Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра информатики

О.И. Костюкова

Тестовые задачи

по курсу «Методы оптимизации и управления»

Минск 2016

Содержание

1. Решение задач линейного программирования симплекс-методом

ПРИМЕР 1

Решить задачу линейного программирования вида

$$c'x \to \max, \quad Ax = b, \ x \geq 0, \qquad (1.1)$$

со следующими исходными данными

$$c = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 & -4 & -6 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}', \qquad b = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -2 & 15 \end{pmatrix} \qquad (1.2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 0 & -1 & 3 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad m = 3, \ n = 8,$$

и заданным начальным базисным планом

$$x^{нач} = (\,4 \quad 0 \quad 0 \quad 6 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 5)$$

$$J_Б = \{1 \ \ 4 \ \ 5 \ \ 8\} = \{j_1 = 1, \ j_2 = 4, j_3 = 5, j_4 = 8\}$$

Итерация 1

По заданному множеству $J_Б = \{1 \ \ 4 \ \ 5 \ \ 8\}$ сформируем матрицы и вектор

$$A_Б = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = A_Б^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c_Б = (-5 \ -4 \ -6 \ -5)'$$

Вычислим вектор потенциалов

$$u' = c'_Б B = (1 \quad 0 \quad 6 \quad -5)$$

и оценок

$$\Delta = (\Delta_j, j = 1,...,8) = u'A - c' = (0 \ \ 40 \ -10 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \ \ 69 \quad 0)\,.$$

Для данного вектора оценок условий $\Delta_j \geq 0, j \in J_Н = J \setminus J_Б$, не выполняется.

Выберем индекс $j_0 \in J_Н$, для которого $\Delta_{j_0} < 0$:

$$j_0 = 3 \in J_Н = \{2 \ \ 3 \ 6 \ \ 7\}$$

Построим вектор

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_m)' := BA_{j_0} = (-4 \quad 4 \quad 1 \quad 1)'.$$

Для данного вектора z условие $z_i \le 0, i = 1, \dots, m,$ не выполняется, поэтому продолжаем итерацию.

Найдем шаги $\theta_i, i = 1,...,4,$ по правилу

$$\theta_i = \begin{cases} x_{j_i} / z_i, & если \;\; z_i > 0, \\ \infty \;\; если \;\; z_i \le 0, & \end{cases} \qquad i = 1,2,3,4; \tag{1.3}$$

Получим

$$\theta_1 = \infty, \;\; \theta_2 = 1.5000, \;\; \theta_3 = 2, \; \theta_4 = 5,$$

и найдем

$$\theta_0 = \min_{i=1,2,3,4} \theta_i = 1.5 = \theta_2 \;.$$

Следовательно, $s = 2,\; j_s = j_2 = 4.$

Построим новый базисный план $\bar{x} = (\bar{x}_j, j \in J) = (\bar{x}_j, j = 1,...,8)$ и соответствующий ему базис $\bar{J}_Б$ по правилам

$$\bar{x}_j = 0, j \in J_H \setminus j_0; \quad \bar{x}_{j_0} = \theta_0; \qquad \bar{x}_{j_i} = x_{j_i} - \theta_0 z_i; i = 1,...,m, \tag{1.4}$$

$$\bar{J}_Б = (J_Б \setminus j_s) \cup j_0 = \{j_1, \dots, j_{s-1}, j_0, j_{s+1}, \dots, j_m\}. \tag{1.5}$$

В результате получаем

новый план

$\bar{x} = (10.0000 \quad 0 \;\; 1.5000 \quad 0 \;\; 0.5000 \quad 0 \quad 0 \;\; 3.5000)$

и новый базис

$\bar{J}_Б = \{1 \quad 3 \quad 5 \quad 8\}$

Переходим на следующую итерацию, исходя из новых плана

$x := \bar{x} = (10.0000 \quad 0 \;\; 1.5000 \quad 0 \;\; 0.5000 \quad 0 \quad 0 \;\; 3.5000)$

и базиса $J_Б := \bar{J}_Б = \{1 \quad 3 \quad 5 \quad 8\}$.

Итерация 2

По заданному множеству $J_Б = \{ j_1 = 1, j_2 = 3, j_3 = 5, j_4 = 8\}$ сформируем матрицы и вектор

$$A_Б = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = A_Б^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1.0000} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0.2500} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-0.2500} & \mathbf{0} & \mathbf{-1.0000} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-0.2500} & \mathbf{-1.0000} & \mathbf{0} & \mathbf{1.0000} \end{pmatrix}$$

$c_Б = (-5 \ \ 3 \ \ -6 \ \ -5)'$.

Вычислим вектор потенциалов

$u' = c'_Б B = (3.5000 \quad 0 \ \ 6.0000 \ -5.0000)$

и оценок

$\Delta = (\Delta_j, j = 1,...,8) = u'A - c' = (0 \ \ 42.5000 \quad 0 \ \ 2.5000 \quad 0 \ -7.5000 \ 81.5000 \quad 0)$.

Для данного вектора оценок условие $\Delta_j \geq 0, j \in J_Н = J \setminus J_Б$, не выполняется.

Выберем индекс $j_0 \in J_Н$, для которого $\Delta_{j_0} < 0$:

$j_0 = 6 \in J_Н = \{2 \ \ 4 \ \ 6 \ \ 7\}$.

Построим вектор

$z = BA_{j_0} = (0 \ \ -0.7500 \ -2.2500 \ \ 3.7500)'$.

Для данного вектора z условие $z_i \leq 0, i = 1, \dots, m,$ не выполняется, поэтому продолжаем итерацию.

Найдем шаги $\theta_i, i = 1,...,4,$ по правилу (1.3):

$\theta_1 = \infty, \ \theta_2 = \infty, \theta_3 = \infty, \ \theta_4 = 0.9333,$.

и найдем

$$\theta_0 = \min_{i=1,2,3,4} \theta_i = 0.9333 = \theta_4$$

Следовательно, $s = 4, \ j_s = j_4 = 8.$

Построим новый базисный план $\overline{x} = (\overline{x}_j, j \in J) = (\overline{x}_j, j = 1,...,8)$ и соответствующий ему базис $\overline{J}_Б$ по правилам (1.4) и (1.5). В результате получаем

новый план

$\bar{x} = (10.0000 \quad 0 \quad 2.2000 \quad 0 \quad 2.6000 \quad 0.9333 \quad 0 \quad 0)$

и новый базис

$\bar{J}_Б = \{1 \quad 3 \quad 5 \quad 6\}$.

Переходим на следующую итерацию, исходя из новых плана

$x := \bar{x} = (10.0000 \quad 0 \quad 2.2000 \quad 0 \quad 2.6000 \quad 0.9333 \quad 0 \quad 0)$

и базиса

$J_Б = \bar{J}_Б = \{1 \quad 3 \quad 5 \quad 6\}$

Итерация 3

По заданному множеству $J_Б = \{j_1 = 1, j_2 = 3, j_3 = 5, j_4 = 6\}$ сформируем матрицы и вектор

$$A_Б = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = A_Б^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0.2000 & -0.2000 & 0 & 0.2000 \\ -0.4000 & -0.6000 & -1.0000 & 0.6000 \\ -0.0667 & -0.2667 & 0 & 0.2667 \end{pmatrix}$$

$c_Б = (-5 \quad 3 \quad -6 \quad 0)'$.

Вычислим вектор потенциалов

$u' = c'_Б B = (3.0000 \quad -2.0000 \quad 6.0000 \quad -3.0000)$

и оценок

$\Delta = (\Delta_j, j = 1,...,8) = u' A - c' = (0 \quad 46.0000 \quad 0.0000 \quad 2.0000 \quad 0 \quad 0 \quad 71.0000 \quad 2.000071 \quad 2)$.

Для данного вектора оценок выполняется условие $\Delta_j \geq 0, j \in J_H = J \setminus J_Б$.

Алгоритм заканчивает работу:

оптимальный план $x^0 = x = (10.0000 \quad 0 \quad 2.2000 \quad 0 \quad 2.6000 \quad 0.9333 \quad 0 \quad 0)$ найден.

Ответ: $x^0 = (10.0000 \quad 0 \quad 2.2000 \quad 0 \quad 2.6000 \quad 0.9333 \quad 0 \quad 0)$ --- оптимальный план.

ПРИМЕР 2

Решить задачу линейного программирования вида (1.1) со следующими исходными данными

$c = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 & -4 & -6 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}'$, $\qquad b = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -2 & 15 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

и заданным начальным базисным планом

$x^{нач} = (10.0000 \quad 0 \quad 1.5000 \quad 0 \quad 0.5000 \quad 0 \quad 0 \quad 3.5000)$,

$J_Б = \{ j_1 = 1,\ j_2 = 3,\ j_3 = 5,\ j_4 = 8 \}$.

Итерация 1

По заданному множеству $J_Б = \{ j_1 = 1, j_2 = 3, j_3 = 5, j_4 = 8 \}$ сформируем матрицы и вектор

$$A_Б = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = A_Б^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1.0000} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0.2500} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-0.2500} & \mathbf{0} & \mathbf{-1.0000} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-0.2500} & \mathbf{-1.0000} & \mathbf{0} & \mathbf{1.0000} \end{pmatrix}$$

$c_Б = (-5 \quad 3 \quad -6 \quad -5)'$.

Вычислим вектор потенциалов

$u' = c'_Б B = (3.5000 \quad 0 \quad 6.0000 \quad -5.0000)$

и оценок

$\Delta = (\Delta_j, j = 1,...,8) = u'A - c' = (0 \quad 42.5000 \quad 0 \quad 2.5000 \quad 0 \quad -7.5000 \quad 1.5000 \quad 0)$.

Для данного вектора оценок условие $\Delta_j \geq 0, j \in J_H = J \setminus J_Б$, не выполняется.

Выберем индекс $j_0 \in J_H$, для которого $\Delta_{j_0} < 0$:

$j_0 = 6 \in J_H = \{2 \quad 4 \quad 6 \quad 7\}$.

Построим вектор

$z = BA_{j_0} = (0 \quad -0.7500 \quad -2.2500 \quad 3.7500)'$.

Вычислим шаги $\theta_i, i=1,...,4,$ по правилу (3)

$$\theta_1 = \infty, \ \theta_2 = \infty, \theta_3 = \infty, \ \theta_4 = 0.9333.$$

Найдем

$$\theta_0 = \min_{i=1,2,3,4} \theta_i = 0.9333 = \theta_4 .$$

Следовательно, $s=4, \ j_s = j_4 = 8$.

Построим новый базисный план $\bar{x} = (\bar{x}_j, j \in J) = (\bar{x}_j, j=1,...,8)$ и соответствующий ему базис $\bar{J}_Б$ по правилам (1.3), (1.4). В результате получим

новый план

$\bar{x} = (10.0000 \quad 0 \quad 2.2000 \quad 0 \quad 2.6000 \quad 0.9333 \quad 0 \quad 0)$

и новый базис

$\bar{J}_Б = \{1 \quad 3 \quad 5 \quad 6\}$.

Переходим на следующую итерацию, исходя из новых плана

$x := \bar{x} = (10.0000 \quad 0 \quad 2.2000 \quad 0 \quad 2.6000 \quad 0.9333 \quad 0 \quad 0)$

и базиса

$J_Б := \bar{J}_Б = \{1 \quad 3 \quad 5 \quad 6\}$

Итерация 3

По заданному множеству $J_Б = \{j_1 = 1, j_2 = 3, j_3 = 5, j_4 = 6\}$ сформируем матрицы и вектор

$$A_Б = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = A_Б^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0.2000 & -0.2000 & 0 & 0.2000 \\ -0.4000 & -0.6000 & -1.0000 & 0.6000 \\ -0.0667 & -0.2667 & 0 & 0.2667 \end{pmatrix},$$

$c_Б = (-5 \quad 3 \quad -6 \quad 0)'$.

Вычислим вектор потенциалов

$u' = c'_Б B = (3.0000 \ -2.0000 \ \ 6.0000 \ -3.0000)$

и оценок

$\Delta = (\Delta_j, j = 1,...,8) = u'A - c' = (0 \quad 46.0000 \quad 0.0000 \quad 2.0000 \quad 0 \quad 0 \; -1.0000 \quad 2.000071 \quad 2).$

Для данного вектора оценок условие $\Delta_j \geq 0, j \in J_H = J \setminus J_Б,$ не выполняется.

Выберем индекс $j_0 \in J_H$, для которого $\Delta_{j_0} < 0$:

$j_0 = 7 \in J_H = \{2, 4, 7, 8\}$.

Построим вектор

$z = BA_{j_0} = (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; -0.3333)'$.

Для данного вектора выполняется условие $z_i \leq 0, i = 1, \ldots, m.$ Алгоритм останавливает свою работу.

Ответ: данная задача не имеет решения, т.к. ее целевая функция не ограничена на множестве планов.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить симплекс-методом задачу линейного программирования вида (1.1) с заданными исходными данными и начальным базисным планом.

Задача 1

$c = (-5 \;\; 2 \;\; 3 \;\; -4 \;\; -6 \;\; 0 \;\; 1 \;\; -5)'$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & -8 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 36 \\ -11 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix},$$

$x^{нач} = (4 \quad 5 \quad 0 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 5)', \quad J_Б = \{1 \quad 2 \quad 4 \quad 8\}$.

ОТВЕТ:

$x^0 = (0 \;\; 9.5000 \;\; 5.3333 \;\; 1.5000 \quad 0 \quad 0 \;\; 3.6667 \quad 0), \quad c'x^0 = 32.6667$

Задача 2

$c = (-6 \quad -9 \quad -5 \quad 2 \quad -6 \quad 0 \quad 1 \quad 3)'$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 0 & -8.0 & 1.0 & 5.0 \\ 0 & -1.0 & 0 & -7.5 & 0 & 0 & 0 & 2.0 \\ 0 & 2.0 & 1.0 & 0 & -1.0 & 3.0 & -1.4 & 0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 0 & 3.0 & 1.0 & 1.0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 15 \\ -45 \\ 1.8 \\ 19 \end{pmatrix},$$

$x^{нач} = (4 \quad 0 \quad 6 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \quad 0)'$, $\quad J_Б = \{1 \quad 3 \quad 4 \quad 7\}$.

ОТВЕТ:

$x^0 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 7.0555 \quad 0 \quad 1.8029 \quad 2.5777 \quad 3.9580)$, $\quad c'x^0 = 28.5628.$

Задача 3

$c = (-6 \quad -9 \quad -5 \quad 2 \quad -6 \quad 0 \quad 1 \quad 3)'$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1.0 & 1.0 & -7.5 & 0 & 0 & 0 & 2.0 \\ 0 & 2.0 & 1.0 & 0 & -1.0 & 3.0 & -1.5 & 0 \\ 1.0 & -1.0 & 1.0 & -1.0 & 0 & 3.0 & 1.0 & 1.0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 1.5 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$x^{нач} = (4.0 \quad 0 \quad 6.0 \quad 0 \quad 4.5 \quad 0 \quad 0 \quad 0)'$, $\quad J_Б = \{1 \quad 3 \quad 5\}$.

ОТВЕТ:

$x^0 = (0 \quad 0.7500 \quad 0 \quad 2.6818 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 13.4318)$, $\quad c'x^0 = 38.9091$

Задача 4

$c = (-6 \quad -9 \quad -5 \quad 2 \quad -6 \quad 0 \quad 1 \quad 3)'$,

$$A = \begin{pmatrix} 2.0 & -1.0 & 1.0 & -7.5 & 0 & 0 & 0 & 2.0 \\ 4.0 & 2.0 & -1.0 & 0 & 1.0 & 5.0 & -1.0 & -4.0 \\ 1.0 & -1.0 & 1.0 & -1.0 & 0 & 3.0 & 1.0 & 1.0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$x^{нач} = (4 \quad 0 \quad 6 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad 0)'$, $\quad J_Б = \{1 \quad 3 \quad 5\}$.

ОТВЕТ:

$x^0 = (\ 4.625 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1.0 \quad 0 \quad 2.375)$, $\quad c'x^0 =$ -20.6250

Задача 5

$c = (-6 \;\; 9 \;\; -5 \;\; 2 \;\; -6 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 3)'$,

$$A = \begin{pmatrix} -2.0 & -1.0 & 3.0 & -7.5 & 0 & 0 & 0 & 2.0 \\ 4.0 & 2.0 & -6.0 & 0 & 1.0 & 5.0 & -1.0 & -4.0 \\ 1.0 & -1.0 & 0 & -1.0 & 0 & 3.0 & 1.0 & 1.0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{b} = \begin{pmatrix} -23.5 \\ -24.0 \\ 2.0 \end{pmatrix},$$

$x^{нач} = (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 5 \;\; 4 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 7)'$, $\quad J_Б = \{4 \;\; 5 \;\; 8\}$.

ОТВЕТ:

Задача не имеет решения, т.к. целевая функция не ограничена сверху на множестве допустимых планов.

