

**Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey  
Campus Puebla**



**TE3003B.501**

**Integración de robótica y sistemas inteligentes**

**Actividad 2 | Espacio de estados**

**Frida Lizett Zavala Pérez**

**A01275226**

**8 de Abril del 2024**

Obtener la representación en espacio de estados de cada uno de los siguientes modelos dinámicos

a)  $J\ddot{q} + k\dot{q} + mga \cos(q) = \tau$ ,  $a = l/2$ ,  $J = 4/3 ma^2$ , donde la entrada es " $\tau$ " y la salida es " $q$ " (Robot de 1 link)

Espacio de estados

$$1. J\ddot{q} + k\dot{q} + mga \cos(q) = \tau \quad a = l/2 \quad J = 4/3 ma^2$$

salida  $\uparrow$  Entrada

$$x_1 = q$$

$$x_2 = \dot{q}$$

$$\dot{x}_1 = \dot{q} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{J} x_2 - \frac{mga \cos(x_1)}{J} + \frac{\tau}{J}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mga \cos(x_1)}{J} & -\frac{k}{J} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \tau$$

$\uparrow$   $\delta$

$$y = q$$

$$y = x_1 + 0x_2 + 0\tau$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \tau$$

$C$   $D$

b)  $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = E$ , donde la entrada es "E" y la salida es "q" (Circuito eléctrico RLC)

$$2. \quad L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = E$$

↑ entrada
↑ salida

$$x_1 = q \quad \dot{x}_1 = \dot{q} = x_2$$

$$x_2 = \dot{q} \quad \dot{x}_2 = \ddot{q} = \frac{1}{L} \left( E - R\dot{q} - \frac{1}{C}q \right)$$

$$L\dot{x}_2 + Rx_2 + x_1 = E$$

$$\dot{x}_2 = \left( E - Rx_2 - \frac{x_1}{C} \right) \frac{1}{L} = -\frac{x_1}{CL} - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{L}E$$

$$\dot{x}_1 = 0x_1 + 1x_2 + 0E$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{x_1}{CL} - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{L}E$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} E$$

A
B

$$y = x_1 + 0x_2 + 0E$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + 0E$$

C
D

c)  $\tau^2 \ddot{y} + 2\epsilon\tau \dot{y} + y = x$ , donde la entrada es "x" y la salida es "y" (Sistema arbitrario)

$$3. \quad \tau^2 \ddot{y} + 2\epsilon\tau \dot{y} + y = x$$

↑ salida
↑ entrada

$$x_1 = y \quad \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$$

$$x_2 = \dot{y} \quad \dot{x}_2 = \ddot{y} = \frac{1}{\tau^2} \left( x - 2\epsilon\tau \dot{y} - y \right)$$

$$\dot{y} = \frac{x}{\tau^2} - \frac{2\epsilon\tau}{\tau^2}x_2 - \frac{x_1}{\tau^2}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\tau^2} & -\frac{2\epsilon\tau}{\tau^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\tau^2} \end{bmatrix} x$$

A
B

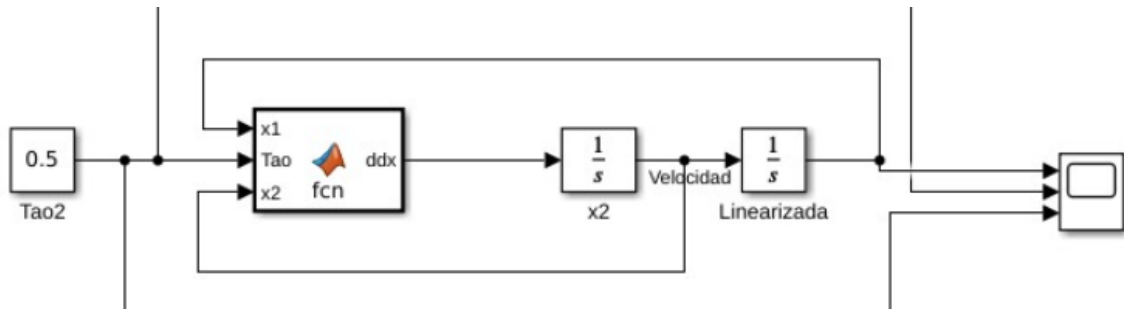
$$y = x_1 + 0x_2 + 0x$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + (0)x$$

C
D

1. **Obtener** la representación en espacio de estados del siguiente modelo linealizado

a)  $J\ddot{q} + k\dot{q} + mgaq = \tau$ ,  $a = l/2$ ,  $J = 4/3 \text{ ma}^2$ , donde la entrada es " $\tau$ " y la salida es " $q$ "  
(Robot de 1 link Linealizado)

