{1}{3}\cdot 12$$
$$= 9$$

Standardabweichung:

$$\sigma^2_{Z_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 18$$
$$\sigma^2_{Z_1} = 3$$
$$\sigma_{Z_1} = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{3} \approx 1{,}732$$

b)

$$\mu_{Z_2} = \frac{1}{2}\cdot 10 - \frac{1}{3}\cdot 12$$
$$= 1$$

$$\sigma^2_{Z_2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4 + (-1)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 18$$
$$= 3$$
$$\sigma_{Z_2} = \sqrt{3}$$

c)

$$\mu_{Z_3} = \frac{1}{2}\cdot 10 - \frac{1}{3}\cdot 10$$
$$= \frac{5}{3} \approx 1{,}\overline{6}$$

$$\sigma^2_{Z_3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4 + (-1)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 4$$
$$= \frac{13}{9} \approx 1{,}\overline{4}$$
$$\sigma_{Z_3} = \sqrt{\frac{13}{9}} \approx 1{,}201$$

f

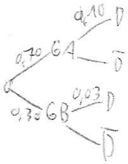
5/6

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Ein Laden bezieht Glühbirnen von zwei Herstellern A und B. Der Laden bezieht 70% seiner Glühbirnen von A. Vom Hersteller A sind erfahrungsgemäß 10% der Glühbirnen defekt. Vom Hersteller B sind 3% defekt. Im Lager des Ladens befindet sich noch eine große Schachtel Glühbirnen von einem dieser Hersteller. Es ist nicht mehr bekannt, von welchem der beiden. Die Glühbirnen der beiden Hersteller sind äußerlich nicht zu unterscheiden. Aus der Schachtel wird eine Glühbirne entnommen. Die Überprüfung ergibt, dass sie defekt ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt die Schachtel Glühbirnen von Hersteller A?

Hinweis: Bedingte Wahrscheinlichkeiten.

Verwenden Sie bei der Lösung die Bezeichnungen *GA* (Glühbirnen stammen von A), *GB* (Glühbirnen stammen von B) und *D* (Glühbirne ist defekt).



$P(GA) = 0{,}70$ $\qquad P(GB) = 0{,}30$

$P(D \mid GA) = 0{,}10$

$P(D \mid GB) = 0{,}03$

ges: $P(GA \mid D) = \dfrac{P(GA) \cdot P(D \mid GA)}{P(D)} = \dfrac{0{,}70 \cdot 0{,}10}{0{,}079} = 0{,}886 = \underline{\underline{88{,}6\%}}$

$P(D) = P(GA) \cdot P(D \mid GA) + P(GB) \cdot P(D \mid GB)$

$= 0{,}70 \cdot 0{,}10 + 0{,}30 \cdot 0{,}03$

$= 0{,}079$

$\Rightarrow$ Die Schachtel stammt mit der Wahrscheinlichkeit 88,6% von Hersteller A

6/6

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Eine Stichprobe vom Umfang 2000 enthielt 30 defekte Teile. Der Hersteller dieser Teile behauptet, dass höchstens 1% der Teile defekt ist. Überprüfen Sie diese Behauptung, d.h.

$$H_0:\ p \leq 0.01 \text{ gegen die Alternative } H_1:\ p > 0.01,$$

bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0.01

Hinweis: Benutzen Sie den zentralen Grenzwertsatz.