

Temat: Test zmodyfikowanej dynamiki Newtona z nowymi krzywymi rotacji galaktyk

Promotor: dr hab. Jan Franz

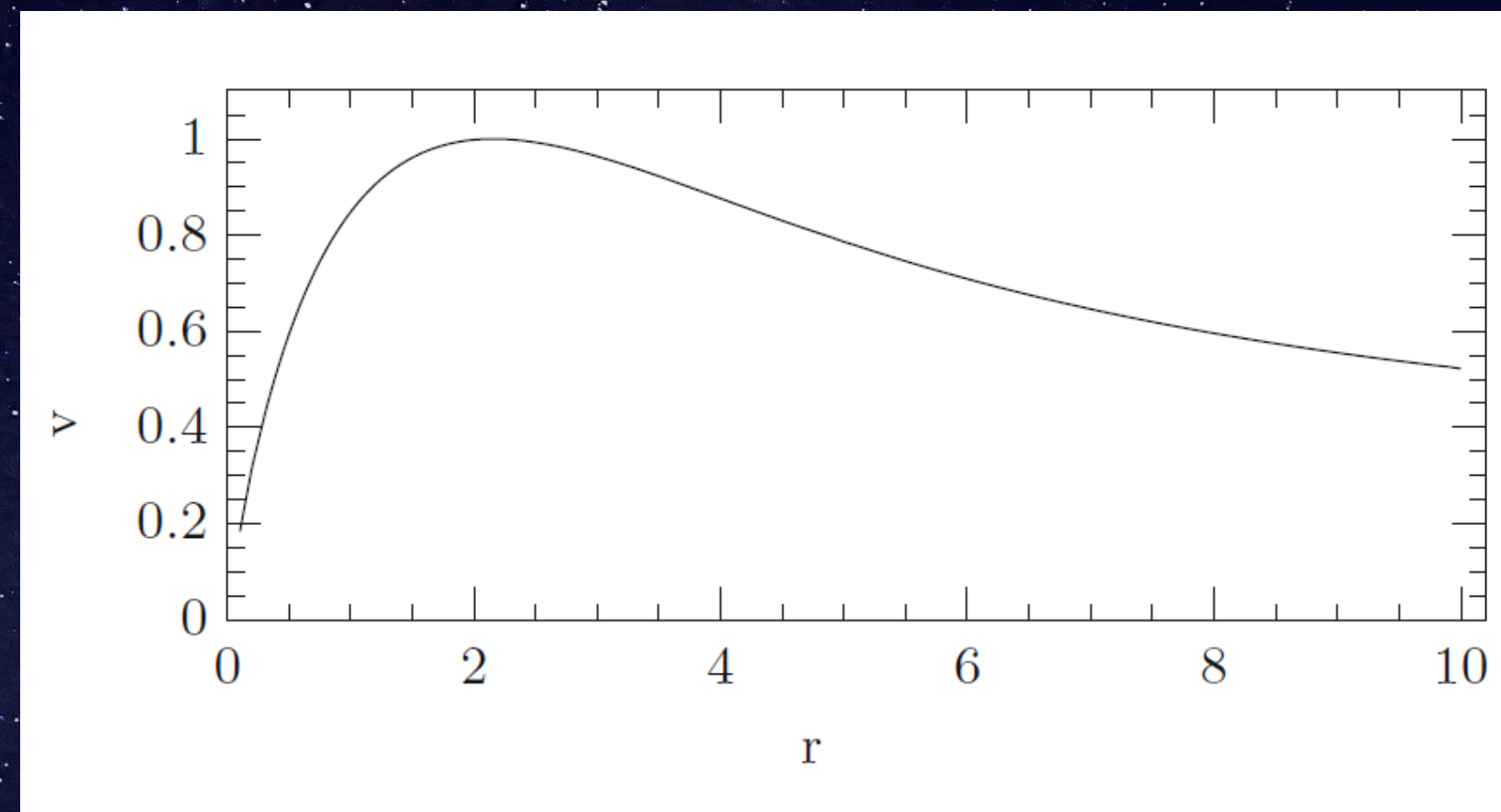
Milena Węsiora

Wstęp

Od zarania dziejów ludzkość obserwuje otaczającą rzeczywistość, usiłując odpowiedzieć na pytanie, jakie prawa nią rządzą. Na podstawie tych obserwacji tworzy, za pomocą formalizmu matematycznego, uniwersalne modele, które próbują ją opisać. Jeszcze do początku XX za taki model była powszechnie uznawana dynamika Newtona, jednak odkrycia na polu mechaniki kwantowej jednoznacznie obaliły przekonanie o jej uniwersalności. Z kolei w latach 70-tych XX wieku zespół Vera Rubina i innych przeprowadził badania krzywych rotacji galaktyk, które wykazały, że obserwowane krzywe nie pasują do przewidywań mechaniki Newtona.

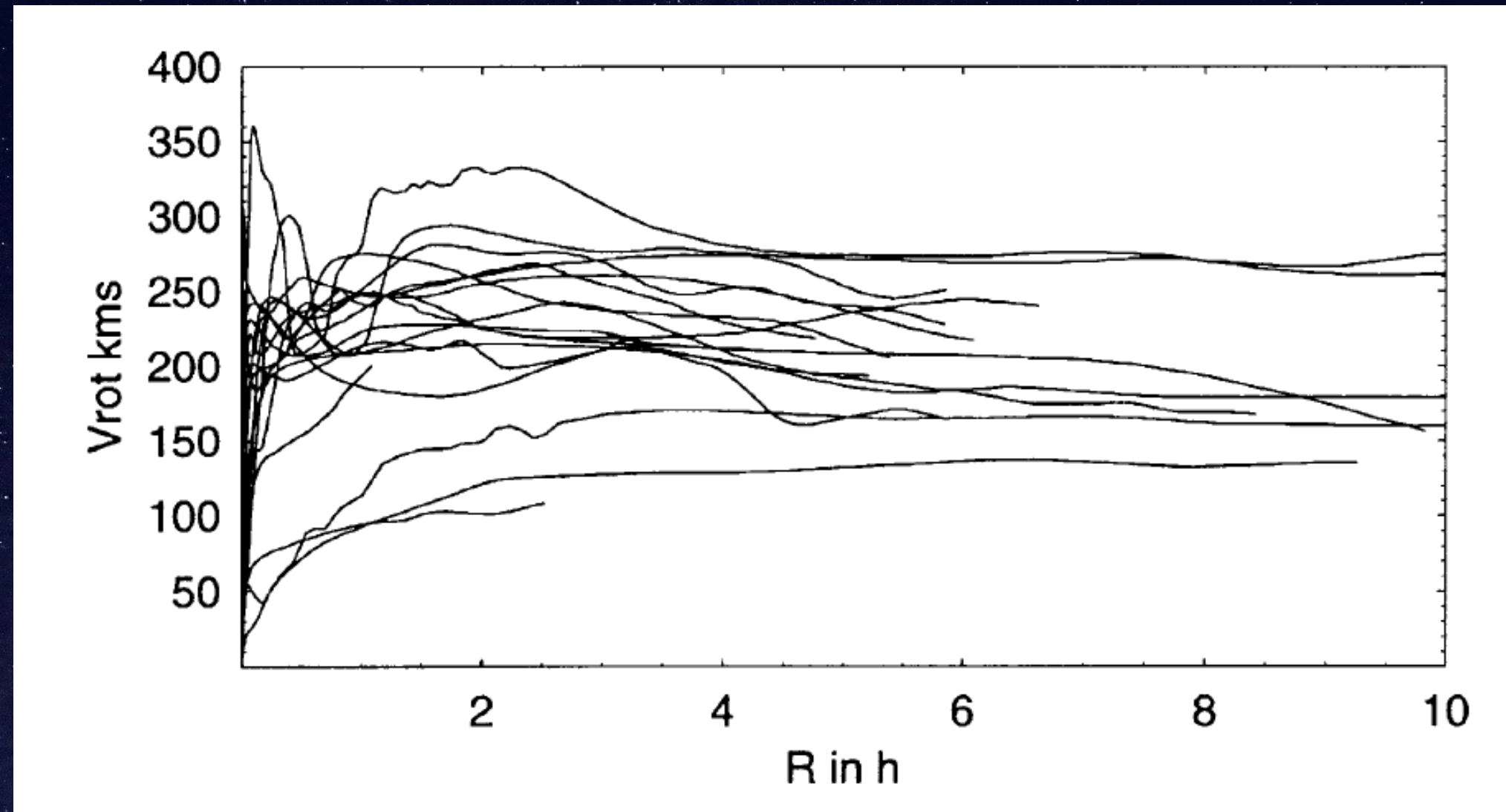
Przewidywana krzywa rotacji

Według praw Newtona i obserwowanego rozkładu materii w galaktyce krzywa rotacji galaktyki, przedstawiająca przewidywane prędkości gwiazd v w danej odległości r od jej środka, powinna "opadać" na jej końcowym odcinku.



Rzeczywiste krzywe rotacji

Uzyskiwane z pomiarów prędkości orbitalne gwiazd jednak nie maleją wraz z odległością od centrum, a w pewnej odległości stają się niemal stałe, niezależne od odległości r , bądź rosną wraz ze wzrostem tej odległości.