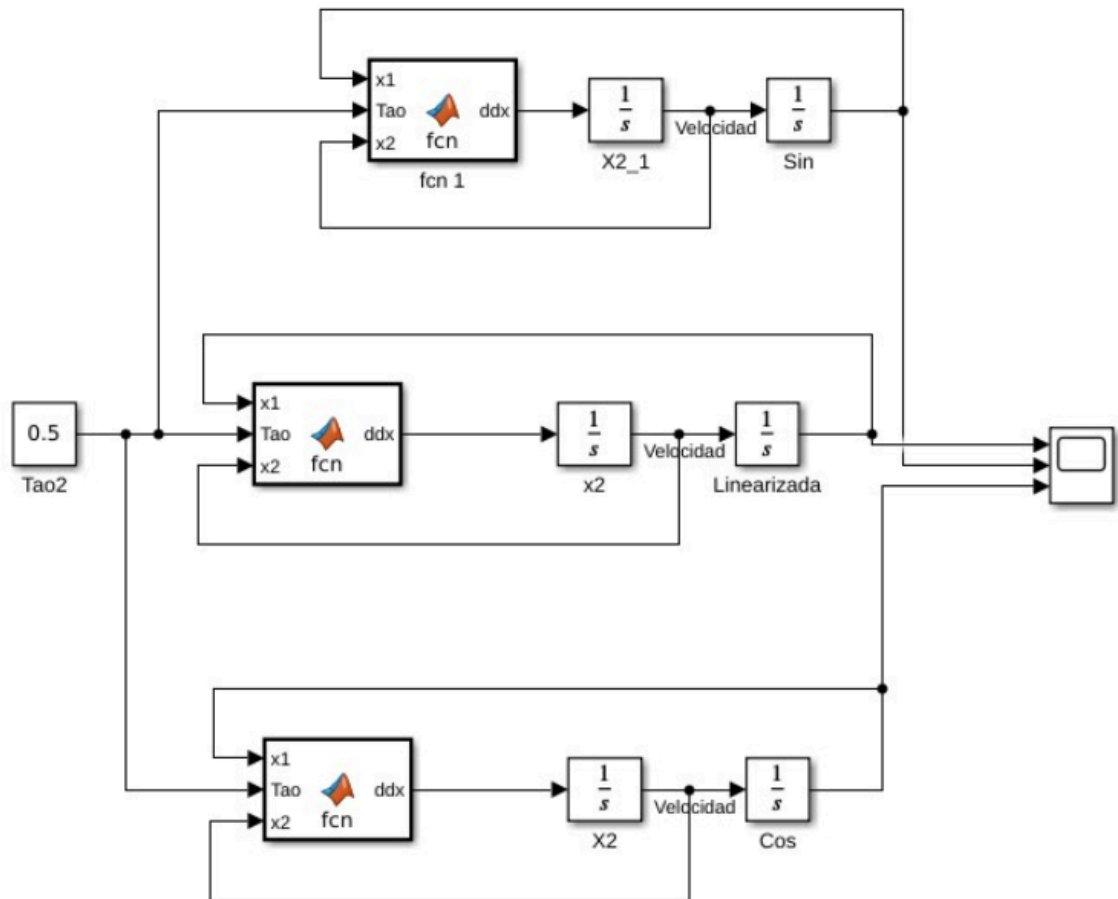


2. **Simular** los siguientes modelos, generando un análisis comparativo de su respuesta con respecto a los parámetros descritos en el punto 4.

a)  $J\ddot{q} + k\dot{q} + mga \cos(q) = \tau$ ,  $a = l/2$ ,  $J = 4/3 \text{ ma}^2$ , donde la entrada es " $\tau$ " y la salida es " $q$ "

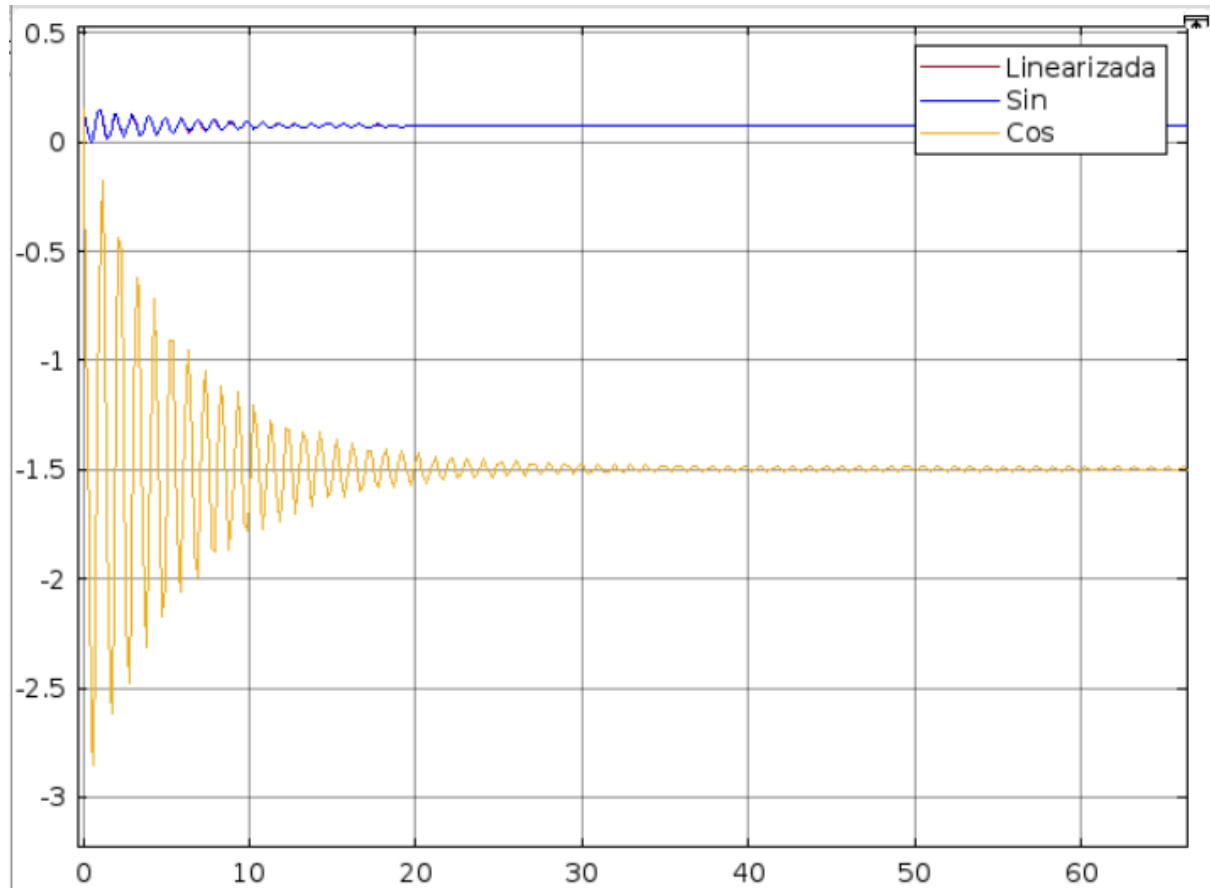
b)  $J\ddot{q} + k\dot{q} + mga \sin(q) = \tau$ ,  $a = l/2$ ,  $J = 4/3 \text{ ma}^2$ , donde la entrada es " $\tau$ " y la salida es " $q$ "

