



浙江大學
ZHEJIANG UNIVERSITY



概率统计复习



(一) 概率

●频率: $f_n(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{A \text{发生次数}}{\text{总次数}}$

●概率:

1.非负性: $P(A) \geq 0$;

2.规范性: $P(S) = 1$;

3.可列可加性: A_1, A_2, \dots 两两互斥, 即

$$A_i A_j = \emptyset, i \neq j, \text{ 则 } P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$



性质： $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j)$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

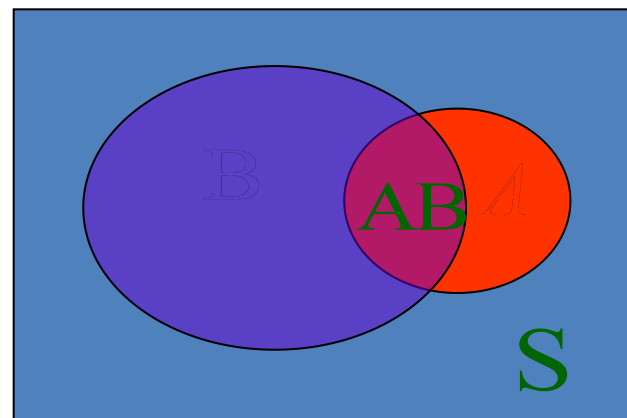


条件概率： $P(A) > 0$ 时，定义 $P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$

B 在 A 中所占的概率比例

注： $P(\cdot | A)$ 也是一个概率

$$\Rightarrow P(\bar{B} | A) = 1 - P(B | A)$$



$$P(B \cup C | A) = P(B | A) + P(C | A) - P(BC | A)$$



乘法公式

当下面的条件概率都有意义时：

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B | A)$$

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) =$$

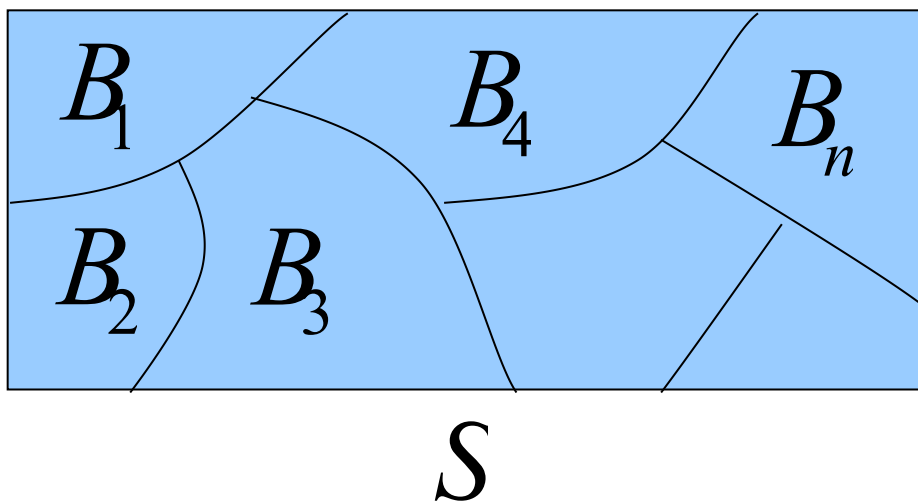
$$P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 A_2) \cdots P(A_n | A_1 \cdots A_{n-1})$$



定义: 称 B_1, B_2, \dots, B_n 为 S 的一个**划分**, 若

(i) **不漏** $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S$,

(ii) **不重** $B_i B_j = \emptyset, i \neq j$.





设 B_1, B_2, \dots, B_n 为 S 的一个划分且 $P(B_i) > 0$. 则有

全概率公式:

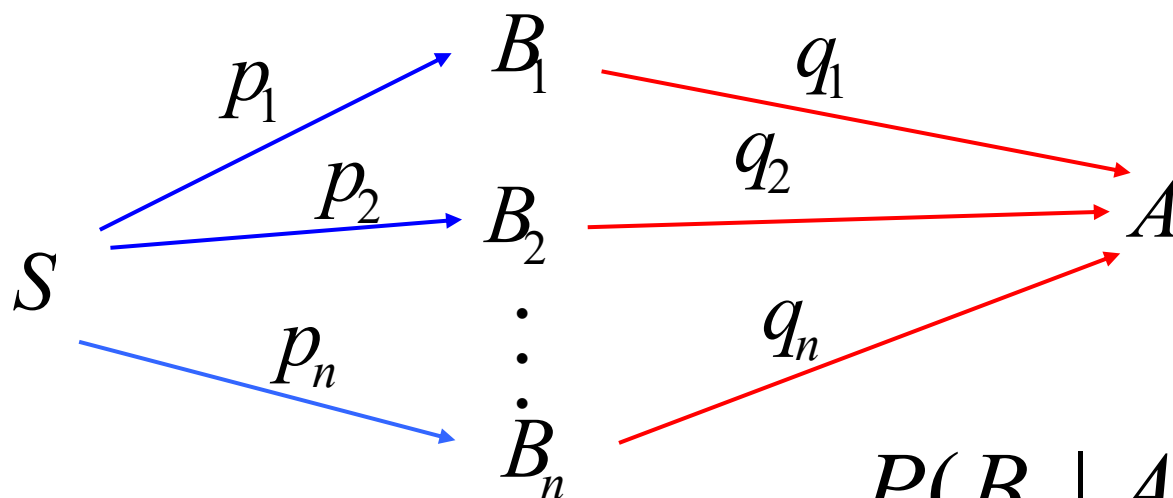
$$P(A) = \sum_{j=1}^n P(B_j) \cdot P(A | B_j)$$

对 $P(A) > 0$ 有 Bayes 公式:

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A | B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A | B_j)}$$



设 $P(B_j) = p_j, P(A | B_j) = q_j, j = 1, 2, \dots, n.$



则
$$P(A) = \sum_{j=1}^n p_j q_j$$

$$P(B_i | A) = \frac{p_i q_i}{\sum_{j=1}^n p_j q_j}$$



(二) 随机变量

若随机变量 X 的取值为有限个或可数个, 则称 X 为**离散型随机变量**. 分布律为:

X	x_1	x_2	...	x_k	...
P	p_1	p_2	...	p_k	...