Zmodyfikowana dynamika Newtona

- twórca: M. Milgrom (1986)
- **alternatywna teoria** dla teorii ciemnej materii, będącej jedną z hipotez tłumaczących rozbieżności pomiędzy danymi obserwacyjnymi, a danymi teoretycznymi, które wynikają z zastosowania dynamiki Newtona
- założenie: w przypadku oddziaływań bardzo słabych II zasada dynamiki Newtona (w skali galaktycznej równoważna prawu powszechnej grawitacji) ulega **modyfikacji**

Wówczas równanie Newtona przyjmuje postać:

$$\vec{F}_{\text{grav}}(r) = -m\vec{a}_N(r) = -m\mu(x)\vec{a}_M(r),$$

gdzie: \vec{a}_M to wektor przyspieszenia w modelu MOND, $\mu(x)$ spełnia rolę funkcji interpolacyjnej, a jej argument $x = \frac{a_M}{a_0}$, w którym a_0 jest stałą o wymiarze przyspieszenia. Wartość stałej a_0 jest równa w przybliżeniu $1,0 \cdot 10^{-8} \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$. Dla dużej wartości przyspieszenia, gdy $a_M \gg a_0$, funkcja $\mu(x)$ osiąga wartość:

$$\mu\left(\frac{a_M}{a_0}\right) = 1 \ .$$

W takim przypadku zmodyfikowana dynamika Newtona jest równoważna klasycznej dynamice Newtona. Druga zasada dynamiki Newtona ulega modyfikacji dla bardzo małych przyspieszeń. Gdy $a_M \ll a_0$, wówczas funkcja interpolacyjna przyjmuje postać:

$$\mu\left(\frac{a_M}{a_0}\right) = \frac{a_M}{a_0} \ .$$

Cel projektu

Przetestowanie modelu MOND (ang. M^Odified Newtonian Dynamics) do opisu nowych, dokładnych danych dla krzywych rotacji galaktyk zarejestrowanych za pomocą teleskopu Spitzera, opublikowanych w artykule: F. Lelli, S. S. McGaugh, and J. M. Schombert, SPARC: mass models for 175 disk galaxies with Spitzer photometry and accurate rotation curves, *The Astronomical Journal*, 152 (2016) 157..

Podjęte działanie

Stworzenie programu, który optymalizuje **parametr α_0** modelu MOND w taki sposób, aby pasował do danych obserwacyjnych z pracy F. Lelliiego, a następnie wygeneruje **wykresy z krzywymi rotacji** dla wszystkich 175 galaktyk.

Wykorzystane technologie oraz biblioteki

- język programowania: Python v3.10
- środowisko: PyCharm v2021.3.1 (Community Edition)
- biblioteki: Scikit-learn v1.0.2, NumPy v1.22.0, SciPy v1.7.3, Matplotlib v3.5.1, OpenPyXL v3.0.9

Funkcje programu

1. Odczyt danych z katalogu pobranego z bazy **SPARC** (Spitzer Photometry and Accurate Rotation Curves).
2. Dopasowanie stałej a_0 modelu MOND do danych obserwacyjnych dla każdej z galaktyk poprzez znalezienie minimum **średniego błędu kwadratowego**.
3. Wizualizacja krzywych rotacji na wykresie.
4. Zapis wyników do tabeli.
5. Stworzenie histogramu.

1. Odczyt danych

Wykorzystane dane krzywych rotacji dla 175 galaktyk są dostępne na stronie: astroweb.cwru.edu/SPARC/ w formie spakowanych plików w formacie **DAT**. Jest to format, który umożliwia bezpośredni odczyt danych do tablicy **ndarray** w Pythonie dzięki funkcji **loadtxt** dostępnej w bibliotece **NumPy**.

Odczyt pojedynczego pliku:

```
data = np.loadtxt(f'{input_directory_name}/{file_name}', unpack=True)
```


1. Odczyt danych

Zawartość przykładowego pliku DAT dla galaktyki NGC7814:

```
# Distance = 14.4 Mpc
# Rad      Vobs      errV      Vgas      Vdisk      Vbul      SBdisk      SBbul
# kpc      km/s      km/s      km/s      km/s      km/s      L/pc^2      L/pc^2
0.63      265.00      15.00      -0.69      39.69      345.22      482.94      6648.99
1.72      250.00      15.00      -2.33      81.63      298.99      314.38      709.44
2.79      233.00      7.29       -3.94      104.82     255.24      206.27      199.44
3.91      230.00      6.45       -5.06      118.95     225.30      132.93      74.66
5.03      228.00      5.37       -3.48      122.96     203.41      76.78       26.96
6.14      228.00      5.16       1.40       120.03     186.27      47.70       9.82
7.26      227.00      5.94       -1.38      115.88     172.25      31.38       3.55
8.37      226.00      3.00       5.96       113.50     160.83      22.99       1.29
9.50      223.00      3.92       11.22      109.97     151.12      14.94       0.47
10.65     219.00      2.90       16.09      105.99     142.79      9.90        0.16
11.74     216.00      2.55       18.57      102.02     136.04      6.36        0.06
12.82     214.00      2.55       19.07      97.84      130.19      4.05        0.02
14.01     214.00      3.07       17.78      93.27      124.54      2.46        0.01
15.09     214.00      3.61       20.16      89.43      120.01      1.62        0.00
16.18     214.00      4.46       23.24      85.93      115.89      1.06        0.00
17.36     214.00      5.07       23.44      82.48      111.88      0.66        0.00
18.44     214.00      4.78       23.34      79.67      108.55      0.43        0.00
19.53     214.00      4.87       22.64      77.35      105.49      0.00        0.00
```

Kolumny oznaczają kolejno:

- (1) odległość radialną od środka galaktyki w $[kpc]$,
- (2) prędkość radialną obserwowaną w $\left[\frac{km}{s}\right]$,
- (3) błąd pomiaru prędkości radialnej w $\left[\frac{km}{s}\right]$,
- (4) prędkość gazu w $\left[\frac{km}{s}\right]$,
- (5) prędkość dysku galaktycznego w $\left[\frac{km}{s}\right]$,
- (6) prędkość centralnego zgrubienia galaktycznego w $\left[\frac{km}{s}\right]$,
- (7) jasność powierzchniową dysku galaktycznego w $\left[\frac{L}{pc^2}\right]$,
- (8) jasność powierzchniową centralnego zgrubienia galaktycznego w $\left[\frac{L}{pc^2}\right]$.

1. Odczyt danych

Dostęp do poszczególnych kolumn załadowanej tablicy:

```
X = data[0]           # radial distances column
y = data[1]           # observed velocities column
errV = data[2]         # error observed velocities
v_gas = data[3]        # velocity of the gas column
v_disk = data[4]       # velocity of the stellar disk column
v_bul = data[5]        # velocity of the bulge column
```


2. Dopasowanie

Dopasowanie stałej a_0 modelu MOND do danych obserwacyjnych zostało dokonane poprzez znalezienie minimum średniego błędu kwadratowego (MSE - mean squared error), który wyrażony jest wzorem:

$$MSE(y, \tilde{y}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} (y_i - \tilde{y}_i)^2,$$

gdzie:

N - liczba próbek (punktów pomiarowych),

y_i - wartość prawdziwa (obserwowana) i-tej próbki,

\tilde{y}_i - wartość przewidywana i-tej próbki.

2. Dopasowanie

Równanie wykorzystane do optymalizacji stałej a_0 , przedstawiające zależność prędkości radialnej galaktyki zgodnie z modelem MOND V_m od jej prędkości zgodnie z klasyczną dynamiką Newtona V_{sum} i stałej a_0 jest postaci:

$$v_M^2 = v_{sum}^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2ra_0}{v_{sum}^2}\right)^2}} .$$

2. Dopasowanie

$$v_M^2 = v_{\text{sum}}^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2ra_0}{v_{\text{sum}}^2}\right)^2}}.$$

Gdzie suma prędkości V_{sum} oraz wartość początkowa parametru a_0 :

$$v_{\text{sum}}^2 = \Upsilon_{\text{disk}} v_{\text{disk}}^2 + \Upsilon_{\text{bulge}} v_{\text{bulge}}^2 + v_{\text{gas}}^2, \quad a_0 = 3085.7 \frac{\text{km}^2}{\text{s}^2 \text{kpc}}$$

przy czym przyjęto stałe:

$$\Upsilon_{\text{disk}} = 0,5 \text{ oraz } \Upsilon_{\text{bulge}} = 0,7$$

2. Dopasowanie

Biblioteka **Scikit-learn** w module **metrics** posiada zaimplementowaną funkcję o nazwie **mean_squared_error** pozwalającą na wygodne obliczenie MSE. Po zdefiniowaniu wyrażenia na sumę prędkości:

```
def velocity_sum(Vdisc, Vgas, Vbul):  
  
    Vsum = []  
  
    for vd, vg, vb in zip(Vdisc, Vgas, Vbul):  
        result = sqrt(vg * vg + 0.5 * (vd * vd) + 0.7 * (vb * vb))  
        Vsum.append(result)  
  
    return Vsum
```