c)  $J\ddot{q} + k\dot{q} + mgaq = \tau$ ,  $a = l/2$ ,  $J = 4/3 \text{ ma}^2$ , donde la entrada es " $\tau$ " y la salida es " $q$ "



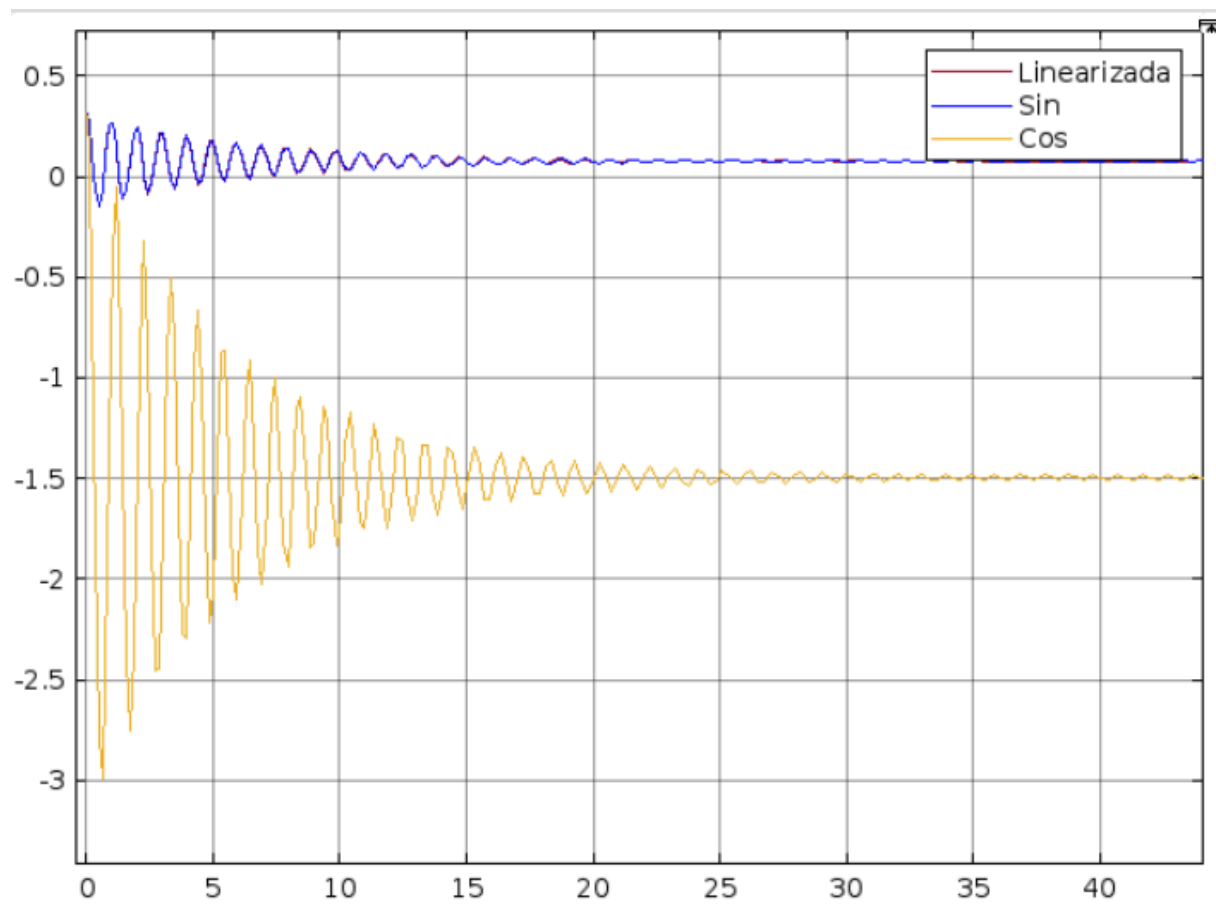
### Parámetros de simulación:

a)  $k = 0.01$ ,  $m = 0.75$ ,  $l = 0.36$ ,  $g = 9.8$ ,  $\tau = 0.1$ ,  $x_1 = \pi/20$ ,  $x_2 = 0.0$



