Prüfung Wintersemester 2014/15

TECHNISCHE HOCHSCHULE NÜRNBERG
GEORG SIMON OHM

Studiengang	Informatik IN3, WIN4
Prüfungsfach	Statistik
Prüfer	Prof. Dr. Stieber
Prüfungstermin	29.01.2015, 14:00 Uhr
Prüfungsdauer	90 Minuten
Hilfsmittel	Mathematische Formelsammlung, 10 Seiten DIN A4 Skriptenauszug, Taschenrechner (nicht programmierbar)
Prüfungsunterlagen	Aufgabensatz (Deckblatt, 6 Aufgabenblätter und 3 Seiten Tabellen)

Name	
Vorname	
Matrikelnr.	
Unterschrift	

Note	1,0
Punktezahl	25
Erstkorrektor	
Zweitkorrektor	

Bitte beachten: Zu Beginn der Klausur den Aufgabensatz – bestehend aus diesem Deckblatt 6 Aufgabenblättern und 3 Seiten Tabellen - auf Vollständigkeit überprüfen.
Nicht mit Bleistift schreiben!

Aufgabe	1	2	3	4	5	5
Punkte	6	6	6	6	6	5

Aufgabe 1 (6 Punkte)

a) Legen Sie mit Hilfe der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung von Gauß (least squares) eine Kurve der Form $y = a \cdot 2^x$ durch die drei Punkte $(0, 2), (1, 4), (2, 13) \in \mathbb{R}^2$ Bestimmen Sie also a.

b) Legt man mit derselben Methode (least squares) eine Kurve der Form $y = c \cdot x$ durch obige drei Punkte, so erhält man $c = 6$. Welche der beiden Kurven passt „besser" im Sinne von least squares?

1a)

x	0	1	2
y	2	4	13

$y = a \cdot 2^x$

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{3} (y_i - \cancel{f} y(x))^2 = (2 - (\cancel{a} 2^0 a))^2 + (4 - (2a))^2 + (13 - (4a))^2$$

$$= (2-a)^2 + (4-2a)^2 + (13-4a)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial a} F = -2(2-a) + 2 \cdot (4-2a) \cdot (-2) + 2 \cdot (13-4a) \cdot (-4)$$

$$= -4 + 2a + (8 - 4a) \cdot (-2) \cancel{+} - 104 + 32a$$

$$= -4 + 2a - 16 + 8a - 104 + 32a$$

$$= -124 + 42a$$

$$42a - 124 = 0 \quad | +124$$

$$42a = 124 \quad | : (42)$$

$$a = \frac{62}{21}$$

✓

1b)

x	0	1	2	
$(y - \frac{62}{21} \cdot 2^x)^2$	$\frac{400}{441}$	$\frac{1600}{441}$	$\frac{625}{441}$	$\Sigma = \frac{125}{21} = 5{,}95$
$(y - 6 \cdot x)^2$	4	4	1	$\Sigma = 9$

$\Rightarrow$ Kurve $y = \frac{62}{21} \cdot 2^x$ passt besser!

✓

6/6

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Terrorismus im Flugverkehr: Auf dem Flughafen werden alle Passagiere vorsorglich kontrolliert. Ein Terrorist werde mit Wahrscheinlichkeit 0.98 erkannt und festgenommen. Ein Nicht-Terrorist werde (versehentlich) mit Wahrscheinlichkeit 0.001 für einen Terroristen gehalten und festgenommen. Jeder hunderttausendste Flugpassagier sei (im Durchschnitt) ein Terrorist.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Passagier, der - unter Verdacht ein Terrorist zu sein - festgenommen wird, tatsächlich einen Terrorist ist?

Verwenden Sie bei der Lösung die Bezeichnungen *T* (Passagier ist ein Terrorist), *F* (Passagier wird festgenommen).