2. Dopasowanie

oraz funkcji dopasowania dla modelu MOND:

```
def fitting_function(a, X, Vsum): # MOND function - returns list Vobs => y, r => X

    new_y = []

    for r, v in zip(X, Vsum):
        result = sqrt(
            (pow(v, 2) / sqrt(2)) * sqrt(1 + sqrt(1 + pow(2 * r * a / pow(v, 2), 2)))) # result - new y (after MOND)
        new_y.append(result)

    return new_y
```

gdzie:

a - poszukiwany parametr przyspieszenia,

X - wektor odległości radialnych od środka galaktyki,

Vsum - wektor sumy prędkości

2. Dopasowanie

w celu obliczenia średniego błędu kwadratowego wystarczyło napisanie funkcji:

```
def square_error(a, X, Vsum, Vobs):  
  
    Vobs_calculated = fitting_function(a, X, Vsum)  
    return mean_squared_error(Vobs, Vobs_calculated) #średni błąd kwadratowy (MSE)
```

gdzie:

Vobs - wektor prędkości orbitalnej obserwowanej

Vobs_calculated - wektor prędkości przewidywanej przez model MOND

2. Dopasowanie

Aby wyznaczyć parametr a_0 , konieczne było znalezienie minimum średniego błędu kwadratowego. Użyteczną funkcję do szybkiego jego obliczenia oferuje biblioteka **SciPy** w module **optimize** o nazwie **fmin**:

```
# optimal a0 is minimum of the function 'square_error'  
minimum = fmin(square_error, np.array([a_starting]), (X, v_sum, y))  
a0_optimal = minimum[0]
```


2. Dopasowanie

```
# optimal a0 is minimum of the function 'square_error'  
minimum = fmin(square_error, np.array([a_starting]), (X, v_sum, y))  
a0_optimal = minimum[0]
```

Argumenty, które przyjmuje fmin to kolejno:

square_error – funkcja, której minimum jest liczone,

np.array([a_starting]) – tablica wartości początkowych szukanych parametrów, gdzie a_starting to pierwsza znaleziona wartość parametru a0

(X, v_sum, y) – krotka z dodatkowymi argumentami przyjmowanymi przez minimalizowaną funkcję square_error, gdzie **X** - wektor odległości radialnych, **v_sum** – wektor sumy prędkości, **y** – wektor obserwowanych prędkości radialnych.

Zwracany przez funkcję wynik jest tablicą, której kolejne elementy są poszukiwanymi parametrami. W tym przypadku jest to szukany, **optymalny parametr a0**, który został przypisany do zmiennej **optimal_a0**.

3. Wizualizacja krzywych

Dane obserwacyjne odczytane z plików **DAT** wraz z obliczoną **krzywą rotacji na podstawie modelu MOND** dla optymalnej wartości stałej a_0 oraz **krzywą rotacji z klasycznego modelu Newtona** są następnie wizualizowane na wykresie zależności prędkości rotacji od odległości radialnej przez program za pomocą funkcji **plot** z modułu **pyplot** biblioteki Matplotlib.

Każdy ze 175 wykresów dla danej galaktyki jest zapisywany w folderze programu w formacie obrazu **PNG** za pośrednictwem funkcji **savefig** z tego samego modułu pyplot biblioteki Matplotlib.

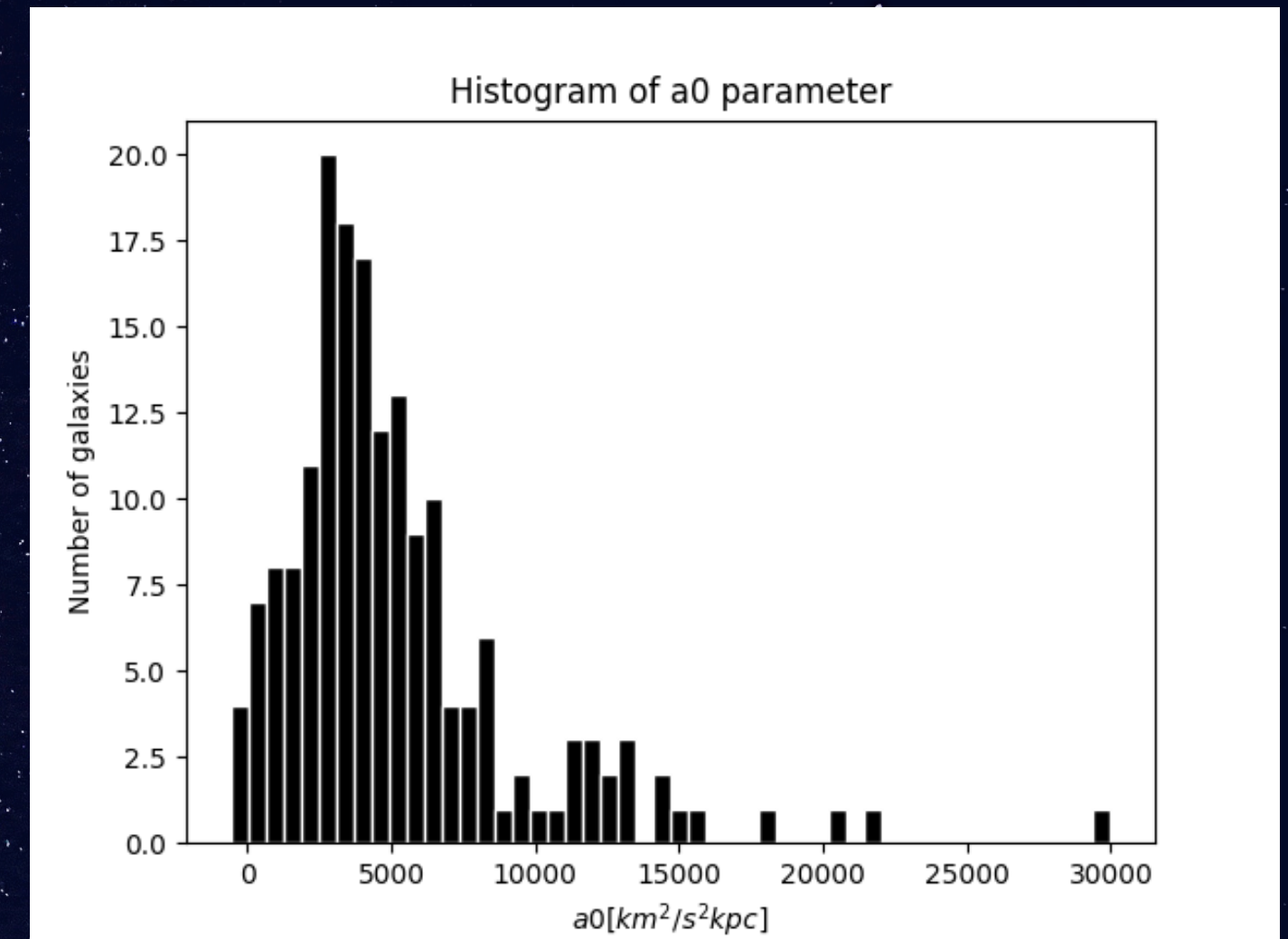
4. Zapis wyników do tabeli

Uzyskane wyniki obliczonych wartości a_0 oraz błędów RMSE (root mean squared error) dla obu krzywych zostają następnie zapisane w tabeli w formacie **XLSX**. W tym celu zaimportowano moduł **Workbook** biblioteki **OpenPyXL**.

