

MATEMATIKA

tempus

Metodinės
rekomendacijos
12 klasei



MATEMATIKA

tempus

Metodinės rekomendacijos 12 klasei

Autoriai: VILIJA DABRIŠIENĖ, MILDA MARIJA VOSYLIENĖ, ANTANAS APYNIS,
ILONA KNYZELIENĖ, ERIKA TUMĖNAITĖ, VILIJA ŠILEIKIENĖ

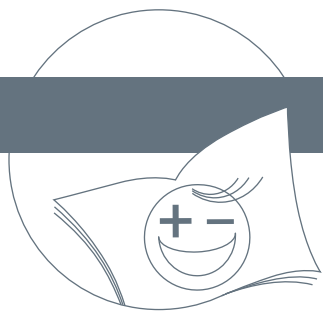
Ši kūrinių, esančių bibliotekose, mokymo ir mokslo įstaigų bibliotekose, muziejuose arba archyvuose, be kūrinių autoriaus ar kito šio kūrinių autorių teisių subjekto leidimo ir be autorinio atlyginimo draudžiama mokslinių tyrimų ar asmeninių studijų tikslais atgaminti, viešai skelbti ar padaryti viešai prieinamą kompiuterių tinklais tam skirtuose terminaluose tų įstaigų patalpose.

ISBN 978-5-430-06661-1

© Vilija Dabrišienė, 2017
© Milda Marija Vosylienė, 2017
© Antanas Apynis, 2017
© Ilona Knyzelienė, 2017
© Erika Tumėnaitė, 2017
© Vilija Šileikienė, 2017
© Leidykla „Šviesa“, 2017

TURINYS

Kaip mokyti iš vadovėlio „Matematika 12 klasei“?	4
I dalis	6
1 skyrius Trigonometrija	6
2 skyrius Funkcijos išvestinė ir jos taikymas	15
3 skyrius Pirmykštė funkcija ir integralas	36
4 skyrius Vektoriai erdvėje	45
II dalis	52
5 skyrius Stereometrija	52
6 skyrius Stochastika	59
Įvykiai ir jų tikimybės	62
Statistikos pradmenys	69
7 skyrius Kurso kartojimas	73



Kaip mokytis iš vadovėlio „Matematika 12 klasei“?

Serijos „Tempus“ matematikos vadovėlis 12 klasei parengtas remiantis tais pačiais principais kaip ir vadovėlis 11 klasei. Šiame vadovėlyje yra visos įprastos 12 klasei matematikos temos: diferencialinis ir integralinis skaičiavimas, erdvės vektoriai, erdvės geometrija (stereometrija), stochastika. Kiekvienas skyrius, kaip ir vadovėlyje 11 klasei, suskirstytas į skyrelius „Pakartok“, „Susipažink“, „Išmok“, „Taikyk“. Nuo 11 klasės vadovėlio jis skiriasi tik gerai apgalvota kartojimo sistema.

Šiame vadovėlyje rasite dvigubą – teminę ir kompleksinę – kartojimo sistemą. Kiekvienas naujas skyrius pradedamas kartojimo skyreliu. Jis parinktas taip, kad kuo geriau derėtų su nauju skyriumi, kad pakartotas žinias būtų galima pritaikyti. Todėl, likus dar nemažai laiko iki mokslo metų pabaigos, mokiniai visą mokyklinės matematikos kursą jau būna pakartoję temomis. Tada ateina kompleksinio kartojimo eilė. Tačiau ir mokslo metų pabaigoje, prieš pradedant spręsti kompleksines kartojimo užduotis, skyrelyje „Pasitikrink, ar žinai“ dar kartą pakartojamos visos teorinės žinios iš keturių stambių temų.

Trumpai supažindinsime (kas jau dirbo su 11 klasės vadovėliu – priminsime) vadovėlio struktūrą.

Pradžios ir pabaigos skyreliai

Vadovėlio 6–7 puslapiuose moksleiviams ir mokytojams trumpai apibūdinta vadovėlio struktūra, paaiškinta, ką reiškia vadovėlyje naudojamos spalvos, sutartiniai ženklai. Verta priminti mokiniams, kad toks skyrelis yra, rekomenduoti jį perskaityti. Taip pat jau per pirmąją pamoką pravartu su moksleiviais žvilgtelėti į vadovėlio gale esantį skyrelį „Informacinė medžiaga“, kuriame pateikiama visa reikiama informacija. Tai patogiu, nes nereikia ieškoti kitų informacijos šaltinių.