或 $P(X=x_k)=p_k, \quad k=1,2,\cdots$

分布律的性质: $p_k \geq 0, \sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$



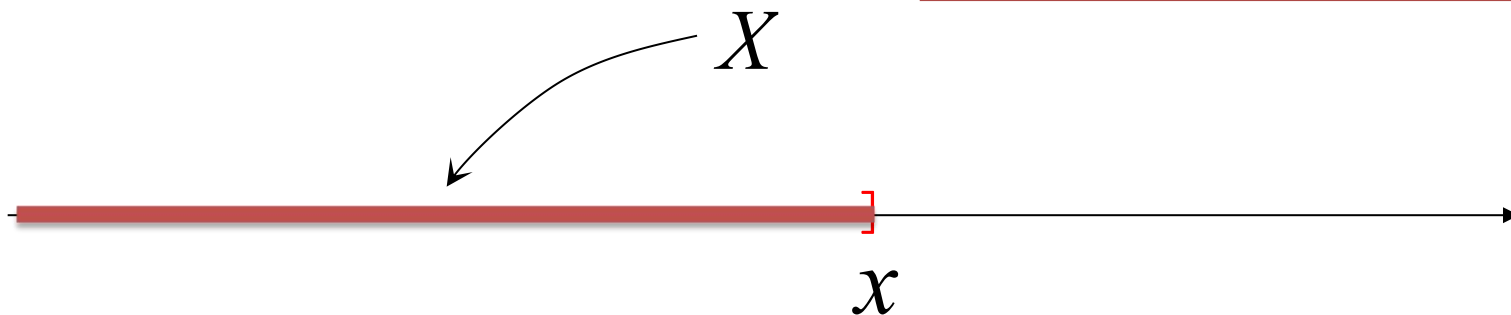
定义: 随机变量 X , 对任意实数 x , 称函数

$$F(x) = P(X \leq x)$$

为 X 的概率分布函数, 简称**分布函数**.

$F(x)$ 的几何意义

$$F(x) = P(X \in (-\infty, x])$$





$F(x)$ 的性质:

(1) $0 \leq F(x) \leq 1$;

(2) $F(x)$ 单调不减;

对 $x_1 < x_2$, 有 $0 \leq P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

(3) $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$;

(4) $F(x)$ 是右连续函数, 即 $F(x+0) = F(x)$.

$$F(x) - F(x-0) = P(X = x)$$



一般地，离散型随机变量的分布函数为阶梯函数。

如果分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots$

那么分布函数为 $F(x) = \sum_{x_k \leq x} p_k$.

$F(x)$ 在 $x = x_k, (k = 1, 2, \dots)$ 处有跳跃，

其跳跃值为 $p_k = P\{X = x_k\}$.



定义：对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$, 若存在非负的函数 $f(x)$, 使对于任意实数 x 有:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

则称 X 为**连续型随机变量**, 其中 $f(x)$ 称为 X 的**概率密度函数**, 简称**概率密度**.



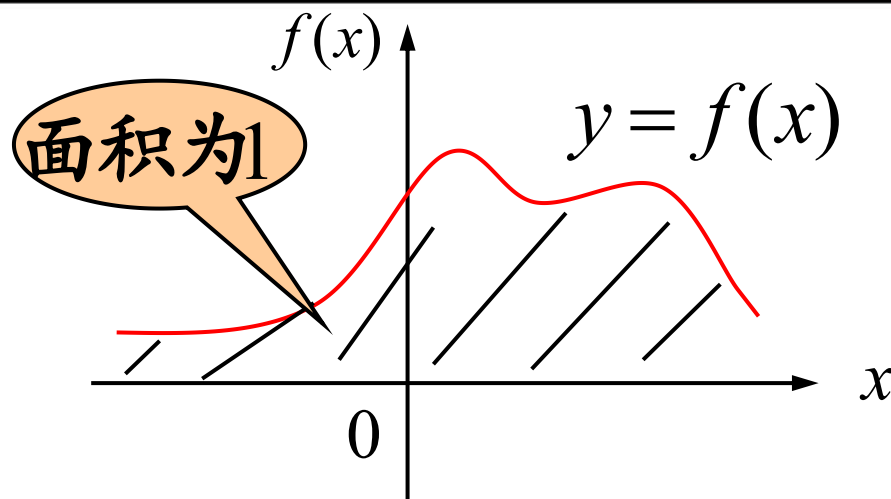
$f(x)$ 的性质:

(1) $f(x) \geq 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$;

(3) $P(X \in D) = \int_D f(x) dx$, 任意 $D \subset R$.

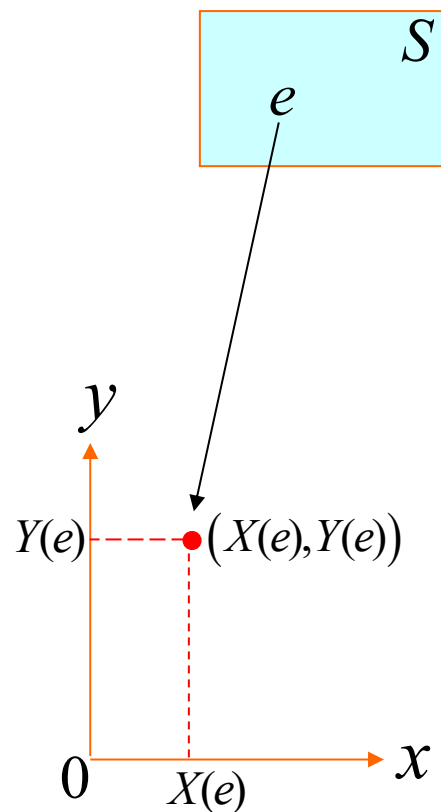
(4) 在 $f(x)$ 连续点 x , $F'(x) = f(x)$.





(三) 二元随机变量

定义：设 E 是一个随机试验，样本空间 $S=\{e\}$ ；设 $X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量，由它们构成的向量 (X,Y) 称为**二维随机向量**或**二元随机变量**。

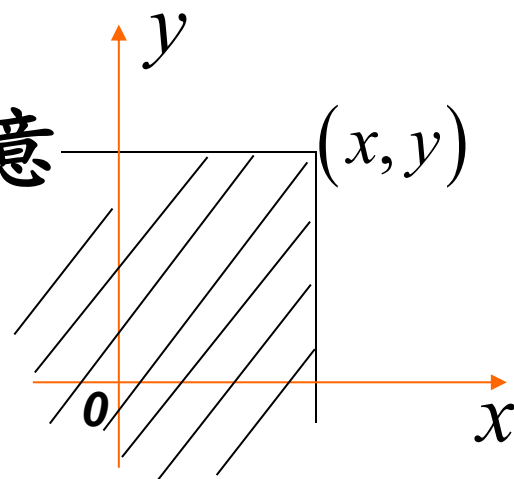




联合分布函数

定义：设 (X, Y) 是二元随机变量，对于任意

实数 x, y ，二元函数



$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

称为二元随机变量 (X, Y) 的联合分布函数。



X 和 Y 也有它们自己的分布函数, 分别记为: $F_X(x)$, $F_Y(y)$,
并称他们为**边际分布函数**

$$F_X(x) = P(X \leq x) = F(x, +\infty)$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = F(+\infty, y)$$



条件分布函数

💡 定义:

若 $P(Y=y)>0$, 则在 $Y=y$ 条件下, X 的**条件分布函数**为:

$$F_{X|Y}(x|y) = P(X \leq x | Y=y) = \frac{P(X \leq x, Y=y)}{P(Y=y)}$$



若 $P(Y=y)=0$, 但对任一 $\varepsilon>0, P(y<Y\leq y+\varepsilon)>0$,
则在 $Y=y$ 条件下, X 的条件分布函数定义为:

$$\begin{aligned} F_{X|Y}(x|y) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P(X \leq x | y < Y \leq y + \varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{P(X \leq x, y < Y \leq y + \varepsilon)}{P(y < Y \leq y + \varepsilon)} \end{aligned}$$

此时仍记为 $P(X \leq x | Y = y)$.