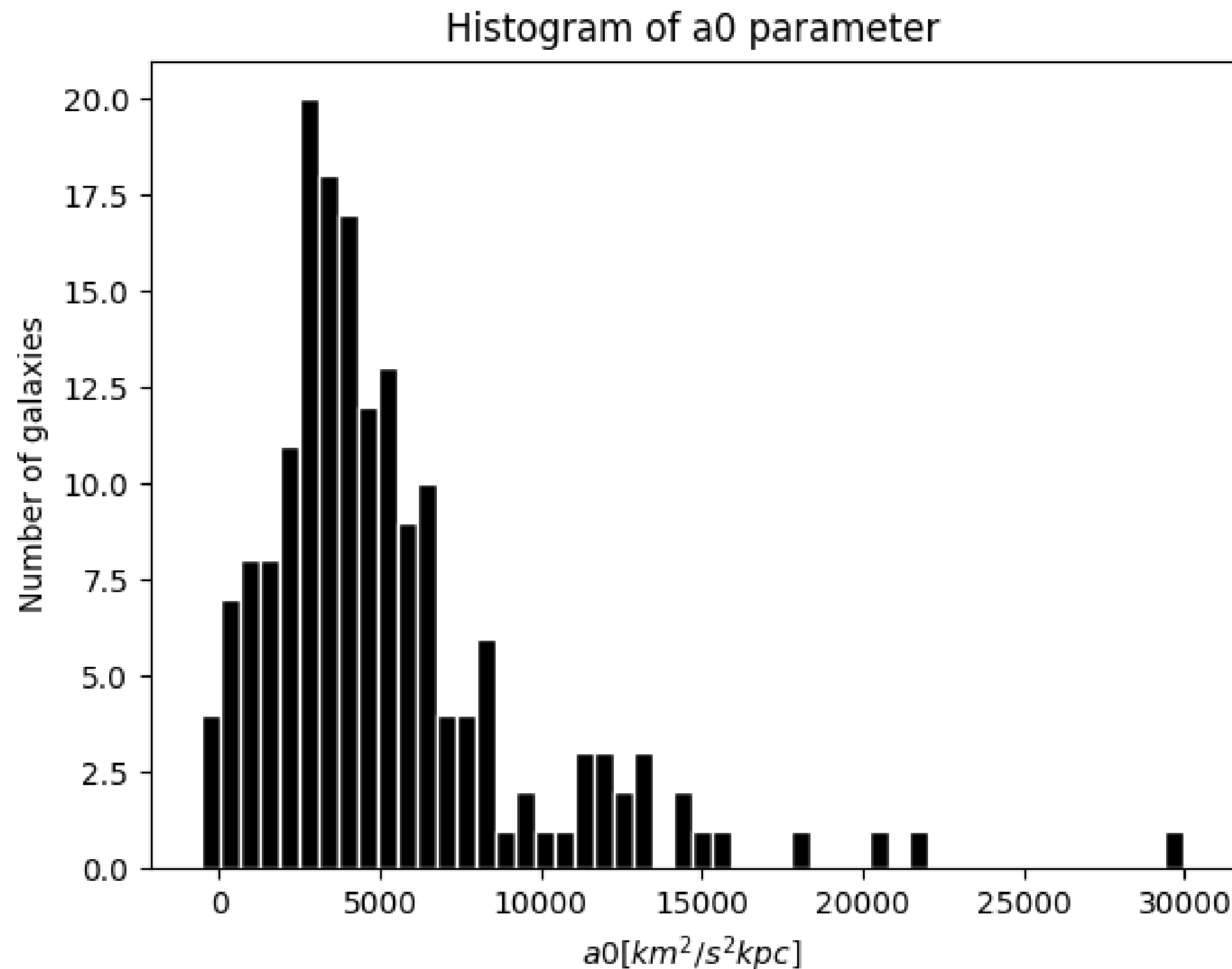
	A	B	C	D	E
1	galaktyka	a_0	MOND RMSE	Newton RMSE	
2	CamB	94,48	3,15	3,36	
3	D512-2	2083,61	1,55	17,69	
4	D564-8	1223,83	1,83	11,65	
5	D631-7	2573,07	7,77	26,33	
6	DDO064	3520,13	2,52	17,87	
7	DDO154	2982,46	2,39	23,71	
8	DDO161	1293,21	3,39	23,32	
9	DDO168	2797,9	5,1	21,02	
10	DDO170	1646,48	2,55	27,33	
11	ESO079-G	6635,35	9,39	55,75	
12	ESO116-G	7285,86	4,07	46,78	
13	ESO444-G	11109,63	2,38	33,35	
14	ESO563-G	11771,01	24,45	117,98	
15	F561-1	-398,48	4,56	9,59	
16	F563-1	8368,56	12,37	62,48	
17	F563-V1	141,38	2,81	4,95	
18	F563-V2	12252,17	13,12	59,04	
19	F565-V2	6231,1	4,21	41,09	
20	F567-2	943,2	4,76	18,93	
21	F568-1	14953,59	13,47	69,7	
22	F568-3	4627,35	8,13	44,56	
23	F568-V1	13020,19	12,81	65,5	
24	F571-8	6317,99	24,31	55,62	
25	F571-V1	3279,42	3,32	39,79	

5. Stworzenie histogramu

Obliczone wartości stałej a_0 dla każdej z galaktyk są przedstawiane przez program w postaci histogramu. Umożliwia to funkcja **hist** z modułu **pyplot** biblioteki Matplotlib. Stworzony w ten sposób histogram jest zapisywany w głównym katalogu programu za pomocą funkcji **savefig** z tego samego modułu.



Wyniki - histogram



Okolo 30% wszystkich galaktyk posiada wartości stałej a_0 mieszczące się w przedziale od 2500 do 4375 $\text{km}^2/\text{s}^2 \text{kpc}$, z czego największą liczbę stanowią galaktyki z wartością a_0 mieszczącą się w przedziale od 2500 do 3125 $\text{km}^2/\text{s}^2 \text{kpc}$.

