Theoretische Informatik

Klausur WS 19/20

Prof. Fuhr

Lösungsvorschlag von Streberpunk

Gegen das System aber für das Streben! Hier meine Erinnerungen an die Klausur der Theoretischen Informatik. Die Lösung sind von mir nach besten Wissen und Gewissen verfasst. Wenn etwas nicht stimmen sollte, ist der geneigte Leser angehalten, dies weiter zu geben oder selber zu ändern, um späteren Lesern das Lernen zu erleichtern. Ich hoffe diese Lösung hilft ihnen beim Lernen.

StreberPunk

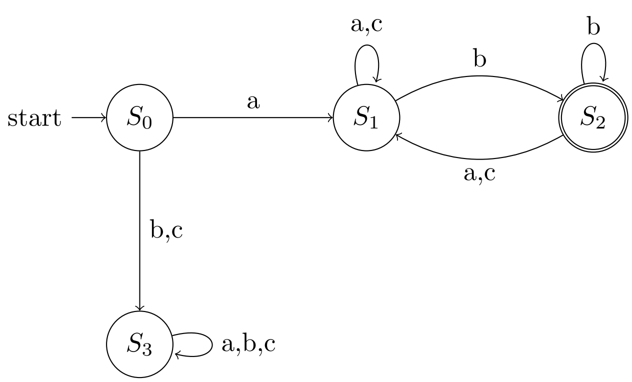
Aufgabe 1 (13 Punkte)

Sei L folgende Sprache: $L = \{w \in \{a,b,c\}^* | w$ beginnt mit a und endet mit b$\}$.
a) Gesucht ist der reguläre Ausdruck G, mit L(G)=L.
Lösung:

$$G = a(a \cup b \cup c)^* b$$

b) Gesucht ist der deterministische Endliche Automat C, der die gleiche Sprache akzeptiert wie L.
Lösung:

$$C = (\{a,b,c\}, \{S_0, S_1, S_2, S_3\}, S_0, \delta \textit{ gemäß Graph }, \{S_2\})$$



Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es sei der reguläre Ausdruck $R = a \cdot (b \cup c) \cdot \emptyset^*$
Bauen sie mit den Verfahren aus der Vorlesung, ohne Minimierung und ohne Angabe des Tuples, durch einzeichnen in die Aufgabenstellung, einen endlichen Automaten mit $L(A) = L(R)$ aus den endlichen Automaten:

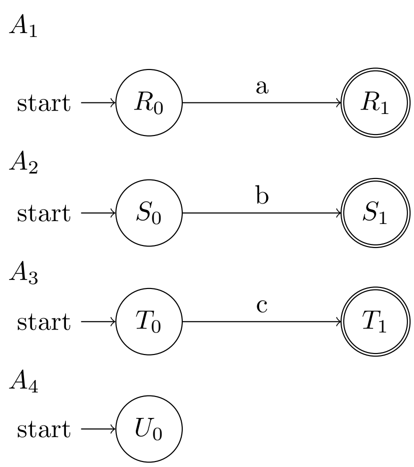
$$A_1 = (\{a, b, c\}, \{R_0, R_1\}, \{R_0\}, \delta_{A_1} \textit{gemäß Graph}, \{R_1\})$$

$$A_2 = (\{a, b, c\}, \{S_0, S_1\}, \{S_0\}, \delta_{A_2} \textit{gemäß Graph}, \{S_1\})$$