即: $F_{X|Y}(x|y) = P(X \leq x | Y = y)$.



二元离散型随机变量

定义：若二元随机变量 (X, Y) 全部可能取到的不同值是有限对或可列无限对，则称 (X, Y) 是二元离散型随机变量。



离散随机变量的联合概率分布律

设 (X, Y) 所有可能取值为 (x_i, y_j) , 称

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}, \quad i, j=1, 2, \dots$$

为二元离散型随机变量

(X, Y) 的联合分布律。

$$1^\circ \quad p_{ij} \geq 0,$$

$$2^\circ \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	\dots	y_j	\dots
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1j}	\dots
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2j}	\dots
\vdots	\dots		\dots		\dots
x_i	p_{i1}	p_{i2}	\dots	p_{ij}	\dots
\vdots	\dots		\dots		\dots



X, Y 的边际分布律为： $P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$ 记为 $p_{i\cdot}$.

$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} \text{ 记为 } p_{\cdot j}$$

在 $Y = y_j$ 条件下, X 的条件分布律为:

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \quad i = 1, 2, \dots$$

在 $X = x_i$ 条件下, Y 的条件分布律为:

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} \quad j = 1, 2, \dots$$



联合概率密度函数

定义：对于二元随机变量 (X, Y) 的分布函数 $F(x, y)$,
如果存在非负函数 $f(x, y)$, 使对于任意 x, y ,

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$$

称 (X, Y) 为二元连续型随机变量.

并称 $f(x, y)$ 为二元随机变量 (X, Y) 的
(联合)概率密度 (函数)。



概率密度的性质:

➡ 1. $f(x, y) \geq 0$

➡ 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$

3. 设 D 是 xoy 平面上的区域, 点 (X, Y) 落在 D 内的概率为:

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy$$

4. 在 $f(x, y)$ 的连续点 (x, y) , 有 $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$.



X, Y 的边际密度函数为:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$



若 $f_Y(y) > 0$,则在 $Y = y$ 的条件下, X 的条件密度函数为:

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

若 $f_X(x) > 0$,则在 $X = x$ 的条件下, Y 的条件密度函数为:

$$f_{Y|X}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

条件概率 $P(Y \in D | X = x) = \int_D f_{Y|X}(y | x) dy$



二元离散型与连续型随机变量分布比较

二元离散型随机变量

(X, Y) 联合分布律

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}, i, j=1, 2, \dots$$

X 的边际分布律

$$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}=p_{i\cdot}, i=1, 2, \dots$$

$X=x_i$ 时 Y 的条件分布律

$$P(Y=y_j|X=x_i)=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}, j=1, 2, \dots$$

二元连续型随机变量

(X, Y) 联合概率密度

$$f(x, y)$$

X 的边际概率密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$$

$X=x$ 时 Y 的条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$



(四) 独立性

如果 $P(AB) = P(A)P(B)$, 则称两个事件 A, B 相互独立

当 $P(A) > 0$ 时

$$\Leftrightarrow P(B | A) = P(B)$$

当 $P(\bar{A}) > 0$ 时

$$\Leftrightarrow P(B | \bar{A}) = P(B)$$

直观含义: A 发生与否都不会改变 B 发生的概率

$$A, B \text{ 相互独立} \Leftrightarrow \bar{A}, B \text{ 相互独立}$$

$$\Leftrightarrow A, \bar{B} \text{ 相互独立} \Leftrightarrow \bar{A}, \bar{B} \text{ 相互独立}$$



设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个随机事件, 若对 $2 \leq k \leq n$,
以及不同的 i_1, \dots, i_k , 均有:

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j})$$

则称 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立

相互独立 \Rightarrow 两两独立

两两独立不能推出相互独立



设 $F(x, y)$ 是二元随机变量 (X, Y) 的分布函数, $F_X(x)$ 是 X 的边际分布函数, $F_Y(y)$ 是 Y 的边际分布函数, 若对所有 x, y 有:

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y) \quad \text{即}$$

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

称随机变量 X, Y 相互独立。



独立性等价判断:

离散型

用分布律判断。对一切 i, j 都成立 $p_{ij} = p_{i\bullet} p_{\bullet j}$

即 $P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i)P(Y=y_j), \forall i, j$

$$\Leftrightarrow P(Y=y_j | X=x_i) = P(Y=y_j), \forall j$$

即 Y 条件分布律与 Y 的边际分布律相等



独立性等价判断:

连续型

用密度函数判断。对在平面的点 (x, y)

几乎处处成立 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$

即在平面上除去“面积”为零的集合以外，上述等式处处成立。

$$\Leftrightarrow f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$$

即 Y 的条件密度函数与 Y 的边际密度函数相等



(五) 随机变量函数的分布

问题：已知随机变量 X 的分布， $Y = g(X)$ ，
函数 $g(\cdot)$ 已知，求 Y 的分布。

若 Y 为离散型随机变量，则先写出 Y 的可能取值：

$$y_1, y_2, \cdots, y_j, \cdots;$$

再找出 $\{Y = y_j\}$ 的等价事件 $\{X \in D\}$ ，得

$$P(Y = y_j) = P(X \in D);$$



若 Y 为连续型随机变量,则

(1) 确定 Y 的取值范围;

(2) 写出 Y 的分布函数: $F_Y(y) = P(Y \leq y)$,

找出 $\{Y \leq y\}$ 的等价事件 $\{X \in D\}$,得 $F_Y(y) = P(X \in D)$;

(3) 对 $F_Y(y)$ 求导得 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

注意常用到复合函数求导:

$$\frac{d(F_X(h(y)))}{dy} = f_X(h(y))h'(y)$$



定理： 设随机变量 $X \sim f_X(x)$, $-\infty < x < +\infty$,
 $Y = g(X)$, $g'(x) > 0$ (或 $g'(x) < 0$), 则 Y 具有概率密度为：

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) \cdot |h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中 (α, β) 是 Y 的取值范围, h 是 g 的反函数, 即
 $h(y) = x \Leftrightarrow y = g(x)$.



$$Z = X + Y$$

离散型:

$$\begin{aligned} P(Z = z_k) &= \sum_i P(X = x_i, Y = z_k - x_i) \\ &= \sum_i P(X = z_k - y_i, Y = y_i) \end{aligned}$$

