时间域

脉冲响应函数

微分方差

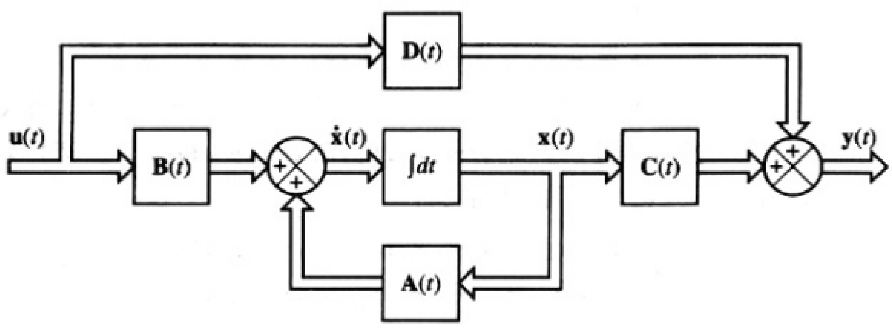
差分方程

状态函数(状态空间模型)

> 现代控制理论:多输入多输出/非线性/时变

状态变量设在积分器后面 线性化:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$



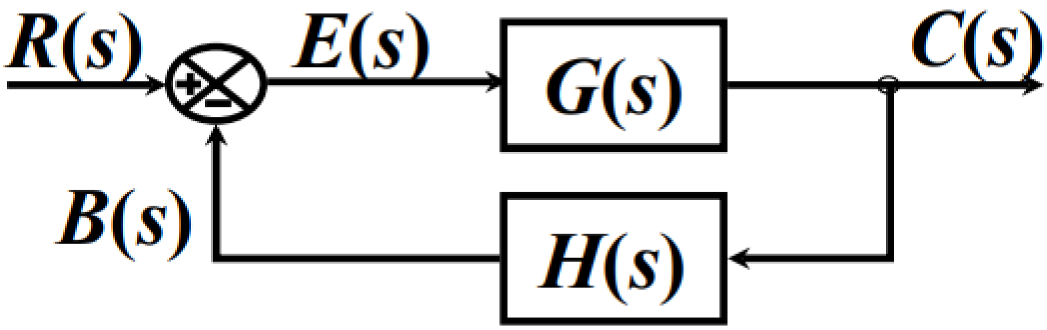
A: state matrix
B: input matrix
C: output matrix
D: direct transmission matrix

- 传递函数 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

复数域

传递函数

> 全部初始条件为0时,Y(s)/X(s), 仅能描述线性常微分



- 开环传递函数(Open-Loop Transfer Function)

  反馈信号 $B(s)$ 与作用误差信号 $E(s)$ 之比, 即

$$\text{开环传递函数} = \frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$$

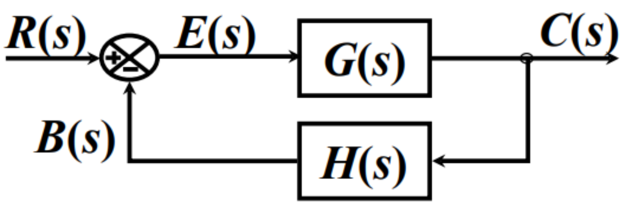
- 前向传递函数(Feedforward Transfer Function)

  输出量 $C(s)$ 与作用误差信号 $E(s)$ 之比, 即

$$\text{前向传递函数} = \frac{C(s)}{E(s)} = G(s)$$

- 闭环传递函数 (Closed-Loop Transfer Function)

闭环传递函数为输出量 $C(s)$ 与输入量 $R(s)$ 之比，即



$$\text{闭环传递函数} = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

结构图

- [考点]由方框图求闭环传递函数
  - 方框图简化 前向通路传递函数乘积不变 回路中传递函数乘积不变
  - 代数法 列出来消中间变量

    - 梅逊公式

梅逊公式(Mason's Gain Formula)

G —系统总传递函数 $G(s)=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}P_k\Delta_k$

P_k—第k条前向通路的传递函数（通路增益）

Δ —特征式 $\Delta=1-\sum L_{(1)}+\sum L_{(2)}-\sum L_{(3)}+\ldots+(-1)^m\sum L_{(m)}$