Kiekvienas vadovėlio skyrius pradedamas ir baigiamas skyreliais, kurių tikslas – sudominti, „užkabinti“. Juose galima aptikti ir kūrybinių užduočių. Tikimasi, kad šiuos skyrelius mokiniai perskaitys patys. Mokytojas gali paraginti tai padaryti, pasiūlyti mokiniams rasti papildomos informacijos, skirti kūrybinius darbus.

Skyreliai „Pakartok“

Šie skyreliai yra skirti teminiam žemesniųjų klasių medžiagos kartojimui. Visiems šiems skyreliams skyriaus plane numatyta keletas pamokų, jų skaičius priklauso nuo skyrelio sudėtingumo. Mokytojas, atsižvelgdamas į klasės lygį, gali koreguoti pamokų skaičių. Visiškai nebūtina spręsti visus uždavinius. Atsižvelgiant į mokinių žinias, galima parinkti tik sunkesnius arba tik lengvesnius uždavinius, praleisti ar giliau panagrinėti kurį nors potėmį. Šių skyrelių dešiniojoje skiltyje pateikiamos užduotys, o kairiojoje primenamos pagrindinės taisyklės ir formulės, kurių gali prireikti sprendžiant dešinėsios skilties uždavinius. Visi uždaviniai parinkti atsižvelgiant į matematikos brandos egzaminų programą.

Skyreliai „Susipažink“, „Išmok“, „Taikyk“

Kaip ir 11 klasės vadovėlyje, šiuose skyreliuose medžiaga išdėstyta spiralės principu. Skyrelyje „Susipažink“ – svarbiausios sąvokos, „Išmok“ – pagrindiniai veiksmi,

„Taikyk“ skiriamas sunkesniems dalykams, taikymo uždaviniams. Mokytojas, atsižvelgdamas į klasės ar atskirų mokinių gebėjimus, gali daugiau laiko skirti vieno ar kito skyrelio medžiagos analizei.

Šiuose skyreliuose mokomoji medžiaga pateikiama „porcijomis“: teorija, pavyzdys, „Pamėgink“ užduotis, uždaviniai. Todėl mokytojas darbą klasėje gali organizuoti įvairiai – skatinti mokinius dirbti individualiai, poromis ar grupėmis, individualizuoti užduotis pagal mokinių pajėgumą. Kai kuriuos pavyzdžius, užduotis galima praleisti ar skirti mokiniams kaip savarankišką darbą, atsižvelgiant į klasės lygį.

Siekiant prisitaikyti prie mokinio individualaus mokymosi stiliaus, visi pavyzdžiai vadovėlyje sumaketuoti dviem stulpeliais. Kairiajame – pavyzdžio sprendimas be paaiškinimų. Tačiau jei moksleiviams neaišku arba kai kurie iš jų tiesiog geriau suvokia žodžiais pateikiamą informaciją, siūlome skaityti dešiniajame stulpelyje esančius paaiškinimus.

Skyreliai „Pasitikrink“

Kiekviename skyrelyje yra du uždavinių komplektai. Jie skirti apibendrinti išeitą medžiagą ir pasirengti kontroliniam darbui. Pirmasis komplektas lengvesnis, antrasis – sunkesnis. Mokytojas gali parinkti mokiniams reikiamą komplektą arba skirti juos abu.

Uždaviniai

Vadovėlyje uždavinių yra daugiau, nei galima išspręsti per pamokas. Dėl to mokytojas gali parinkti uždavinius, individualizuoti veiklą per pamoką, atsižvelgdamas į moksleivių poreikius ir galimybes.