连续型:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y, y) dy$$



$$M = \max(X_1, \dots, X_n)$$

$$F_M(z) = P(M \leq z)$$

$$= P(X_1 \leq z, \dots, X_n \leq z)$$

如果 X_1, \dots, X_n 相互独立

$$= F_{X_1}(z) F_{X_2}(z) \cdots F_{X_n}(z)$$



$$N = \min(X_1, \dots, X_n)$$

$$1 - F_N(z) = P(N > z)$$

$$= P(X_1 > z, \dots, X_n > z)$$

如果 X_1, \dots, X_n 相互独立

$$= (1 - F_{X_1}(z)) \cdots (1 - F_{X_n}(z))$$



(六) 数字特征

期望 (数学期望, 均值)

$$E(X) = \begin{cases} \sum_i x_i p_i, & \text{若 } X \text{ 是离散型} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, & \text{若 } X \text{ 是连续型} \end{cases}$$

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum_i g(x_i) p_i, & \text{若 } X \text{ 是离散型} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx, & \text{若 } X \text{ 是连续型} \end{cases}$$



$$E(g(X, Y)) = \begin{cases} \sum_i g(x_i, y_j) p_{ij}, & \text{若}(X, Y) \text{是离散型} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy, & \text{若}(X, Y) \text{是连续型} \end{cases}$$

特别地，若 (X, Y) 是连续型，则

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy$$



方差:

$$D(X) = Var(X) = E\{[X - E(X)]^2\}.$$

$$= E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\Rightarrow E(X^2) = Var(X) + [E(X)]^2$$

标准差: $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$



性质:

1. 均值具有线性性

$$E(b + \sum_i a_i X_i) = b + \sum_i a_i E(X_i)$$

$$2. Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

$$3. Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$$



协方差:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ \Rightarrow E(XY) &= \text{Cov}(X, Y) + E(X)E(Y) \end{aligned}$$

性质:

1. 对称性 $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
2. $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$
3. 线性性

$$\text{Cov}\left(\sum_i a_i X_i, Y\right) = \sum_i a_i \text{Cov}(X_i, Y)$$



(X_1, \dots, X_n) 的协方差矩阵:

$$A = (a_{ij})_{n \times n}, \text{ 其中 } a_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j)$$

X 与 Y 的相关系数:

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

$$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$$



X 与 Y 不相关: $\rho_{XY} = 0 \Leftrightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0$

$$\Leftrightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$$

$$\Leftrightarrow \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

X 与 Y 独立 \Rightarrow X 与 Y 不相关

反之不一定成立



(七) 九大分布

1. 0-1分布(或两点分布)

记为 $X \sim 0-1(p)$ 或 $X \sim B(1, p)$

X	0	1
P	$1-p$	p

其中 $0 < p < 1$.

分布律还可写为 $P(X=k) = p^k (1-p)^{1-k}$, $k=0, 1$.

$$E(X) = p, \quad Var(X) = p(1-p)$$



2. 二项分布, 记为 $X \sim B(n, p)$

$$P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,\dots,n$$

这里 n 是正整数, $0 < p < 1$

$$E(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1-p)$$



3. 参数为 λ 的泊松分布, 记为 $X \sim \pi(\lambda)$ 或 $X \sim P(\lambda)$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

其中 $\lambda > 0$

$$E(X) = \text{Var}(X) = \lambda$$



4. (a, b) 上的均匀分布, 记为 $X \sim U(a, b)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b); \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

性质: 对任何 $[a, b]$ 的子区间 $[c, d]$,

$$P(X \in [c, d]) = \frac{d-c}{b-a}$$



5. 参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布, 记为 $X \sim E(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

无记忆性: 对 $t, s > 0$,

$$P(X - s > t \mid X > s) = P(X > t) = e^{-\lambda t}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$



6. 正态分布, 记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

性质: (1) $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

(2) 分布函数 $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准

正态分布 $N(0,1)$ 的分布函数

(3) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, $\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$, $z_{1-\alpha} = -z_\alpha$

(4) $E(X) = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$



7. 平面区域 D 上的均匀分布, 记为 $(X, Y) \sim U(D)$

假设 D 的面积有限, (X, Y) 的联合密度函数为:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{D \text{ 的面积}}, & (x, y) \in D \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

性质: 对 D 的任何子区域 D_1 , 都有

$$P((X, Y) \in D_1) = \frac{D_1 \text{ 的面积}}{D \text{ 的面积}}$$



8. 二元正态分布, 记为 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

性质: (1) $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$$(2) \rho = \rho_{XY}$$

(3) X 与 Y 独立 $\Leftrightarrow \rho=0 \Leftrightarrow X$ 与 Y 不相关



9. 多元正态分布

性质:

(1) (X_1, \dots, X_n) 正态 \Rightarrow 每个分量 X_i 正态

每个分量 X_i 正态, 且相互独立 $\Rightarrow (X_1, \dots, X_n)$ 正态

(2) (X_1, \dots, X_n) 正态 \Leftrightarrow 所有线性组合 $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ 正态

(3) (X_1, \dots, X_n) 正态 \Rightarrow

若每个 Y_i 都是 X_1, \dots, X_n 的线性组合, 则 (Y_1, \dots, Y_m) 正态

(4) 若 (X_1, \dots, X_n) 正态, 则 X_1, \dots, X_n 相互独立 \Leftrightarrow

X_1, \dots, X_n 两两不相关 $\Leftrightarrow \text{Cov}(X_i, X_j) = 0, \forall i \neq j$



(八) 大数定律和中心极限定理

1. 依概率收敛

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $X_n \xrightarrow{P} a$ 如果:

对任意的 $\varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - a| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$

性质:

(1) 若 $X_n \xrightarrow{P} a$, $f(x)$ 在点 a 连续, 则

$$f(X_n) \xrightarrow{P} f(a).$$

(2) 若 $X_n \xrightarrow{P} a, Y_n \xrightarrow{P} b$, g 在 (a, b) 连续,

$$\text{则 } g(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} g(a, b).$$



2. 切比雪夫不等式：设 X 的方差 $Var(X)$ 存在，则

$$\text{对于任意 } \varepsilon > 0, \text{ 都有: } P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}.$$

$$\text{等价于: } P\{|X - E(X)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}.$$



3. 大数定律:

设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立, 具有相同的均值 μ , 同分布或同方差, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{P} \mu.$$

贝努利大数定律:

设 n_A 为 n 重贝努里试验中事件 A 发生的次数, 并记事件 A 在每次试验中发生的概率为 p , 则有

$$\frac{n_A}{n} \xrightarrow{P} p, \text{ 当 } n \rightarrow +\infty \text{ 时.}$$



4. 中心极限定理:

设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 独立同分布, $E(X_i) = \mu, \text{Var}(X_i) = \sigma^2$,

则当 n 充分大时 $\sum_{i=1}^n X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2)$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

特别地, 当 n 充分大时, $B(n, p) \overset{\text{近似}}{\sim} N(np, np(1-p))$.