$\sum L_{(1)}$ — 所有不同回路的传递函数之和

$\sum L_{(2)}$ — 每两个互不接触回路传递函数乘积之和

$\sum L_{(3)}$ — 每三个互不接触回路传递函数乘积之和

$\sum L_{(m)}$ — 任何m个互不接触回路传递函数乘积之和

Δ_k — 第 k 条前向通路特征式的余因子，即对于特征式 **Δ**，将与第 k 条前向通路相接触的回路传递函数代以零值，余下的 **Δ** 即为 $\boldsymbol{\Delta_k}$。

频率域

稳态

频率特性

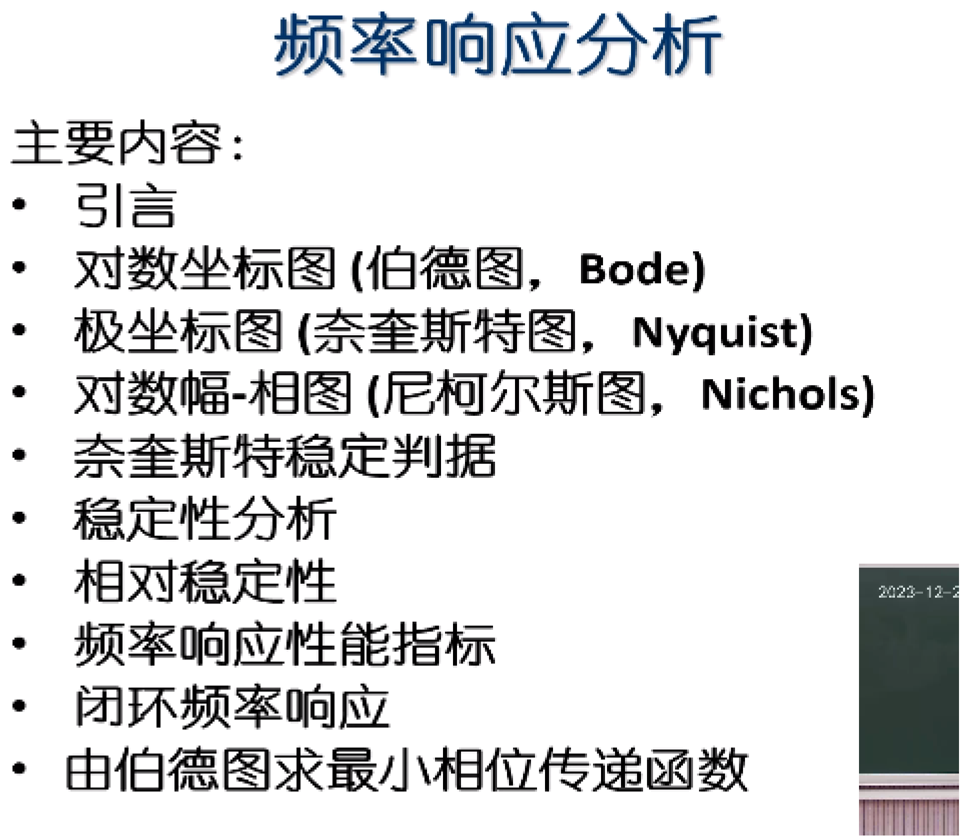
开环-裕量 谐振峰幅值 谐振峰频率

根轨迹法

> 增益$0 \to +\infty$,闭环系统特征方程根的轨迹

- 作图
- 校正
    - 超前校正 改变极点:不稳定->稳定
    - 滞后校正 稳态性能-静态增益
    - 滞后-超前校正

频率响应分析



> 频率响应:系统对正弦输入信号的稳态响应 正弦传递函数:jw代替s

对数坐标图/伯德图

极坐标图

奈奎斯特稳定判据

> 开环频率响应特性

稳定性分析

对数幅相图

系统分析

一阶系统

$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{Ts+1}$

- 单位脉冲响应 $c(t)=\frac{1}{T}e^{-t/T}$
- 单位阶跃响应 $c(t)=1-e^{-t/T}$
  - $c(t)|_{t=T}=0.632$
  - $\frac{dc(t)}{dt}|_{t=0}=\frac{1}{T}$
- 单位斜坡响应 $c(t)=t-T+Te^{-t/T}$
  - 稳态误差 $e(t)|_{t=\infty}=[T(1-e^{-t/T})]|_{t=\infty}=T$