Задача 6

$c = (6 \;\; -9 \;\; 5 \;\; -2 \;\; 6 \;\; 0 \;\; -1 \;\; 3)'$,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -1 & 0 & 1 & 5 & -1 & -5 \\ 1 & 11 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$x^{нач} = (4 \;\; 0 \;\; 6 \;\; 0 \;\; 4 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)'$, $\quad J_Б = \{1 \;\; 2 \;\; 3\}$.

ОТВЕТ:

$x^0 = (0 \quad 0 \quad 26 \quad 4 \quad 40 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$, $\quad c'x^0 = 362$.

2. Решение задач линейного программирования двойственным симплекс-методом

ПРИМЕР 1

Решить двойственным симплекс-методом задачу линейного программирования вида

$$c'x \to \max,\quad Ax = b,\ \ x \ge 0, \tag{2.1}$$

со следующими исходными данными

$c = (2\quad 2\quad 1\ -10\quad 1\quad 4\ \ -2\ \ -3)'$, $\qquad b = \begin{pmatrix}-2 & 4 & 3\end{pmatrix}$,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 5 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ m = 3,\ n = 8,$$

и заданным начальным двойственным планом

$y^{нач} = (\ 1\ 1\ 1)$, $\quad J_Б = \left\{ j_1 = 2\quad j_2 = 5\quad j_3 = 7 \right\}$,

и соответствующим ему копланом

$\delta = (\delta_j, j = 1,...,8) = y^{нач}{}'A - c' = (1\quad 0\quad 1\quad 2\quad 0\quad 4\quad 0\quad 1)$.

Итерация 1

По заданному множеству $J_Б = \left\{ j_1 = 2\quad j_2 = 5\quad j_3 = 7 \right\}$ сформируем матрицы

$$A_Б = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\qquad B = A_Б^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим базисные компоненты псевдоплана

$\chi_Б = Bb = (2\ \ -1\ \ -1) = (\chi_{j_1} = 2,\ \chi_{j_2} = -1,\ \chi_{j_3} = -1)$.

Условие $\chi_Б \ge 0$ не выполняется.

Находим базисный индекс $j_k \in J_Б$, для которого $\chi_{j_k} < 0$:

$k = 2,\quad j_k = j_2 = 5.$

Находим числа

$$\mu_j = B_k' A_j,\ j \in J\ , \tag{2.2}$$

где B'_k --- k-я строка матрицы B, A_j --- j-ый столбец матрицы условий A:

$\mu = (\mu_j, j = 1,....,8) = e'_k BA = (\mu_1 = 1, \mu_2 = 0, \mu_3 = 2, \mu_4 = -6, \mu_5 = 1, \mu_6 = 2, \mu_7 = 0, \mu_8 = -4)$.

Вычисляем шаги $\sigma_j, J_H = \{1\ 3\ 4\ 6\ 8\}$, σ_0 по правилам

$$\sigma_j = \begin{cases} -\delta_j / \mu_j, & если\ \ \mu_j < 0, \\ \infty & если\ \ \mu_j \ge 0, \end{cases} \qquad j \in J_H, \qquad \sigma_0 = \min_{j \in J_H} \sigma_j = \sigma_{j_0}. \tag{2.3}$$

Получим

$\sigma_1 = \infty, \sigma_3 = \infty, \sigma_4 = 0.3333, \sigma_6 = \infty, \sigma_7 = \infty, \sigma_8 = 0.25,\ \ \sigma_0 = \min\limits_{j \in J_H} = \sigma_8 = 0.25$,

$j_0 = 8$.

Построим новый двойственный план

$\overline{y} = y + \sigma_0 e'_k B = (1.25\ \ 1.25\ \ 0.75)$,

соответствующий ему новый коплан

$\overline{\delta} = \delta + \sigma_0 \mu = \overline{y}A - c = (1.2500 \quad 0\ \ 1.5000\ \ 0.5000\ \ 0.2500\ \ 4.5000 \quad 0 \quad 0)$

и новый базис

$\overline{J}_Б = \{2 \quad 8 \quad 7\}$.

Переходим к следующей итерации, исходя из новых

двойственного плана $y := \overline{y}$, соответствующего ему коплана

$\delta := \overline{\delta} = (1.2500 \quad 0\ \ 1.5000\ \ 0.5000\ \ 0.2500\ \ 4.5000 \quad 0 \quad 0)$

и базиса $J_Б := \overline{J}_Б = \{2 \quad 8 \quad 7\}$.

Итерация 2

По заданному множеству $J_Б = \left\{ j_1 = 2 \quad j_2 = 8 \quad j_3 = 7 \right\}$ сформируем матрицы

$$A_Б = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = A_Б^{-1} = \begin{pmatrix} -1.500 & -0.500 & 0.500 \\ -0.250 & -0.250 & 0.250 \\ -1.750 & -0.750 & -0.250 \end{pmatrix}.$$

Вычислим базисные компоненты псевдоплана

$\chi_Б = Bb = (2.5000 \;\; 0.2500 \; -0.2500) = (\chi_{j_1} = 2.5000 \,,\; \chi_{j_2} = 0.2500 \;\,,\; \chi_{j_3} = -0.2500\,)$.

Условие $\chi_Б \geq 0$ не выполняется.

Находим базисный индекс $j_k \in J_Б$, для которого $\chi_{j_k} < 0$:

$k = 3, \quad j_k = j_3 = 7.$

Найдем числа $\mu_j, j \in J = \{1, 2, ..., 8\}$, по правилу (2.2), в результате получим

$$\mu = (\mu_j, j = 1, ..., 8) =$$
$$= e'_k BA = (\mu_1 = 0.25, \mu_2 = 0, \mu_3 = -2.5, \mu_4 = 12.5, \mu_5 = -0.75, \mu_6 = -4.5, \mu_7 = 1, \mu_8 = 0).$$

Вычисляем шаги $\sigma_j, J_Н = \{1 \; 3 \; 4 \; 5 \; 8\}$, σ_0 по правилам (2.3). Получим

$\sigma_1 = \infty, \;\; \sigma_3 = 0.6, \sigma_4 = \infty \;\; \sigma_5 = 0.3333 \,,\; \sigma_8 = \infty,$
$\sigma_0 = \min\limits_{j \in J_Н} = \sigma_5 = 0.3333,$

$j_0 = 5$.

Построим новый двойственный план

$\overline{y} := y + \sigma_0 e'_k B = (0.6667 \;\; 1.0000 \;\; 0.6667)$,

соответствующий ему новый коплан

$\overline{\delta} = \delta + \sigma_0 \mu = \overline{y}A - c = (1.3333 \quad 0 \;\; 0.6667 \;\; 4.6667 \quad 0 \;\; 3.0000 \;\; 0.3333 \quad 0)$

и новый базис

$\overline{J}_Б = \{2 \quad 8 \quad 5\}$.

Переходим к следующей итерации, исходя из новых

двойственного плана $y := \overline{y}$, соответствующего ему коплана

$\delta := \overline{\delta} = (1.3333 \quad 0 \;\; 0.6667 \;\; 4.6667 \quad 0 \;\; 3.0000 \;\; 0.3333 \quad 0)$

и базиса $J_Б := \overline{J}_Б = \{2 \quad 8 \quad 5\}$.

Итерация 3

По заданному множеству $J_Б = \{j_1 = 2 \quad j_2 = 8 \quad j_3 = 5\}$ сформируем матрицы

$$A_Б = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = A_Б^{-1} = \begin{pmatrix} 0.3333 & 0.0000 & 0.6667 \\ 0.3333 & -0.0000 & 0.3333 \\ 2.3333 & 1.0000 & 0.3333 \end{pmatrix}.$$

Вычислим базисные компоненты псевдоплана

$$\chi_Б = Bb = (\chi_{j_1} = 2.6667,\ \chi_{j_2} = 0.3333,\ \chi_{j_3} = 0.3333)\ .$$

Все базисные компоненты данного псевдоплана положительные. Алгоритм заканчивает свою работу построением оптимального плана исходной задачи:

оптимальный план

$$x^0 = (0\ \ 2.6667\ \ \ 0\ \ \ 0\ \ 0.3333\ \ \ 0\ \ \ 0\ \ 0.3333)\ ,$$

оптимальное значение целевой функции

$$c' x^0 = 4.6667\ .$$

ПРИМЕР 2

Решить двойственным симплекс-методом задачу линейного программирования вида (2.1)

со следующими исходными данными

$$c = (2\ \ 2\ \ 1\ -10\ \ 1\ \ 4\ \ 0\ -3)', \qquad b = \left(-2\ \ 4\ \ 3\right),$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 5 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и заданным начальным двойственным планом

$$y^{нач} = (\ 1\ \ 1\ \ 1)\ , \quad J_Б = \left\{ j_1 = 2 \quad j_2 = 5 \quad j_3 = 7 \right\}$$

и соответствующим ему копланом

$$\delta = (\delta_j, j = 1,...,8) = y^{нач}{}' A - c' = (1\ \ 0\ \ 1\ \ 4\ \ 0\ \ 4\ \ 0\ \ 1)\ .$$

Итерация 1

По заданному множеству $J_Б = \left\{ j_1 = 2 \quad j_2 = 5 \quad j_3 = 7 \right\}$ сформируем матрицы

$$A_Б = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = A_Б^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим базисные компоненты псевдоплана

$\chi_Б = Bb = (\chi_{j_1} = 2,\ \chi_{j_2} = -5,\ \chi_{j_3} = -5)$.

Условие $\chi_Б \geq 0$ не выполняется.

Находим базисный индекс $j_k \in J_Б$, для которого $\chi_{j_k} < 0$:

$k = 2, \quad j_k = j_2 = 5$.

Найдем числа $\mu_j, j \in J = \{1, 2, ..., 8\}$, по правилу (2), в результате получим

$\mu = (\mu_j, j = 1, ..., 8) = e'_k\, BA = (\mu_1 = -1, \mu_2 = 0, \mu_3 = 4, \mu_4 = -20, \mu_5 = 1, \mu_6 = 8, \mu_7 = 0, \mu_8 = 2)$.

Вычисляем шаги $\sigma_j, J_H = \{1\ 3\ 4\ 6\ 8\}$, σ_0 по правилам (2.3). Получим

$\sigma_1 = 1, \sigma_3 = \infty, \sigma_4 = 0.2, \sigma_6 = \infty, \sigma_7 = \infty, \sigma_8 = \infty, \quad \sigma_0 = \min\limits_{j \in J_H} = \sigma_4 = 0.2$

$j_0 = 4$.

Построим новый двойственный план

$\overline{y} = y + \sigma_0 e'_k\, B = (1.6\ \ 1.2\ \ \ 1.2)$

соответствующий ему новый коплан

$\overline{\delta} = \delta + \sigma_0 \mu = \overline{y}A - c = (0.8000 \quad 0 \ \ 1.8000 \quad 0 \ \ 0.2000 \ \ 5.6000 \quad 0 \ \ 1.4000)$

и новый базис

$\overline{J}_Б = \{2 \quad 4 \quad 7\}$.

Переходим к следующей итерации, исходя из новых

двойственного плана $y := \overline{y}$, соответствующего ему коплана

$\delta := \overline{\delta} = (0.8000 \quad 0 \ \ 1.8000 \quad 0 \ \ 0.2000 \ \ 5.6000 \quad 0 \ \ 1.4000)$

и базиса $J_Б := \overline{J}_Б = \{2 \quad 4 \quad 7\}$.

Итерация 2

По заданному множеству $J_Б = \{j_1 = 2 \quad j_2 = 4 \quad j_3 = 7\}$ сформируем матрицы

$$A_Б = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = A_Б^{-1} = \begin{pmatrix} 0.0500 & 0.3500 & 0.3500 \\ -0.1500 & -0.0500 & -0.0500 \\ 0.1000 & -0.3000 & 0.7000 \end{pmatrix}.$$

Вычислим базисные компоненты псевдоплана

$\chi_Б = Bb = (2.5000 \;\; 0.2500 \;\; -3.500)$.

Условие $\chi_Б \geq 0$ не выполняется.

Находим базисный индекс $j_k \in J_Б$, для которого $\chi_{j_k} < 0$:

$k = 3, \quad j_k = j_3 = 7$.

Найдем числа $\mu_j, j \in J = \{1, 2, ..., 8\}$, по правилу (2.2), в результате получим

$$\mu = (\mu_j, j = 1, ..., 8) =$$
$$= e'_s BA = (\mu_1 = -0.7, \mu_2 = 0, \mu_3 = -0.2, \mu_4 = 0, \mu_5 = -0.3, \mu_6 = 0.6, \mu_7 = 1, \mu_8 = 2.4).$$

Вычисляем шаги $\sigma_j, J_H = \{1 \; 3 \; 5 \; 6 \; 8\}$, σ_0 по правилам (2.3). Получим

$\sigma_1 = 1.1429, \;\; \sigma_3 = 9, \sigma_5 = 0.6667 \;\; \sigma_6 = \infty$, $\sigma_8 = \infty$,
$\sigma_0 = \min\limits_{j \in J_H} = \sigma_5 = 0.6667$,

$j_0 = 5$.

Построим новый двойственный план

$\bar{y} = y + \sigma_0 e'_k B = (1.6667 \;\; 1.0000 \;\; 1.6667)$,

соответствующий ему новый коплан

$\bar{\delta} = \delta + \sigma_0 \mu = \tilde{y}A - c = (0.3333 \quad 0 \;\; 1.6667 \quad 0 \quad 0 \;\; 6.0000 \;\; 0.6667 \;\; 3.0000)$

и новый базис

$\bar{J}_Б = \{2 \quad 4 \quad 5\}$.

Переходим к следующей итерации, исходя из новых

двойственного плана $y := \bar{y}$, соответствующего ему коплана

$\delta := \overline{\delta} = (0.3333 \quad 0 \quad 1.6667 \quad 0 \quad 0 \quad 6.0000 \quad 0.6667 \quad 3.0000)$

и базиса $J_Б := \overline{J}_Б = \{2 \quad 4 \quad 5\}$.

Итерация 3

По заданному множеству $J_Б = \{ j_1 = 2 \quad j_2 = 4 \quad j_3 = 5 \}$ сформируем матрицы

$$A_Б = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = A_Б^{-1} = \begin{pmatrix} 0.1667 & 0 & 1.1667 \\ -0.1667 & -0.0000 & -0.1667 \\ -0.3333 & 1.0000 & -2.3333 \end{pmatrix}.$$

Вычислим базисные компоненты псевдоплана

$\chi_Б = Bb = (-3.8333 \quad 0.8333 \quad 11.6667)$.

Условие $\chi_Б \geq 0$ не выполняется.

Находим базисный индекс $j_k \in J_Б$, для которого $\chi_{j_k} < 0$:

$k = 1, \quad j_k = j_1 = 2$.

Найдем числа $\mu_j, j \in J = \{1, 2, ..., 8\}$, по правилу (2.2), в результате получим

$$\mu = (\mu_j, j = 1, ..., 8) = e'_k \, BA =$$
$$= (\mu_1 = 0.8333, \mu_2 = 1, \mu_3 = 0.1667, \mu_4 = 0, \mu_5 = 0, \mu_6 = 3.5, \mu_7 = 1.1667, \mu_8 = 1.5).$$

Вычисляем шаги $\sigma_j, J_Н = \{1 \ 3 \ 5 \ 6 \ 8\}$, σ_0 по правилам (2.3). Получим $\sigma_0 = \infty$

Алгоритм заканчивает свою работу.

Ответ: исходная задачи не имеет решения, т.к. ее ограничения не совместны.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить двойственным симплекс-методом задачи линейного программирования вида (2.1) с заданными исходными данными и начальным двойственным базисным планом.

Задача 1

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 5 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$c = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & -16 & 1 & 3 & -3 & -12 \end{pmatrix}$, $y^{нач} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $J_Б = \{1 \quad 2 \quad 3\}$.

Ответ:

$x^0 = (0 \quad 0 \quad 0 \;\; 0.4000 \quad 0 \quad 0 \;\; 2.0000 \;\; 0.4000),\;\; c'x^0 = -17.2000.$

Задача 2

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -7 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & 0 & 5 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix},\;\; b = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$c = \begin{pmatrix} -12 & 2 & 2 & -6 & 10 & -1 & -9 & 8 \end{pmatrix},\;\; y^{нач} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},\;\; J_Б = \{2 \;\; 4 \;\; 6\}.$

Ответ:

$x^0 = (0 \quad 0 \quad 5.0 \quad 1.0 \quad 0 \quad 0 \quad 1.0 \quad 0),\;\; c'x^0 = -5.$

Задача 3

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -7 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & 0 & 5 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},\;\; b = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$c = \begin{pmatrix} 12 & -2 & -6 & 20 & -18 & -5 & -7 & -20 \end{pmatrix},\;\; y^{нач} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \end{pmatrix},\;\; J_Б = \{2 \;\; 4 \;\; 6\}.$

Ответ:

Задача не имеет решения, т.к. пусто множество ее допустимых планов.