Dauguma uždavinių parengta dviem analogiškais variantais. Tai leidžia mokytojui užduoti panašių uždavinių namų darbams ar organizuoti darbą grupėmis klasėje. Variantai sudėlioti eilutėmis, t. y. kiekvienas uždavinys turi lyginį skaičių eilučių. Pirmą eilučių pusę – vienas variantas, antra – kitas variantas. Pavyzdžiui, jei uždavinyje yra aštuonios užduotys nuo a iki h, tai pirmą variantą sudaro a–d užduotys, o antrą variantą – e–h užduotys. Maketas atrodo taip:

a)	b)	c)	d)
e)	f)	g)	h)

Pirmoji maketo eilutė – pirmas variantas, antroji – antras variantas. Jei eilučių yra keturios:

a)	b)	c)
d)	e)	f)
g)	h)	i)
j)	k)	l)

pirmosios dvi eilutės – pirmas variantas, paskutinės dvi – antras variantas.

Analogiškų variantų nėra skyreliuose „Pasitikrink“ ir „Pakartok“.

Skyreliai „Ar priimsi iššūkį?“

Šie uždaviniai gali praversti skiriant individualias užduotis gabesniems moksleiviams. Savo tematika jie neperžengia mokyklinės matematikos programos ribų, tačiau reikalauja paieškoti nestandartinių, neišmuktų per pamokas sprendimo būdų.

I dalis

1 skyrius

Trigonometrija

Šiam skyriui išplėstiniame kurse skiriama 19 pamokų. Skyrius pradedamas lygčių, nelygybių ir jų sistemų kartojimu. Žinių apie lygčių ir nelygybių apibrėžimo sritį, sprendimo būdus, grafinį sprendinių vaizdavimą skaičių tiesėje prireiks mokantis spręsti trigonometrines lygtis ir nelygybes. Kartojant šią medžiagą svarbu pabrėžti pagrindinių lygčių ir nelygybių sprendimo metodų universalumą. Skyreliui „Pakartok“ skiriamos 7 pamokos.

Naują medžiagą nagrinėti siūloma 12 pamokų. Pirmasis vadovėlio skyrius – 11 klasės „Trigonometrijos“ skyriaus tęsinys, todėl svarbu moksleiviams nuolat priminti sąsajas su 11 klasėje išeitu kursu.

Skyriaus „Trigonometrija“ skirstymo pamokomis pavyzdys

■ Išplėstinis kursas

Pamokos eil. nr.	Pamokos tema
1.	Pakartok: tiesinės ir aukštesniojo laipsnio lygtys
2.	Pakartok: racionaliosios ir iracionaliosios lygtys
3.	Pakartok: rodiklinės ir logaritminės lygtys
4.	Pakartok: lygtys su moduliu, lygčių sistemos
5.	Pakartok: tiesinės, kvadratinės ir racionaliosios nelygybės
6.	Pakartok: rodiklinės ir logaritminės nelygybės
7.	Pakartok: lygčių ir nelygybių sudarymas
8.	Susipažink: to paties argumento (kampų) trigonometrinių formulės
9.	Susipažink: trigonometrinių funkcijų redukcijos taisyklė
10.	Išmok: dviejų kampų sumos ir skirtumo kosinusas
11.	Išmok: dviejų kampų sumos ir skirtumo sinusas
12.	Išmok: dviejų kampų sumos ir skirtumo tangentas
13.	Taikyk: paprasčiausių trigonometrinių lygčių ir nelygybių sprendimas

14.	Taiky: trigonometrinių lygčių sprendimo būdai
15.	Taiky: trigonometrinių lygčių sprendimo būdai
16.	Taiky: trigonometrinių lygčių sprendimo būdai
17.	Taiky: trigonometrinės lygties apibrėžimo sritis
18.	Apibendrinimas ir kartojimas
19.	Kontrolinis darbas

■ Bendrasis kursas

Pamokos eil. nr.	Pamokos tema
1.	Pakartok: tiesinės ir kvadratinės lygtys
2.	Pakartok: racionaliosios lygtys
3.	Pakartok: iracionaliosios lygtys
4.	Pakartok: lygčių sistemos
5.	Pakartok: rodiklinės ir logaritminės lygtys
6.	Pakartok: tiesinės nelygybės
7.	Pakartok: kvadratinės nelygybės
8.	Pakartok: įvairūs uždaviniai
9.	Pakartok: trigonometrinių funkcijų apibrėžtys ir savybės
10.	Susipažink: to paties argumento (kampų) trigonometrinės formulės
11.	Taiky: paprasčiausių trigonometrinių lygčių sprendimas
12.	Taiky: paprasčiausių trigonometrinių lygčių sprendimas
13.	Apibendrinimas ir kartojimas
14.	Kontrolinis darbas