二阶系统

$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2+Bs+K} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

- 参数
  - 无阻尼自然频率$\omega_n = \sqrt{K/J}$
  - 衰减系数 $\sigma = B/(2J)$
  - 阻尼比 $\zeta = \frac{\sigma}{\omega_n} = \frac{B}{B_c} = \frac{B}{2\sqrt{JK}}$
  - 阻尼自然频率 $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ (可观察到的)

ζ	**系统**	**极点**	**瞬态响应**	**误差**
0	零阻尼系统	两虚轴上共轭复数	等幅振荡	
$(0,1)$	欠阻尼系统	两左半s平面共轭复数	振荡	阻尼正弦震荡
1	临界阻尼系统	负实轴重根		
$(1,\infty)$	过阻尼系统	两不等负实数	近似一阶	

标准二阶系统(无零点)

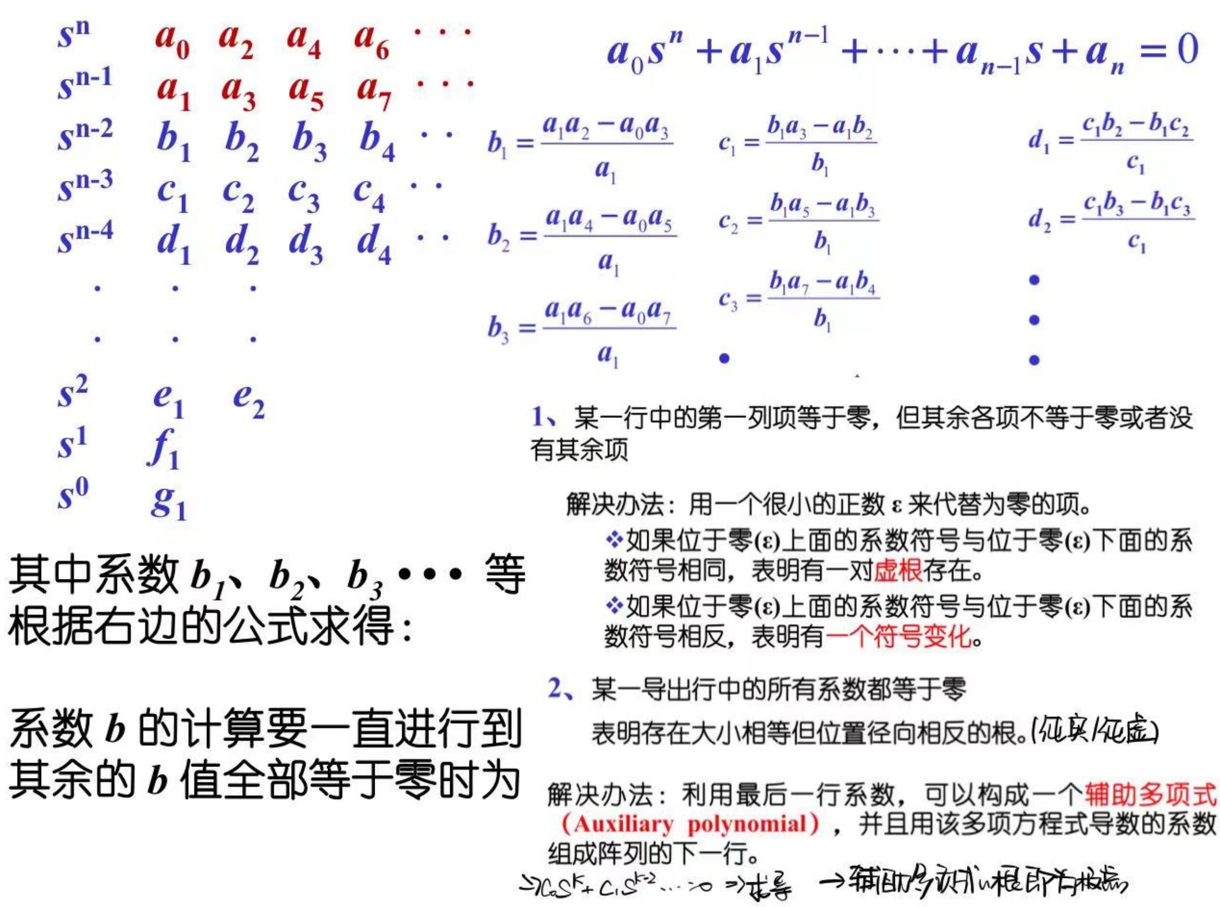
- 性能
  - $t_r = \frac{1}{\omega_d}tan^{-1}(\frac{\omega_d}{-\sigma}) = \frac{\pi-\beta}{\omega_d}$
  - $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$ =阻尼振荡频率周期的一半
  - $M_p = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi}$
  - 衰减比(同方向相邻两个波峰) $n = e^{2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$
  - $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}/\frac{3}{\zeta\omega_n}$
- 同ζ:相同相对稳定性系统