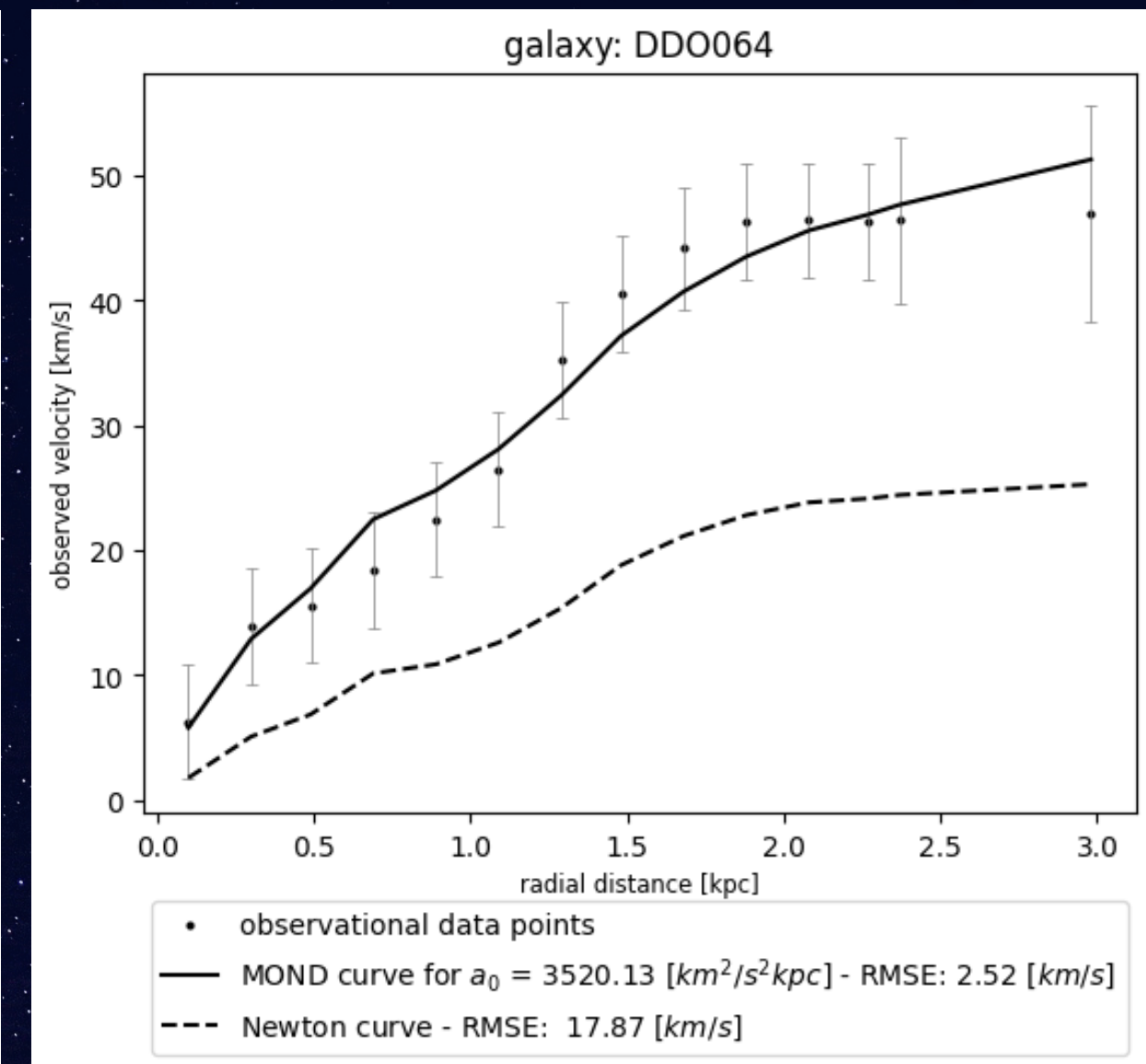
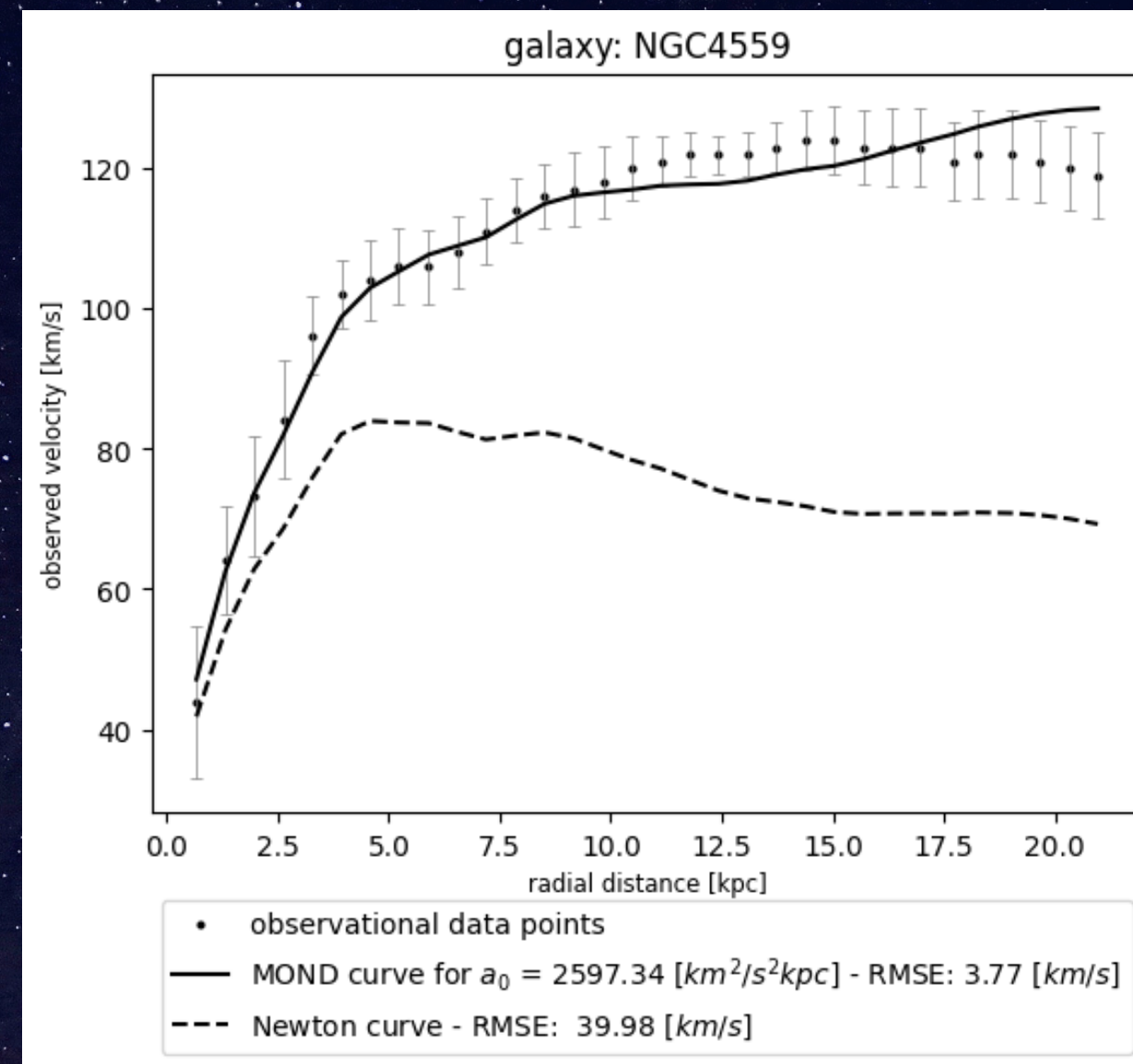
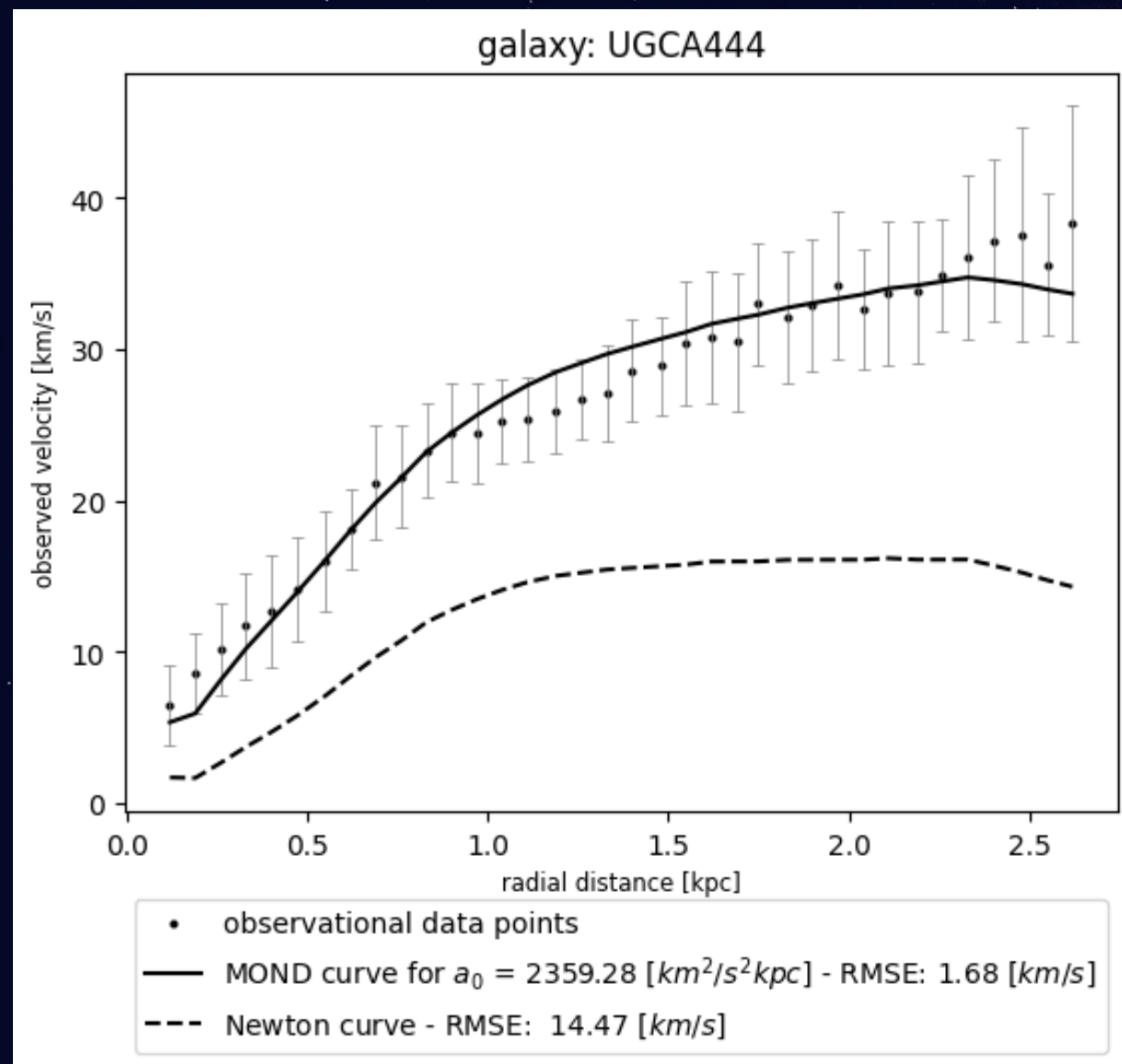
Wyniki - tabela z wynikami obliczeń

Nazwa katalogowa galaktyki	$a_0 \left[\frac{km^2}{s^2 kpc} \right]$	$MOND \ RMSE \left[\frac{km}{s} \right]$	$Newton \ RMSE \left[\frac{km}{s} \right]$
CamB	94,48	3,15	3,36
D512-2	2083,61	1,55	17,69
D564-8	1223,83	1,83	11,65
D631-7	2573,07	7,77	26,33
DDO064	3520,13	2,52	17,87
DDO154	2982,46	2,39	23,71
DDO161	1293,21	3,39	23,32
DDO168	2797,9	5,1	21,02
DDO170	1646,48	2,55	27,33
ESO079-G014	6635,35	9,39	55,75
ESO116-G012	7285,86	4,07	46,78
ESO444-G084	11109,63	2,38	33,35
ESO563-G021	11771,01	24,45	117,98
F561-1	-398,48	4,56	9,59
F563-1	8368,56	12,37	62,48
F563-V1	141,38	2,81	4,95
F563-V2	12252,17	13,12	59,04
F565-V2	6231,1	4,21	41,09
F567-2	943,2	4,76	18,93
F568-1	14953,59	13,47	69,7
F568-3	4627,35	8,13	44,56
F568-V1	13020,19	12,81	65,5
F571-8	6317,99	24,31	55,62
F571-V1	3279,42	3,32	39,79
F574-1	5791,51	7,55	48,53
F574-2	55,38	2,55	2,8
F579-V1	7128,73	16,48	55,6
F583-1	5007,28	9,74	37,6
F583-4	3096,86	1,5	28,26
IC2574	1558,4	3,44	23,78
IC4202	6705,35	25,16	69,12
KK98-251	937,75	1,94	9,24
NGC0024	15758,16	8,13	47,18
NGC0055	1974,81	3,31	30,1
NGC0100	4327,22	5,31	37,3
NGC0247	3899,39	4,05	44,34

Niemal we wszystkich galaktykach błąd RMSE jest znacznie mniejszy dla krzywej MOND niż krzywej Newtona, co wskazywałoby, iż testowany model MOND opisuje dane obserwacyjne zdecydowanie lepiej niż klasyczna dynamika Newtona, a w pewnych przypadkach wręcz bardzo trafnie.