Задача 4

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 10 & -7 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 3 & 0 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -4 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix},\;\; b = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$c = \begin{pmatrix} 10 & -2 & -38 & 16 & -9 & -9 & -5 & -7 \end{pmatrix},\;\; y^{нач} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \end{pmatrix},\;\; J_Б = \{2 \;\; 8 \;\; 5\}.$

Ответ:

$x^0 = (1.35 \;\; 0.20 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \;\; 0.45),\;\; c'x^0 = 9.9500.$

Задача 5

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 10 & -7 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 7 & -2 & 14 & 8 & 0 & 12 & -11 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -4 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$c=\begin{pmatrix}36 & -12 & 66 & 76 & -5 & 77 & -76 & -7\end{pmatrix},\ y^{нач}=\begin{pmatrix}-3 & 7 & -1\end{pmatrix},\ J_Б=\{7\quad 8\quad 4\}.$

Ответ:

$x^0=(0\quad 0\quad 0.2622\quad 0.1662\quad 0.5415\quad 0\quad 0\quad 0),\ \ c'x^0=27.2264.$

3. Анализ чувствительности

Пример 1. Рассмотрим задачу линейного программирования (ЛП) вида

$$c'x\to\max,\quad Ax=b,\ x\ge 0, \tag{1.1}$$

со следующими исходными данными

$$c=\begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 & -4 & -6 & 0 & -1 & -5\end{pmatrix}',\qquad b=\begin{pmatrix}6 & 10 & -2\end{pmatrix}'\quad . \tag{1.2}$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 0 & -1 & 3 & 8 & 0 \end{pmatrix},\ m=3,\ n=8.$$

Предположим, что для задачи ЛП с этими данными известен оптимальный базисный план

$$x^0=\begin{pmatrix}10.0 & 0 & 1.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ J_Б=\{1, 3, 5\} \tag{1.3}$$

оптимальный двойственный план $u^{0}{}'=c'_Б A_Б^{-1}=(2.25\ \ -5.00\ \ \ 6.00)$ и соответствующий ему коплан

$$\Delta'=\left(\Delta_j,\ j=1,\dots,8\right)=u^0{}'A-c'=\begin{pmatrix}0 & 51.25 & 0 & 1.25 & 0 & 11.25 & 55.25 & 5.00\end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Предположим, что исходные данные задачи изменились, а именно, к основным ограничениям задачи добавилось еще одно условие

$x_1+x_2+x_3+x_4+3x_6-3x_7+x_8\le 9$.

Очевидно, что последнее условие эквивалентно следующим

$x_1+x_2+x_3+x_4+3x_6-3x_7+x_8+x_9=9,\ \ x_9\ge 0.$

Для новой задачи

$$\bar{c}\,'x \to \max, \quad \bar{A}x = \bar{b}, \ \ x \geq 0, \tag{1.5}$$

исходные данные принимают вид

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 & -4 & -6 & 0 & -1 & -5 & 0 \end{pmatrix}', \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -2 & 9 \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & -3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 0 & -1 & 3 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \bar{m} = 4, \ \ \bar{n} = 9.$$

Легко проверить, что для задачи ЛП (1.5) вектор

$$\bar{x} = (x^0, x_9) = \begin{pmatrix} 10.0 & 0 & 1.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & x_9 \end{pmatrix}$$

не является даже допустимым планом при любом значении компоненты $x_9 \geq 0$. Поэтому для того, чтобы решить эту задачу ЛП симплекс-методом, нужно использовать первую фазу симплекс-метода для построения начального базисного плана.

Отметим, что вектор $y' = (2.25 \ \ \text{-}5.00 \ \ \ 6.00 \ \ 0.00)$, построенный по оптимальному двойственному базисному плану $u^{0'} = (2.25 \ \ \text{-}5.00 \ \ \ 6.00)$, $J_Б = \{1,\, 3,\, 5\}$ старой задачи ЛП (1.1) является допустимым двойственным базисным планом (с базисом $\bar{J}_Б = \{1,\, 3,\, 5,\, 9\}$) в новой задаче ЛП (1.5) . Поэтому решать задачу ЛП (1.5) эффективнее двойственным симплекс-методом, взяв в качестве начального двойственного базисного плана этот двойственный план.

Решим задачу ЛП (1.5) двойственным симплекс-методом, исходя из начального двойственного базисного плана $y' = (2.25 \ \ \text{-}5.00 \ \ \ 6.00 \ \ 0.00)$, $J_Б = \{1,\, 3,\, 5,\, 9\}$. В результате получим

оптимальный план задачи (1.5)

$$\bar{x}^0 = (\,5.00 \quad 0 \quad\quad 0 \quad 4.75 \quad 4.00 \quad\quad 0 \quad\quad 0.25 \quad 0 \quad\quad 0), \quad \bar{J}^0_Б = \{1,\, 4,\, 5, 7\} \tag{1.7}$$

и оптимальный двойственный план

$$\bar{u}^0 = (1.00 \ \ \text{-}17.25 \quad 6.00 \ \ 12.25), \quad \bar{J}^0_Б = \{1,\, 4,\, 5, 7\} \ . \tag{1.8}$$

Пример 2. Рассмотрим задачу ЛП (1.5) с исходными данными (1.6), для которой известны оптимальный базисный план (1.7) и оптимальный двойственный базисный план (1.8).

Предположим, что исходные данные задачи изменились, а именно, вектор условий $\bar{b} = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -2 & 9 \end{pmatrix}'$ заменили на $\bar{\bar{b}} = (6\ 10\ 3\ \ 9)'$ и требуется решить новую задачу ЛП

$$\bar{c}\,'x \to \max, \quad \bar{A}x = \bar{\bar{b}}, \ \ x \geq 0, \tag{1.9}$$

Легко проверить, что для задачи ЛП (1.9) вектор $\bar{x}^0$ (1.7) не является даже допустимым планом. Поэтому для того, что решить эту задачу ЛП симплекс-методом нужно использовать первую фазу симплекс-метода для построения начального базисного плана.

Отметим, что оптимальный двойственный базисный план (см. (1.8))

$\bar{u}^0 = (1.00\ \ \text{-}17.25\quad 6.00\ \ 12.25), \quad \bar{J}_Б^0 = \{1,\ 4,\ 5, 7\}$,

старой задачи ЛП (1.6) является допустимым двойственным базисным планом в новой задаче ЛП (1.9) . Поэтому решать задачу ЛП (1.9) эффективнее двойственным симплекс-методом, взяв в качестве начального двойственного плана этот план.

Решим задачу ЛП (1.9) двойственным симплекс-методом, исходя из начального двойственного базисного плана (1.8). В результате получим

оптимальный план задачи (1.9)

$\bar{x}^0 = (\ 5.0\quad 0\ \ 0\ \ 4.6667\qquad 0\quad 0.1111\quad 0.3333\quad 0\quad 0), \quad \bar{\bar{J}}_Б^0 = \{1,\ 4,\ 6, 7\}$,

и оптимальный двойственный план

$\bar{u}^0 = (\ 1.00\ \ \text{-}5.75\quad 0.25\quad 0.75)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задание 1. Для задачи ЛП вида (1.1) с исходными данными

$$c = (\ 1\quad 4\quad \text{-}9\quad 6\quad \text{-}5\quad 8\quad 3\quad \text{-}7\quad 1), \quad b = (\ 14\quad 23\quad 6) \tag{1.20}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & 5 & 0 & -3 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 8 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -1 & 0 & -2 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

известны оптимальный базисный план

$$x^0 = (\ 3.00\qquad 0\qquad 0\quad 4.00\qquad 0\quad 2.00\quad 0\quad 0\quad 0), \quad J^0{}_Б = \{1,\ 4,\ 6\} \tag{1.21}$$

и оптимальный двойственный базисный план

$$u^0 = (1\ \ 1\ \ 1), \quad J^0_Б = \{1,\ 4,\ 6\}\,. \qquad (1.22)$$

Требуется последовательно решить двойственным симплекс-методом задачи ЛП, каждая из которых получается из предыдущей добавлением нового ограничения. В качестве исходной взять задачу (1.1) с данными (1.20). Добавляемые ограничения имеют вид

$$x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_6 + 3x_7 + x_8 \le 9\,, \qquad (1.23)$$

$$x_1 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7 - x_8 \le 20\,, \qquad (1.24)$$

$$-2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 3x_6 + 3x_7 + x_8 \le 14\,, \qquad (1.25)$$

Таким образом, первой решается задача (1.1) с данными (1.20), (1.23), исходя их известного начального двойственного плана (1.22).

Второй решается задача (1.1) с данными (1.20), (1.23), (1.24), взяв в качестве начального двойственного плана найденный оптимальный двойственный базисный план первой задачи.

Третьей решается задача (1.1) с данными (1.20), (1.23)- (1.25), взяв в качестве начального двойственного плана найденный оптимальный двойственный базисный план второй задачи.

Задание 2. Для задачи ЛП вида (1.1) с исходными данными (1.20) известны оптимальный базисный план (1.21) и оптимальный двойственный базисный план (1.22).

Используя известный оптимальный двойственный план (1.22) решить новую задачу ЛП, в которой вектор условий $b = (\ 14\ \ \ 23\ \ \ 6)'$ заменен на новый вектор $\overline{b} = (14\ \ \ 22\ \ \ 7)'$.

4. Решение матричной транспортной задачи методом потенциалов

Пример 1.

Имеется 3 склада, содержащие некоторое количество единиц однотипной продукции **(см.таблицу 1)**, имеется также 5 потребителей нуждающихся в определенном количестве данной продукции **(см.таблицу 2)**. При перевозке одной единицы продукции со склада **i** потребителю **j** возникают издержки $\mathbf{c_{ij}}$. Величины издержек приведены в **таблице 3**. При перевозке $\mathbf{x_{ij}}$ единиц продукции со склада **i** потребителю **j** суммарные затраты на перевозку составляют $\mathbf{x_{ij}}\ \mathbf{c_{ij}}$.

Требуется найти такой план перевозок, при котором общие затраты на перевозку всей продукции, по всем потребителям, будут минимальны.

Таблица 1

Склад №	Запас ед. продукции
1	20
2	30
3	25

Таблица 2

Потребитель №	Потребность в ед. продукции
1	10
2	10
3	10
4	10
5	10

Таблица 3
Издержки на перевозку единицы продукции со склада **i** потребителю **j**

	Потребители				
Склад №	1	2	3	4	5
1	2	8	-5	7	10
2	11	5	8	-8	-4
3	1	3	7	4	2

Шаг:1
Проверка на сбалансированность.

Общее число запасов на складах : **75** ; Общая потребность : **50.**
Мы видим, что общее число запасов превышает общую потребность на **25.** .
Задача является открытой (несбалансированной), для приведения ее к закрытой введем фиктивного потребителя **№6** с потребностью в продукции равной 25.
Все издержки по доставке продукции данному потребителю с любого склада принимаем равными нулю.

Шаг:2
Отыскание начального плана перевозок. Найдем начальный базисный план перевозки методом северо-западного угла.

Запишем настоящую задачу в виде транспортной таблицы. В верхней строке перечислим потребности потребителей по порядку номеров. В левом столбце перечислим имеющиеся запасы на складах. На пересечении j-го столбца и i-й строки будем записывать количество продукции x_{ij} , поставляемое с i-го склада j-му потребителю. Пока начальное решение не найдено, оставим эти клетки пустыми.

	$b_1 = 10$	$b_2 = 10$	$b_3 = 10$	$b_4 = 10$	$b_5 = 10$	$b_6 = 25$
$a_1 = 20$						
$a_2 = 30$						
$a_3 = 25$						

Введем вспомогательные строку и столбец, в которых будем отмечать оставшиеся нераспределенные запасы и соответственно потребности (остатки). Изначально их содержимое равно исходным запасам и потребностям, так как еще ничего не распределялось. На рисунке они представлены желтым цветом.

Выберем клетку, в которую будем распределять продукцию на следующей итерации, это левая верхняя клетка (северо-западный угол). На рисунке, как сама клетка, так и соответствующие ей остатки отображаются красным шрифтом.

	$b_1 = 10$	$b_2 = 10$	$b_3 = 10$	$b_4 = 10$	$b_5 = 10$	$b_6 = 25$	
$a_1 = 20$	x_{11}						20
$a_2 = 30$							30
$a_3 = 25$							25
	10	10	10	10	10	25	

Итерация: 1

Заполним клетку **(1,1)**.
Сравним значения остатков для производителя $\mathbf{a_1}$ и потребителя $\mathbf{b_1}$.

Нераспределенных остатков по потребностям для $\mathbf{b_1}$ меньше (см. таблицу выше, красный шрифт), положим $x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = 10$ и запишем это в клетку (1,1) одновременно вычитая его из обеих клеток остатков (см. таблицу ниже). При этом клетка остатков по потребностям обнулится указывая, что все потребности для $\mathbf{b_1}$ удовлетворены (см. таблицу ниже). Поэтому исключим столбец $\mathbf{b_1}$ из дальнейшего рассмотрения (серый фон).
Ненулевое значение остатка по запасам для $\mathbf{a_1}$ показывает, сколько единиц продукции у него осталось не потребленной.

	$b_1=10$	$b_2=10$	$b_3=10$	$b_4=10$	$b_5=10$	$b_6=25$	
$a_1=20$	10	x_{12}					10
$a_2=30$							30
$a_3=25$							25
	0	10	10	10	10	25	

Итерация: 2

Заполним клетку **(1,2)**.
Сравним значения остатков для производителя $\mathbf{a_1}$ и потребителя $\mathbf{b_2}$.

Они равны (см. таблицу выше, красный шрифт). Положим $x_{12}=\min\{10,10\}=10$ запишем это в клетку **(1,2)** и обнулим соответствующие клетки остатков (см. таблицу ниже). Так как все потребности для $\mathbf{b_2}$ удовлетворены и все запасы $\mathbf{a_1}$ использованы, исключим столбец $\mathbf{b_2}$ и строку $\mathbf{a_1}$ из дальнейшего рассмотрения (серый фон).

	$b_1=10$	$b_2=10$	$b_3=10$	$b_4=10$	$b_5=10$	$b_6=25$	
$a_1=20$	10	10					0
$a_2=30$			x_{23}				30
$a_3=25$							25
	0	0	10	10	10	25	

Итерация: 3

	$b_1=10$	$b_2=10$	$b_3=10$	$b_4=10$	$b_5=10$	$b_6=25$	
$a_1=20$	10	10					0
$a_2=30$			10	x_{24}			20
$a_3=25$							25
	0	0	0	10	10	25	

Итерация: 4

	$b_1=10$	$b_2=10$	$b_3=10$	$b_4=10$	$b_5=10$	$b_6=25$	
$a_1=20$	10	10					0
$a_2=30$			10	10	x_{25}		10
$a_3=25$							25
	0	0	0	0	10	25	

Итерация: 5

	$b_1=10$	$b_2=10$	$b_3=10$	$b_4=10$	$b_5=10$	$b_6=25$	
$a_1=20$	10	10					0
$a_2=30$			10	10	10		0
$a_3=25$						x_{36}	25
	0	0	0	0	0	25	

Итерация: 6

	$b_1=10$	$b_2=10$	$b_3=10$	$b_4=10$	$b_5=10$	$b_6=25$	
$a_1=20$	10	10					0
$a_2=30$			10	10	10		0
$a_3=25$						25	0
	0	0	0	0	0	0	

Получен начальный допустимый план перевозок (см. таблицу ниже), удовлетворены нужды всех потребителей и использованы все запасы производителей.

	$b_1=10$	$b_2=10$	$b_3=10$	$b_4=10$	$b_5=10$	$b_6=25$
$a_1=20$	10	10	0	0	0	0
$a_2=30$	0	0	10	10	10	0
$a_3=25$	0	0	0	0	0	25

Шаг:3

Проверим полученный план на невырожденность. Количество клеток **N** с ненулевыми перевозками должно удовлетворять условию **N=n+m-1**. В нашем случае N=6, n+m=6+3=9, план является вырожденным. Прежде чем двигаться дальше выберем 2 клетки с нулевыми значениями перевозок. Выбирать следует такие клетки, которые не образуют циклов с клетками с ненулевыми перевозками.

	b_1= 10	b_2= 10	b_3= 10	b_4= 10	b_5= 10	b_6= 25
a_1= 20	10	10	0	0	0	0
a_2= 30	0	0	10	10	10	0
a_3= 25	0	0	0	0	0	25

В последней таблице представлен построенный начальный базисный план перевозки. Базисные клетки отмечены серым цветом. Значения перевозок
$x_{ij},\ (i,j)\in U=\{(i,j): \mathrm{i}=1,\dots,\mathrm{m},\ \mathrm{j}=1,\dots,\mathrm{n}\}$, отмечены синим цветом.

Шаг:4

Проведем поэтапное улучшение начального базисного плана перевозки, используя метод потенциалов.