(九) 统计量与抽样分布

1. 总体：随机变量 X

2. 简单随机样本：

满足以下两个条件的 (X_1, X_2, \dots, X_n) 称为容量是 n 的简单随机样本：

(1) 代表性：每个 X_i 与 X 同分布；

(2) 独立性： X_1, X_2, \dots, X_n 是相互独立的随机变量



3. **统计量**：样本的不含任何未知参数的函数。

设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 为样本, 若 $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$
不含任何未知参数, 则称 $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为统计量.



4. 常用统计量:

样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$

样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$

样本标准差 $S = \sqrt{S^2}$

样本 k 阶原点矩: $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$

样本 k 阶中心矩: $B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k$



5. χ^2 分布: 设 X_1, \dots, X_n 相互独立, 都服从 $N(0,1)$, 则

$$\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$$

(1). 设 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$, 则 $E(\chi^2) = n, Var(\chi^2) = 2n$

(2). χ^2 分布的可加性:

设 $Y_1 \sim \chi^2(n_1), Y_2 \sim \chi^2(n_2)$, 且 Y_1, Y_2 相互独立, 则

$$Y_1 + Y_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2).$$



6. **t 分布**: 设 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$, 且 X 和 Y 相互独立.

$$\text{则 } \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n).$$

$$(1). t_{1-\alpha}(n) = -t_{\alpha}(n)$$

$$(2). \text{当 } n > 45, t_{\alpha}(n) \approx z_{\alpha}$$



7. **F 分布**: 设 $X \sim \chi^2(n_1)$, $Y \sim \chi^2(n_2)$, 且 X, Y 独立, 则

$$\frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1, n_2)$$

(1) 若 $F \sim F(n_1, n_2)$, 则 $\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$.

$$(2) F_{\alpha}(n_2, n_1) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1, n_2)}$$



8. 单个正态总体下的抽样分布

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_n 是样本, 样本均值

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \text{ 样本方差 } S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

则 (1) $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$; (2) $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$;

$$(3) \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

且 \bar{X} 与 S^2 相互独立.



9. 两个正态总体下的抽样分布

设样本 (X_1, \dots, X_{n_1}) 和 (Y_1, \dots, Y_{n_2}) 分别来自总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 并且它们相互独立. 样本均值分别为 \bar{X}, \bar{Y} ; 样本方差分别为 S_1^2, S_2^2 . 则可以得到下面三个抽样分布.



$$(1) \quad \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

(2) 当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 时,

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

$$\text{其中 } S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}, S_w = \sqrt{S_w^2}$$



$$(3) \quad \frac{S_1^2}{S_2^2} / \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1).$$



(十) 点估计

设总体 X 有未知参数 θ , X_1, \dots, X_n 是 X 的简单随机样本.

点估计问题: 构造合适的统计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$

来估计未知参数 θ , 称 $\hat{\theta}$ 为参数 θ 的**点估计量**.

当给定样本观察值 x_1, \dots, x_n 时, $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ 为 θ 的**点估计值**.

● 常用的点估计方法:

矩估计法、极大似然估计法.



1. 矩估计法:

设总体有 k 个未知参数 $\theta_1, \dots, \theta_k$, X_1, \dots, X_n 是样本:

(1) 求总体前 k 阶矩关于 k 个参数的函数,

$$\mu_i = E(X^i) = h_i(\theta_1, \dots, \theta_k), \quad i = 1, \dots, k.$$

(2) 解出各参数关于前 k 阶矩的反函数

$$\theta_i = g_i(\mu_1, \dots, \mu_k), \quad i = 1, \dots, k$$

(3) 以样本各阶原点矩 A_1, \dots, A_k 分别代替总体各阶原点矩 μ_1, \dots, μ_k , 得各参数的矩估计

$$\hat{\theta}_i = g_i(A_1, \dots, A_k), \quad i = 1, \dots, k.$$



注：在实际应用时，也可用总体中心矩 ν_i 替换总体原点矩 μ_i ，相应地，以样本中心矩 B_i 估计总体中心矩 ν_i 。
特别地，用样本二阶中心矩来估计总体方差。



(II) 极大似然估计

设总体 X 有分布律 $p(x; \theta)$, x 取值至多可列, 或有概率密度 $f(x; \theta)$, $\theta \in \Theta$, θ 未知. X_1, \dots, X_n 为总体 X 的简单随机样本, 其观察值为 x_1, \dots, x_n , 则

似然函数: $L(\theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta)$ (或 $\prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$)

极大似然原理: $L(\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$.

$\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ 称为 θ 的极大似然估计值, 相应统计量

$\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ 称为 θ 的极大似然估计量 (MLE).



- 说明:** 1. 未知参数可能不是一个, 设为 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$;
2. 求 $L(\theta)$ 的最大值时, 可转换为求 $\ln L(\theta)$ 的最大值, $\ln L(\theta)$ 称为对数似然函数.
3. 若 $L(\theta)$ 关于某个 θ_i 是单调增(减)函数, 则 θ_i 的极大似然估计在其边界取得;
4. 若 $\hat{\theta}$ 是 θ 的极大似然估计, 则 $g(\theta)$ 的极大似然估计为 $g(\hat{\theta})$.



四条评价准则：

(1) 无偏性准则

(2) 有效性准则

(3) 均方误差准则

(4) 相合性准则



1. 无偏性准则

若参数 θ 的估计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 满足

$$E(\hat{\theta}) = \theta,$$

则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一个无偏估计量.

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}) = \theta$, 则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的渐近无偏估计量.



2. 有效性准则

设 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 是 θ 的两个无偏估计,

如果 $Var(\hat{\theta}_1) \leq Var(\hat{\theta}_2)$, 对一切 $\theta \in \Theta$ 成立

且不等号至少对某一 $\theta \in \Theta$ 成立, 则称

$\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效.



3. 均方误差准则

设 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的点估计, 方差存在, 则称 $E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$ 是估计量 $\hat{\theta}$ 的均方误差, 记为 $Mse(\hat{\theta})$.

$$Mse(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + [E(\hat{\theta}) - \theta]^2.$$

若 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计, 则有 $Mse(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta})$.

设 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 是 θ 的点估计, 如果

$$Mse(\hat{\theta}_1) \leq Mse(\hat{\theta}_2), \text{ 对一切 } \theta \in \Theta \text{ 成立,}$$

且不等号至少对某一 $\theta \in \Theta$ 成立, 则称 $\hat{\theta}_1$ 优于 $\hat{\theta}_2$.



4. 相合性准则

设 $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ 为参数 θ 的估计量,
若对于任意 $\theta \in \Theta$, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时,

$$\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow{P} \theta$$

即 $\forall \varepsilon > 0$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \left| \hat{\theta}_n - \theta \right| \geq \varepsilon \right\} = 0$ 成立.

则称 $\hat{\theta}_n$ 为 θ 的相合估计量或一致估计量.