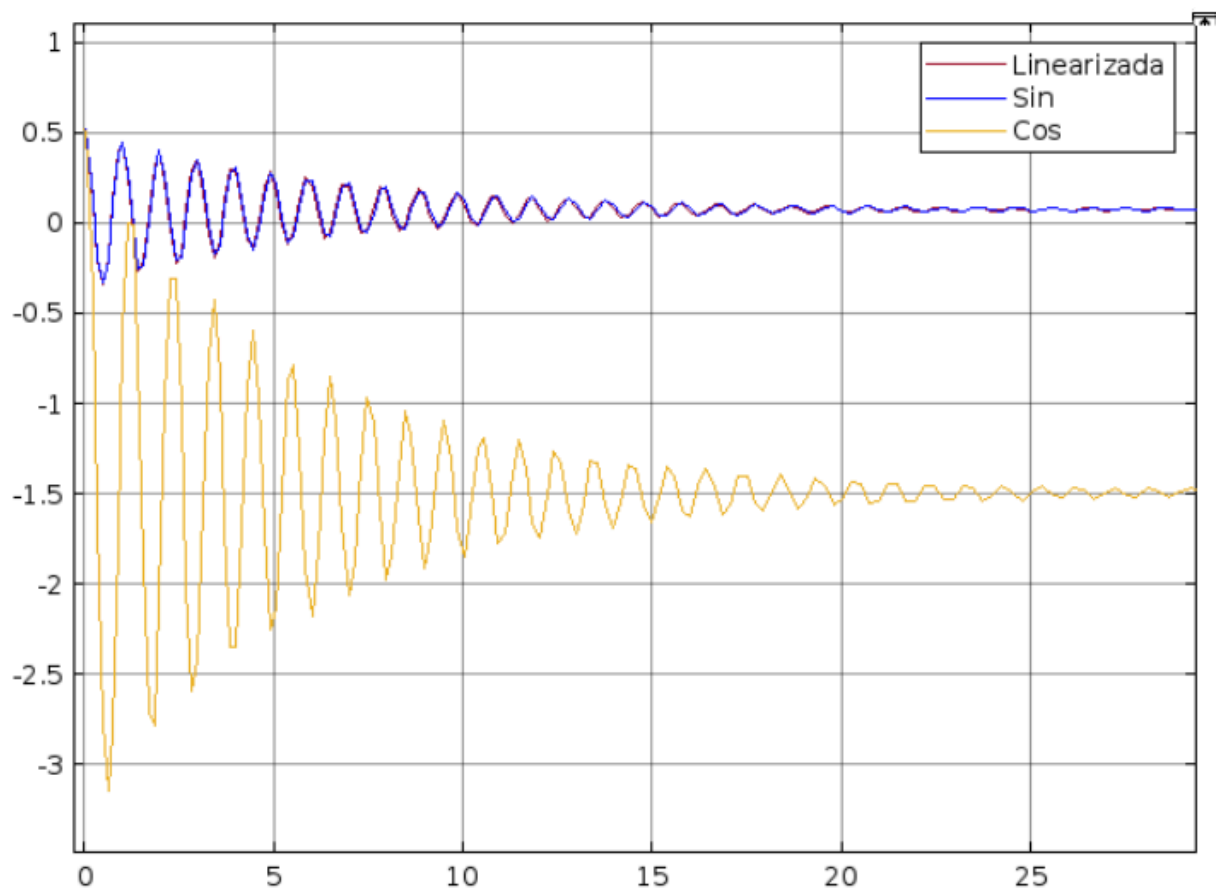
La posición sí cambia cuando se usa la función de coseno, sin embargo la función de seno y la linealizada muestran un comportamiento muy similar, siendo casi imperceptible el desfase. Esto es debido a que el ángulo aplicado no es tan grande.

b)  $k = 0.01$ ,  $m = 0.75$ ,  $l = 0.36$ ,  $g = 9.8$ ,  $\text{Tau} = 0.1$ ,  $x_1 = \pi/10$ ,  $x_2 = 0.0$



Aumenta el tamaño de los picos en ambas respuestas al aumentar el tamaño del ángulo, aunque el comportamiento sigue siendo similar al anterior, sí se nota de manera muy sutil la diferencia entre la gráfica de seno con la linealizada.

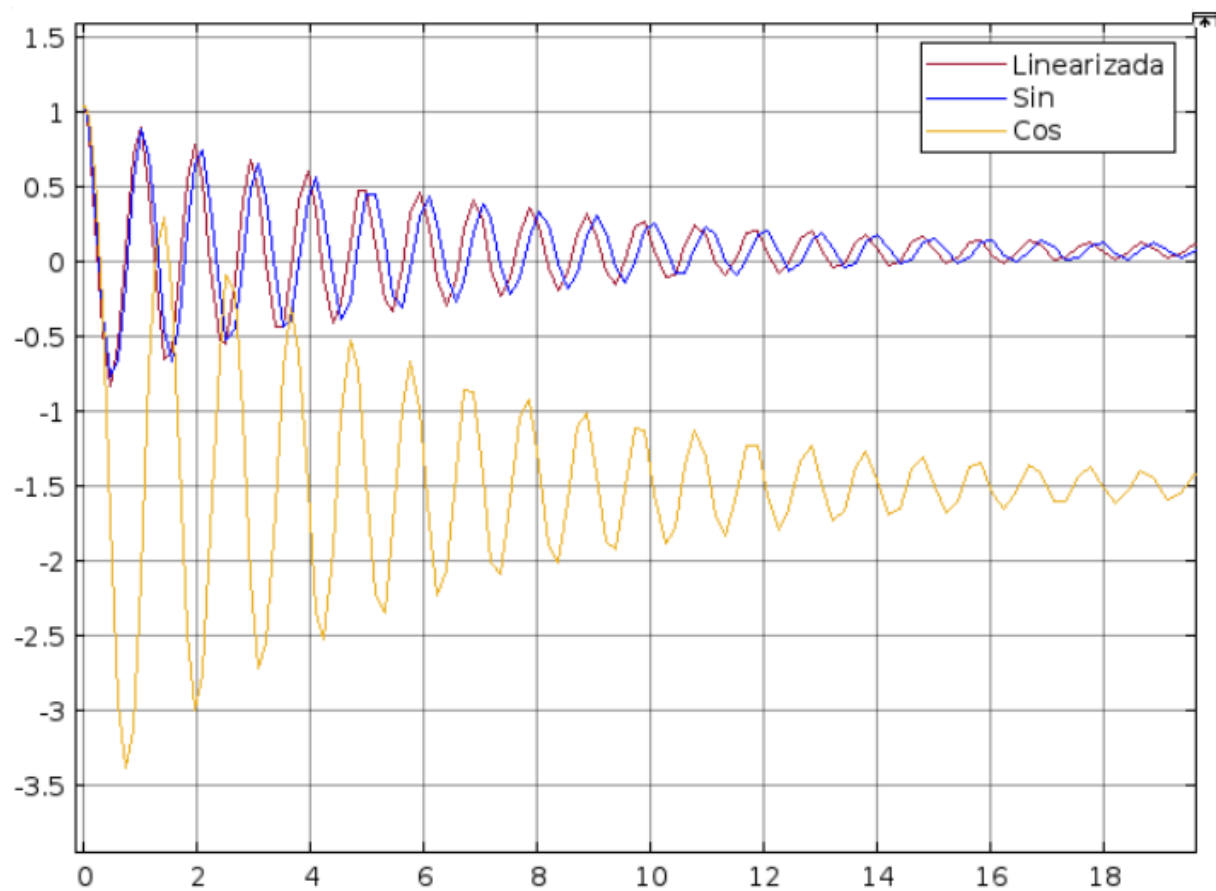
c)  $k = 0.01$ ,  $m = 0.75$ ,  $l = 0.36$ ,  $g = 9.8$ ,  $\text{Tau} = 0.1$ ,  $x_1 = \pi/6$ ,  $x_2 = 0.0$