稳定性

稳定/临界稳定/不稳定

- 当且仅当所有闭环极点都位于左半s平面

- 劳斯稳定判据



平移-相对稳定性

稳态性能

- 稳态误差 $\frac{E(s)}{R(s)} \to E(s)$ 终值定理(对于稳定系统) $e_{ss} = lim_{t\to+\infty} e(t) = lim_{s\to 0} sE(s)$

按开环传递函数中包含积分环节的数目进行分类 单位负反馈系统:

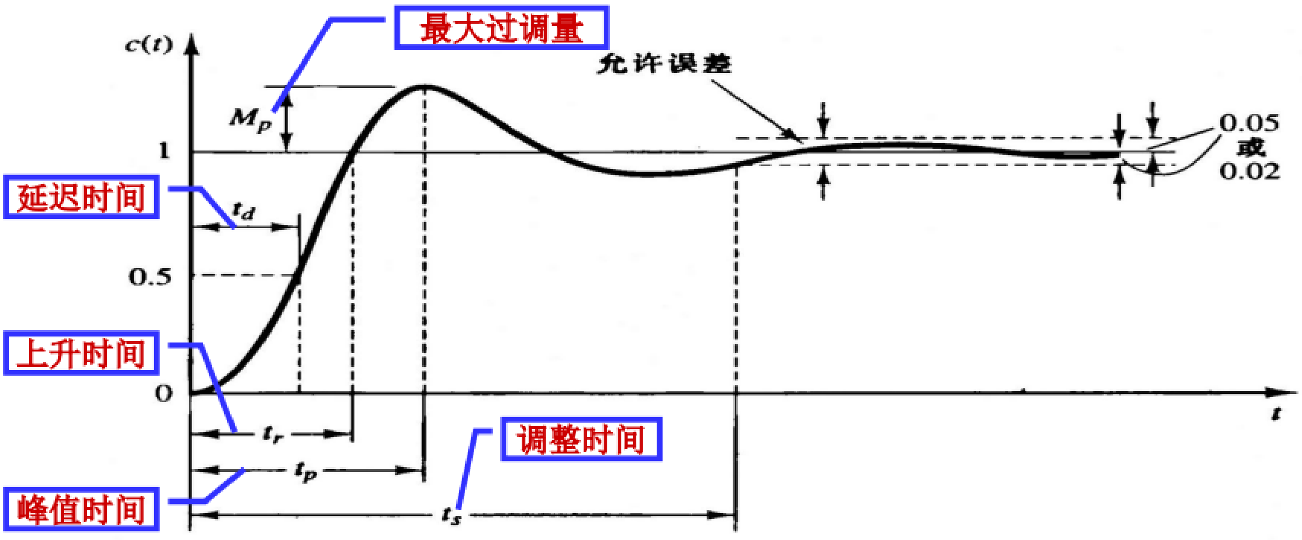
系统类型	单位阶跃$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}$	单位斜坡$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$	单位抛物线$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$
常数	静态位置误差常数 $K_p = lim_{s\to 0} G(s)$	静态速度误差常数 $K_v = lim_{s\to 0} sG(s)$	静态加速度误差常数 $K_a = lim_{s\to 0} s^2 G(s)$
0型	$\frac{1}{1+K}$	$+\infty$	$+\infty$
1型	0	$\frac{1}{K}$	$+\infty$
2型	0	0	$\frac{1}{K}$