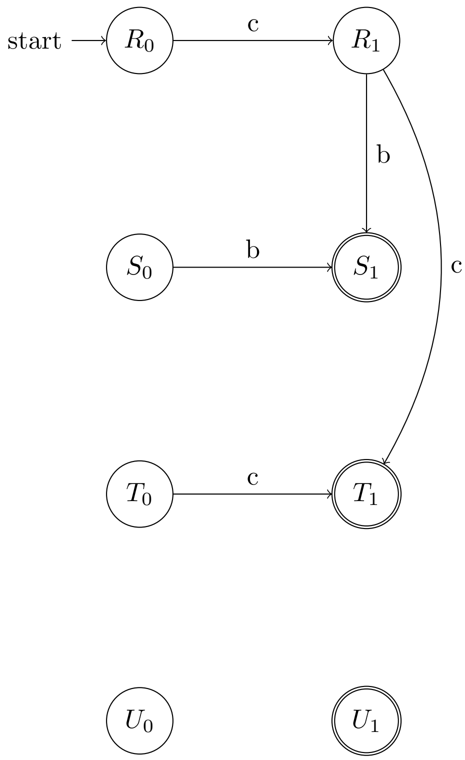
$$A_3 = (\{a, b, c\}, \{T_0, T_1\}, \{T_0\}, \delta_{A_3} \textit{gemäß Graph}, \{T_1\})$$

$$A_4 = (\{a, b, c\}, \{U_0\}, \{U_0\}, \delta_{A_4} \textit{gemäß Graph}, \{\})$$

Gegeben:



Hier ist die Lösung, in der Klausur sollten alle Kanten und Knoten die keine Endzustände bzw. Startzustände mehr sind durchgestrichen, bzw. modifiziert werden:



Hier ist zu beachten das bei R_1 der Endzustand weggestrichen sein muss und das zu S_0, T_0, U_0, U_1 jeweils ein durchgestrichener Startpfeil hinzeigt.

Aufgabe 3 (13 Punkte)

Sei $L = \{ab^n au | n \in \mathbb{N}, u \in \{c,d\}^* \ mit \ |u| \leq n+1\}$. Zeigen sie, dass L nicht regulär ist.

Lösung:

Beweiß durch Pumping-Lemma. Beachten Sie, dass hier von hinten gepumpt wird und nicht von vorne, wie sonst üblich:

$$Sei\ k \in \mathbb{N}, beliebig.$$

$$Wähle{:}\ w = ab^k ac^{k+1}$$

$$\Rightarrow w \in L\ und\ |w| > k$$

Für jede mögliche Zerlegung $w = x \cdot y \cdot z$ mit $x, y, z \in X^*$ und $|xy| \leq k$ und $|z| \geq 1$ gilt dann:

$$x = ab^k ac^{k+1-r-p}$$

$$y = c^r$$

$$z = c^p$$

Für entsprechende $r, p \in \mathbb{N}_0$ mit $r \geq 1$. Sei nun $w_i = xy^i z$ für jedes $i \in \mathbb{N}_0$.
Wählen man nun z.B $i = 2$, so erhält man:

$$w_2 = xy^2 z = ab^k ac^{k+1-r-p} c^{r \cdot 2} c^p = ab^k ac^{k+1-r-p+r \cdot 2+p} = ab^k ac^{k+1+r}$$

$w_2 = ab^k ac^{k+1+r}$ ist aber nicht mehr in L, da:

$$|w_2|_c + |w_2|_d = k+1+r > k+1 = |w_2|_b$$

da $r \geq 1$

$$\Rightarrow L\ nicht\ regulär.$$

Aufgabe 4 (13 Punkte)

Sei A ein deterministischer endlicher Automat.

$$A = (\{0,1\}, \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7\}, S_0, \delta_A \textit{ gemäß Tabelle, }, \{S_3, S_5, S_6, S_7\})$$