Los cambios descritos anteriormente son los que se presentan nuevamente, ya que el cambio de los parámetros no fué algo drástico, aunque sí se observan más notorios en esta gráfica de  $\pi/6$  comparándola con la del ángulo de  $\pi/20$ .

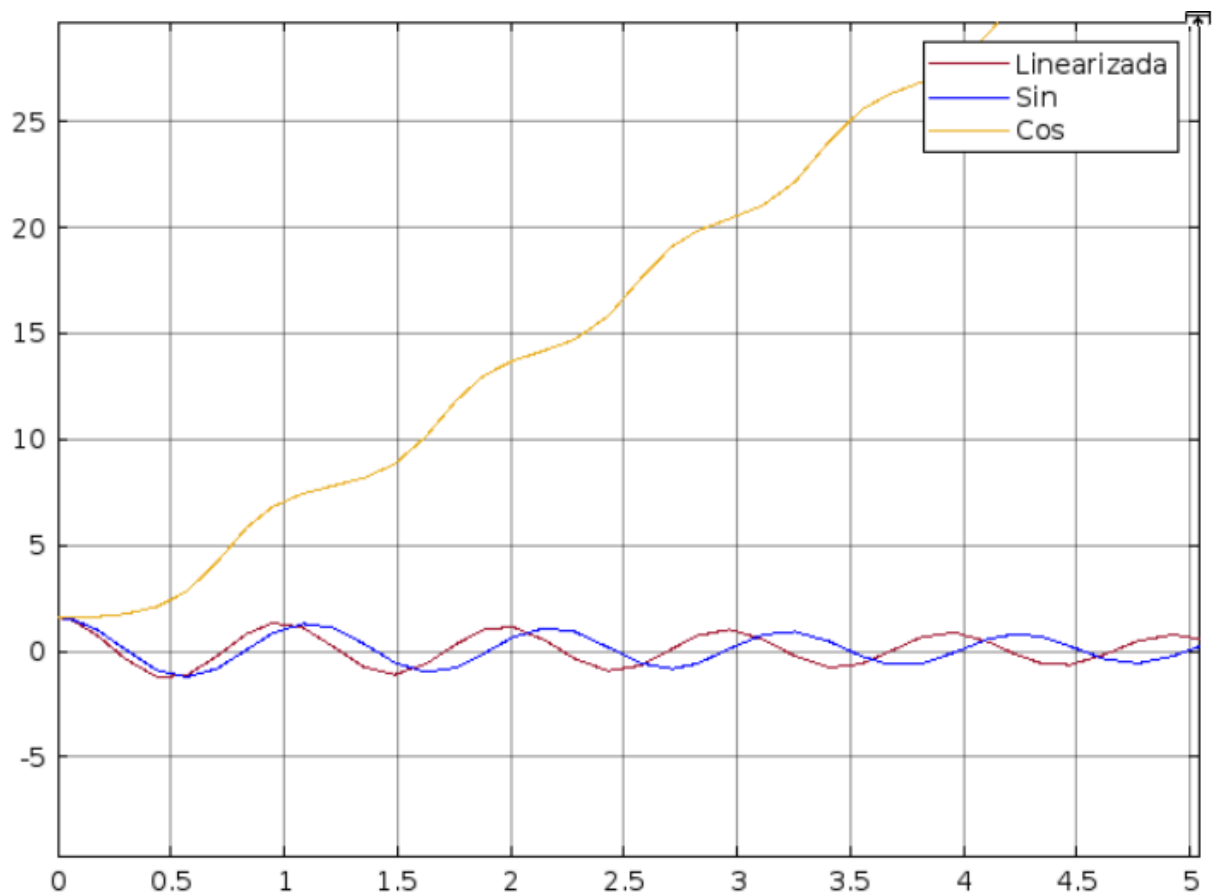


d)  $k = 0.01$ ,  $m = 0.75$ ,  $l = 0.36$ ,  $g = 9.8$ ,  $\text{Tau} = 0.1$ ,  $x_1 = \pi/3$ ,  $x_2 = 0$