- 闭环主导极点

瞬态性能

> 标准初始条件:系统静止/输出量和输出量对时间的各阶导数=0

瞬态响应性能指标



● 延迟时间（Delay time）t_d：响应曲线第一次达到稳态值的一半所需要的时间。

●上升时间（Rise time）t_r：响应曲线从稳态值的 10% 上升到 90%，或从稳态值的 5% 上升到 95%，或从稳态值的 0% 上升到 100% 所需要的时间叫做上升时间。

●最大(百分比)过调量（Maximum (percent) overshoot） Mp：从 1 开始计算的响应曲线的最大峰值叫做最大过调量。如果响应曲线的最终稳态值不等于 1，则通常采用最大百分比过调量。其定义是

$$\text{最大百分比过调量}=\frac{c(t_p)-c(\infty)}{c(\infty)}\times 100\%$$

最大(百分比)过调量的数值直接说明了系统的相对稳定性。

● 调整时间（Settling time）t_s：在响应曲线的稳态线上，用稳态值的绝对百分数(通常取 2% 或 5%)当作一个允许误差范围（allowable tolerance），响应曲线达到并且永远保持在这一允许误差范围内所需要的时间叫做调整时间。调整时间与控制系统的最大时间常数有关。允许误差的百分比选多大，取决于系统的设计目的。

分析设计

状态空间分析

状态空间表达式

可控标准形
(Controllable Canonical Form)

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_0s^n+b_1s^{n-1}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\ 0&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&1\\ -a_n&-a_{n-1}&-a_{n-2}&\cdots&-a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}b_n-a_nb_0 & b_{n-1}-a_{n-1}b_0 & \cdots & b_1-a_1b_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+b_0u$$

可观测标准形
(Observable Canonical Form)

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_0s^n+b_1s^{n-1}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&-a_n\\ 1&0&\cdots&0&-a_{n-1}\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&0&\cdots&1&-a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_n-a_nb_0\\ b_{n-1}-a_{n-1}b_0\\ \vdots\\ b_1-a_1b_0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}+b_0u$$

状态转移矩阵

- 齐次 $\phi(t)$:$x(t)=\phi(t)x(0)$ $\dot\phi(t)=A\phi(t)$

> 包含$\dot x(t)=Ax(t)$描述的系统自由运动(无外u)的全部信息

矩阵指数$e^{At}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^kt^k}{k!}=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]=\phi(t)$

- 非齐次

$x(t)=\phi(t)x(0)+\int_0^t\phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$

$x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$

$$e^{At}=I+At+\frac{A^2t^2}{2!}+\frac{A^3t^3}{3!}+\cdots$$

$$\begin{aligned}
x(t)&=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\\
&=e^{At}x(0)+e^{At}\left[\int_0^t e^{-A\tau}d\tau\right]Bu\\
&=e^{At}x(0)+e^{At}\left[\int_0^t\left(I-A\tau+\frac{A^2\tau^2}{2!}-\cdots\right)d\tau\right]Bu\\
&=e^{At}x(0)+e^{At}\left(It-\frac{At^2}{2!}+\frac{A^2t^3}{3!}-\cdots\right)Bu\\
&=e^{At}x(0)+e^{At}\left[-(A^{-1})(e^{-At}-I)\right]Bu\\
&=e^{At}x(0)+A^{-1}(e^{At}-I)Bu\\
&=A^{-1}(e^{At}-I)B\\
&=\begin{bmatrix} e^{-0.5t}\sin 0.5t\\ e^{-0.5t}(\cos 0.5t+\sin 0.5t)+1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