P. 10–17 „Pakartok“ užduočių atsakymai

- 1 B.
- 2 D.
- 3 A.
- 4 D.
- 5 A.
- 6 C.
- 7 a) $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$; b) $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$; c) $[-6; +\infty)$; d) R; e) R; f) $(-\infty; 1)$; g) R; h) R; i) R; j) $(0; +\infty)$; k) $(-3; +\infty)$; l) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$; m) R; n) $[1; +\infty)$; o) $(0; +\infty)$; p) $[-1; 1]$; r) $(0; +\infty)$; s) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$.
- 8 a) sprendinių nėra; b) R; c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; d) 0; 3; e) -2; f) $-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}$; g) $1 + \sqrt{2}$; h) $2\sqrt{6} - 5$; i) sprendinių nėra; j) R; k) $-\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{6}$; l) 2; m) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; n) 0; 5; o) $\frac{3\sqrt{3}-3}{2}$; p) $-9 - 4\sqrt{5}$.
- 9 a) -2; 4; b) -1; 5; c) 1; 2; d) -1.
- 10 a) 1; 3; b) -1; -5; c) 1; 6; d) 1; -4.
- 11 a) $x^2 - 13x + 40 = 0$; b) $28x^2 - 20x + 1 = 0$; c) $x^2 - 4x - 21 = 0$; d) $x^2 - 6x + 1 = 0$.
- 12 1,5.
- 13 16.
- 14 a) teisingas; b) teisingas; c) teisingas; d) teisingas.
- 15 a) $x \neq -3$; 3; b) $x \neq -1,5$; $x \neq 1,5$; sprendinių nėra; c) $x \neq -2$; $x \neq 1$; -5; d) $x \neq 2$; -1,5.
- 16 a) -2; 1; b) -4; 1; c) sprendinių nėra; d) 4; e) -3; 6; f) 0; 5,4; g) 1,6; 3; h) -5; 1.
- 17 a) 7; b) -1; c) -10; d) $-\sqrt{3}; \sqrt{3}$; e) 1; f) 3.
- 18 a) 1; b) 9; c) 8; d) 11; e) 1; f) sprendinių nėra; g) $2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}$; h) 5; i) 2; j) 34; k) -1; l) -2; 1; m) -3; 2; n) sprendinių nėra; o) 2; p) 1.
- 19 a) -1; 1; b) -3; c) 2; d) sprendinių nėra.
- 20 a) 4; b) -4; 2; c) -11; d) sprendinių nėra.
- 21 a) 8; b) 241; c) -2; 2; d) -4; e) 27; f) 5; g) 5; h) 11.
- 22 a) 1; b) 0; c) 0,75; d) 3; e) -1; f) -1; 1; g) 1,5; h) -0,5; i) -5; -1; j) -3; k) -0,5; l) 2,5.
- 23 a) $\log_2 5$; b) $\log_{0,3} 7$; c) $-1 + \lg 12$; d) $3 + \log_5 2$; e) $\frac{1}{3} \log_2 3$; f) $-1 + \frac{1}{2} \ln 10$.
- 24 a) 0; b) 2; c) 0; d) 1; e) 1; f) 0.
- 25 a) $x \in (0; +\infty)$; b) $x \in (-2; -1) \cup (-1; +\infty)$; c) $x \in (-\infty; 5)$; d) $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; e) $x \in (0; 0,5)$; f) $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.
- 26 a) $\frac{1}{25}$; b) 1; c) -11; 11; d) 2; e) $\frac{1}{7}$; f) -119; g) 0; h) 9.
- 27 a) $1\frac{1}{3}$; b) 29,5.
- 28 a) -1; b) 7; c) -8; d) 3; e) 0,5; 1; f) 0; 1.
- 29 a) sprendinių nėra; b) 2; c) 100; d) 8; e) 4; f) $\frac{1}{27}$; g) -6; h) 0; i) 2,5; j) 5; k) $\frac{1}{256}$; l) 2; m) $\sqrt{65}$; n) -3.
- 30 a) 4; 10; b) -3,2; -2,8; c) -1; 1; d) -5; 5; e) 0; 4; f) -5; 13; g) -3; 2; h) $-\sqrt{2}; -\frac{2\sqrt{10}}{5}; \frac{2\sqrt{10}}{5}; \sqrt{2}$; i) -3; 3; j) $-1 - \sqrt{14}; -3; 1; -1 + \sqrt{14}$; k) sprendinių nėra; l) -11; -1; m) -1; 3; n) -26; 0; o) -8; 6; p) -1; 2; r) $\frac{1}{3}; 3$; s) 1.
- 31 a) -12,5; b) 0; c) -1; d) $-1\frac{2}{3}$.
- 32 a) -3; 0; b) -12; 12; c) 0; 4; d) -0,6; 0,6; e) 1; 2; f) -4; -2,5.
- 33 a) -7; 3; b) 5; c) 1; d) 2; e) -1,5; $1\frac{9}{11}$; f) -7; 3; g) 0,01; 1; h) 1.
- 34 a) -2; 2; b) 1; c) 0; 1; d) 1; e) 1; 2; f) 0,2; 3125; g) -1; -0,5; 1,5; 2; h) 725; i) 1; 3; j) 1; 2; k) 0; l) $e + 2$.
- 35 a) (4,5; 0,5); b) (1; 8); c) (2; 1); d) (1,2; -0,6); e) (1; 0,75); f) (0,2; 1,4).
- 36 a) -2,5; 1; b) -1; c) $1\frac{1}{3}$; d) -8; -1.
- 37 a) per 18 min; b) 8 km/h; c) 3 pakopas ir 6 pakopas; d) 14 km/h; e) 12 kompiuterių ir 16 kompiuterių; f) per 3 h 20 min; g) 36 min.
- 38 a) 17,6 mazgo; b) 110 km/h; c) 84; d) 85; e) 200 kg; f) 30 eilių; g) per 7,5 dienos; h) 12 dienų ir 18 dienų.