(十一) 置信区间

设总体 X 的分布函数 $F(x; \theta)$, θ 未知. 对给定值 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 有两个统计量

$$\hat{\theta}_L = \hat{\theta}_L(X_1, \dots, X_n), \hat{\theta}_U = \hat{\theta}_U(X_1, \dots, X_n), \text{ 使得:}$$

$$P\{\hat{\theta}_L(X_1, \dots, X_n) < \theta < \hat{\theta}_U(X_1, \dots, X_n)\} \geq 1 - \alpha$$

称 $(\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U)$ 是 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的双侧置信区间;

$\hat{\theta}_L$ 和 $\hat{\theta}_U$ 分别为双侧置信下限和双侧置信上限.



如果 $P\{\hat{\theta}_L(X_1, \dots, X_n) < \theta\} \geq 1 - \alpha$, 则称 $\hat{\theta}_L$ 是
参数 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的单侧置信下限.

如果 $P\{\theta < \hat{\theta}_U(X_1, \dots, X_n)\} \geq 1 - \alpha$, 则称 $\hat{\theta}_U$ 是
参数 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的单侧置信上限.



1. 单个正态总体参数的区间估计

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_n 为样本.

\bar{X} 和 S^2 分别为样本均值和样本方差.

置信水平为 $1-\alpha$.



(1) σ^2 已知时

μ 的双侧置信区间为

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$$

单侧置信下限为 $\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha}$

单侧置信上限为 $\bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha}$



(2) σ^2 未知时

μ 的双侧置信区间为：

$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) \right)$$

单侧置信下限为 $\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1)$

单侧置信上限为 $\bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1)$



(3). 方差 σ^2 的置信区间

双侧置信区间为：

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \right)$$

单侧置信下限为：

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha}^2(n-1)}$$

单侧置信上限为：

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)}$$



2. 两个正态总体参数的区间估计

设样本 (X_1, \dots, X_{n_1}) 和 (Y_1, \dots, Y_{n_2}) 分别来自总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 并且它们相互独立.

样本均值分别为 \bar{X}, \bar{Y} ; 样本方差分别为 S_1^2, S_2^2 .

置信水平为 $1-\alpha$.



(1) σ_1^2, σ_2^2 已知时

$\mu_1 - \mu_2$ 的双侧置信区间:

$$\left((\bar{X} - \bar{Y}) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$$

单侧置信下限: $(\bar{X} - \bar{Y}) - z_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

单侧置信上限: $(\bar{X} - \bar{Y}) + z_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$



(2) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 未知

$\mu_1 - \mu_2$ 的双侧置信区间:

$$\left((\bar{X} - \bar{Y}) \pm t_{\frac{\alpha}{2}} (n_1 + n_2 - 2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right)$$

单侧置信下限: $\bar{X} - \bar{Y} - t_{\alpha} (n_1 + n_2 - 2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$

单侧置信上限: $\bar{X} - \bar{Y} + t_{\alpha} (n_1 + n_2 - 2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$



(3). $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间

双侧置信区间为：

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)} \right)$$

单侧置信下限：

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1)}$$

单侧置信上限：

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)}$$



注意区分是成对数据还是两正态总体数据

如果是成对数据 $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$. 先令

$D_i = X_i - Y_i$, 可以将 D_1, \dots, D_n 看成来自同

一正态总体 $N(\mu_D, \sigma_D^2)$ 的样本, 且相互独

立. 然后再做区间估计.

例如 μ_D 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的双侧置信区间为

$$(\bar{D} \pm t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S_D}{\sqrt{n}})$$

$$\text{其中 } \bar{D} = \bar{X} - \bar{Y}, \quad S_D = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2$$



(十二) 假设检验

假设检验的过程：（利用拒绝域）

1. 提出假设（原假设 $H_0 \leftrightarrow$ 备择假设 H_1 ）
2. 提出检验统计量和拒绝域形式
3. 在给定显著性水平 α 下，根据Neyman-Pearson原则求出拒绝域的临界值
4. 根据实际样本观测值作出判断



假设检验的过程：（利用 P 值）

1. 提出假设（原假设 $H_0 \leftrightarrow$ 备择假设 H_1 ）
2. 提出检验统计量和拒绝域形式
- 3'. 计算检验统计量的观测值与 P 值；
- 4'. 根据 P 值和显著性水平 α ，作出判断。

（若 $P \leq \alpha$ ，则拒绝原假设；

若 $P > \alpha$ ，则接受原假设）



两类错误:

第I类错误: 拒绝真实的原假设

第II类错误: 接受错误的原假设

Neyman-Pearson原则:

首先控制犯第I类错误的概率不超过显著性水平 α , 再寻找检验, 使得犯第II类错误的概率尽可能小.



关于总体参数 θ 的假设:

$$H_0: \theta = \theta_0, \quad H_1: \theta \neq \theta_0 \text{ (双边检验)}$$

$$H_0: \theta \geq \theta_0, \quad H_1: \theta < \theta_0 \text{ (左边检验)}$$

$$H_0: \theta \leq \theta_0, \quad H_1: \theta > \theta_0 \text{ (右边检验)}$$



P_{-} 值计算:

(设检验统计量为 H , 检验统计量的观测值为 h)

1. 若检验统计量太大或太小时拒绝,

令 $p = P(H \geq h \mid \theta = \theta_0)$, 则 $P_{-} = 2 \min(p, 1 - p)$

2. 若检验统计量太小时拒绝,

则 $P_{-} = P(H \leq h \mid \theta = \theta_0)$

3. 若检验统计量太大时拒绝,

则 $P_{-} = P(H \geq h \mid \theta = \theta_0)$



1. 单个正态总体参数的假设检验

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_n 为样本.

\bar{X} 和 S^2 分别为样本均值和样本方差.

显著性水平为 α .

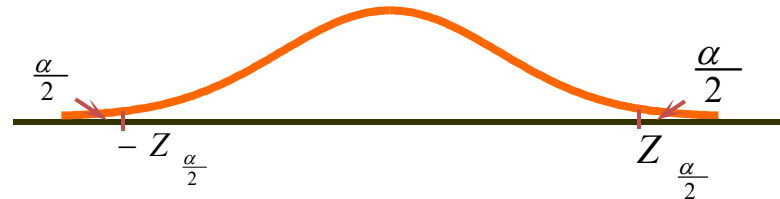


$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}, \quad \text{当 } \mu = \mu_0 \text{ 时, } Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

(1) $H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$

拒绝域: $|Z| \geq z_{\alpha/2}$

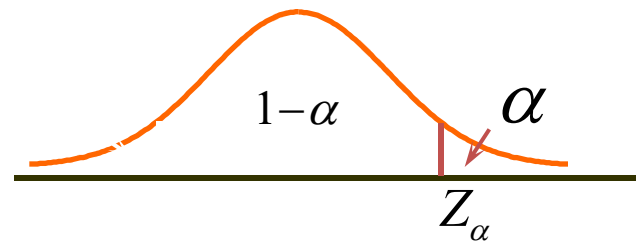
$$P_- = P_{\mu_0} \{ |Z| \geq |z_0| \} = 2(1 - \Phi(|z_0|)).$$