- [ ] 我觉得这很酷但我不会算

性质

可控性

> 施加一无约束的控制信号,在有限的时间间隔内使初始状态转移到任一终止状态

- 状态完全可控
  - $[B|AB|\cdots|A^{n-1}B]$行满秩
  - 传递函数/传递矩阵$X/U=(SI-A)^{-1}B$不出现相约模态

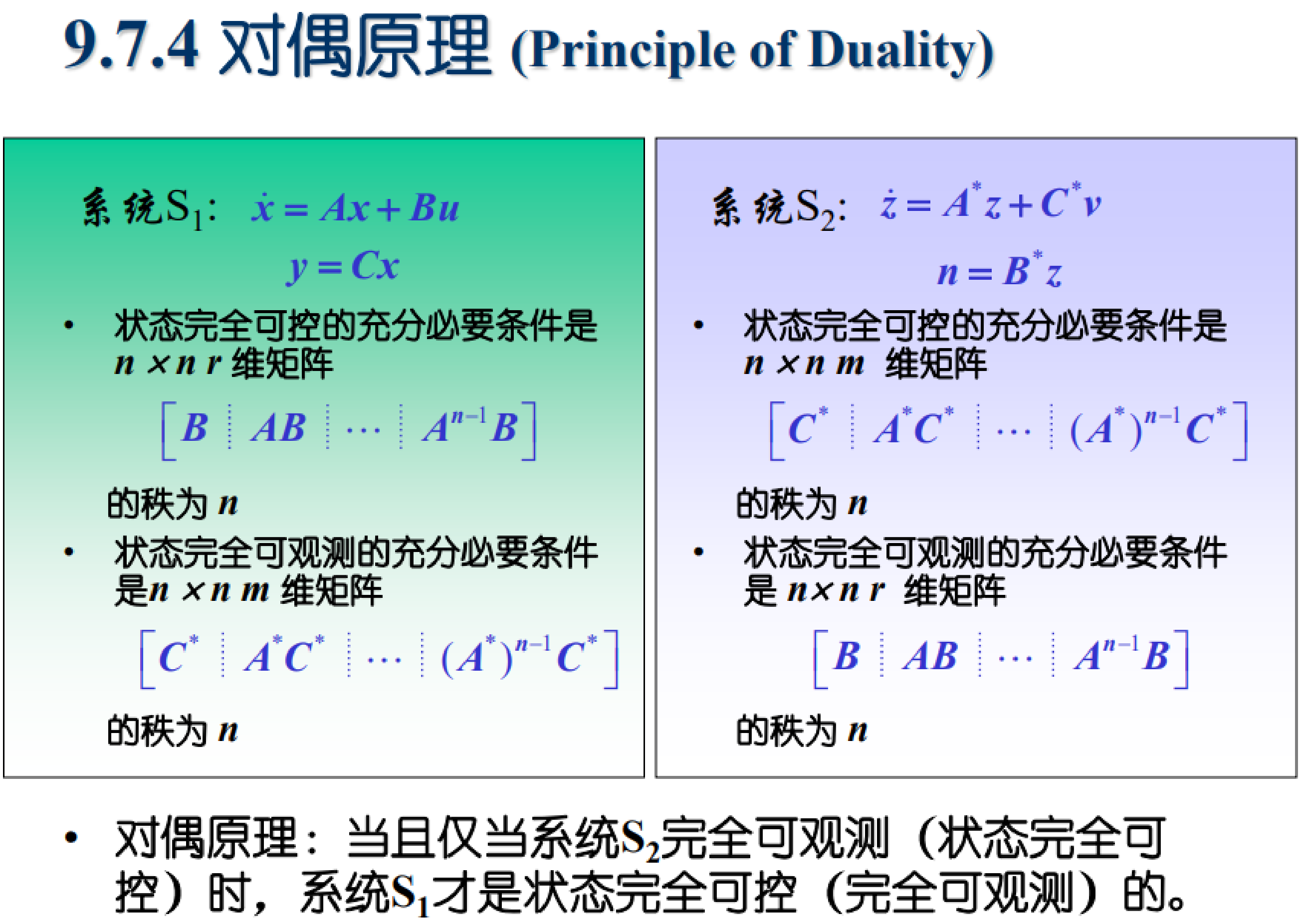
- 输出可控性
  - $[CB|CAB|\cdots|CA^{n-1}B|D]$ 行满秩
- 状态可控与输出可控不相关
- 可稳定性 对于一个部分可控的系统,其不可控的模态是稳定的,而不稳定的模态是可控的