Итерация: 1

Составим вспомогательную рабочую матрицу затрат. Она строится из исходной матрицы издержек (см. Таблицу 3) путем переноса только тех значений c_{ij} , которые соответствуют базисным клеткам транспортной таблицы. Остальные ячейки остаются пустыми. Кроме того, введем вспомогательный столбец, в который внесем значения неизвестных $u_1,\dots,u_3$ (3,это **m** - число складов) и вспомогательную строку, в которую внесем значения неизвестных $v_1,\dots,v_6$ (6,это **n** - число потребителей). На рисунке они представлены желтым цветом. Эти n+m неизвестных должны для всех *(i,j)*, соответствующих базисным клеткам, удовлетворять линейной системе уравнений

$$u_i+v_j=c_{ij},\ \ (i,j)\in U_Б.$$

Эту систему всегда можно решить следующим способом: На первом шаге полагают $v_6=0$. Если на *k*-м шаге найдено значение неизвестной, то в системе всегда имеется еще не определенная неизвестная, которая однозначно может быть найдена на *(k+1)*-м шаге из уравнения $u_i+v_j=c_{ij}$, так как значение другой неизвестной в этом уравнении уже известно. Переменные u_i и v_j называются потенциалами.

Рабочая матрица затрат с рассчитанными потенциалами представлена ниже.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	
a_1	2	8	-5			0	$u_1=0$
a_2			8	-8	-4		$u_2=13$
a_3						0	$u_3=0$
	$v_1=2$	$v_2=8$	$v_3=-5$	$v_4=-21$	$v_5=-17$	$v_6=0$	

Порядок вычисления потенциалов был следующий:

1) Пусть $v_6 = 0$;
2) $u_1 = c_{1,6} - v_6$;
3) $u_3 = c_{3,6} - v_6$;
4) $v_1 = c_{1,1} - u_1$;
5) $v_2 = c_{1,2} - u_1$;
6) $v_3 = c_{1,3} - u_1$;
7) $u_2 = c_{2,3} - v_3$;
8) $v_4 = c_{2,4} - u_2$;
9) $v_5 = c_{2,5} - u_2$;

Теперь для всех небазисных (свободных) клеток рабочей матрицы затрат вычислим оценки Δ_{ij} , по формуле $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$, $(i,j) \in U_H = U \setminus U_Б$, (зеленый цвет). Если же среди оценок нет отрицательных - план является оптимальным, решение задачи прекращаем. В противном случае продолжаем решение задачи.
Рабочая матрица затрат с заполненными оценками клетками представлена ниже.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	
a_1	2	8	-5	28	27	0	$u_1=0$
a_2	-4	-16	8	-8	-4	-13	$u_2=13$
a_3	-1	-5	12	25	19	0	$u_3=0$
	$v_1=2$	$v_2=8$	$v_3=-5$	$v_4=-21$	$v_5=-17$	$v_6=0$	

Из всех отрицательных оценок имеет смысл выбрать наибольшую по модулю (красный цвет), так как ее воздействие на общие затраты является максимальным. В нашем случае такая оценка находится в клетке $(i_0, j_0) = (2,2)$. В совокупности клеток $U_Б \cup (i_0, j_0)$ содержится единственный цикл $U_{цикл} \subset U_Б \cup (i_0, j_0)$. В таблице клетки цикла отмечены голубым цветом. Отметим в транспортной таблице ячейку $(i_0, j_0) = (2,2)$ знаком + . Начиная с клетки $(i_0, j_0) = (2,2)$, последовательно обойдем все клетки цикла, поочередно помечая их знаками **-** и +. В результате множество клеток $U_{цикл}$ цикла разобьется на два подмножества: множество клеток цикла, помеченных знаком + --- $U^+_{цикл}$, и множество клеток цикла, помеченных знаком - --- $U^-_{цикл}$.

	$b_1=10$	$b_2=10$	$b_3=10$	$b_4=10$	$b_5=10$	$b_6=25$
$a_1=20$	10	10 –	0+	0	0	0
$a_2=30$	0	0+	10–	10	10	0
$a_3=25$	0	0	0	0	0	25

Найдем $\theta = \min\limits_{(i,j)\in U^-_{цикл}} x_{ij}$ и выбираем одну ячейку, $(i_*, j_*) \in U^-_{цикл}$, где этот минимум достигается. В нашем случае $\theta = 10$ и $(i_*, j_*) = (1,2)$.

Переходим к новому плану перевозок по правилу

$$\overline{x}_{ij} = x_{ij} + \theta,\ (i,j) \in U^+_{цикл},\ \overline{x}_{ij} = x_{ij} - \theta,\ (i,j) \in U^-_{цикл},\ \overline{x}_{ij} = x_{ij},\ (i,j) \in U \setminus U_{цикл}. \quad (3.1)$$

Новое множество базисных клеток строим по правилу

$$\overline{U}_Б = (U_Б \setminus (i_*, j_*)) \cup (i_0, j_0). \quad (3.2)$$

В результате получим новый базисный план перевозок, приведенный ниже

	$b_1=10$	$b_2=10$	$b_3=10$	$b_4=10$	$b_5=10$	$b_6=25$
$a_1=20$	10	0	10	0	0	0
$a_2=30$	0	10	0	10	10	0
$a_3=25$	0	0	0	0	0	25

Здесь базисные клетки $\overline{U}_Б$ отмечены серым цветом.

Итерация: 2

Рабочая матрица затрат с пересчитанными потенциалами и оценкам.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	
a_1	2	16	-5	28	27	0	$u_1=0$
a_2	-4	5	8	-8	-4	-13	$u_2=13$
a_3	-1	11	12	25	19	0	$u_3=0$
	$v_1=2$	$v_2=-8$	$v_3=-5$	$v_4=-21$	$v_5=-17$	$v_6=0$	

Для небазисной клетки (2,6) оценка $\Delta_{26}=-13$ является отрицательной. Полагаем $(i_0, j_0)=(2,6)$.

	$b_1=10$	$b_2=10$	$b_3=10$	$b_4=10$	$b_5=10$	$b_6=25$
$a_1=20$	10	0	10 +	0	0	0 –
$a_2=30$	0	10	0 –	10	10	0 +
$a_3=25$	0	0	0	0	0	25

Найдем $\theta=\min\limits_{(i,j)\in U^-_{цикл}} x_{ij}$ и выбираем одну ячейку, $(i_*, j_*)\in U^-_{цикл}$, где этот минимум достигается. На данной итерации имеем $\theta=0$ и $(i_*, j_*)=(1,6)$.

Находим новый план перевозок по правилам (3.1) и соответствующее ему множество базисных клеток по правилу (3.2).

В результате получим новый базисный план перевозок, приведенный ниже:

	$b_1=10$	$b_2=10$	$b_3=10$	$b_4=10$	$b_5=10$	$b_6=25$
$a_1=20$	10	0	10	0	0	0
$a_2=30$	0	10	0	10	10	0
$a_3=25$	0	0	0	0	0	25

Итерация: 3

Рабочая матрица затрат с пересчитанными потенциалами и оценками.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	
a_1	2	16	-5	28	27	13	u_1=-13
a_2	-4	5	8	-8	-4	0	u_2=0
a_3	-14	-2	-1	12	6	0	u_3=0
	v_1=15	v_2=5	v_3=8	v_4=-8	v_5=-4	v_6=0	

Для небазисной клетки (3,1) оценка $\Delta_{31} = -14$ является отрицательной. Полагаем $(i_0, j_0) = (3,1)$.

	b_1=10	b_2=10	b_3=10	b_4=10	b_5=10	b_6=25
a_1=20	10-	0	10+	0	0	0
a_2=30	0	10	0-	10	10	0+
a_3=25	0+	0	0	0	0	25-

Найдем $\theta = \min\limits_{(i,j)\in U^-_{цикл}} x_{ij}$ и выбираем одну ячейку, $(i_*, j_*) \in U^-_{цикл}$, где этот минимум достигается. На данной итерации имеем $\theta = 0$ и $(i_*, j_*) = (2,3)$.

Находим новый план перевозок по правилам (3.1) и соответствующее ему множество базисных клеток по правилу (3.2).

В результате получим новый базисный план перевозок, приведенный ниже.

	b_1=10	b_2=10	b_3=10	b_4=10	b_5=10	b_6=25
a_1=20	10	0	10	0	0	0
a_2=30	0	10	0	10	10	0
a_3=25	0	0	0	0	0	25

Итерация: 4

Рабочая матрица затрат с пересчитанными потенциалами и оценкам.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	
a_1	2	2	-5	14	13	-1	$u_1=1$
a_2	10	5	14	-8	-4	0	$u_2=0$
a_3	1	-2	13	12	6	0	$u_3=0$
	$v_1=1$	$v_2=5$	$v_3=-6$	$v_4=-8$	$v_5=-4$	$v_6=0$	

Для небазисной клетки (3,2) оценка $\Delta_{32}=-2$ является отрицательной. Полагаем $(i_0,j_0)=(3,2)$.

	$b_1=10$	$b_2=10$	$b_3=10$	$b_4=10$	$b_5=10$	$b_6=25$
$a_1=20$	10	0	10	0	0	0
$a_2=30$	0	10 –	0	10	10	0 +
$a_3=25$	0	0+	0	0	0	25 –

На данной итерации имеем $\theta=10$ и $(i_*,j_*)=(2,2)$.

Находим новый план перевозок по правилам (3.1) и соответствующее ему множество базисных клеток по правилу (3.2).

В результате получим новый базисный план перевозок, приведенный ниже.

	$b_1=10$	$b_2=10$	$b_3=10$	$b_4=10$	$b_5=10$	$b_6=25$
$a_1=20$	10	0	10	0	0	0
$a_2=30$	0	0	0	10	10	10
$a_3=25$	0	10	0	0	0	15

Итерация: 5

Рабочая матрица затрат с пересчитанными потенциалами и оценкам.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	
a_1	2	4	-5	14	13	-1	$u_1=1$
a_2	10	2	14	-8	-4	0	$u_2=0$
a_3	1	3	13	12	6	0	$u_3=0$
	$v_1=1$	$v_2=3$	$v_3=-6$	$v_4=-8$	$v_5=-4$	$v_6=0$	

Для небазисной клетки (1,6) оценка $\Delta_{16}=-1$ является отрицательной. Полагаем $(i_0, j_0)=(1,6)$.

	$b_1=10$	$b_2=10$	$b_3=10$	$b_4=10$	$b_5=10$	$b_6=25$
$a_1=20$	10 –	0	10	0	0	0 +
$a_2=30$	0	0	0	10	10	10
$a_3=25$	0 +	10	0	0	0	15 –

На данной итерации имеем $\theta=10$ и $(i_*, j_*)=(1,1)$.

Находим новый план перевозок по правилам (3.1) и соответствующее ему множество базисных клеток по правилу (3.2).

В результате получим новый базисный план перевозок, приведенный ниже.

	$b_1=10$	$b_2=10$	$b_3=10$	$b_4=10$	$b_5=10$	$b_6=25$
$a_1=20$			10			10
$a_2=30$				10	10	10
$a_3=25$	10	10				5

Итерация: 6

Рабочая матрица затрат с пересчитанными потенциалами и оценкам.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	
a_1	1	5	-5	15	14	0	$u_1=0$
a_2	10	2	13	-8	-4	0	$u_2=0$
a_3	1	3	12	12	6	0	$u_3=0$
	$v_1=1$	$v_2=3$	$v_3=-5$	$v_4=-8$	$v_5=-4$	$v_6=0$	

В приведенной выше таблице нет отрицательных оценок (план улучшить нельзя), следовательно, достигнуто оптимальное решение.

	$b_1=10$	$b_2=10$	$b_3=10$	$b_4=10$	$b_5=10$	$b_6=25$
$a_1=20$	0	0	10	0	0	10
$a_2=30$	0	0	0	10	10	10
$a_3=25$	10	10	0	0	0	5

Общие затраты на перевозку всей продукции, для оптимального плана составляют:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{6} c_{ij}x_{ij} = 130.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Имеется m складов, содержащие некоторое количество единиц однотипной продукции $a_i, i = 1,\ldots,m,$ имеется также n потребителей нуждающихся в определенном количестве данной продукции $b_j, j = 1,\ldots,n.$ При перевозке одной единицы продукции со склада **i** потребителю **j** возникают издержки $\boldsymbol{c_{ij}}$. Величины $c_{ij},\ a_i, i = 1,\ldots,m,\ b_j, j = 1,\ldots,n,$ приведены в таблице. При перевозке x_{ij} единиц продукции со склада **i** потребителю **j** суммарные затраты на перевозку составляют $x_{ij}c_{ij}$.

Требуется найти такой план перевозок при котором общие затраты на перевозку всей продукции, по всем потребителям, будут минимальны.

Задача 1. Решить транспортную задачу с данными из Таблицы 1, m=4,n=8.

Таблица 1

	Потребители								Запас ед. продукции
Склад №	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	-3	6	7	12	6	-3	2	16	a_1 =20
2	4	3	7	10	0	1	-3	7	a_2 =11
3	19	3	2	7	3	7	8	15	a_3 =18
4	1	4	-7	-3	9	13	17	22	a_4 =27
Потребность в ед. продук-ции	$b_1 =$ 11	$b_2 = 4$	$b_3 = 10$	$b_4 = 12$	$b_5 = 8$	$b_6 = 9$	$b_7 = 10$	$b_8 = 4$	

Ответ: Компоненты $x_{ij}, i = 1,\ldots,4,\ \ j = 1,\ldots,8,$ оптимального плана перевозок приведены в таблице:

	b_1=11	b_2=4	b_3=10	b_4=12	b_5=8	b_6=9	b_7=10	b_8=4	b_9=8
a_1=20	11	0	0	0	0	9	0	0	0
a_2=11	0	0	0	0	0	0	10	1	0
a_3=18	0	4	0	0	8	0	0	3	3
a_4=27	0	0	10	12	0	0	0	0	5

Общие затраты на перевозку всей продукции для оптимального плана составляют:

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{8} c_{ij}x_{ij} = -108.$$

Задача 2:
Решить транспортную задачу с данными из Таблицы 2, m=4,n=8.

Таблица 2

Издержки на перевозку единицы продукции со склада **i** потребителю **j**

	Потребители								Запас ед. продукции
Склад №	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	-3	10	70	-3	7	4	2	-20	15
2	3	5	8	8	0	1	7	-10	12
3	-15	1	0	0	13	5	4	5	18
4	1	-5	9	-3	-4	7	16	25	20
Потребность в ед. продукции	5	5	10	4	6	20	10	5	

Ответ: Компоненты $x_{ij}, i=1,...,4,\ \ j=1,...,8,$ оптимального плана перевозок приведены в таблице

	b_1=5	b_2=5	b_3=10	b_4=4	b_5=6	b_6=20	b_7=10	b_8=5
a_1=15	0	0	0	0	0	0	10	5
a_2=12	0	0	0	0	0	12	0	0
a_3=18	5	0	10	0	0	3	0	0
a_4=20	0	5	0	4	6	5	0	0

Общие затраты на перевозку всей продукции для оптимального плана составляют:

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{8} c_{ij}x_{ij} = -154.$$

Задача 3. Решить транспортную задачу с данными из Таблицы 3, m=4,n=5.

Таблица 3

Издержки на перевозку единицы продукции со склада **i** потребителю **j**

	Потребители					Запас ед. продукции
Склад №	1	2	3	4	5	
1	3	0	3	1	6	53
2	2	4	10	5	7	20
3	-2	5	3	2	9	45
4	1	3	5	1	9	38
Потребность в ед. продукции	15	31	10	3	18	

Ответ: Компоненты $x_{ij}, i = 1,\ldots,4,\ \ j = 1,\ldots,6,$ оптимального плана перевозок приведены в таблице

	b_1=15	b_2=31	b_3=10	b_4=3	b_5=18	b_6=79
a_1=53	0	31	1	3	18	0
a_2=20	0	0	0	0	0	20
a_3=45	15	0	9	0	0	21
a_4=38	0	0	0	0	0	38

Общие затраты на перевозку всей продукции для оптимального плана составляют:

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} c_{ij}x_{ij} = 111.$$

Задача 4.

Решить транспортную задачу с данными из Таблицы 4, m=5,n=4.

Таблица 4

Издержки на перевозку единицы продукции со склада **i** потребителю **j**

	Потребители				Запас ед. продукции
Склад №	1	2	3	4	
1	2	6	8	-3	13
2	3	2	12	4	5
3	7	2	5	7	7
4	9	2	14	9	9
5	8	7	8	8	10
Потребность в ед. продукции	20	5	6	11	

Ответ: Компоненты $x_{ij}, i=1,\ldots,5,\ j=1,\ldots,5,$ оптимального плана перевозок приведены в таблице

	$b_1=20$	$b_2=5$	$b_3=6$	$b_4=11$	$b_5=2$
$a_1=13$	2	0	0	11	0
$a_2=5$	5	0	0	0	0
$a_3=7$	1	0	6	0	0
$a_4=9$	2	5	0	0	2
$a_5=10$	10	0	0	0	0

Общие затраты на перевозку всей продукции для оптимального плана составляют:

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij} = 131.$$

Задача 5.