Hinweis: Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$P(T) = \frac{1}{100.000} = 0{,}00001$ $\qquad P(\overline{T}) = 1 - \frac{1}{100.000} = 0{,}99999$

$P(F) = P(F|T) \cdot P(T) + P(F|\overline{T}) \cdot P(\overline{T}) = 0{,}98 \cdot \frac{1}{100000} + 0{,}001 \cdot \left(1 - \frac{1}{100.000}\right) = 0{,}0010098$

$P(F|T) = 0{,}98$ $\qquad P(\overline{F}|T) = 0{,}02$

$P(\overline{T}|F) =$

$P(F|\overline{T}) = 0{,}001$ $\qquad P(\overline{F}|\overline{T}) = 0{,}999$

gesucht: $P(T|F) = \frac{P(F|T) \cdot P(T)}{P(F)} = \frac{0{,}98 \cdot 0{,}00001}{P(F|T) \cdot P(T) + P(F|\overline{T}) \cdot P(\overline{T})}$

$= \frac{0{,}98 \cdot 0{,}00001}{0{,}98 \cdot 0{,}00001 + 0{,}001 \cdot 0{,}99999} = \underline{\underline{0{,}009704}}$

✓

6/6

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Für eine Zufallsvariable X mit Dichtefunktion

$$f(x) := \begin{cases} \alpha \cdot x^{\alpha-1}, & \text{falls} \quad 0 < x \le 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $\alpha > 0$ ergab eine Stichprobe die Werte $x_1, \dots, x_n$. Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood Schätzer für α.

$$L(x_1, \dots, x_n, \alpha) = \prod_{i=1}^{n} (\alpha \cdot x_1^{\alpha-1}) \cdot \dots \cdot (\alpha \cdot x_n^{\alpha-1})$$

$$\cancel{(\alpha x_1 \cdot \dots \cdot \alpha x_n)^{\alpha-1}} = \alpha^n \cdot (x_1 \cdot \dots \cdot x_n)^{\alpha-1}$$

$$\cancel{\ln L = (\alpha-1) \cdot \ln(\alpha x_1 \cdot \dots \cdot \alpha x_n) = (\alpha-1) \cdot \ln(\alpha x_1)}$$

$$\cancel{\ln L = (\alpha-1) \cdot \ln(\alpha x_1) + \dots + (\alpha-1) \cdot \ln(\alpha x_n)}$$

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln L}$$

$$\ln L = n \cdot \ln(\alpha) + (\alpha - 1) \cdot \ln(x_1 \cdot \dots \cdot x_n)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln L = \frac{n}{\alpha} + \ln(x_1 \cdot \dots \cdot x_n)$$

$$0 = \frac{n}{\alpha} + \ln(x_1 \cdot \dots \cdot x_n) \quad | \cdot \alpha$$

6/6

$$0 = n + \ln(x_1 \cdot \dots \cdot x_n) \cdot \alpha$$

$$-n = \ln(x_1 \cdot \dots \cdot x_n) \cdot \alpha \quad | : \ln(x_1 \cdot \dots \cdot x_n)$$

$$-\frac{n}{\ln(x_1 \cdot \dots \cdot x_n)} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{-n}{\ln(x_1 \cdot \dots \cdot x_n)}$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Ein Hersteller von IC-Chips behauptet, dass 90% seiner Chips in Ordnung sind. Bei einer Überprüfung von 100 Chips wurden 16 defekte Chips gefunden. Überprüfen Sie die Behauptung des Herstellers mit Hilfe des χ^2-Tests bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0.05.

Hinweis: Betrachten Sie die Zufallsvariable X mit $X = \begin{cases} 1, & \textit{falls Chip defekt} \\ 0, & \textit{falls Chip nicht defekt} \end{cases}$

und $P(X=0) = 0.9$.