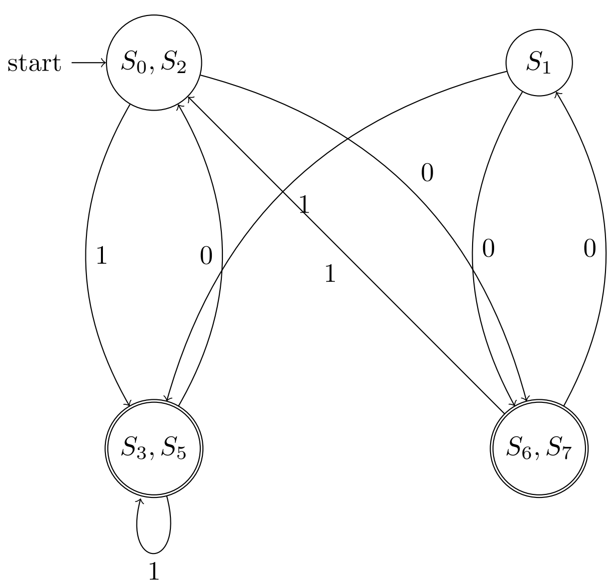
δ_A	0	1
S_0	S_7	S_5
S_1	S_6	S_1
S_2	S_7	S_3
S_3	S_2	S_3
S_4	S_3	S_5
S_5	S_0	S_3
S_6	S_1	S_0
S_7	S_1	S_2

Minimieren sie A und geben sie den Zustandsgraph des minimierten Automaten an.

Lösung:
Beachten sie, dass S_4 nie erreicht wird, da er nirgends auf der rechten Seite der Übergangstabelle erscheint. Er muss also bei der Minimierung nicht mit beachtet werden.

S	$\sim_0$	$\sim_1$	$\sim_2$		0	$\sim_0$	$\sim_1$		1	$\sim_0$	$\sim_1$
S_0	0	0	0		S_7	1	3		S_5	1	2
S_1	0	1	1		S_6	1	3		S_1	0	1
S_2	0	0	0		S_7	1	3		S_3	1	2
S_3	1	2	2		S_2	0	0		S_3	1	2
S_5	1	2	2		S_0	0	0		S_3	1	2
S_6	1	3	3		S_1	0	1		S_0	0	0
S_7	1	3	3		S_1	0	1		S_2	0	0

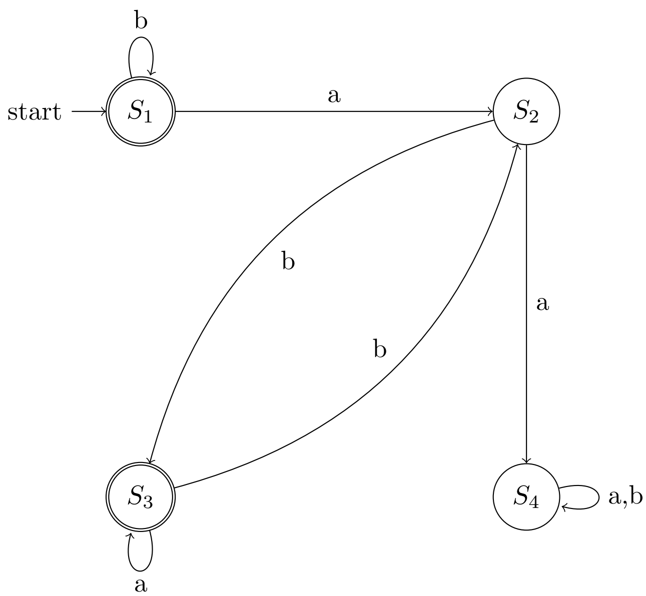
$$\Rightarrow \quad \sim_1 \quad = \quad \sim_2 \quad = \quad \sim$$



Aufgabe 5 (14 Punkte)

Gegeben sei ein endlicher Automat A.

$$A = (\{a, b\}, \{S_1, S_2, S_3, S_4\}, S_1, \delta_A \text{ gemäß Graph }, \{S_1, S_3\})$$



a) Finden sie die Grammatik G, mit $L(G) = L(A)$. Für das leere Worte darf die Sonderregel benutzt werden. Lösung:

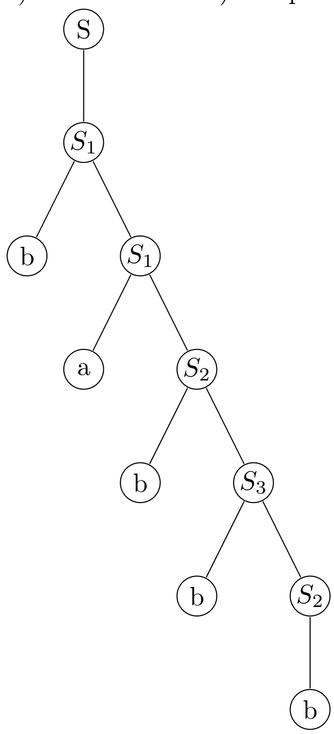
$$\begin{aligned} P := \{ & S \to \epsilon | S_1, \\ & S_1 \to bS_1 | b | aS_2, \\ & S_2 \to bS_3 | b | aS_4, \\ & S_3 \to aS_3 | a | bS_2, \\ & S_4 \to aS_4 | bS_4 \} \end{aligned}$$

$$G = (\{S_1, S_2, S_3, S_4\}, \{a, b\}, S, \ P \text{ gemäß Tabelle})$$

b) Finden sie eine Ableitung ihrer Grammatik für das Wort w = babbb. Lösung:

$$\begin{aligned} & S \Rightarrow S_1 \Rightarrow bS_1 \Rightarrow baS_2 \Rightarrow \\ & \Rightarrow babS_3 \Rightarrow babbS_2 \Rightarrow babbb \end{aligned}$$

c) Geben sie zur b) den passenden Strukturbaum an. Lösung:



Aufgabe 6 (9 Punkte)

$X = \{a, b, c\}$ sei ein Alphabet. Sei $w = w_1w_2w_3....w_{n-1}w_n$ ein Wort mit Länge $n \in \mathbb{N}$. Mit $w_i \in X, \forall i \in \{1, 2, 3, 4...., n\}$. Sei *rev* die Funktion, die ein Wort umdreht, also:

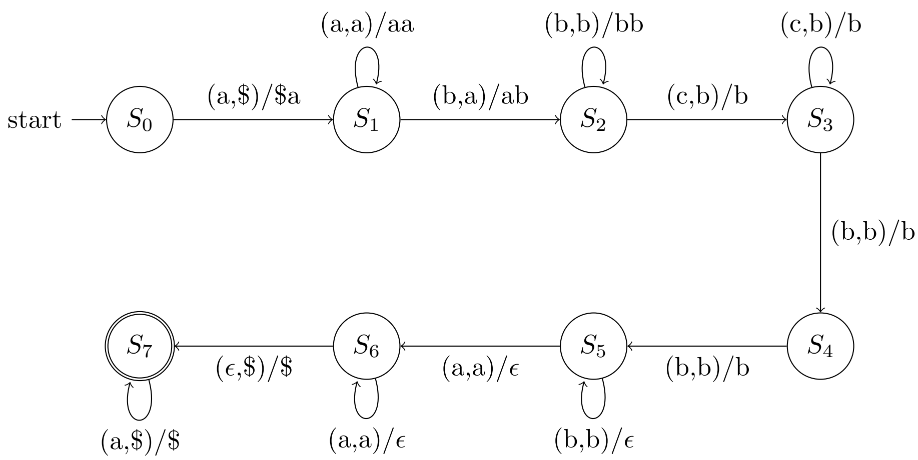
$$rev(w) := w_nw_{n-1}......w_2w_1.$$

Sei die Sprache $L = \{a^iwa^krev(w) \in X^*|i \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}, w \in \{b, c\}^+\}$. Gesucht sind die Produktionen einer Typ 2 Grammatik H, die L erzeugt. Lösung:

$$\begin{aligned}
P := \{ & \\
& S \to AbBb|AcBc|bBb|cBc \\
& B \to bBb|cBc\ a \\
& A \to aA|a\}
\end{aligned}$$

