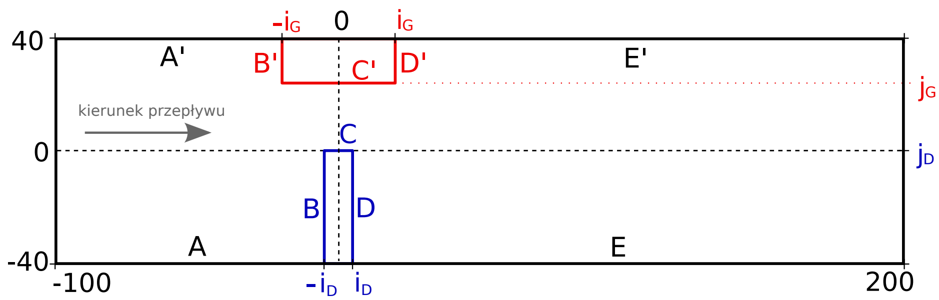
Przepływ stacjonarny cieczy lepkiej nieściśliwej *

9 maja 2013

Lepka nieściśliwa ciecz płynie przez rurę. Do rury wstawiamy dwie przeszkody (patrz rys. 1). Znajdziemy linie strumienia cieczy (styczne do prędkości w każdym punkcie cieczy) dla danego gradientu ciśnienia podanego na rurze.



Rysunek 1: Rura z przegrodami. Początek układu współrzędnych znajduje się na środku odcinka C. Liczby podają numer punktu siatki na rogach pudła obliczeniowego. Przegroda dolna mieści się na punktach od $-i_D$ do i_D siatki w kierunku x oraz na punktach od -40 do j_D w kierunku y, natomiast górna: $[-i_G, i_G] \times [j_G, 40]$.

Rozkład prędkości $u(x,y), v(x,y)$ (gdzie u to prędkość cieczy w kierunku x, a v - w kierunku y) i ciśnienia p dla cieczy o lepkości μ i stałej gęstości ρ (przyjmiemy $\mu = 1, \rho = 1$) spełniają tzw. stacjonarne równania Naviera-Stokesa. Będziemy rozwiązywać to równanie w formie wyrażonej przez funkcję strumienia $\psi(x,y)$ oraz wirowość $\zeta(x,y)$. Funkcja strumienia pozwala wyliczyć pole prędkości:

$$u(x,y) = \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y},\ v(x,y) = -\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x}. \tag{1}$$

Wirowość $\zeta(x,y)$ jest zdefiniowana jako rotacja pola prędkości, czyli

*Laboratorium z inżynierskich metod numerycznych, Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej AGH 2012/2013. Bartłomiej Szafran (bszafran@agh.edu.pl), Elżbieta Wach (wach@fatcat.ftj.agh.edu.pl), Dariusz Żebrowski (zebrowski@fatcat.ftj.agh.edu.pl)

$\zeta(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$. Przepływ opisują dwa równania

$$\nabla^2 \psi(x,y) = \zeta(x,y) \tag{2}$$

oraz

$$\frac{\mu}{\rho}\nabla^2 \zeta(x,y) = \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y}\frac{\partial \zeta(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x}\frac{\partial \zeta(x,y)}{\partial y}. \tag{3}$$

Równania (2), (3) rozwiążemy przy pomocy przepisu relaksacyjnego. W każdym kroku będziemy poprawiać rozwiązania na $\zeta(i,j)$ i $\psi(i,j)$:

$$\begin{aligned}\zeta(i,j) \quad := \quad & \frac{\zeta(i+1,j)+\zeta(i-1,j)+\zeta(i,j-1)+\zeta(i,j+1)}{4} \\ & -\frac{1}{16}\left\{[\psi(i,j+1)-\psi(i,j-1)]\,[\zeta(i+1,j)-\zeta(i-1,j)]\right. \\ & \left.\quad - [\psi(i+1,j)-\psi(i-1,j)]\,[\zeta(i,j+1)-\zeta(i,j-1)]\right\} \end{aligned} \tag{4}$$

oraz

$$\psi(i,j) := \frac{\psi(i+1,j)+\psi(i-1,j)+\psi(i,j-1)+\psi(i,j+1)-\zeta(i,j)dx^2}{4} \tag{5}$$

($dx = dy$ jest krokiem siatki, przyjmiemy $dx = 0.01$).

Rozwiązania będziemy poszukiwać na siatce $[-100, 200] \times [-40, 40]$ punktów (301 punktów w kierunku x, 81 punktów w kierunku y). Punkt siatki (i,j) odpowiada współrzędnym $(x,y) = (i \cdot dx, j \cdot dx)$].

Zadanie 1: ***Przepływ w rurze bez zastawki (przepływ Poiseuille).*** Bez zastawki brzegiem jest cały prostokąt przedstawiony na rysunku, a równania posiadają rozwiązania analityczne. Ze względu na symetrię prędkość pionowa znika wszędzie: $v(x,y) = 0$, a prędkość pozioma zależy tylko od y i dana jest wzorem analitycznym

$$u_0(y) = \frac{Q}{2\mu}(y-y_1)(y-y_2), \tag{6}$$

gdzie Q jest gradientem ciśnienia $Q = \frac{\partial P}{\partial x}$, y_1 i y_2 to położenie dolnego i górnego końca rury (tutaj: $y_2 = -y_1 = 0.4$, co odpowiada indeksom $i = -40$ dla dolnego y_1 oraz $i = 40$ dla górnego y_2). Dla takiego rozkładu prędkości funkcja strumienia i wirowość dane są odpowiednio przez

$$\zeta_0(x,y) = \frac{Q}{2\mu}(2y - y_1 - y_2). \tag{7}$$

oraz

$$\psi_0(x,y) = \frac{Q}{2\mu}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2}(y_1+y_2) + y_1 y_2 y\right) \tag{8}$$

Na wszystkich brzegach pudła (góra, dół, lewy i prawy bok) stosujemy warunki brzegowe, korzystając z powyższych wzorów analitycznych: (7) i (8). Przyjmujemy $Q = -1$. Wewnątrz pudła startujemy od $\psi(x,y) = 0$ oraz $\zeta(x,y) = 0$.