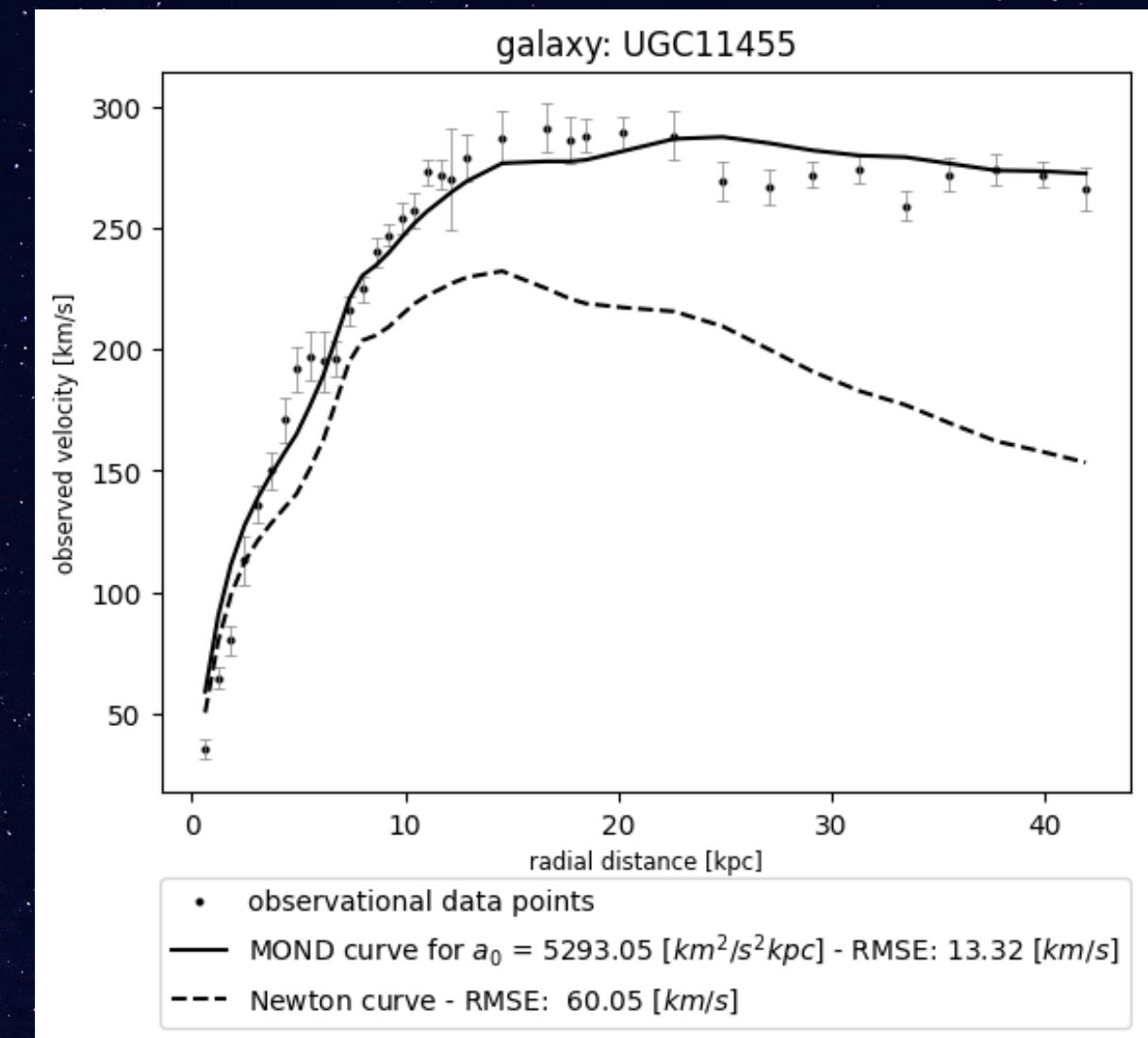
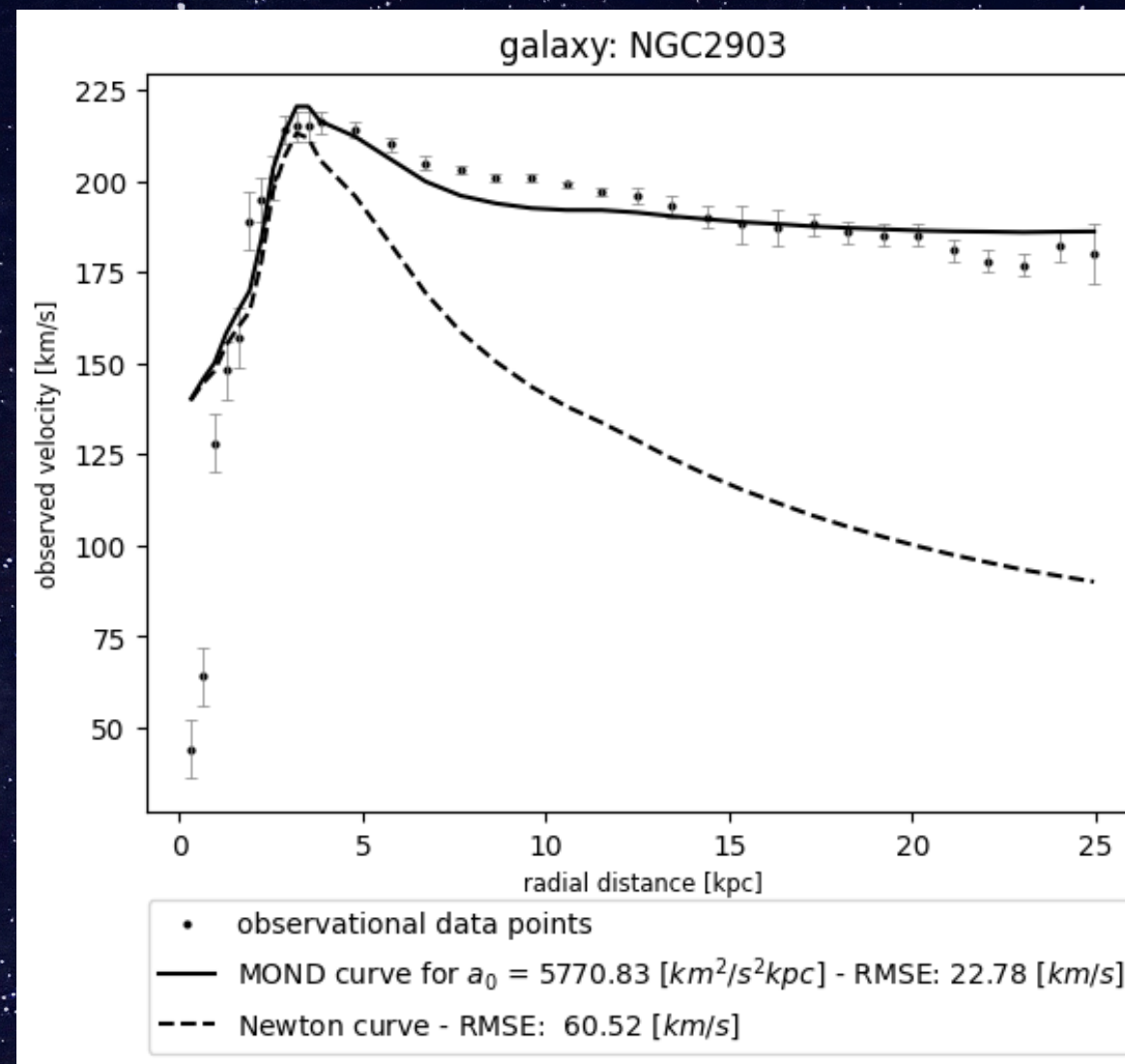
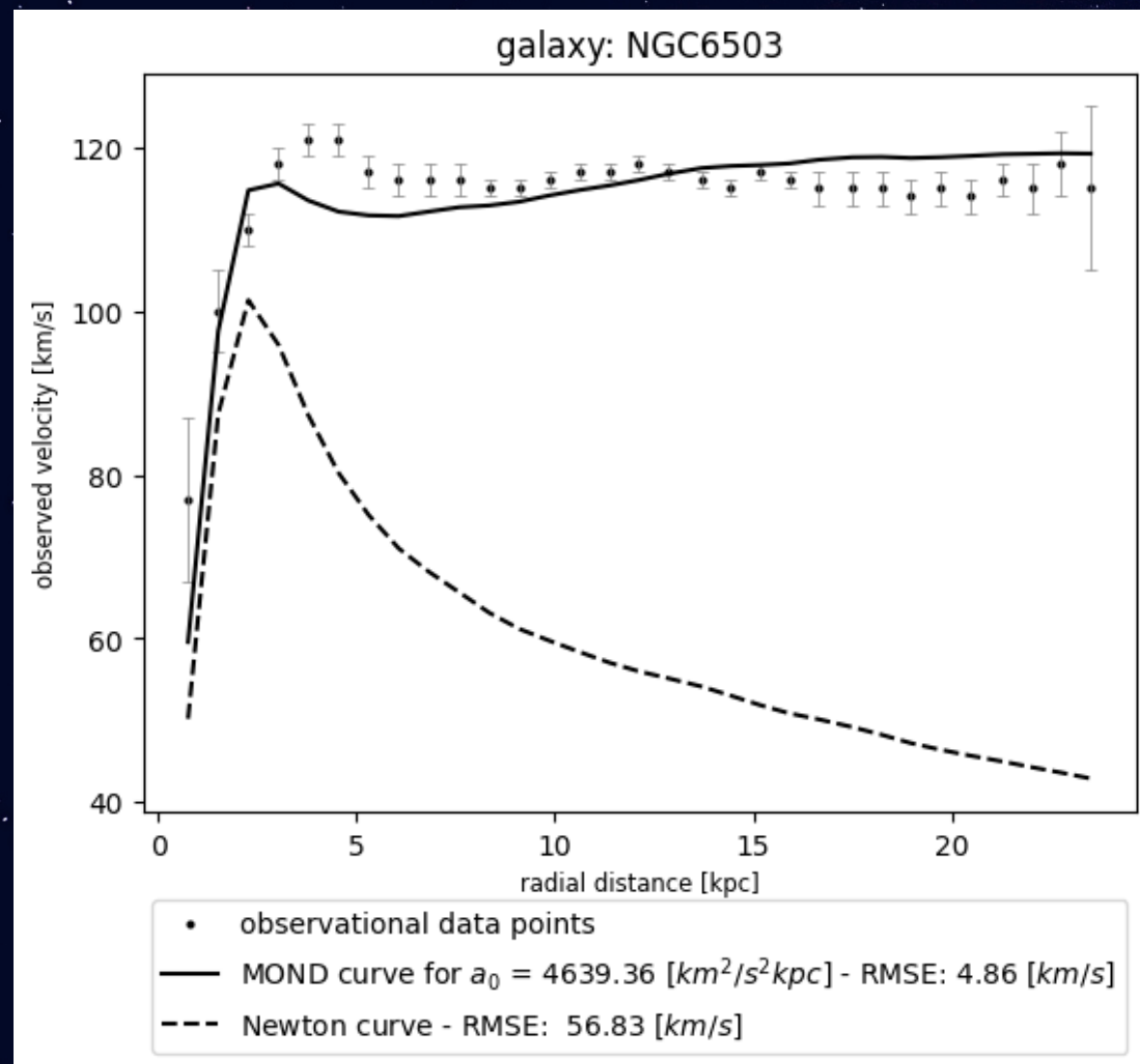
Wyniki - wykresy krzywych rotacji