- 39 a) $(13; +\infty)$; b) sprendinių nėra; c) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; d) $(-\infty; -6] \cup [-1; +\infty)$; e) sprendinių nėra; f) $(-\infty; -3] \cup (1; 3]$; g) $(-\infty; 0) \cup (0; 1]$; h) R ; i) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; j) $(0; \frac{1}{3})$; k) -3 ; l) R ; m) $(-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$; n) $(-2; 0) \cup (0; 2)$; o) $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$; p) $[-1; +\infty)$; r) $(-\infty; 0) \cup [3; +\infty)$; s) $(-\infty; 3)$; t) $[-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]$; u) $(-\infty; 0) \cup [\frac{1}{3}; +\infty)$.
- 40 a) $(-7; +\infty)$; b) $(0; +\infty)$; c) $(-\infty; -2)$; d) $(-\infty; 3)$; e) $(-2; -1)$; f) $(-\infty; 3)$; g) $(-\infty; 0) \cup (0; 7) \cup (11; +\infty)$; h) $(-3; 1)$; i) sprendinių nėra; j) $(-\infty; -3)$; k) $\{-1\} \cup (3; +\infty)$; l) $[-2; 2]$; m) $(2; +\infty)$; n) sprendinių nėra; o) $(-\infty; -1] \cup (0; 1]$; p) $(0; 2) \cup [3; +\infty)$.
- 41 a) $(3; +\infty)$; b) $(-\infty; -10)$; c) $(1; 2)$; d) $(2; 5]$.
- 42 a) 0; b) 7.
- 43 a) $(11; 21)$; b) $(-5; -2,5)$; c) $(-1; 1]$; d) $[0,6; 2]$.
- 44 a) $(-5; 11)$; b) sprendinių nėra; c) $(-\infty; 1,8) \cup (2,6; +\infty)$; d) 0; e) $[-11; 13]$; f) $(-\infty; 1,5] \cup [4; +\infty)$; g) R ; h) $(-\infty; -9) \cup (1; +\infty)$; i) $(-1; 2)$; j) $(-1; 0) \cup (0; 1)$.
- 45 a) $(1; +\infty)$; b) $(-\infty; +\infty)$; c) $(3; +\infty)$; d) $-3; -2$; e) sprendinių nėra; f) R .
- 46 a) $(-\infty; 5)$; b) $(-\infty; -0,5)$; c) $(1,5; +\infty)$; d) $(-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$; e) $(-\infty; 1)$; f) $[-1; 1]$; g) $(2; +\infty)$; h) $[2,5; +\infty)$; i) $(-2; +\infty)$; j) $(0; 3)$.
- 47 a) 4; b) 2; c) -1 ; d) 3; e) 2; f) 0; g) 1; h) 3.
- 48 a) $(3; +\infty)$; b) $(-\infty; -1) \cup (0,5; +\infty)$; c) $(0; \sqrt{0,1}) \cup [10; +\infty)$; d) $(4; +\infty)$; e) $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$; f) $(1; 3\frac{1}{3})$; g) $(0; 1)$; h) $(4; 5)$.
- 49 a) 6; b) -7 .
- 50 a) per mažiau negu 6 valandas; b) 19 staliukų ir 112 kėdžių arba 20 staliukų ir 116 kėdžių.