Przeiterować równania (4) i (5) aż wartości funkcji strumienia i wirowości w punkcie o współrzędnych ($x = 50 \cdot dx, y = 0 \cdot dx$) z iteracji na iterację zaczną się zmieniać o mniej niż $tol = 10^{-7}$ (uwaga: aby sprawdzać ten warunek, należy odczekać np. 100 iteracji, ponieważ w początkowych iteracjach wartości się prawie nie zmieniają). Po uzyskaniu zbieżności: narysować funkcję strumienia oraz wirowości na przekrojach $x = 0$ oraz $x = 0.7$. Porównać z rozwiązaniem analitycznym (7), (8) (**25 pkt**). Wyliczyć i narysować $u(y)$ dla $x = 0$, dyskretyzując równanie $u(x,y) = \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}$ przy pomocy ilorazu różnicowego. Obliczoną prędkość u porównać z rozwiązaniem analitycznym (6) (**25 pkt**).

Zadanie 2: ***Przepływ w rurze z zastawkami.*** Wstawiamy obie przegrody zgodnie z rysunkiem 1. Górny i dolny brzeg są liniami strumienia cieczy (brzeg jest dla niej nieprzepuszczalny - nie ma składowej prędkości normalnej do brzegu).

Na cały dolny brzeg łącznie z obrysem dolnej zastawki przyjmujemy wartość $\psi_0(x, y = y_1)$. Na górnym brzegu i obrysie górnej zastawki analogicznie: $\psi_0(x, y = y_2)$.

Warunki na wirowość na górnym i dolnym brzegu wynikają ze znikania obydwu składowych prędkości oraz pochodnej stycznej składowej prędkości normalnej do brzegu. W przeciwieństwie do warunków na ψ, warunki na ζ nie są ustalone raz na zawsze. Zależą od ψ, należy je więc wyliczyć od nowa na początku każdej iteracji. Zgodnie z tym: na górnym brzegu oprócz zastawki - tzn. na odcinkach A', E' - przyjmujemy:

$$\zeta(i, 40) = \frac{2(\psi(i, 39) - \psi(i, 40))}{dx^2}, \tag{9}$$

natomiast na dolnym (odcinki A i E):

$$\zeta(i, -40) = \frac{2(\psi(i, -39) - \psi(i, -40))}{dx^2}. \tag{10}$$

Na przeszkodach – linie B i D oraz B' i D' – odpowiednio:

$$\zeta(-i_D, j) = \frac{2(\psi(-i_D - 1, j) - \psi(-i_D, j))}{dx^2} \tag{11}$$

$$\zeta(-i_G, j) = \frac{2(\psi(-i_G - 1, j) - \psi(-i_G, j))}{dx^2} \tag{12}$$

oraz

$$\zeta(i_D, j) = \frac{2(\psi(i_D + 1, j) - \psi(i_D, j))}{dx^2} \tag{13}$$

$$\zeta(i_G, j) = \frac{2(\psi(i_G + 1, j) - \psi(i_G, j))}{dx^2}. \tag{14}$$

Na górnym końcu dolnej przegrody (odcinek C)

$$\zeta(i, j_D) = \frac{2(\psi(i, j_D + 1) - \psi(i, j_D))}{dx^2} \tag{15}$$

na dolnym brzegu górnej przeszkody (odcinek C'):

$$\zeta(i, j_G) = \frac{2(\psi(i, j_G - 1) - \psi(i, j_G))}{dx^2}. \tag{16}$$

Na kantach przegród (styk B/C, D/C oraz B'/C', D'/C') rozsądnie jest przyjąć średnią arytmetyczną warunków brzegowych danych dla odpowiednich odcinków, np. w punkcie łączącym odcinki B/C, tj. $(-i_D, j_D)$, przyjmujemy średnią z wartości obliczonej dla tego punktu z punktu widzenia odcinka B - wzór (11) - i odcinka C: wzór (15). Start dla pierwszej iteracji oraz warunki lewego i prawego brzegu wstawiamy z rozwiązań analitycznych przepływu Poiseuille: (7), (8).

Zadania do wykonania: przyjąć $i_D = 5$, $j_D = 0$, $i_G = 20$, $j_G = 20$. Rozwiązać równania (2) i (3) zgodnie z dyskretyzacją (4), (5) dla pięciu przypadków gradientu ciśnienia: $Q = -1, -100, -200, -350$ oraz -500. Narysować linie strumienia $\psi = const$ (**25 pkt**) oraz rozkład prędkości poziomej $u(x, y)$ i pionowej $v(x, y)$ dla wszystkich Q (**25 pkt**).

Uwaga: obliczeń według schematu relaksacyjnego dokonujemy tylko wewnątrz siatki obliczeniowej, pomijając brzegi prostokąta siatki, brzegi obu przeszkód, jak również ich wnętrza.