Bernoulli-Verteilung: $f(x) = \begin{cases} 1-p & , \text{falls } x=0 \\ p & , \text{falls } x=1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$

X	0	1
y	84	16
pi	0,9	0,1

$H_0: P(X \in A_i) = 0{,}9 \quad 1 \leq i \leq 2$

$H_1: P(X \in A_i) \neq 0{,}9$ für mind ein i

$\alpha = 0{,}05, \quad n = 100$

$$y = \sum_{i=1}^{2} \frac{(h_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} = \frac{1}{100} \left(\sum_{i=1}^{2} \frac{(h_i)^2}{p_i} \right) - 100$$

$$= \frac{1}{100} \cdot \left[\frac{84^2}{0{,}9} + \frac{16^2}{0{,}1} \right] - 100 = \frac{1}{100} \cdot 10400 - 100$$

$= \underline{4}$

χ^2-Quantil: $\chi_{1;0{,}95} = 3{,}84$

$4 > 3{,}84$

$\Rightarrow H_0$ wird verworfen!

6 6

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Die Lebensdauer T (= Zeit bis zum Ausfall) von Halogenlampen werde als normalverteilt angenommen. Die Überprüfung von vier Halogenlampen eines bestimmten Typs ergab Lebensdauern von

1720, 2100, 1800 und 2180 (Stunden)

a) Berechnen Sie **Mittelwert** und **Standardabweichung** von T.

b) Berechnen Sie ein **Konfidenzintervall** für die **mittlere** Lebensdauer $\mu = E(T)$ (Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$).

a) $\mu_T = \bar{x}_T = \frac{1}{4} \cdot (1720 + 2100 + 1800 + 2180) = \frac{1}{4} \cdot (7800) = \underline{\underline{1950}}$

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^{4} (\bar{x} - x_i)^2 = \frac{1}{3} \cdot (52900 + 22500 + 22500 + 52900)$$
$$= \frac{1}{3} \cdot (150800) = 50266{,}\bar{6}$$

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma_T^2} = \sqrt{50266{,}6} = \underline{\underline{224{,}202}}$$

b) $\alpha = 0{,}05$

$n = 4$

Quantil: $t_{n-1;\, 1-\frac{\alpha}{2}} = t_{3;\, 0{,}975} = 3{,}18$

Konfidenzintervall:

$$\left[1950 - 3{,}18 \cdot \frac{224{,}202}{\sqrt{4}} \; ; \; 1950 + 3{,}18 \cdot \frac{224{,}202}{\sqrt{4}} \right]$$

$$= [\, 1593{,}52 \; ; \; 2306{,}48 \,]$$

6/6

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Die Zufallsvariablen $X,\ Y,\ Z,\ X_1 \ldots X_{100}$ seien **unabhängig** und alle **geometrisch verteilt** mit Parameter $p = \frac{1}{5}$.

a) Berechnen Sie **Mittelwert** und **Standardabweichung** von $2 \cdot X + 3 \cdot Y - Z$

b) Berechnen Sie **Mittelwert** und **Standardabweichung** von $S := X_1 + \ldots + X_{100}$

c) Welcher Verteilung genügt die Zufallsvariable S aus b) näherungsweise (Begründung).

~~a)~~ $\mu = \frac{1}{\frac{1}{5}}$; $\sigma^2 = \frac{1-\frac{1}{5}}{(\frac{1}{5})^2}$ } Erwartungswert und Varianz für alle ZV

$\cancel{\mu} = \mu = 5 \quad \sigma^2 = 20$

a) $E(2 \cdot \overbrace{5}^{X} + 3 \cdot \overbrace{5}^{Y} - \overbrace{5}^{Z}) = \underline{\underline{20}}$

$Var(2 \cdot \overbrace{20}^{X} + 3 \cdot \overbrace{20}^{Y} - \overbrace{20}^{Z})$

$= 2^2 \cdot \overbrace{20}^{X} + 3^2 \cdot \overbrace{20}^{Y} + \overbrace{20}^{Z}$

$= \underline{\underline{280}} \quad \sigma = \sqrt{280} = \underline{\underline{16{,}73}}$

b) $\sigma_S^2 = 100 \cdot 20 = 120 \quad \sigma_S = \sqrt{120} = \underline{\underline{10{,}95}}$

$\mu_S = 100 \cdot 5 = \underline{\underline{500}}$

c) Summe von X nach ZGS annähend normalverteilt, da n=100 sehr groß ist

5/6