(2) $H_0: \mu \leq \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$

拒绝域: $Z \geq z_{\alpha}$

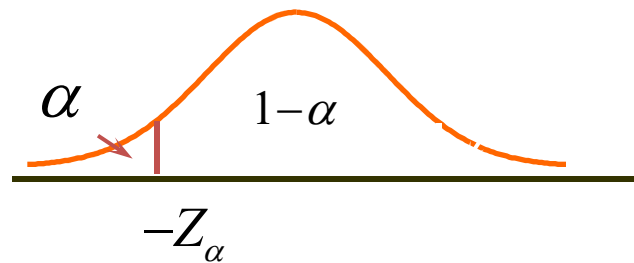
$$P_- = P_{\mu_0} \{ Z \geq z_0 \} = 1 - \Phi(z_0)$$



(3) $H_0: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$

拒绝域: $Z \leq -z_{\alpha}$

$$P_- = P_{\mu_0} \{ Z \leq z_0 \} = \Phi(z_0)$$

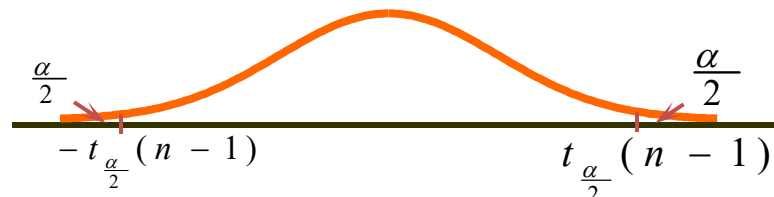




$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}, \quad \text{当 } \mu = \mu_0 \text{ 时, } t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

(1) $H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu \neq \mu_0$

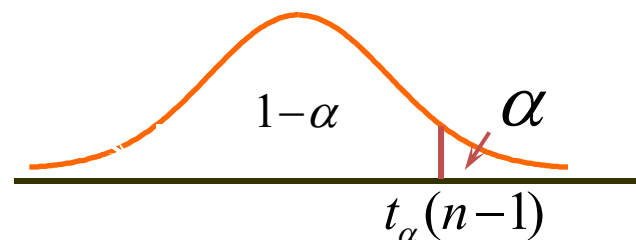
拒绝域: $|t| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$



$$P_- = P_{\mu_0} \{ |t| \geq |t_0| \} = 2P(t(n-1) \geq |t_0|).$$

(2) $H_0 : \mu \leq \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0$

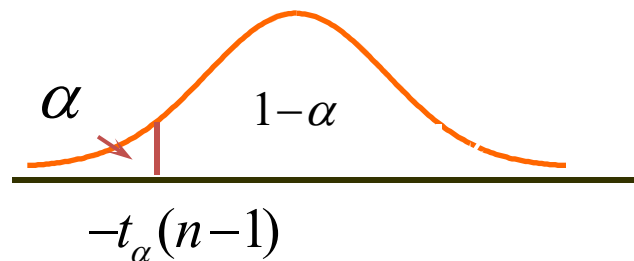
拒绝域: $t \geq t_{\alpha}(n-1)$



$$P_- = P_{\mu_0} \{ t \geq t_0 \} = P(t(n-1) \geq t_0)$$

(3) $H_0 : \mu \geq \mu_0, H_1 : \mu < \mu_0$

拒绝域: $t \leq -t_{\alpha}(n-1)$



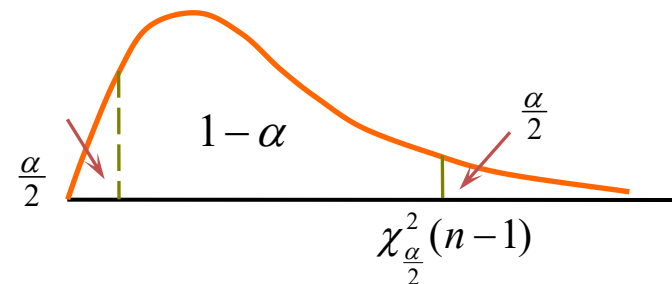
$$P_- = P_{\mu_0} \{ t \leq t_0 \} = P(t(n-1) \leq t_0)$$



当 $\sigma^2 = \sigma_0^2$ 时, $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$

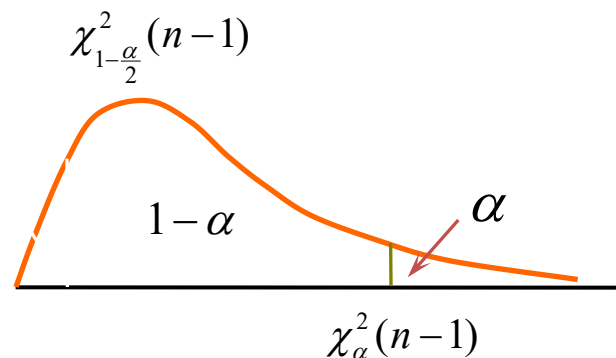
(1) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

拒绝域: $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$ 或 $\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$



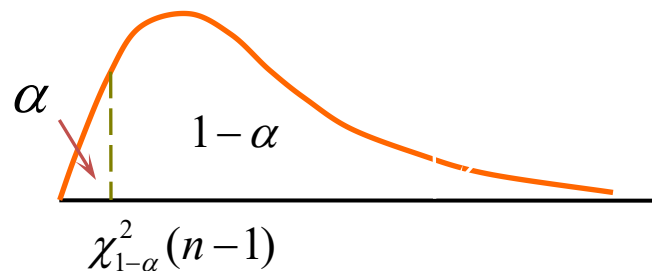
(2) $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$

拒绝域: $\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2(n-1)$



(3) $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$

拒绝域: $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$





2. 两个正态总体参数的假设检验

设样本 (X_1, \dots, X_{n_1}) 和 (Y_1, \dots, Y_{n_2}) 分别来自总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 并且它们相互独立.

样本均值分别为 \bar{X}, \bar{Y} ; 样本方差分别为 S_1^2, S_2^2 .

置信水平为 $1-\alpha$.