Решить транспортную задачу с данными из Таблицы 5, m=5,n=4.

Таблица 5

Издержки на перевозку единицы продукции со склада **i** потребителю **j**

	Потребители				Запас ед. продукции
Склад №	1	2	3	4	
1	1	1	-1	-1	7
2	0	0	2	6	3
3	5	4	7	6	7
4	7	8	5	7	3
5	2	5	10	2	7
Потребность в ед. продукции	10	10	4	3	

Ответ: Компоненты $x_{ij}, i=1,...,5,\ \ j=1,...,4,$ оптимального плана перевозок приведены в таблице

	b_1=10	b_2=10	b_3=4	b_4=3
a_1=7	3	0	1	3
a_2=3	0	3	0	0
a_3=7	0	7	0	0
a_4=3	0	0	3	0
a_5=7	7	0	0	0

Общие затраты на перевозку всей продукции для оптимального плана составляют:

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} = 56.$$

5. Решение задач квадратичного программирования

Пример 1

Решить задачу квадратичного программирования вида

$$c'x+\frac{1}{2}x'Dx \to \min, \quad Ax=b,\ x\ge 0, \tag{4.1}$$

со следующими исходными данными

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix},\ n=8,\ m=3,$$

$$B=\begin{pmatrix} 1,\ 1,-1,0,3,\ 4,-2,\ 1 \\ 2,\ 6,\ 0,0,\ 1,-5,\ 0,-1 \\ -1,2,\ 0,0,-1,\ 1,\ 1,\ 1 \end{pmatrix}, \qquad d=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 \end{pmatrix}',$$

$$D=B'B=\begin{pmatrix} 6 & 11 & -1 & 0 & 6 & -7 & -3 & -2 \\ 11 & 41 & -1 & 0 & 7 & -24 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -3 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -3 & 0 & 11 & 6 & -7 & 1 \\ -7 & -24 & -4 & 0 & 6 & 42 & -7 & 10 \\ -3 & 0 & 2 & 0 & -7 & -7 & 5 & -1 \\ -2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 10 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$c'=-d'B=(\,-10\ \ -31\ \ 7\ \ 0\ \ -21\ \ -16\ \ 11\ \ -7),$$

и заданным правильным опорным планом

$$x^{нач}=(0\ \ 0\ \ 6\ \ 4\ \ 5\ \ 0\ \ 0\ \ 0), \quad J_{оп}=\{j_1=3,\ j_2=4,\ j_3=5\}, \quad J_*=\{3,\ 4,\ 5\},$$

Итерация 1

Шаг 1. Используя заданный план $x^{нач}$, вычисляем вектор

$$\overline{c}(x^{нач})=Dx^{нач}+c=(14\ \ -2\ \ -2\ \ 0\ \ 16\ \ -10\ \ -12\ \ -8)'.$$

По опорному множеству индексов $J_{оп}=\{3,\ 4,\ 5\}$ строим матрицу и вектор

$$A_{оп}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \overline{c}_{оп}(x^{нач})=\ (-2\ \ 0\ \ 16).$$

Находим вектор потенциалов

$u' = -\overline{c}_{on}(x^{нач})' A_{on}^{-1} = (\ 0 \quad -16 \quad\ 2)$

и вектор оценок

$\Delta = u' A + \overline{c}(x^{нач}) = (\ 0 \quad -42 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 10 \quad 0 \quad -40), \qquad j_0 = 2$.

Шаг 2. Проверяем критерий оптимальности:

$$\Delta_j \geq 0, j \in J \setminus J_*. \tag{4.2}$$

В данном случае условия оптимальности не выполняются. Зафиксируем индекс $j_0 \in J \setminus J_*$, для которого $\Delta_{j_0} < 0$: $j_0 = 2$. Идем на шаг 3, используя индекс $j_0 = 2$.

Шаг 3. Построим направления $l = (l_j,\ j \in J)$, $J = \{1, 2, ..., 8\}$. изменения плана. Компоненты $l_j,\ j \in J_H = J \setminus J_* = \{1, 2, 6, 7, 8\}$, определим по правилу

$$l_j = 0, j \in J_H \setminus j_0, \quad l_{j_0} = 1. \tag{4.3}$$

Для нахождения оставшихся компонент $l(J_*) = (l_3,\ l_4,\ l_4)$ сформируем матрицу H и вектор bb

$$H = \begin{pmatrix} D_* & A_*' \\ A_* & O \end{pmatrix},\ bb = \begin{pmatrix} D(J_*, j_0) \\ A_{j_0} \end{pmatrix},$$
$$где\ D_* = \begin{pmatrix} d_{ij}, j \in J_* \\ i \in J_* \end{pmatrix},\ D(J_*, j_0) = \begin{pmatrix} d_{ij_0} \\ i \in J_* \end{pmatrix}, A_* = (A_j, j \in J_*). \tag{4.4}$$

Получим

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 11 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad bb = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем вектор

$$\begin{pmatrix} l(J_*) \\ \Delta y \end{pmatrix} = -H^{-1} bb = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix},$$

первые $|J_*|$ компонент которого задают искомый вектор $l(J_*) = (l_3, l_4, l_4)$. Таким образом, шаг 3 завершается построением вектора

$$l = (\ 0 \ \ 1 \ \ -4 \ \ -2 \ \ -3 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0)\ .$$

Шаг 4. Подсчитаем шаги $\theta_j,\ j \in J_* \cup j_0,$ по правилам

$$\theta_j = \begin{cases} \infty, & \text{если } l_j \ge 0,\ j \in J_*; \\ -x_j / l_j, & \text{если } l_j < 0,\ j \in J_*; \end{cases} \tag{4.5}$$

$$\theta_{j_0} = \theta_\delta = \begin{cases} \infty, \text{ если } \ \delta = 0; \\ |\Delta_{j_0}| \backslash \delta, \text{ если } \ \delta > 0; \end{cases} \quad \text{где } \ \delta = l'Dl = D'_{*j_0} l_* + A'_{j_0} y + d_{j_0 j_0}\,. \tag{4.6}$$

Найдем $\theta_0 = \min \theta_j,\ j \in J_* \cup j_0,$ и индекс $j_* \in J_* \cup j_0,$ на котором $\theta_0 = \theta_{j_*}$. На данной итерации имеем

$\theta_3 = 1.5000$, $\theta_4 = 2.0000,$ $\theta_5 = 1.6667,\ \theta_\delta = \theta_{j_0} = 0.8400,$
$\theta_0 = \min\{\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_{j_0}\} = \theta_{j_0} = 0.8400,\ \ j_* = j_0.$

Шаг 5. Строим новый план

$$\overline{x} = x^{нач} + \theta_0 l = (0 \ \ 0.8400 \ \ 2.6400 \ \ 2.3200 \ \ 2.4800 \ \ \ 0 \ \ \ 0 \ \ \ 0)\,.$$

Шаг 6. Строим новые множества $\overline{J}_{on}$ и $\overline{J}_*$. На данной итерации реализовался случай а): $j_* = j_0$, поэтому новые множества $\overline{J}_{on}$ и $\overline{J}_*$. строим по правилу

$$\overline{J}_{on} = J_{on}\,,\ \overline{J}_* = J_* \cup j_0, \tag{4.7}$$

В результате чего получаем множества

$$\overline{J}_{on} = \{3,\ 4,\ 5\}, \quad \overline{J}_* = \{3,\ 4,\ 5,\ 2\}.$$

Переходим к следующей итерации, исходя их нового правильного опорного плана

$$x := \overline{x} = (0 \ \ 0.8400 \ \ 2.6400 \ \ 2.3200 \ \ 2.4800 \ \ \ 0 \ \ \ 0 \ \ \ 0)\,,$$

$$J_{on} := \overline{J}_{on} = \{3,\ 4,\ 5\}, \quad J_* := \overline{J}_* = \{3,\ 4,\ 5,\ 2\}.$$

Итерация 2

Шаг 1. Используя заданный план x, вычисляем вектор

$$\overline{c}(x) = Dx + c = (11.4800\ 18.1600\ \ 1.3600 \ \ \ 0 \ \ 4.2400 -31.8400 \ -1.0800 \ -9.6800)\,.$$

По опорному множеству индексов $J_{on} = \{3,\ 4,\ 5\}$ строим матрицу и вектор

$$A_{on} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \ \overline{c}_{on}(x) = (1.3600 \quad 0 \quad 4.2400)'.$$

Находим вектор потенциалов

$$u' = -\overline{c}_{on}(x\ )' A_{on}^{-1} = (0\ \ -4.2400\ \ -1.3600)$$

и вектор оценок

$$\Delta = u' A + \overline{c}(x\ ) = (\ \ 5.8800\ \ -0.0000 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0\ \ -30.3200\ \ 5.8800 - 18.1600).$$

Проверяем условия оптимальности (4.2).

В данном случае эти условия не выполняются. Зафиксируем индекс $j_0 \in J \setminus J_*$, для которого $\Delta_{j_0} < 0$: $j_0 = 6$. Идем на шаг 3, используя индекс $j_0 = 6$.

Шаг 3. Построим направления $l = (l_j,\ j \in J)$, $J = \{1,2,...,8\}$. изменения плана. Компоненты $l_j,\ j \in J_H = J \setminus J_* = \{1,6,7,8\}$, определим по правилу (4.3).

Для нахождения оставшихся компонент $l(J_*) = (l_3,\ l_4,\ l_5, l_2)$ сформируем матрицу H и вектор bb по правилам (4.4). В результате получаем

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 11 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 7 & 41 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad bb = \begin{pmatrix} D(J_*, j_0) \\ A_{j_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \\ -24 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем вектор

$$\begin{pmatrix} l(J_*) \\ \Delta y \end{pmatrix} = -H^{-1} bb = \begin{pmatrix} -5.8400 \\ -5.9200 \\ -1.8800 \\ 0.9600 \\ 0 \\ -9.5600 \\ 5.1600 \end{pmatrix},$$

первые $|J_*|$ компонент которого задают искомый вектор $l(J_*) = (l_3,\ l_4,\ l_5, l_2)$. Таким образом, шаг 3 завершается построением вектора

$l = (0 \;\; 0.9600 \;\; -5.8400 \;\; -5.9200 \;\; -1.8800 \;\; 1.0000 \qquad 0 \qquad 0)$.

Шаг 4. Подсчитаем шаги $\theta_j, j \in J_* \cup j_0$, по правилам (4.5), (4.6), найдем $\theta_0 = \min \theta_j, j \in J_* \cup j_0$, и индекс $j_* \in J_* \cup j_0$, на котором $\theta_0 = \theta_{j_*}$. На данной итерации имеем

$\theta_2 = \infty$, $\theta_3 = 0.4521$, $\theta_4 = 0.3919$, $\theta_5 = 1.3191$, $\theta_\delta = \theta_{j_0} = 0.5954$,
$\theta_0 = \min\{\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_{j_0}\} = \theta_4 = 0.3919$, $j_* = 4 = j_s$, $s = 2$.

Шаг 5. Строим новый план

$\overline{x} = x + \theta_0 l = (0 \;\; 1.2162 \;\; 0.3514 \qquad 0 \;\; 1.7432 \;\; 0.3919 \qquad 0 \qquad 0)$.

Шаг 6. Строим новые множества $\overline{J}_{on}$ и $\overline{J}_*$. На данной итерации реализовался случай с):

$$j_* = j_s \in J_{on} \text{ и существует такой индекс } j_+ \in J_* \setminus J_{on}, \text{ что } \; e'_s A^{-1}_{on} A_{j_+} \neq 0;$$

где $j_+ = 2$. Поэтому новые множества $\overline{J}_{on}$ и $\overline{J}_*$. строим по правилу

$$\overline{J}_{on} = (J_{on} \setminus j_*) \cup j_+, \;\; \overline{J}_* = J_* \setminus j_*, \tag{4.8}$$

в результате чего получаем множества

$\overline{J}_{on} = \{2, 3, \; 5\}$, $\overline{J}_* = \{2, 3, \; 5\}$.

Вычисляем новое значение оценки $\overline{\Delta}_{j_0} = \Delta_{j_0} + \theta_0 \delta$:

$\overline{\Delta}_{j_0} = \overline{\Delta}_6 = \Delta_6 + \theta_0 l' D l = -10.3649$.

Идем на шаг 3 с новыми значениями

$x := \overline{x} = (0 \;\; 1.2162 \;\; 0.3514 \qquad 0 \;\; 1.7432 \;\; 0.3919 \qquad 0 \qquad 0)$,
$J_{on} := \overline{J}_{on} = \{2, 3, \; 5\}$, $J_* := \overline{J}_* = \{2, 3, \; 5\}$, $\Delta_{j_0} := \overline{\Delta}_{j_0} = -10.3649$ и $j_0 = 6$.

Шаг 3. Построим направления $l = (l_j, \; j \in J)$, $J = \{1, 2, ..., 8\}$, изменения плана для новых множеств J_{on} и J_*. Компоненты l_j, $j \in J_H = J \setminus J_* = \{1, 4, \; 6, 7, 8\}$, определим по правилу (4.3).

Для нахождения оставшихся компонент $l(J_*) = (l_2, \, l_3, \, l_5)$ сформируем матрицу H и вектор bb по правилам (4.4). В результате получаем

$$H=\begin{pmatrix} 41 & -1 & 7 & 2 & 3 & 4\\ -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1\\ 7 & -3 & 11 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad bb=\begin{pmatrix} D(J_*, j_0)\\ A_{j_0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -24\\ -4\\ 6\\ 4\\ -1\\ 2\end{pmatrix}.$$

Найдем вектор

$$\begin{pmatrix} l(J_*)\\ \Delta y\end{pmatrix}=-H^{-1}bb=\begin{pmatrix} -2.0000\\ 6.0000\\ 7.0000\\ 74.0000\\ -51.0000\\ 17.0000\end{pmatrix},$$

первые $|J_*|$ компонент которого задают искомый вектор $l(J_*)=(l_2, l_3, l_5)$. Таким образом, шаг 3 завершается построением вектора

$l=$ (0, -2.0000, 6.0000, 0, 7.0000, 1.0000, 0, 0)

Шаг 4. Подсчитаем шаги $\theta_j, j\in J_*\cup j_0,$ по правилам (4.5), (4.6) , найдем $\theta_0=\min\theta_j, j\in J_*\cup j_0,$ и индекс $j_*\in J_*\cup j_0,$ на котором $\theta_0=\theta_{j_*}$. На данной итерации имеем

$\theta_2=0.6081,\ \theta_3=\infty$, $\theta_5=\infty, \theta_\delta=\theta_{j_0}=0.0212,$
$\theta_0=\min\{\theta_2,\theta_3,\theta_5,\theta_{j_0}\}=\theta_{j_0}=0.0212, \quad j_*=j_0=6.$

Шаг 5. Строим новый план

$\bar{x}=x+\theta_0 l=(0\ \ 1.1738\ \ 0.4785\ \ \ \ 0\ \ 1.8916\ \ 0.4131\ \ \ \ 0\ \ \ \ 0)$.

Шаг 6. Строим новые множества $\bar{J}_{on}$ и $\bar{J}_*$. На данной итерации реализовался случай а): $j_*=j_0$, поэтому новые множества $\bar{J}_{on}$ и $\bar{J}_*$. строим по правилу (4.7), В результате чего получаем множества

$\bar{J}_{on}=\{2,3,\ 5\},\quad \bar{J}_*=\{2,3,\ 5,\ 6\}$.

Переходим к следующей итерации, исходя их нового правильного опорного плана

$x:=\bar{x}=(0\ \ 1.1738\ \ 0.4785\ \ \ \ 0\ \ 1.8916\ \ 0.4131\ \ \ \ 0\ \ \ \ 0),$

$J_{on}:=\bar{J}_{on}=\{2,3,\ 5\},\quad J_*:=\bar{J}_*=\{2,3,\ 5,\ 6\}$.

Итерация 3

Шаг 1. Используя заданный план x, вычисляем вектор

$\overline{c}(x) = Dx + c = (\ 10.8916\ 19.9755\ -1.0225\quad 0\ \ 9.0675 -17.3865\ -4.1759\ -4.9775)$.

По опорному множеству индексов $J_{on} = \{2, 3, 5\}$ строим матрицу и вектор

$$A_{on} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \overline{c}_{on}(x) = (19.9755\ -1.0225\ \ 9.0675)'.$$

Находим вектор потенциалов

$u' = -\overline{c}_{on}(x\ )' A_{on}^{-1} = (1.5685\ \ \text{-}9.0675\ \ \ 1.0225)$

и оценок

$\Delta = u' A + \overline{c}(x\ ) = (\ 4.4151\quad 0\quad 0\quad 1.5685\quad 0\ \ \text{-}0.0000\quad 1.2781\ \ \text{-}27.8180)$.