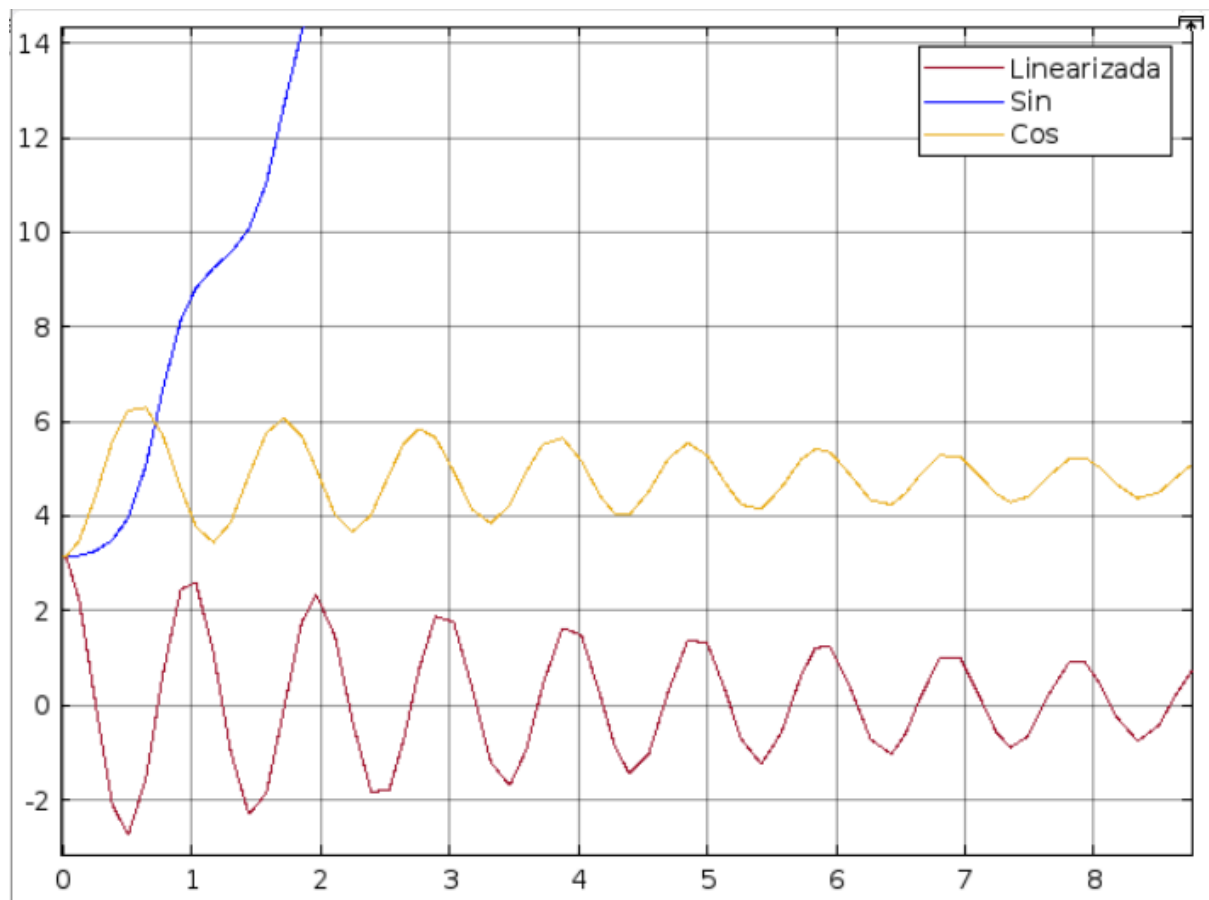
Al ser el ángulo el doble de tamaño, se nota esta vez claramente el desfase de la respuesta de seno contra la linealización, mientras más grande sea el ángulo, más se está abriendo la onda de seno. Por otro lado, las magnitudes de todas las respuestas se van ampliando, siendo más visible el cambio con las de seno y la linealizada.

e)  $k = 0.01$ ,  $m = 0.75$ ,  $l = 0.36$ ,  $g = 9.8$ ,  $\text{Tau} = 0.1$ ,  $x_1 = \pi/2$ ,  $x_2 = 0$