可观性

> 每一个状态,在有限的时间间隔内能由y观测值确定

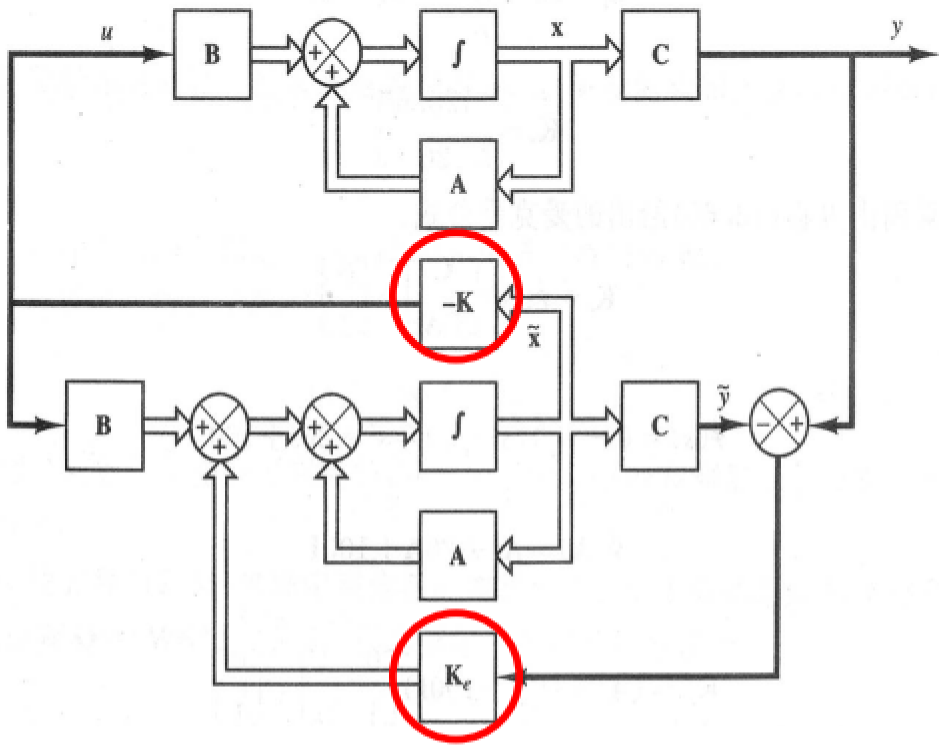
- 完全可观
  - $[C|CA|\cdots|CA^{N-1}]^T$ 列满秩
  - ==X/Y不相约 no==
- 可检测性 对于一个部分可观的系统,其不可观测的模态是稳定的,可观测的模态是不稳定的

对偶性



可检测性和可稳定性互为对偶

状态空间设计



极点配置

> 把所有闭环极点配置到希望的位置

> 假设: 1.用于反馈的状态变量都是可观测的(物理可观测/软测量) 2.状态完全可控(充分必要条件) 3.单输入单输出系统 4.参考输入为0

$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \;\; x(t) = e^{(A-BK)t}x(0)$

- 变换矩阵T法 *先检查是否完全可控！*

10.2.3 用变换矩阵T确定矩阵K

设系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$

控制信号为： $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$

由下列步骤确定使 **A-BK** 的特征值为期望值的反馈增益矩阵 **K**:

1、检验系统的可控性条件。

2、从矩阵**A**的特征多项式确定a_1，a_2，…，a_n的值。

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

3、确定使系统状态方程变为可控标准形的变换矩阵T。

$$\mathbf{T} = \mathbf{MW}$$

$$M = \left[B \;\vdots\; AB \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; A^{n-1}B \right]$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4、利用期望的特征值，写出期望的特征多项式。

$$(s-\mu_1)(s-\mu_2)\cdots(s-\mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n$$