Проверяем условия оптимальности (4.2).

В данном случае эти условия не выполняются. Зафиксируем индекс $j_0 \in J \setminus J_*$, для которого $\Delta_{j_0} < 0$: $j_0 = 8$. Идем на шаг 3, используя индекс $j_0 = 8$.

Шаг 3. Построим направления $l = (l_j,\ j \in J)$, $J = \{1, 2, ..., 8\}$. изменения плана. Компоненты l_j, $j \in J_H = J \setminus J_* = \{1, 4, 7, 8\}$, определим по правилу (4.3).

Для нахождения оставшихся компонент $l(J_*) = (l_2, l_3, l_5, l_6)$ сформируем матрицу H и вектор bb по правилам (4.4). В результате получаем

$$H = \begin{pmatrix} 41 & -1 & 7 & -24 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & -3 & 11 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -24 & -4 & 6 & 42 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad bb = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 10 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем вектор

$$\begin{pmatrix} l(J_*) \\ \Delta y \end{pmatrix} = -H^{-1}bb = \begin{pmatrix} 0.2444 \\ -2.2331 \\ -2.1053 \\ 0.6278 \\ -4.0419 \\ 9.9816 \\ -0.3272 \end{pmatrix},$$

первые $|J_*|$ компонент которого задают искомый вектор $l(J_*) = (l_2, l_3, l_5, l_6)$. Таким образом, шаг 3 завершается построением вектора

$l = (0 \ \ 0.2444 \ -2.2331 \qquad 0 \ -2.1053 \ \ 0.6278 \qquad 0 \ \ 1.0000)$.

Шаг 4. Подсчитаем шаги $\theta_j, j \in J_* \cup j_0$, по правилам (4.5), (4.6) , найдем $\theta_0 = \min \theta_j, j \in J_* \cup j_0$, и индекс $j_* \in J_* \cup j_0$, на котором $\theta_0 = \theta_{j_*}$. На данной итерации имеем

$\theta_2 = \infty,\ \theta_3 = 0.2143$, $\theta_5 = 0.3919$, $\theta_6 = \infty, \theta_\delta = \theta_{j_0} = 0.6825,$
$\theta_0 = \min\{\theta_2, \theta_3, \theta_5, \theta_6, \theta_{j_0}\} = \theta_3 = 0.2143, \quad j_* = j_s = 3, \quad s = 2.$

Шаг 5. Строим новый план

$\bar{x} = x + \theta_0 l = (\ 0 \ \ 1.2262 \ \ 0.0000 \qquad 0 \ \ 1.4405 \ \ 0.5476 \qquad 0 \ \ 0.2143)$.

Шаг 6. Строим новые множества $\bar{J}_{on}$ и $\bar{J}_*$. На данной итерации реализовался случай c):

$j_* = j_s \in J_{on}$ и существует такой индекс $j_+ \in J_* \setminus J_{on}$, что $e_s' A_{on}^{-1} A_{j_+} \neq 0$;

где $j_+ = 6$. Поэтому новые множества $\bar{J}_{on}$ и $\bar{J}_*$. строим по правилу (4.8), В результате чего получаем множества

$\bar{J}_{on} = \{2, 5,\ 6\}, \quad \bar{J}_* = \{2, 5,\ 6\}.$

Вычисляем новое значение оценки $\bar{\Delta}_{j_0} = \Delta_{j_0} + \theta_0 \delta$:

$\bar{\Delta}_{j_0} = \bar{\Delta}_8 := \Delta_8 + \theta_0 l' D l = -19.0833$.

Идем на шаг 3 с новыми значениями

$x := \bar{x} = (\ 0 \ \ 1.2262 \ \ 0.0000 \qquad 0 \ \ 1.4405 \ \ 0.5476 \qquad 0 \ \ 0.2143),$
$J_{on} := \bar{J}_{on} = \{2, 5,\ 6\}, \quad J_* := \bar{J}_* = \{2, 5,\ 6\}, \quad \Delta_{j_0} := \bar{\Delta}_{j_0} = -19.0833$ и $j_0 = 8.$

Шаг 3. Построим направления $l=(l_j,\, j\in J)$, $J=\{1,2,...,8\}$, изменения плана для новых множеств J_{on} и J_*. Компоненты $l_j,\, j\in J_H=J\setminus J_*=\{1,3,4,7,8\}$, определим по правилу (4.3).

Для нахождения оставшихся компонент $l(J_*)=(l_2,\, l_5,\, l_6)$ сформируем матрицу H и вектор bb по правилам (4.4). В результате получаем

$$H=\begin{pmatrix} 41 & 7 & -24 & 2 & 3 & 4\\ 7 & 11 & 6 & 0 & 1 & 0\\ -24 & 6 & 42 & 4 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad bb=\begin{pmatrix} D(J_*, j_0)\\ A_{j_0} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3\\ 1\\ 10\\ -3\\ 2\\ 0 \end{pmatrix},$$

Найдем вектор

$$\begin{pmatrix} l(J_*)\\ \Delta y \end{pmatrix}=-H^{-1}bb=\begin{pmatrix} -0.5000\\ 0.5000\\ 1.0000\\ -37.1667\\ -9.0000\\ 36.3333 \end{pmatrix},$$

первые $|J_*|$ компонент которого задают искомый вектор $l(J_*)=(l_2,\, l_5,\, l_6)$. Таким образом, шаг 3 завершается построением вектора

$l=(0,-0.5,0,\ 0,\ 0.5,\ 1.0,\ 0,\ 1.0)$

Шаг 4. Подсчитаем шаги $\theta_j, j\in J_*\cup j_0$, по правилам (4.5), (4.6) , найдем $\theta_0=\min\theta_j, j\in J_*\cup j_0$, и индекс $j_*\in J_*\cup j_0$, на котором $\theta_0=\theta_{j_*}$. На данной итерации имеем

$\theta_2=0.\ 24524,\quad \theta_5=\infty,\quad \theta_6=\infty, \theta_\delta=\theta_{j_0}=\ 0.1759,$
$\theta_0=\min\{\theta_2,\theta_5,\theta_6,\theta_{j_0}\}=\theta_{j_0}=\ 0.1759,\ \ j_*=j_0.$

Шаг 5. Строим новый план

$\bar{x}=x+\theta_0 l=(\ 0\ \ 1.1382\ \ 0.0000\qquad 0\ \ 1.5284\ \ 0.7235\qquad 0\ \ 0.3902)$

Шаг 6. Строим новые множества $\bar{J}_{on}$ и $\bar{J}_*$. На данной итерации реализовался случай а): $j_*=j_0$, поэтому новые множества $\bar{J}_{on}$ и $\bar{J}_*$. строим по правилу (4.7), в результате чего получаем множества

$\bar{J}_{on} = \{2,5,\ 6\}, \quad \bar{J}_* = \{2,5,\ 6,\ 8\}.$

Переходим к следующей итерации, исходя их нового правильного опорного плана

$x := \bar{x} = (\ 0\ \ 1.1382\ \ 0.0000\qquad 0\ \ 1.5284\ \ 0.7235\qquad 0\ \ 0.3902)$,

$J_{on} := \bar{J}_{on} = \{2,5,\ 6\}, \quad J_* := \bar{J}_* = \{2,5,\ 6,\ 8\}.$

Итерация 4

Шаг 1. Используя заданный план x, вычисляем вектор

$\bar{c}(x) = Dx\ + c = (\ 5.8464\ \ 7.8326\ -2.0077\qquad 0\ \ 8.5115\ \ 0.1413\ -5.1536\ -0.4808)$.

По опорному множеству индексов $J_{on} = \{2,\ 5,\ 6\}$ строим матрицу и вектор

$$A_{on} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \bar{c}_{on}(x) = (\ \ 7.8326\ \ 8.5115\ \ 0.1413)'.$$

Находим вектор потенциалов

$u' = -\bar{c}_{on}(x\ )'A_{on}^{-1} = (\ \text{-}5.8346\ \ \ \text{-}8.5115\ \ \ \ 7.3428)$

и оценок

$\Delta = u'A + \bar{c}(x\ ) = (\ \ -1.1569\ -0.0000\ \ 5.3351\ -5.8346\qquad 0\qquad 0\ -5.4931\ \ 0.0000)$.

Проверяем условия оптимальности (4.2). В данном случае эти условия не выполняются. Зафиксируем индекс $j_0 \in J \setminus J_*$, для которого $\Delta_{j_0} < 0$: $j_0 = 1$. Идем на шаг 3, используя индекс $j_0 = 1$.

Шаг 3. Построим направления $l = (l_j,\ j \in J)$, $J = \{1,2,...,8\}$. изменения плана. Компоненты l_j, $j \in J_H = J \setminus J_* = \{1,3,4,7\}$, определим по правилу (4.3).

Для нахождения оставшихся компонент $l(J_*) = (l_2,\ l_5, l_6, l_8)$ сформируем матрицу H и вектор bb по правилам (4.4). В результате получаем

$$H = \begin{pmatrix} 41 & 7 & -24 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 11 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -24 & 6 & 42 & 10 & 4 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 10 & 3 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ bb = \begin{pmatrix} D(J_*, j_0) \\ A_{j_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ -7 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем вектор

$$\begin{pmatrix} l(J_*) \\ \Delta y \end{pmatrix} = -H^{-1}bb = \begin{pmatrix} -0.2650 \\ -0.5684 \\ 0.0300 \\ 0.1966 \\ 0.8589 \\ 1.7304 \\ -0.4395 \end{pmatrix},$$

первые $|J_*|$ компонент которого задают искомый вектор $l(J_*) = (l_2, l_5, l_6, l_8)$. Таким образом, шаг 3 завершается построением вектора

$l = (\ 1.0000\ \ -0.2650\ \ \ 0\ \ \ 0\ \ -0.5684\ \ 0.0300\ \ \ 0\ \ 0.1966)$.

Шаг 4. Подсчитаем шаги $\theta_j, j \in J_* \cup j_0$, по правилам (4.5), (4.6) , найдем $\theta_0 = \min \theta_j, j \in J_* \cup j_0$, и индекс $j_* \in J_* \cup j_0$, на котором $\theta_0 = \theta_{j_*}$. На данной итерации имеем

$\theta_2 = 4.2957,\quad \theta_5 = 2.6892,\quad \theta_6 = \infty,\ \theta_8 = \infty, \theta_\delta = \theta_{j_0} =\ 0.9467,$
$\theta_0 = \min\{\theta_2, \theta_5, \theta_6, \theta_8\ , \theta_{j_0}\} = \theta_{j_0} =\ 0.9467,\quad j_* = j_0$.

Шаг 5. Строим новый план

$\overline{x} = x + \theta_0 l = (\ 0.9467\ \ 0.8874\ \ 0.0000\ \ \ 0\ \ 0.9904\ \ 0.7519\ \ \ 0\ \ 0.5763)$.

Шаг 6. Строим новые множества $\overline{J}_{on}$ и $\overline{J}_*$. На данной итерации реализовался случай а): $j_* = j_0$, поэтому новые множества $\overline{J}_{on}$ и $\overline{J}_*$. строим по правилу (4.7), в результате чего получаем множества

$\overline{J}_{on} = \{2, 5,\ 6\},\quad \overline{J}_* = \{1, 2, 5,\ 6,\ 8\}$.

Переходим к следующей итерации, исходя их нового правильного опорного плана

$x := \overline{x} = (\ 0.9467\ \ 0.8874\ \ 0.0000\ \ \ 0\ \ 0.9904\ \ 0.7519\ \ \ 0\ \ 0.5763)$,

$J_{on} := \overline{J}_{on} = \{2, 5,\ 6\},\quad J_* := \overline{J}_* = \{1, 2, 5,\ 6,\ 8\}$.

Итерация 5

Шаг 1. Используя заданный план x, вычисляем вектор

$\overline{c}(x) = Dx\ + c = (\ \ 4.9681\ \ \ 2.9559\ \ \ -1.3889\ \ \ \ 0\ \ \ 6.8734\ \ \ -0.6410\ \ \ -4.6119\ \ \ -1.3177)$.

По опорному множеству индексов $J_{on} = \{2,\ 5,\ 6\}$ строим матрицу и вектор

$$A_{on} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{c}_{on}(x) = (\ 2.9559 \quad 6.8734 \quad -0.6410)'.$$

Находим вектор потенциалов

$$u' = -\overline{c}_{on}(x\ )' A_{on}^{-1} = (-5.0215 \quad -6.8734 \quad 6.9268)$$

и оценок

$$\Delta = u' A + \overline{c}(x\ ) = (\ -0.0000 \quad -0.0000 \quad 5.5379 \quad -5.0215 \quad 0 \quad 0 \quad -6.5707 \quad 0.0000)\,.$$

Проверяем условия оптимальности (4.2). В данном случае эти условия не выполняются. Зафиксируем индекс $j_0 \in J \setminus J_*$, для которого $\Delta_{j_0} < 0$: $j_0 = 4$. Идем на шаг 3, используя индекс $j_0 = 4$.

Шаг 3. Построим направления $l = (l_j,\ j \in J)$, $J = \{1, 2, ..., 8\}$. изменения плана. Компоненты l_j, $j \in J_H = J \setminus J_* = \{3, 4, 7\}$, определим по правилу (4.3).

Для нахождения оставшихся компонент $l(J_*) = (l_1, l_2,\ l_5, l_6, l_8)$ сформируем матрицу H и вектор bb по правилам (4.4). В результате получаем

$$H = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 6 & -7 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & 41 & 7 & -24 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 11 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & -24 & 6 & 42 & 10 & 4 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 10 & 3 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad bb = \begin{pmatrix} D(J_*, j_0) \\ A_{j_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем вектор

$$\begin{pmatrix} l(J_*) \\ \Delta y \end{pmatrix} = -H^{-1} bb = \begin{pmatrix} -0.7028 \\ 0.1816 \\ -0.2626 \\ -0.0118 \\ 0.2044 \\ 4.1649 \\ 5.7008 \\ -5.7452 \end{pmatrix},$$

первые $|J_*|$ компонент которого задают искомый вектор $l(J_*) = (l_1, l_2, l_5, l_6, l_8)$. Таким образом, шаг 3 завершается построением вектора

$l = ($ -0.7028 0.1816 0 1.0000 -0.2626 -0.0118 0 0.2044$)$.

Шаг 4. Подсчитаем шаги $\theta_j, j \in J_* \cup j_0,$ по правилам (4.5), (4.6) , найдем $\theta_0 = \min \theta_j, j \in J_* \cup j_0,$ и индекс $j_* \in J_* \cup j_0,$ на котором $\theta_0 = \theta_{j_*}$. На данной итерации имеем

$$\theta_1 = 1.3469,\ \theta_2 = \infty,\quad \theta_5 = 3.7714,\quad \theta_6 = 63.5221,\ \theta_8 = \infty, \theta_\delta = \theta_{j_0} = 1.2057,$$
$$\theta_0 = \min\{\theta_2, \theta_5, \theta_6, \theta_8, \theta_{j_0}\} = \theta_{j_0} = 1.2057,\quad j_0 = j_*\ .$$

Шаг 5. Строим новый план

$$\overline{x} = x + \theta_0 l = (\ 0.0993 \quad 1.1064 \quad 0.0000 \quad 1.2057 \quad 0.6738 \quad 0.7376 \quad 0 \quad 0.8227)\ .$$

Шаг 6. Строим новые множества $\overline{J}_{on}$ и $\overline{J}_*$. На данной итерации реализовался случай а): $j_* = j_0$, поэтому новые множества $\overline{J}_{on}$ и $\overline{J}_*$. строим по правилу (4.7), в результате чего получаем множества

$\overline{J}_{on} = \{2, 5, 6\},\quad \overline{J}_* = \{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$.

Переходим к следующей итерации, исходя их нового правильного опорного плана

$x := \overline{x} = (\ 0.0993 \quad 1.1064 \quad 0.0000 \quad 1.2057 \quad 0.6738 \quad 0.7376 \quad 0 \quad 0.8227)$,

$J_{on} := \overline{J}_{on} = \{2, 5, 6\},\quad J_* := \overline{J}_* = \{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$.

Итерация 6

Шаг 1. Используя заданный план x, вычисляем вектор

$\overline{c}(x) = Dx + c = (\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$.

По опорному множеству индексов $J_{on} = \{2, 5, 6\}$ строим матрицу и вектор

$$A_{on} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad \overline{c}_{on}(x) = (0 \quad 0 \quad 0)'.$$

Находим вектор потенциалов

$u' = -\overline{c}_{on}(x)' A_{on}^{-1} = (0 \ 0 \ 0)$

и оценок

$\Delta = u' A + \overline{c}(x) = (\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$.

В данном случае условия оптимальности (4.2) выполняются. Алгоритм останавливает свою работу. Задача решена.

Ответ:

Оптимальный план

$x^0 = (\ 0.0993 \quad 1.1064 \quad 0.0000 \quad 1.2057 \quad 0.6738 \quad 0.7376 \quad 0 \quad 0.8227)$.