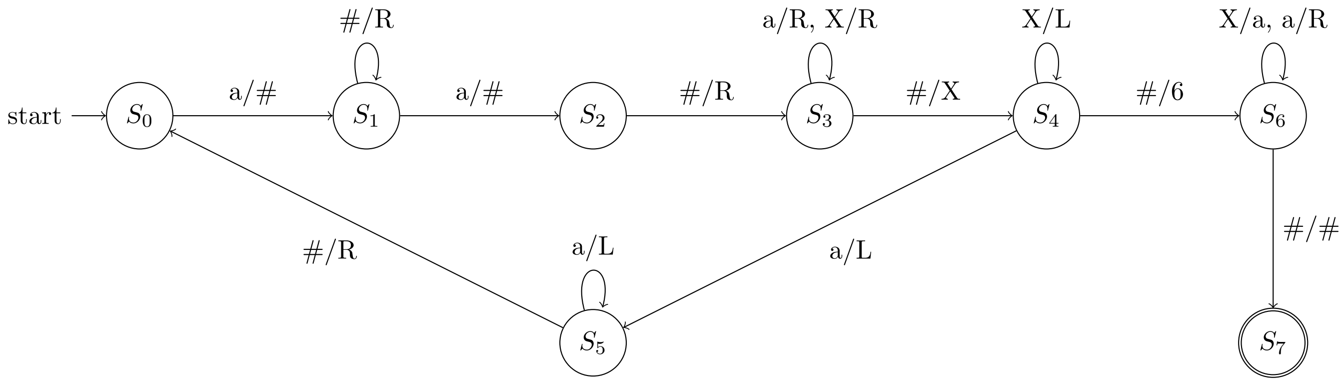
Aufgabe 7 (16 Punkte)

Sei $L = \{a^m b^n c^l b^{n+2} a^{m+k} | m, n, l \in \mathbb{N} \ und \ k \in \mathbb{N}_0\}$ eine Sprache. Geben sie den Zustandsübergangsgraphen eines deterministischen Kellerautomaten an, der L beschreibt. Lösung:



Aufgabe 8 (16 Punkte)

Gegeben sei folgender Turingautomat:



a) Geben sie für das Wort *aaaa* eine Konfigurationenfolge an, die vom Start bis zum zweiten mal S_0 führt.
Lösung:

$$
\begin{aligned}
&(S_0, \epsilon, aaaa) \rightarrow (S_1, \epsilon, \#aaa) \rightarrow (S_1, \epsilon, aaa) \rightarrow (S_2, \epsilon, \#aa) \rightarrow \\
\rightarrow &(S_3, \epsilon, aa) \rightarrow (S_3, a, a) \rightarrow (S_3, aa, \epsilon) \rightarrow (S_4, aa, X) \rightarrow \\
\rightarrow &(S_4, a, aX) \rightarrow (S_5, \epsilon, aaX) \rightarrow (S_5, \epsilon, \#aaX) \rightarrow (S_0, \epsilon, aaX)
\end{aligned}
$$

b) Wo stoppt der Automat bei dem Wort aaaa? Lösung:

Er stoppt in (S_7, aa, ϵ).

c) Geben sie das Tupel für den Turingautomat an. Lösung:

$$DTA = (\{a\}, \{a, \#, X\}, \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}, S_0, \delta \textit{ gemäß Graph }, S_7\}$$

d) Geben sie die Sprache, die der Turingautomat akzeptiert, als Menge an. Lösung:

$$L(T) = \{w \in \{a\}^* | w = a^{2n} \quad n \in \mathbb{N}\}$$

e) Beschreiben sie mit Text, was der Turingautomat macht. Lösung:

Bei jedem Durchlauf werden zwei a's von vorne gelöscht und dafür hinten ein X hingeschrieben. Sind alle a's gelöscht, werden die X wieder durch a's ersetzt. Der Turingautomat halbiert also die gerade Anzahl der a's.