5、确定需要的状态反馈增益矩阵K。

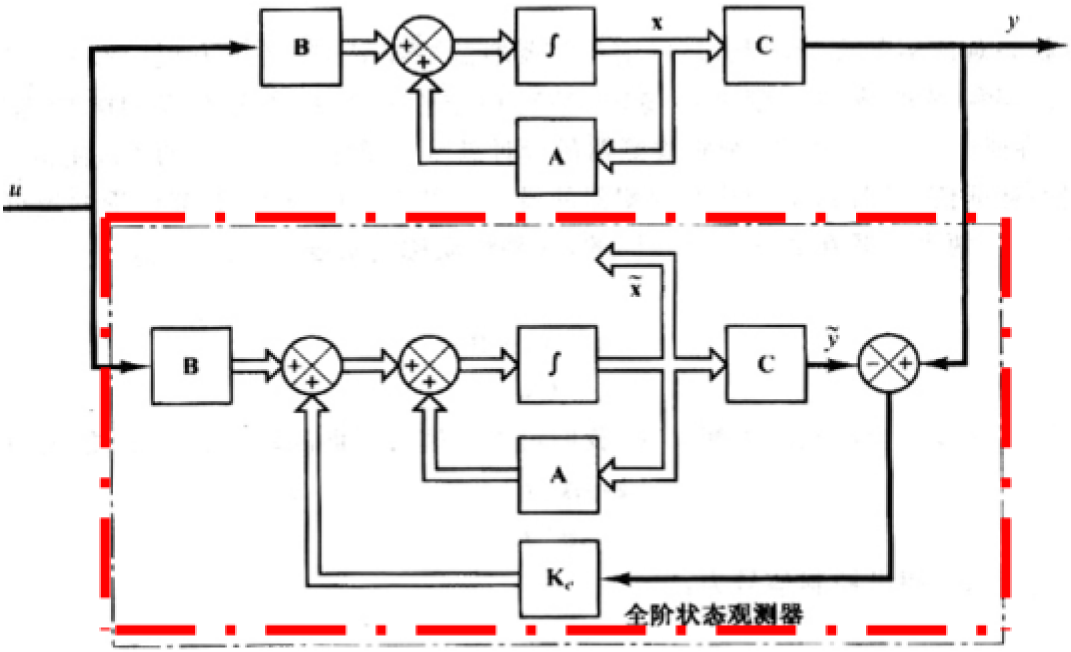
$$K = \left[\alpha_n - a_n \;\vdots\; \alpha_{n-1} - a_{n-1} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; \alpha_2 - a_2 \;\vdots\; \alpha_1 - a_1 \right] T^{-1}$$

- 直接代入法 设$K=[k_1,k_2,k_3]$ $|sI-A+BK|=(s-\mu_1)(s-\mu_2)(s-\mu_3)$

全阶状态观测器

> 估计不可用的状态变量

> 充分必要条件:可观测性-对偶系统状态完全可控



$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + K_e(y - C\tilde{x})$ 补偿A,B和初始状态与估计值间的不精确性

$e = x - \tilde{x}$ $\dot{e} = (A - K_eC)e$

选择合适的K_e使其稳定(快速响应和对干扰噪声灵敏性的折中) 对对偶系统 $\dot{z} = A^*z + C^*v$ \$n=B^z 进行极点配置|sI-A^+C^K|K_e=K^\$

- 矩阵变换法

10.5.5 求状态观测器增益矩阵K_e的变换法

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{Q}\begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = (\mathbf{WN}^*)^{-1}\begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{WN}^*)^{-1}$$

$$\mathbf{N} = \left[\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \mid \cdots \mid (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*\right]$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 直接代入法 设$K=[k_{e1},k_{e2},k_{e3}]^T$ $|sI-A+K_eC|=(s-\mu_1)(s-\mu_2)(s-\mu_3)$

联合

$$[\,\dot{x}\ \dot{e}\,] = [\,A - BK \quad BK\ 0 \quad A - K_eC\,][\,x\ e\,]$$

极点互相独立 控制器-观测器 传递函数$U(s)/Y(s)=\ldots$

- 最小阶观测器=状态向量维数-输出向量维数

二次型最佳调节器系统

已知系统方程为： $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$

确定下列最佳控制向量矩阵**K**：

$$u(t) = -Kx(t)$$

使得下列性能指标达到最小值：

$$J = \int_0^\infty (x^* Qx + u^* Ru)dt$$

式中Q为正定（或半正定）厄米特或实对称矩阵，

R为正定厄米特或实对称矩阵。

这两个矩阵确定了误差和能量损耗的相对重要性。