Оптимальное значение целевой функции

$c'x^0 + 0.5x^0{}'Dx^0 =$ -33.5000.

Замечание. В данной задаче имеется множество оптимальных планов!

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить задачу квадратичного программирования вида (4.1) с заданными исходными данными и заданным начальным правильным опорным планом.

Задача 1

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 5 & 4 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$D = B'B, \quad c' = -d'B,$

$x^{нач} = (0.7273 \quad 1.2727 \quad 3.0000 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0),$
$J_{оп} = \{1,2,3\},\ J_* = \{1,2,3\}.$

Ответ:

Оптимальный план

$x^0 = (0.7921 \quad 1.2576 \quad 1.3811 \quad 1.1526 \quad 0.1258 \quad 0.5634 \quad 0.0713 \quad 0.4592)$.

Оптимальное значение целевой функции: -108.5000.

Задача 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 4 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 9 & 0 & 5 & 2 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

$D = B'B, \quad c' = (-13 \quad -217 \quad 0 \quad -117 \quad -27 \quad -71 \quad 18 \quad -99),$

$x^{нач} = (0 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad 1), \quad J_{оп} = \{2,5,8\}, \; J_* = \{2,5,8\}.$

Ответ:

Оптимальный план

$x^0 = (0.2977 \quad 1.0404 \quad 5.3680 \quad 0.00 \quad -0.0 \quad 1.3007 \quad 0.7599 \quad 2.1990)$.

Оптимальное значение целевой функции: -263.

Задача 3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & 0 & -5 & -10 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 3 & -5 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 & -5 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix},$$

$c' = (1 \quad 3 \quad -1 \quad 3 \quad 5 \quad 2 \quad -2 \quad 0),$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$x^{нач} = (0 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad 1), \quad J_{оп} = \{2,5,8\}, \; J_* = \{2,5,8\}.$

Ответ: Задача не имеет решения, т.к. целевая функция не ограничена снизу на множестве планов.

Задача 4

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & 0 & -5 & -10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 & -5 & 8 \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 20 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$c'=(\,1 \quad -3 \quad 4 \quad 3 \quad 5 \quad 6 \quad -2 \quad 0),$$

$$D=\begin{pmatrix} 25 & 10 & 0 & 3 & -1 & 13 & 0 & 1 \\ 10 & 45 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 29 & -3 & 15 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -3 & 21 & -5 & 0 & -1 \\ 13 & 20 & 0 & 15 & -5 & 61 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 5 & 0 & 21 \end{pmatrix},$$

$$x^{нач}=(3 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad 0),\quad J_{оп}=\{1, \quad 4, \quad 5\},\ J_*=\{1, \quad 4, \quad 5\}.$$

Ответ:

Оптимальный план

$$x^0=(\,2.1844 \quad 0.2713 \quad 0.2101 \quad 3.1017 \quad 2.8843 \quad -0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.1812)\,.$$

Оптимальное значение целевой функции: 309.5489.

Задача 5

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 & 2 & 0 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 15 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$$c'=(\ 1 \quad -3 \quad 4 \quad 3 \quad 5 \quad 6 \quad -2 \quad 0),\quad D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$x^{нач} = (4 \quad 0 \quad 5 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0),\ \ J_{оп} = \{1, \ 3, \ 4\}, J_* = \{1, \ 3, \ 4\}.$

Ответ:

Оптимальный план

$x^0 = (\ 0.0000 \quad 0.6667 \quad 0.0000 \quad 4.6667 \quad 0.0000 \quad 0.0000 \quad 1.6667 \quad 0.0000)\ .$

Оптимальное значение целевой функции: 8.6667.

6. Задачи выпуклого программирования

Рассмотрим задачу выпуклого программирования

$$f(x) \to \min,\ \ g_i(x) \le 0,\ \ i = 1,...,5,\ x \ge 0, \tag{5.1}$$

где функции $f(x),\ g_i(x) \le 0,\ \ i = 1,...,5,$ заданы в виде

$$\begin{gathered} f(x) = 0.5x' B(0)' B(0)x + c(0)' x, \\ g_i(x) := 0.5x' B(i)' B(i)x + c(i)' x + \alpha(i), \mathrm{i} = 1,...,5,\ \ x \in R^8, \end{gathered} \tag{5.2}$$

$$B(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 5 & 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5000 & 2.5000 & 1.0000 & 0 & -2.5000 & -2.0000 \\ 0.5000 & 0.5000 & -0.5000 & 0 & 0.5000 & -0.5000 & -0.5000 & -0.5000 \\ 0.5000 & 0.5000 & 0.5000 & 0 & 0.5000 & 1.0000 & 2.5000 & 4.0000 \end{pmatrix},$$

$$B(2) = \begin{pmatrix} 1.0000 & 2.0000 & -1.5000 & 3.0000 & -2.5000 & 0 & -1.0000 & -0.5000 \\ -1.5000 & -0.5000 & -1.0000 & 2.5000 & 3.5000 & 3.0000 & -1.5000 & -0.5000 \\ 1.5000 & 2.5000 & 1.0000 & 1.0000 & 2.5000 & 1.5000 & 3.0000 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B(3) = \begin{pmatrix} 0.7500 & 0.5000 & -1.0000 & 0.2500 & 0.2500 & 0 & 0.2500 & 0.7500 \\ -1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 0.7500 & 0.7500 & 0.5000 & 1.0000 & -0.7500 \\ 0.5000 & -0.2500 & 0.5000 & 0.7500 & 0.5000 & 1.2500 & -0.7500 & -0.2500 \end{pmatrix},$$

$$B(4) = \begin{pmatrix} 1.5000 & -1.5000 & -1.5000 & 2.0000 & 1.5000 & 0 & 0.5000 & -1.5000 \\ -0.5000 & -2.5000 & -0.5000 & -1.0000 & -2.5000 & 2.5000 & 1.0000 & 2.0000 \\ -2.5000 & 1.0000 & -2.0000 & -1.5000 & -2.5000 & 0.5000 & 2.5000 & -2.5000 \end{pmatrix},$$

$$B(5)=\begin{pmatrix} 1.0000 & 0.2500 & -0.5000 & 1.2500 & 1.2500 & -0.5000 & 0.2500 & -0.7500 \\ -1.0000 & -0.7500 & -0.7500 & 0.5000 & -0.2500 & 1.2500 & 0.2500 & -0.5000 \\ 0 & 0.7500 & 0.5000 & -0.5000 & -1.0000 & 1.0000 & -1.0000 & 1.0000 \end{pmatrix},$$

$c(0)=(-1\quad -1\quad -1\quad -1\quad -2\quad 0\quad -2\quad -3),$
$c(1)=(\ 0\quad 60\quad 80\quad 0\quad 0\quad 0\quad 40\quad 0),$
$c(2)=(\ 2\quad 0\quad 3\quad 0\quad 2\quad 0\quad 3\quad 0),$
$c(3)=(\ 0\quad 0\quad 80\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0),$
$c(4)=(\ 0\quad -2\quad 1\quad 2\quad 0\quad 0\quad -2\quad 1),$
$c(5)=(\ -4\quad -2\quad 6\quad 0\quad 4\quad -2\quad 60\quad 2),$

$\alpha(1)=-51.7500,\quad \alpha(2)=-436.7500,\quad \alpha(3)=-33.7813$
$\alpha(4)=-303.3750\ ,\quad \alpha(5)=-41.7500,$

$x^*=(1\quad 0\quad 0\quad 2\quad 4\quad 2\quad 0\quad 0)\ ,$

$J_0(x^*)=\{\ 2\quad 3\quad 7\quad 8\},$

$f(x^*)=\ 369.5000,\quad g_i(x^*)=0, i\in I_0(x^*)=\{1,3,5\}, g_i(x^*)<0, i\in\{2,4\},$

$\dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x}=(\ 50\quad 120\quad -1\quad 194\quad 10\quad 136\quad 34\quad 97)',$

$\dfrac{\partial g_1(x^*)}{\partial x}=(3.0000\quad 63.0000\quad 86.0000\quad 22.5000\quad 12.0000\quad 3.7500\quad 28.0000\quad -0.7500)',$

$\dfrac{\partial g_3(x^*)}{\partial x}=(\quad 0.4375\quad 4.0000\quad 85.5000\quad 8.8125\quad 7.1875\quad 10.3750\quad 0.1875\quad -3.3125)',$

$\dfrac{\partial g_5(x^*)}{\partial x}=(2.0000\quad -3.5000\quad -0.3750\quad 11.6250\quad 16.0000\quad -6.8750\quad 65.2500\quad -7.3750)',$

$d_*=(-1,0,3,-1,-1,-1,0,0),\qquad d^*=(1,1,1,1,1,1,1,1)\,.$

Решаем задачу линейного программирования

$$\frac{\partial f'(x^*)}{\partial x}l\to\min$$
$$\frac{\partial g'_i(x^*)}{\partial x}l\le 0,\ \ i\in I_0(x^*)=\{1,3,5\},$$
$$d_*\le l\le d^*.$$

Эта задача имеет решение

$l^0=(\text{-}1.0000,\ \ 0.0000,\ 0.3136,\ -1.0000,\ -1.0000, -1.0000, 0.0000, 0.0000)\,,$

на котором значение целевой функции равно

$$\frac{\partial f'(x^*)}{\partial x} l^0 = \text{-}390.3136<0 \ .$$

Следовательно, вектор x^* не является оптимальным планом в задаче (5.1), (5.2). Этот план можно заменить на новый план с лучшим значением целевой функции

Новый план строим в виде

$$x(t) = x^* + t(l^0 + \alpha\Delta x), \ \Delta x = \bar{x} - x^* \ .$$

Здесь $\bar{x}$ --- такой допустимый план задачи (5.1), что имеют место строгие неравенства

$g_i(\bar{x}) < 0, \mathrm{i} = 1,...,5.$ В данном примере в качестве $\bar{x}$ можно взять вектор

$\bar{x} = (0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ 0 \ \ 0 \ 0 \ 0)$.

Число $\alpha > 0$ подберем так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\partial f'(x^*)}{\partial x} l^0 + \alpha \frac{\partial f'(x^*)}{\partial x} \Delta x < 0 \ .$$

Число $t > 0$ подберем так, чтобы выполнялись неравенства

$$f(x(t)) < f(x^*), \ g_i(x(t)) \le 0, \ \mathrm{i} = 1,...,5, \ x(t) \ge 0.$$

Положим $t = 0.5, \ \ \alpha = 1.$

Тогда

$x(t) = (0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.1568 \quad 0.5000 \quad 1.5000 \quad 0.5000 \quad 0.0000 \quad 0.0000)$,

$f(x(t)) = 18.7182 < f(x^*) = \ 369.5000$,

$g_1(x(t))$=-34.2350<0, $g_2(x(t)) =$ -386.1373 <0,
$g_3(x(t)) =$ -17.6890 <, $g_4(x(t)) =$ -282.5222, $g_5(x(t)) =$ -32.6918<0.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Рассмотрим задачу (5.1), в которой функции имеют вид (5.2) со следующими значениями данных

$$B(0)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 5 & 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B(1)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5000 & 2.5000 & 1.0000 & 0 & -2.5000 & -2.0000 \\ 0.5000 & 0.5000 & -0.5000 & 0 & 0.5000 & -0.5000 & -0.5000 & -0.5000 \\ 0.5000 & 0.5000 & 0.5000 & 0 & 0.5000 & 1.0000 & 2.5000 & 4.0000 \end{pmatrix},$$

$$B(2)=\begin{pmatrix} 1.0000 & 2.0000 & -1.5000 & 3.0000 & -2.5000 & 0 & -1.0000 & -0.5000 \\ -1.5000 & -0.5000 & -1.0000 & -2.5000 & 3.5000 & -3.0000 & -1.5000 & -0.5000 \\ 1.5000 & 2.5000 & -1.0000 & 1.0000 & 2.5000 & 1.5000 & 3.0000 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B(3)=\begin{pmatrix} 0.7500 & 0.5000 & -1.0000 & 0.2500 & 0.2500 & 0 & 0.2500 & 0.7500 \\ -1.0000 & 1.0000 & 4.0000 & 0.7500 & 0.7500 & 0.5000 & 7.0000 & -0.7500 \\ 0.5000 & -0.2500 & 0.5000 & 0.7500 & 0.5000 & 1.2500 & -0.7500 & -0.2500 \end{pmatrix},$$

$$B(4)=\begin{pmatrix} 1.5000 & -1.5000 & -1.5000 & 2.0000 & 1.5000 & 0 & 0.5000 & -1.5000 \\ -0.5000 & -2.5000 & -0.5000 & -5.0000 & -2.5000 & 3.5000 & 1.0000 & 2.0000 \\ -2.5000 & 1.0000 & -2.0000 & -1.5000 & -2.5000 & 0.5000 & 8.5000 & -2.5000 \end{pmatrix},$$

$$B(5)=\begin{pmatrix} 1.0000 & 0.2500 & -0.5000 & 1.2500 & 1.2500 & -0.5000 & 0.2500 & -0.7500 \\ -1.0000 & -0.7500 & -0.7500 & 0.5000 & -0.2500 & 1.2500 & 0.2500 & -0.5000 \\ 0 & 0.7500 & 0.5000 & -0.5000 & -1.0000 & 1.0000 & -1.0000 & 1.0000 \end{pmatrix},$$

c(0) =(-1 -1 -1 -1 -2 0 -2 -3),
c(1)=(0 60 80 0 0 0 40 0),
c(2)=(2 0 3 0 2 0 3 0),
c(3) =(0 0 80 0 0 0 0 0),
c(4) =(0 -2 1 2 0 0 -2 1),
c(5)=(-4 -2 6 0 4 -2 60 2),

$\alpha(1)$= -687.1250, $\alpha(2)$= -666.6250, $\alpha(3)$= -349.5938,
$\alpha(4)$= -254.6250, $\alpha(5)$= -45.1563.

Требуется проверить, является ли план

$$x^* = (\,0 \quad 8 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \quad 0)$$

оптимальным в этой задаче. В случае его неоптимальности требуется построить новый план с лучшим значением целевой функции.

В качестве вектора $\bar{x}$, удовлетворяющего соотношениям $\bar{x} \ge 0$, $g_i(\bar{x}) < 0, \mathrm{i} = 1,...,5$, можно взять вектор $\bar{x} = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ 0\ \ 0\ 0\ 0)$.

7. Задачи нелинейного программирования

Пример 1. Применяя необходимые и достаточные условия оптимальности, решить задачу на безусловный экстремум:

$$f(x) = x_1 x_2 + 50 / x_1 + 20 / x_2 \to \min .$$

Решение. Согласно необходимому условию оптимальности первого порядка на оптимальном плане должны выполняться условия стационарности $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x} = 0$, т.е.

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = x_2 - 50 / x_1^2 = 0, \ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = x_1 - 20 / x_2^2 = 0.$$

Данная система имеет единственное решение

$x^0 := (x_1^0 = 5,\ \ x_2^0 = 2).$ Следовательно, вектор x^0 --- единственный вектор, удовлетворяющий необходимому условию оптимальности первого порядка, и только он может быть (но может и не быть) решением нашей задачи.

Проверим выполнение условий оптимальности второго порядка на векторе x^0. Для этого подсчитаем матрицу вторых производных функции $f(x)$

$$\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 / (x_1^0)^3 & 1 \\ 1 & 40 / (x_2^0)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\begin{pmatrix} 4/5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ является строго положительно определенной. Следовательно, на векторе x^0 выполняется достаточное условие второго порядка локальной оптимальности. Значит, вектор x^0 является точкой **локального** минимума рассматриваемой функции.

Отметим, что вектор x^0 не является точкой **глобального** минимума рассматриваемой функции.

Ответ: вектор $x^0=(x_1^0=5,\ \ x_2^0=2)$ --- точка **локального** минимума рассматриваемой функции.

Пример 2. Проверить выполнение необходимых и достаточных условий оптимальности для плана $x^0=(x_1^0=6, x_2^0=14, x_3^0=0)$ в задаче

$$f(x)=\frac{x_1-x_2-x_3}{2x_1+x_3+1}\to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1+x_2+3x_3=8 \\ 2x_1-x_2-x_3=-2 \\ x_1\ge 0, \quad x_2\ge 0, \quad x_3\ge 0 \end{cases}$$

Решение. Перепишем ограничения задачи в виде

$$\begin{cases} g_1(x):=-x_1+x_2+3x_3-8=0, \\ g_2(x):=2x_1-x_2-x_3+2=0, \\ g_3(x):=-x_1\le 0, \\ g_4(x):=-x_2\le 0, \\ g_5(x):=-x_3\le 0. \end{cases}$$

Ограничения задачи заданы двумя условиями-равенствами и тремя условиями-неравенствами.