Wykresy z dobrym dopasowaniem krzywej MOND dla galaktyk ze średnim a_0 z przedziału od 1000 do 5000 $\text{km}^2/\text{s}^2\text{kpc}$:



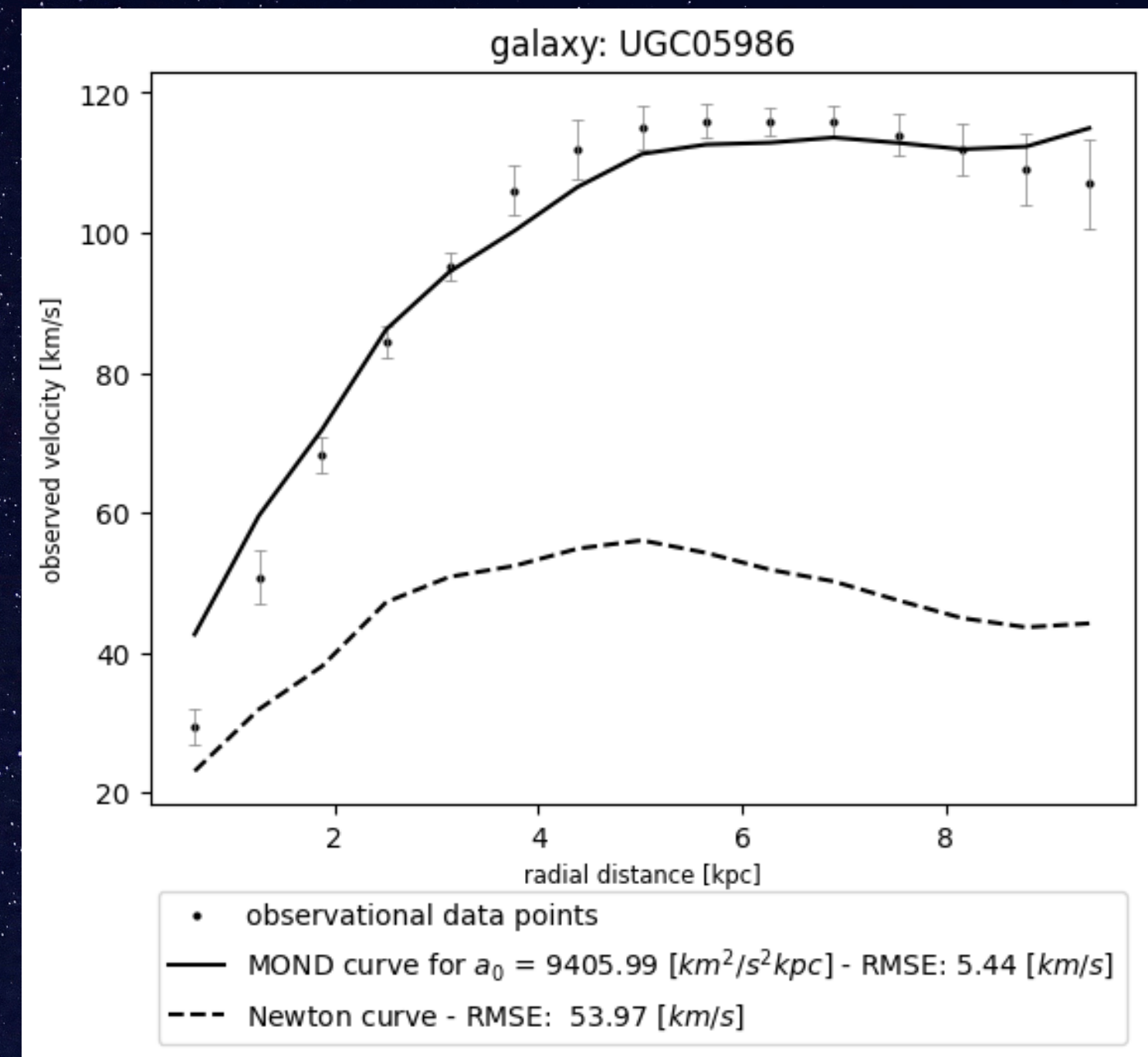
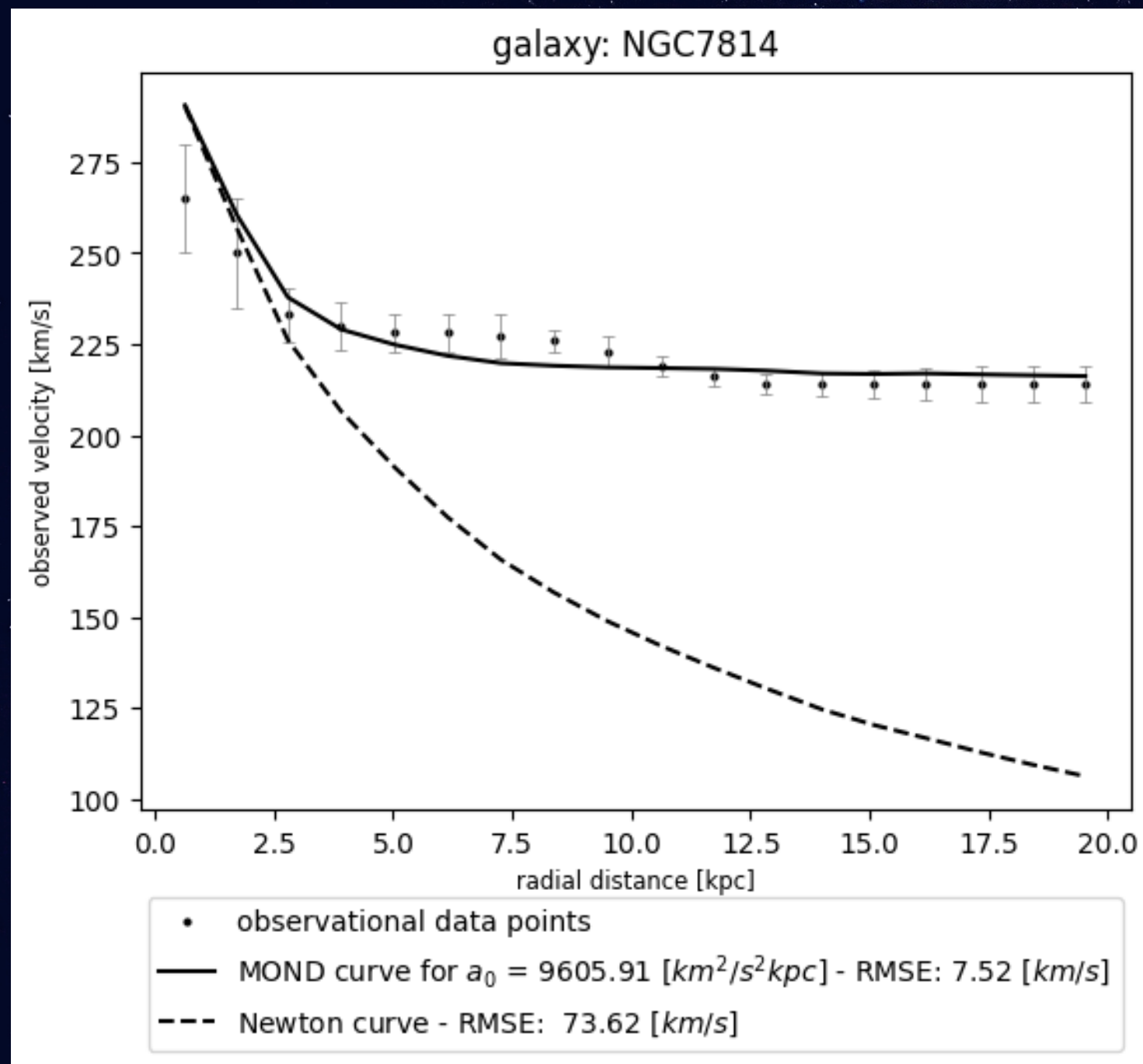
Wyniki - wykresy krzywych rotacji

Wykresy ze szczególnie dobrze zauważalnym efektem charakterystycznego wypłaszczenia krzywej rotacji na jej końcowym odcinku:



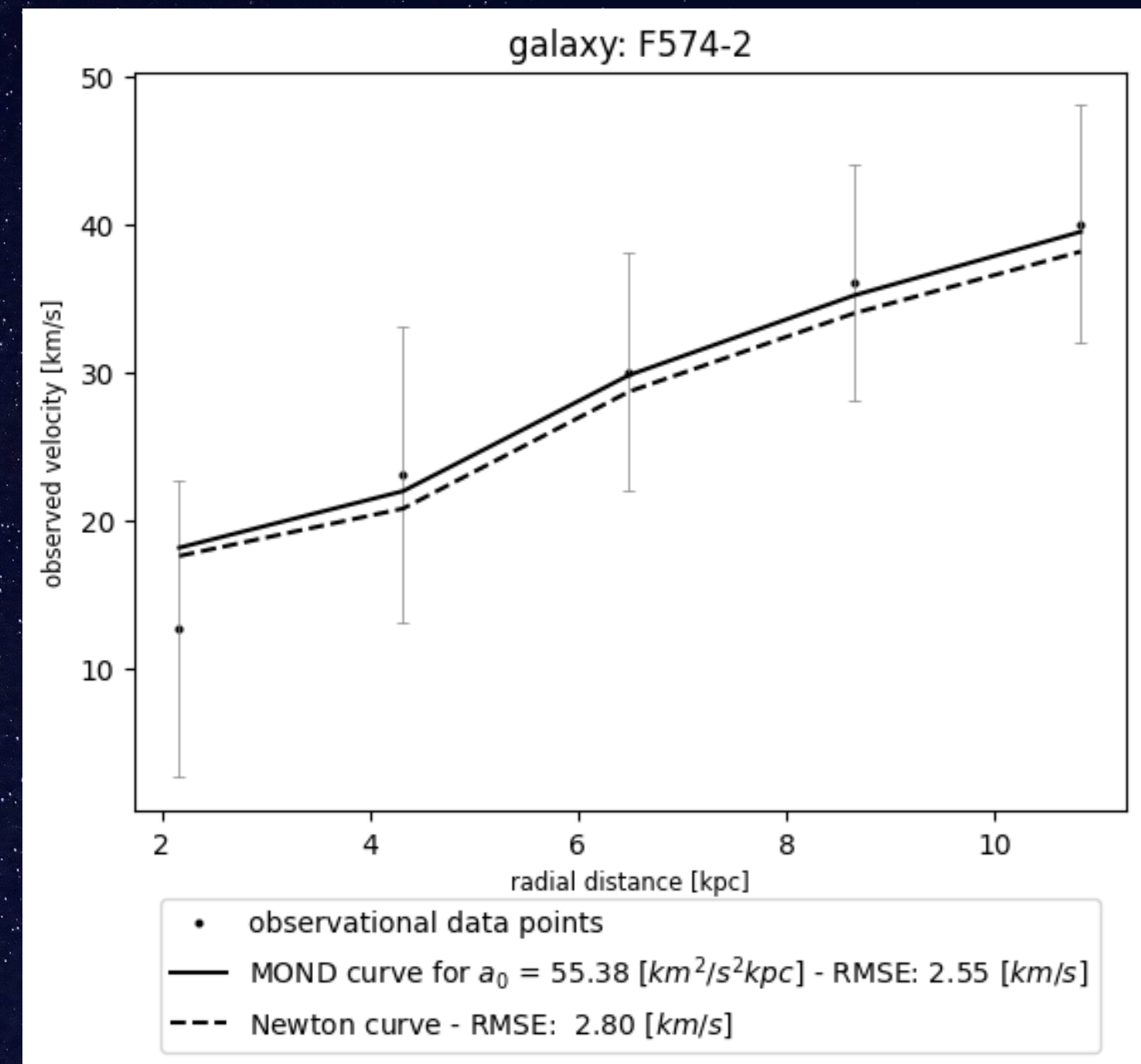
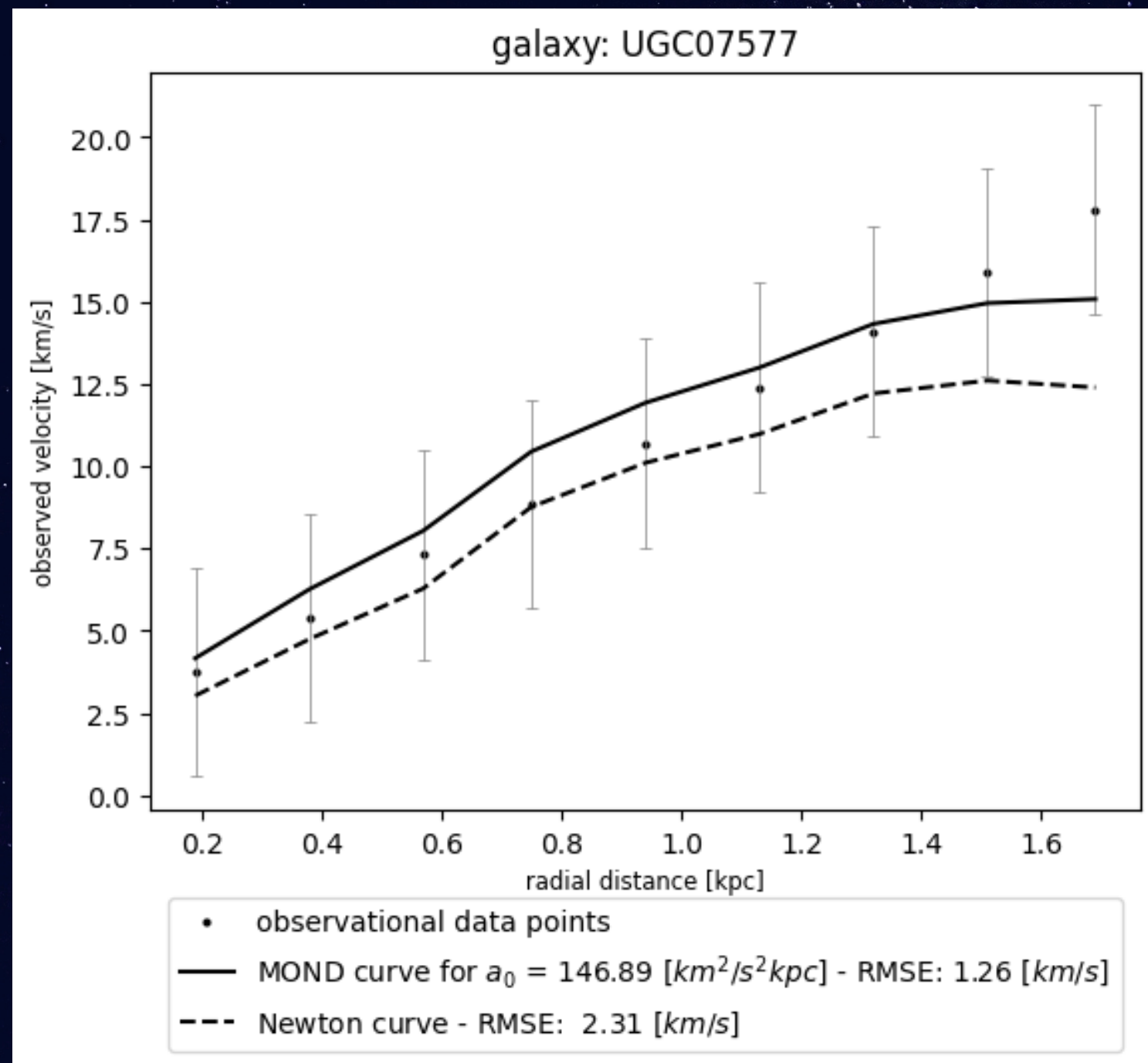
Wyniki - wykresy krzywych rotacji

Na wykresach z wysokim a_0 przekraczającym ponad $7000 \text{ km}^2/\text{s}^2\text{kpc}$ najbardziej widoczna jest znaczna różnica błędu RMSE, która świadczy o tym, iż im większa jest wartość a_0 , tym bardziej nieadekwatne staje się stosowanie dynamiki Newtona:



Wyniki - wykresy krzywych rotacji

Krzywe rotacji galaktyk UGC07577 i F574-2 o bardzo niskiej wartości stałej a_0 , dla których krzywa modelu MOND niemal pokrywa się z krzywą modelu Newtona:



Podsumowanie

- Teoria zmodyfikowanej dynamiki Newtona została przetestowana dla 175 galaktyk, dla których dane zmiennych krzywej rotacji zostały zaczerpnięte z bazy danych SPARC.
- W przeważającej większości galaktyk model MOND bardzo trafnie przewiduje krzywe rotacji.
- Jedynie w przypadku około 20% galaktyk dopasowanie nie jest trafne, czego przyczyną mogą być niepewności wziętych do analizy danych, obecność dodatkowej niewykrytej materii w galaktyce lub niepoprawnej metody dopasowania.

Podsumowanie

- Nie zmienia to jednak faktu, że w każdym przypadku zastosowania, obliczony błąd RMSE jest mniejszy dla krzywej rotacji z modelu MOND niż dla krzywej rotacji wyznaczonej z klasycznej dynamiki Newtona, co mogłoby wskazywać, że teoria MOND opisuje zachodzące zjawiska w skali galaktycznej lepiej niż teoria klasyczna.
- Uzyskane wyniki sugerują również, iż powszechnie uważany w teorii MOND za stały, parametr przyspieszenia a_0 może być różny dla różnych galaktyk.

Dziękuję za uwagę.