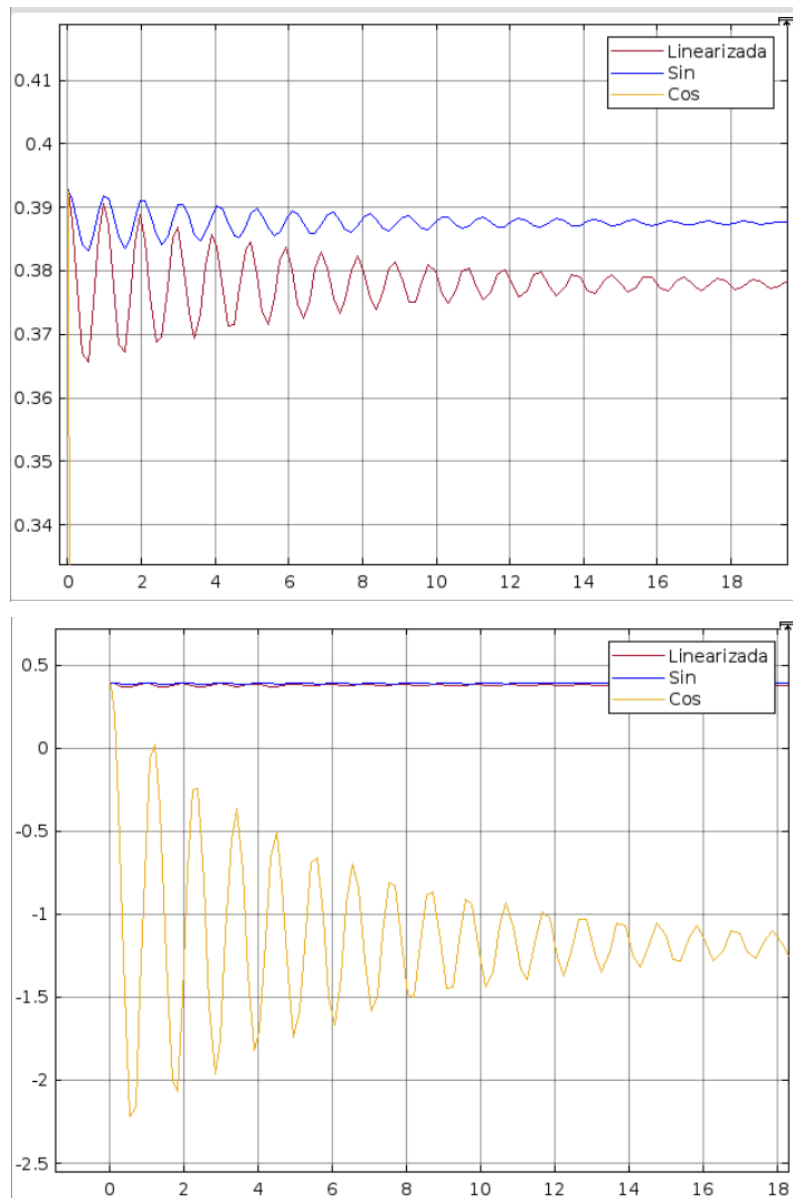
La amplitud de onda de la función de seno se abre cada vez más, generando este desfase con respecto a la función linealizada. Con la función de coseno se ve un comportamiento muy extraño, puede ser a causa de aplicar un ángulo de  $90^\circ$  directamente que se está generando ese comportamiento extraño. La gráfica va subiendo.

f)  $k = 0.01$ ,  $m = 0.75$ ,  $l = 0.36$ ,  $g = 9.8$ ,  $\text{Tau} = 0.1$ ,  $x_1 = \pi$ ,  $x_2 = 0$



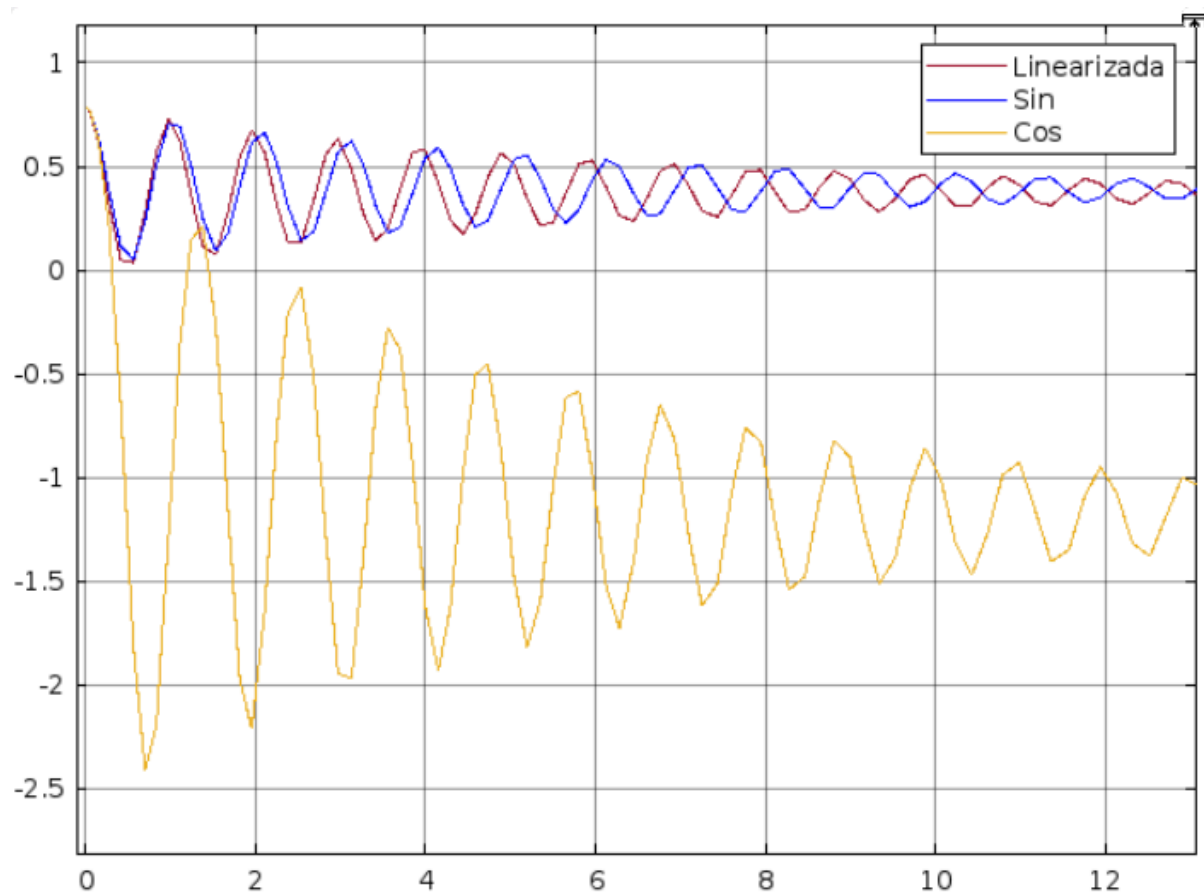
Se repite un poco el comportamiento del caso anterior pero esta vez con la función seno, al aplicarle un ángulo de  $180^\circ$  grados, la gráfica va subiendo, lo cual podría significar que sí se debe al ángulo que está aplicando.

