Inductive Definition

- 判断（judgment）：关于某种类别的一棵或多棵abt的陈述
- 规则（rule）：规定了一个判断有效的充要条件，因此也就决定了这个判断的含义

2.1 判断

以下是一些判断的例子：

- $n\ nat$：n 是一个自然数
- $n_1 + n_2 = n$：n 是 n_1 和 n_2 的和
- $\tau\ type$：τ 是一个类型
- $e : \tau$：表达式 e 具有 τ 类型
- $e \Downarrow v$：表达式 e 的值为 v

判断的作用是：

1. 表明一棵或多棵abt具有某种性质，或
2. 彼此之间存在某种关系

- 判断形式（judgment form）：abt所具有的性质或关系
- 判断形式的实例（instance）：对性质或关系的一个判断
- 谓词（predicate）：判断形式
- 主语（subject）：构成实例的对象

记法a J："abt a具有 J 性质"，也可记为J a

$-J$：不标记参数的J

2.2 推理规则

判断形式的归纳定义（inductive definition）表达为：

$$\frac{J_1 \cdots J_k}{J}$$

表明当$J_1, \cdots, J_k$成立时，足以让 J 成立，反之不一定成立。

- 前提（premise）：分子
- 结论（conclusion）：分母
- 公理（axiom）：没有前提的规则
- 正常规则（proper rule）：有前提的规则

归纳定义例子

- -nat
- -tree
- 相等：$a\ is\ b$ 表示两棵abt相等，则

- 规则模式（rule scheme）：以上的定义都是有限的判断（两个），但是可以推出无限的规则，这样的有限的模式称为规则模式
- 规则模块的实例：为规则中对象的每一个选择确定的一条规则

2.3 推导

- 一个判断的推导过程是规则的有限组合，由公理开始，以判断结束
- 推导是一棵树，结点是规则，其子结点是以该规则为前提的推导过程

如何推导`succ(succ(succ(zero))) nat` 和 `node(node(empty;empty); empty) tree`

- 找到一个推导过程就可以说明一个归纳定义判断是可推导的
- 前向链接（forwarding chainning）、自底向上构造（bottom-up construction）：从公理开始
- 反向链接（back warding chainning）、自顶向下构造（top-down construction）：从结论开始
- 前向链接是没有方向的，反向则是目标导向的

2.4 规则归纳rule induction

- 要想证明“性质 $a\ P$ 在 $a\ J$ 可推导时成立“，则只需证明” P 封闭于定义判断形式 J 的规则或者 P 遵从这些规则“。即如果当 $P(a_1), \cdots, P(a_k)$ 成立时 $P(a)$ 成立，则性质 P 遵从规则：

$$\frac{a_1 J \cdots a_k J}{aJ}$$

- 分子称为这个推理的归纳假设（inductive hypotheses）
- 而分母称为归纳结论（inductive conclusion）

例如，要证明当 $a\ nat$ 成立时 $P(a)$ 成立，只需要证明：

2.5 迭代归纳定义和联立归纳定义

- 迭代（iteration）：一个归纳定义建立在另一个归纳定义之上
- 联立（simultaneous）：所有的判断形式的规则是由整个规则集合同时定义的

2.6 用规则定义函数

- 通过对输入与输出的关系的图做归纳定义来定义函数，然后证明这个关系在给定关系时唯一确定输出
- 自然数的加法函数$sum(a; b; c)$，表示 c 是 a 与 b 的和