Подсчитаем

$$g_1(x^0):=-6+14+0-8=0,$$
$$g_2(x^0):=12-14-0+2=0,$$
$$g_3(x^0):=-6<0,$$
$$g_4(x^0):=-14<0,$$
$$g_5(x^0):=0=0.$$

Следовательно, вектор x^0 является допустимым планом нашей задачи. Из ограничений-неравенств только последнее ограничения является активным: $I_a(x^0)=\{i\in\{3,4,5\}: g_i(x^0)=0\}=\{5\}$.

Подсчитаем

$$\frac{\partial g_1(x^0)}{\partial x}=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix},\ \ \frac{\partial g_2(x^0)}{\partial x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix},\ \ \frac{\partial g_5(x^0)}{\partial x}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Эти векторы являются линейно независимыми, следовательно, план x^0 является обыкновенным.

Согласно условиям оптимальности первого порядка для оптимальности плана x^0 в данной задаче необходимо, чтобы существовали такие числа

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0, \lambda_5 \geq 0,$

такие, что имеет место равенство

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x} + \sum_{i=1}^{5} \lambda_i \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x} = 0. \tag{6.1}$$

Подсчитаем

$$\frac{\partial f(x\ )}{\partial x} = \begin{pmatrix} \dfrac{(2x_1 + x_3 + 1) - (x_1 - x_2 - x_3)2}{(2x_1 + x_3 + 1)^2} \\ \dfrac{-(2x_1 + x_3 + 1)}{(2x_1 + x_3 + 1)^2} \\ \dfrac{-(2x_1 + x_3 + 1) - (x_1 - x_2 - x_3)}{(2x_1 + x_3 + 1)^2} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f(x^0)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \dfrac{29}{(13)^2} \\ \dfrac{-1}{13} \\ \dfrac{-5}{13^2} \end{pmatrix}.$$

Условие (6.1) принимает вид

$$\begin{gathered} \frac{29}{(13)^2} - \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \\ \frac{-1}{13} + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ \frac{-5}{13^2} + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_5 = 0. \end{gathered} \tag{6.2}$$

Система (6.2) имеет единственное решение

$$\lambda_1 = -0.0178, \quad \lambda_2 = -0.0947, \quad \lambda_5 = 0.0118 > 0.$$

Сследовательно, вектор x^0 удовлетворяет необходимому условию оптимальности первого порядка с вектором множителей Лагранжа

$\lambda^0 = (\lambda_1 = -0.0178, \quad \lambda_2 = -0.0947, \ \lambda_3 = 0, \ \ \lambda_4 = 0, \ \lambda_5 = 0.0118).$

Чтобы проверить достаточное условие второго порядка для локальной оптимальности вектора x^0 надо показать, что

$$l'\frac{\partial^2 L(x^0,\lambda^0)}{\partial x^2} l > 0 \quad \text{для любого } l \in K \setminus 0, \qquad (6.3)$$

где $L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{5} g_i(x), \quad K = \{l \in R^3 : l'\frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x} = 0, \mathrm{i} = 1,2,5\}.$

В нашем примере множество K состоит только из одного вектора $l = (0,0,0)'$, следовательно, условие (6.3) можно считать выполненным.

Ответ: вектор $x^0 = (x_1^0 = 6, x_2^0 = 14, x_3^0 = 0)$ является локально оптимальным планом данной задачи.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1. Проверить выполнение необходимых и достаточных условий оптимальности для планов x^0=(0,1) и x^{00}=(1,1) в задаче

$$f(x) = \exp(x_1 - x_2) - x_1 - x_2 \to \min,$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 2. Проверить выполнение необходимых и достаточных условий оптимальности для плана x^0=(3, 9) в задаче

$$f(x) = x_1^2 - 8x_1 + x_2^2 \to \min$$

при ограничениях

$$x_1^2 + (x_2 - 9)^2 \le 9.$$

Задача 3. Проверить выполнение необходимых и достаточных условий оптимальности для плана x^0=(6√10/5,2√10/5) в задаче

$$f(x) = 3x_1 + x_2 \to extr$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 x_2 \ge 2, \\ x_1^2 + x_2^2 \le 16. \end{cases}$$

Задача 4. Проверить выполнение необходимых и достаточных условий оптимальности для плана $x^0=(0,1,0)$ в задаче

$$f(x) = 3x_2^2 - 11x_1 - 3x_2 - x_3 \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 7 \le 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2, \\ x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 5. Проверить выполнение необходимых и достаточных условий оптимальности для плана $x^0=(3;4)$ в задаче

$$f(x) = 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 5)^2 \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_2 - x_2 + 1 \le 0, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - x_2 \le 0. \end{cases}$$

8. Задачи оптимального управления

Пример 1. Решить следующую задачу оптимального управления. Найти функцию управления $u(t), t \in [0,5]$, такую, что $|u(t)| \leq 1, t \in [0,5]$, и соответствующая траектория $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ динамической системы

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t),$$

$$\dot{x}_3(t) = -x_2(t) + u(t),$$

с начальным условием $x_1(0) = 1,\ x_2(0) = -1,\ x_3(0) = 3$ в терминальный момент времени $t = 5$ удовлетворяет условиям

$$x_1(5) + x_3(5) = 0.3916;\ x_1(5) - x_2(5) = -0.3916$$

и функция

$$\frac{1}{2}(x_1^2(5) + x_2^2(5) + x_3^2(5)) + x_2(5)$$

принимает минимальное значение.

Данную задачу можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}x'(t_*)Dx(t_*) + c'x(t_*) \to \min,$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t),\ x(t_0) = x^*, Hx(t_*) = g, \tag{8.1}$$

$$|u(t)| \leq 1, t \in [t_0, t_*],$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, $t_0 = 0$, $t_* = 5$,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 0.3916 \\ -0.3916 \end{pmatrix}.$$

Для решения этой задачи будем использовать метод сведения к задаче нелинейного программирования, описанный в курсе лекций (см. раздел 7).

Для этого выберем параметр $N > 0$, например, $N = 30$, и разобьем отрезок управления $[t_0, t_*]$ точками

$$t_j = t_0 + jh = jh, i = 1, ..., N, \ h = (t_* - t_0)/N = 1/6,$$

на N отрезков $[t_{j-1}, t_j], j = 1, ..., N$.

Построим векторы $B_0 \in \mathbb{R}^3$, $B_j \in \mathbb{R}^3$, $j = 1, ..., N$, и матрицу $B \in \mathbb{R}^{3\times N}$, осуществив следующие построения.

A) Проинтегрируем систему дифференциальных уравнений

$$\dot{w}(t) = Aw(t), \ w(t_0) = x_*, t \in [t_0, t_*], \tag{8.2}$$

и найдем вектор $w(t_*)$.

Численную процедуру интегрирования можно осуществить с помощью любого пакета прикладных программ, например, Matlab. В данном примере вектор $w(t_*)$ имеет следующее значение $w(t_*) = (2.2015, 2.5931, -1.8099)'$.

B) Проинтегрируем систему дифференциальных уравнений

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + b, \ y(t_0) = 0, t \in [t_0, t_1] = [0, 1/6], \tag{8.3}$$

и найдем вектор $y(t_1) \in \mathbb{R}^3$.

В данном примере вектор $y(t_1)$ имеет следующее значение $y(t_1) = (0.0007, 0.0139, 0.1659)'$.

C) Используя найденный вектор $y(t_1)$, проинтегрируем систему дифференциальных уравнений

$$\dot{z}(t) = Az(t) + b, \ z(t_1) = y(t_1), t \in [t_1, t_N], \tag{8.4}$$

и найдем значения $z(t_j), j = 1, ..., N$, решения данной системы в точках t_j, $j = 1, ..., N$.

Численную процедуру интегрирования систем (8.3) и (8.4) также можно осуществить с помощью любого пакета прикладных программ, например, Matlab.

D) Положим

$$B_0 = w(t_*), \quad B_j = z(t_{N-j+1}), \ j = 1, ..., N, \ B = (B_j, j = 1, ..., N).$$

Для данного примера столбцы матрицы B имеют вид

$$(B_j, j = 1,\dots,15) = \begin{pmatrix} -0.0978 & -0.0856 & -0.0710 & -0.0544 & -0.0362 & -0.0169 & 0.0029 & 0.0227 & 0.0420 & 0.0602 & 0.0770 & 0.0918 & 0.1042 & 0.1140 & 0.1210 \\ -0.1630 & -0.1664 & -0.1651 & -0.1592 & -0.1490 & -0.1346 & -0.1165 & -0.0951 & -0.0712 & -0.0452 & -0.0180 & 0.0097 & 0.0371 & 0.0635 & 0.0882 \\ 0.0338 & 0.0063 & -0.0214 & -0.0485 & -0.0743 & -0.0979 & -0.1189 & -0.1366 & -0.1505 & -0.1602 & -0.1655 & -0.1662 & -0.1623 & -0.1539 & -0.1412 \end{pmatrix}$$

$$(B_j, j = 15,\dots,30) = \begin{pmatrix} 0.1249 & 0.1258 & 0.1237 & 0.1188 & 0.1112 & 0.1014 & 0.0897 & 0.0766 & 0.0628 & 0.0488 & 0.0352 & 0.0229 & 0.0126 & 0.0049 & 0.0007 \\ 0.1104 & 0.1295 & 0.1451 & 0.1566 & 0.1638 & 0.1665 & 0.1645 & 0.1580 & 0.1471 & 0.1321 & 0.1135 & 0.0917 & 0.0674 & 0.0412 & 0.0139 \\ 0.1246 & -0.1046 & -0.0816 & -0.0564 & -0.0297 & -0.0021 & 0.0256 & 0.0525 & 0.0780 & 0.1013 & 0.1218 & 0.1389 & 0.1522 & 0.1613 & 0.1659 \end{pmatrix}$$

Введем вектор искомых параметров $U = (u_j, j = 1, ..., N)$. Тогда терминальное состояние $x(t_*)$ нашей динамической системы может быть аппроксимировано следующим образом:

$$x(t_*) = B_0 + BU.$$

С учетом этой аппроксимации наша задача оптимального управления может быть заменена следующей: найти вектор параметров $U = (u_j, j = 1, ..., N)$, такой что

$$\frac{1}{2}(B_0 + BU)'D(B_0 + BU) + c'(B_0 + BU) \to \min, \tag{8.5}$$

$$H(B_0 + BU) = g, \quad -1 \le u_j \le 1, j = 1, ..., N.$$

Задача (8.5) — это задача квадратичного программирования, которая может быть записана в виде

$$\frac{1}{2}U'\bar{D}U + \bar{c}'U \to \min_U,$$

$$\bar{A}U = \bar{b}, \quad -1 \le u_j \le 1, j = 1, ..., N,$$

где $U = (u_j, j = 1, ..., N)$ — вектор искомых параметров,

$$\bar{D} = B'DB \in \mathbb{R}^{N\times N}, \bar{A} = HB \in \mathbb{R}^{2\times N}, \bar{c} = B'(c + DB_0) \in \mathbb{R}^N, \bar{b} = g - HB_0 \in \mathbb{R}^N \tag{8.6}$$

— исходные данные задачи квадратичного программирования.

Решим задачу квадратичного программирования методом, описанным в курсе лекций (см. раздел 3).

В результате получим следующие оптимальные значения искомых параметров $U^0 = (u^0_j, j = 1, ..., N)$:

$$(\mathrm{u}^0_j, j = 1,\dots,15) = (1.0\ \ 1.0\ \ 1.0\ \ 1.0\ \ 1.0\ \ -0.5789\ \ -1.0\ \ -1.0\ \ -1.0\ \ -1.0\ \ -1.0\ \ -1.0\ \ -1.0\ \ -1.00\ \ -1.0\ )$$

$$(u^0_j, j = 16,\dots,30) = (-1.0\ \ -1.0\ \ -1.0\ \ -1.0\ \ -1.0\ \ -1.0\ \ -1.0\ \ -1.0\ \ -1.0\ \ -1.0\ \ -0.9825\ \ 1.0\ \ 1.00\ \ 1.0\ \ 1.0)$$

Приближенное решение исходной задачи оптимального управления строим по правилу

$$\tilde{u}^0(t) = u_j^0,\ t \in [t_{j-1}, t_j],\ j = 1, ..., N.$$

график функции $\tilde{u}^0(t), t \in [t_0, t_*]$, приведен на Рисунке 8.1.

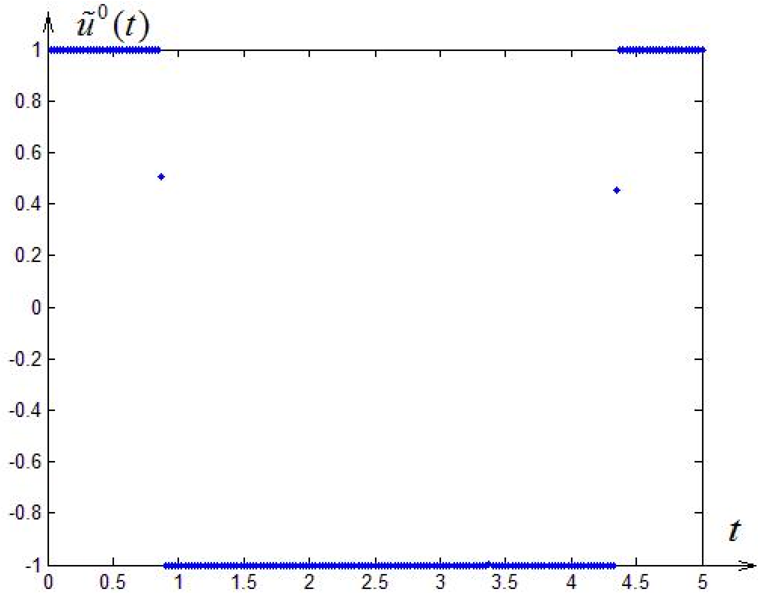

Рисунок 8.1

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задание 1. Решить задачу оптимального управления вида (8.1) со следующими данными

$$t_0 = 0,\ t_* = 6,$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 17 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c = 0.5 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, x^* = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, g = -6.5139.$$

Ответ: график функции $\tilde{u}^0(t), t \in [t_0, t_*]$, приведен на Рисунке 8.2.

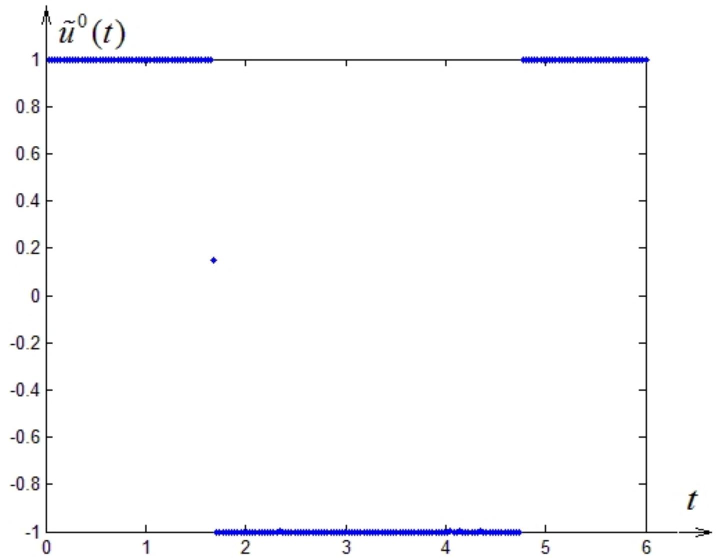

Рисунок 8.2

Задание 2. Решить задачу оптимального управления вида (8.1) со следующими данными

$$t_0 = 0,\ t_* = 10,$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 17 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c = 0.5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, x^* = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} -198.0 \\ -192.0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: график функции $\tilde{u}^0(t), t \in [t_0, t_*]$, приведен на Рисунке 8.3.

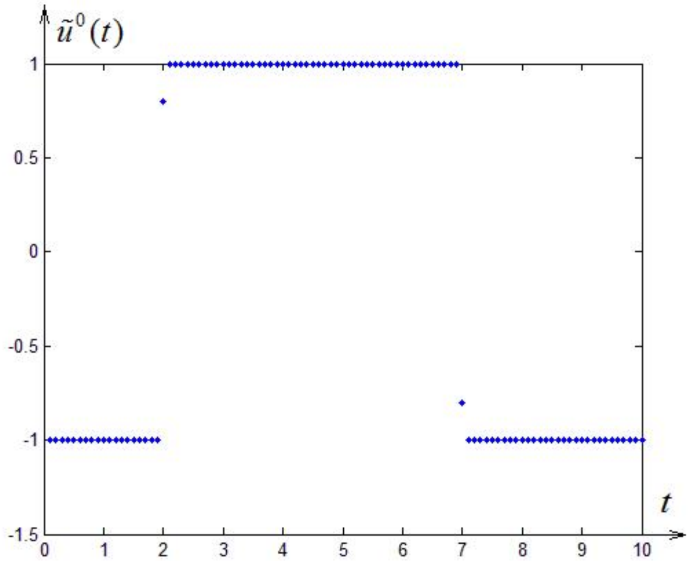

Рисунок 8.3