注意区分是成对数据还是两正态总体数据

当 $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ 时,
$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

(1) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$

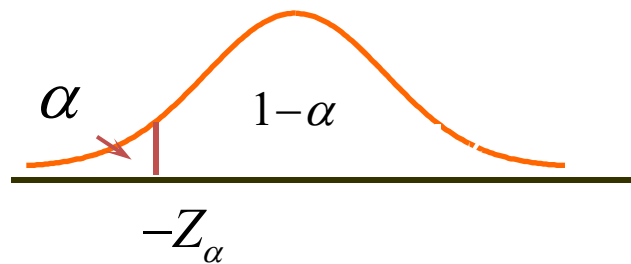
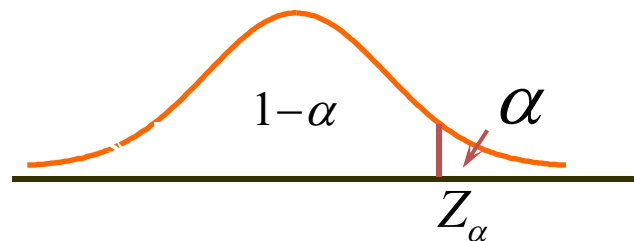
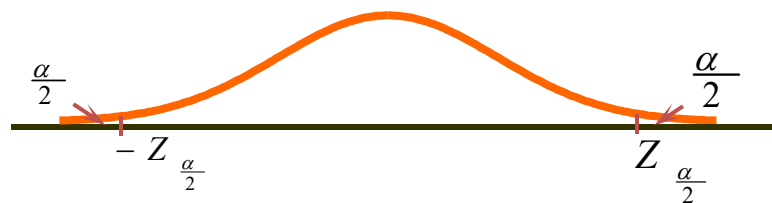
拒绝域: $|Z| \geq z_{\alpha/2}$

(2) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \delta$

拒绝域: $Z \geq z_{\alpha}$

(3) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \delta$

拒绝域: $Z \leq -z_{\alpha}$

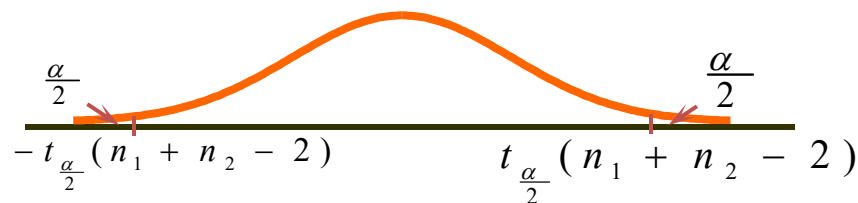


(2) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 未知检验 $\mu_1 - \mu_2$ (t 检验法)

当 $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ 时,
$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

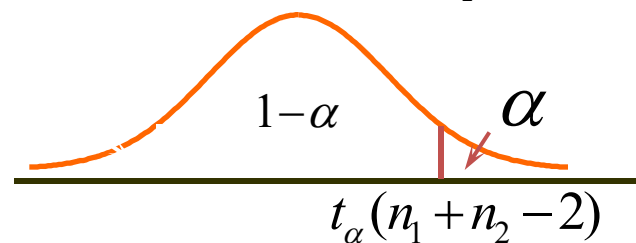
(1) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$

拒绝域: $|t| \geq t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$



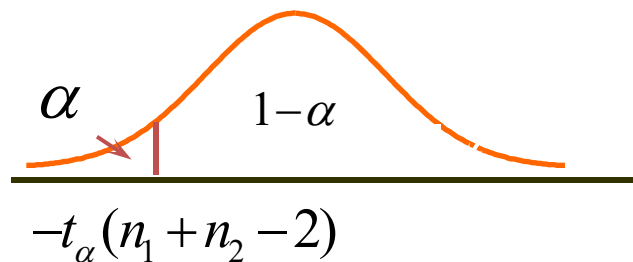
(2) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \delta$

拒绝域: $t \geq t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$



(3) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \delta$

拒绝域: $t \leq -t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$



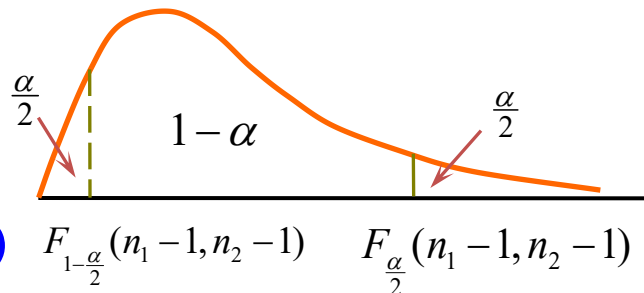


当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 时, $F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

(1) $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \leftrightarrow H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

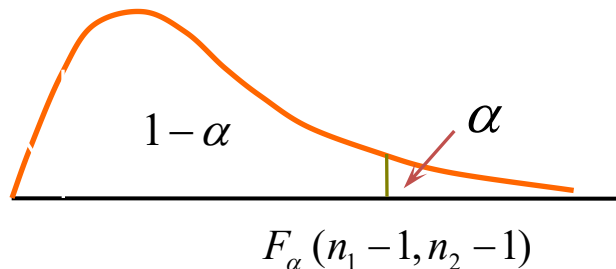
拒绝域:

$F \leq F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ 或 $F \geq F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)$



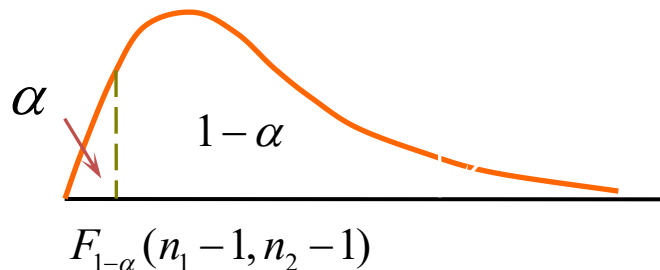
(2) $H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \leftrightarrow H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

拒绝域: $F \geq F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$



(3) $H_0 : \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \leftrightarrow H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$

拒绝域: $F \leq F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$





3. 拟合优度检验

问题：总体服从何种分布未知，要对
总体分布提出一个假设检验

记 $F(x)$ 为总体 X 的未知的分布函数. 设 $F_0(x)$
是形式已知但可能含有若干个未知参数的
分布函数，需检验假设

$$H_0 : F(x) = F_0(x) \quad \forall x \in R$$



若总体 X 为离散型，则 H_0 相当于

H_0 : 总体 X 的分布律为 $P\{X = t_i\} = p_i, i = 1, 2, \dots$

若总体 X 为连续型，则 H_0 相当于

H_0 : 总体 X 的概率密度为 $f(x)$ 。

————拟合优度检验问题



(一) Pearson χ^2 检验

步骤:

1. 提出原假设 H_0
2. 如果原假设中的分布含有 r 个未知参数，
用极大似然估计出来
3. 在 H_0 下，总体 X 取值的全体分成 k 个两两
不相交的子集 A_1, \dots, A_k .
4. 以 $n_i (i = 1, \dots, k)$ 记样本观察值 x_1, \dots, x_n 中落在 A_i 的个数（**实际频数**）.



4. 计算当 H_0 为真 (r 个未知参数用第2步的估计值代入) 时事件 A_i 发生的概率 $p_i = P_{H_0}(A_i), i = 1, \dots, k$, 称 np_i 为理论频数.

检查: $np_i \geq 5$, 否则合并子集并转到步骤3

5. 检验统计量

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i^2}{np_i} - n$$

6. 拒绝域

$$\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2 (k - r - 1)$$