g)  $k = 0.01, m = 0.75, l = 0.36, g = 9.8, \text{Tau} = 0.5, x_1 = \pi/8, x_2 = 0$



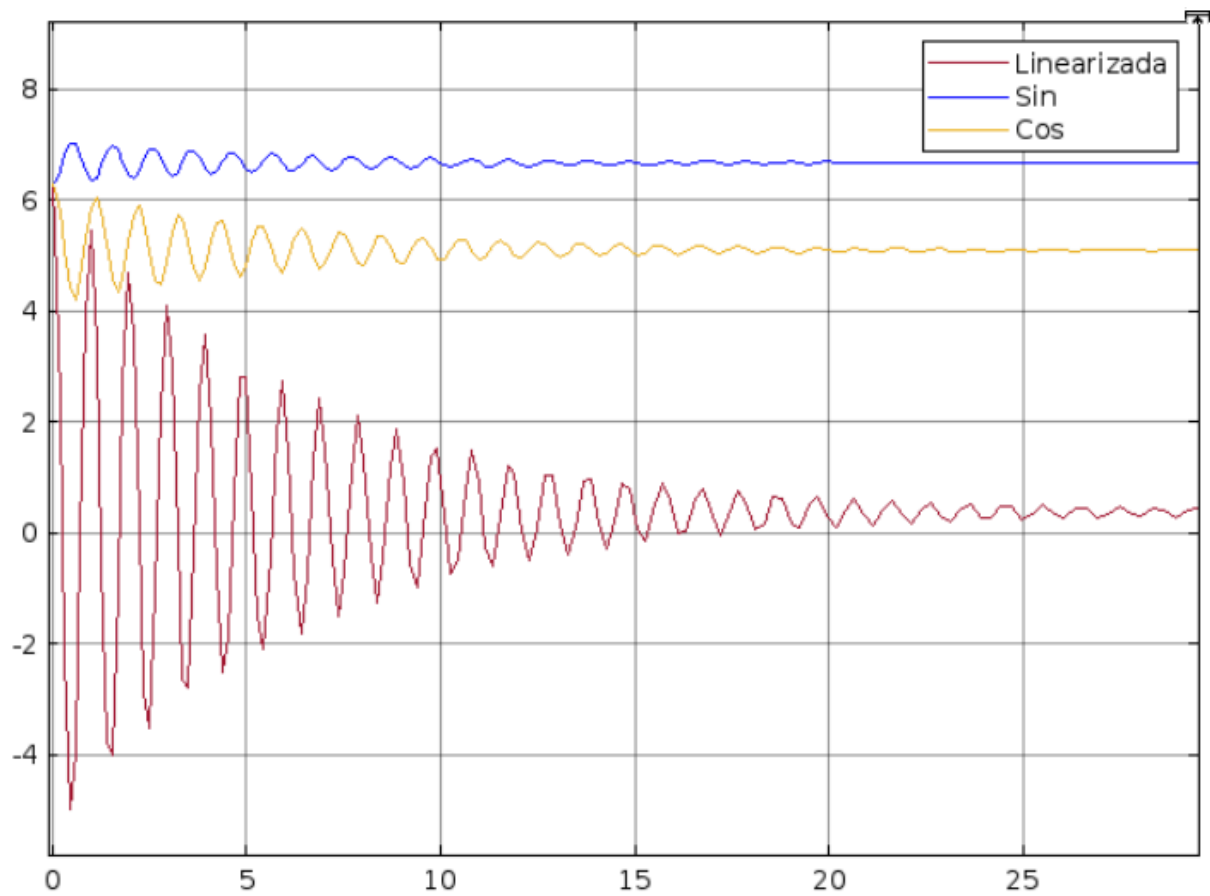
El comportamiento sí se observa muy diferente entre la respuesta de la linealización y seno, contra el coseno, debido al cambio de Tau, las magnitudes de las ondas son completamente diferentes, podrían irse acercando más conforme vaya creciendo el ángulo. Aunque el comportamiento del seno respecto al ángulo parece mantenerse.

h)  $k = 0.01$ ,  $m = 0.75$ ,  $l = 0.36$ ,  $g = 9.8$ ,  $\text{Tau} = 0.5$ ,  $x_1 = \pi/4$ ,  $x_2 = 0$



Como se dijo anteriormente, efectivamente aumentó el alcance de las gráficas a causa del ángulo. Siendo este cambio más notorio en las respuestas del seno y la linealizada, y tal y como se venía observando, se percibe el mismo desfase en crecimiento de la gráfica de seno con respecto a la de la función linealizada.

i)  $k = 0.01$ ,  $m = 0.75$ ,  $l = 0.36$ ,  $g = 9.8$ ,  $\tau = 0.5$ ,  $x_1 = 2\pi$ ,  $x_2 = 0$



Por último vemos como las respuestas del seno y la linealización se separan bastante más que en los casos anteriores, lo cuál confirma que sí el ángulo es más grande, estas dos serán menos iguales. Además de que las magnitudes de todas las respuestas aumentan mucho, aunque sí el torque fuese menor este cambio sería más rápido o notorio.