P. 19

SUSIPAŽINK

Pirmosios pamokos pradžioje prisimenamos trigonometrinių funkcijų savybės ir žinomos trigonometrinės formulės. Kartojant savybes, verta patarti mokiniams žvilgtelti į trigonometrinių funkcijų grafikus, pateiktus skyrelyje „Informacinė medžiaga“ (vadovėlio gale).

Su naujomis formulėmis galima supažindinti įvairiai: pasiūlyti mokiniams vadovėlyje perskaityti tų formulių išvedimus ir savarankiškai atlikti „Pamėgink“ užduotis arba naujas formules įvesti per mokytojo suformuluotą uždavinį. Bet kuriuo atveju mokiniai turėtų matyti, kaip tos formulės yra išvedamos. Vėliau mokiniai jas turi pastebėti prastindami paprastus trigonometrinius reiškinius ir apskaičiuodami reiškinių reikšmes.

Stipresnėse klasėse mokiniai gali patys išsiaiškinti pateiktus pavyzdžius, todėl daugiau dėmesio reikėtų skirti „Pamėgink“ užduočių (p. 20–22) sprendimui. Taip pat galima skirti šias užduotis spręsti namuose. Jei mokiniams nepavyksta užduočių išspręsti arba jie nori patikrinti, ar išsprendė teisingai, rekomenduojama išnagrinėti „Pamėgink“ užduočių sprendimus elektroniniame vadovėlio priede.

Mokantis redukcijos taisyklę, siūlome mokiniams ją pagrįsti. Tai galima padaryti analizuojant vadovėlio 23 puslapyje pateiktą įrodymą arba pasiūlius namuose išnagrinėti „Pamėgink“ užduotį (p. 23). Patikrinti mokiniai gali vadovėlio elektroniniame priede. Silpnesnėse klasėse galima pamėginti iliustruoti redukcijos taisyklę, pasitelkiant į pagalbą funkcijų grafikų transformacijas. Bet kuriuo atveju mokiniai turėtų išmokti apibendrintą redukcijos taisyklę ir gebėti ją taikyti prastindami reiškinius. Kai kuriuos uždavinius galima spręsti žodžiu.

„Pamėgink“ užduočių atsakymai

P. 20 I $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$.

II 4.

P. 21 3 a) $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$; b) 1.

P. 22 1 $\frac{4}{3}$.

2 2,25.

3 2.

P. 25 a) $\sin \alpha$; b) $\cos \alpha$; c) $\operatorname{ctg} \alpha$; d) $-\operatorname{ctg} \alpha$; e) $\cos^2 \alpha$; f) $\operatorname{tg}^2 \alpha$; g) $\cos^2 \alpha$; h) $-\operatorname{tg}^3 \alpha$.

P. 25–27 Uždavinių atsakymai

- 1 a) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$; b) $\sin \alpha = 0,6$; $\operatorname{tg} \alpha = 0,75$; c) $\cos \alpha = -0,8$; $\operatorname{tg} \alpha = -0,75$; d) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$; $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$.
- 2 a) 0; b) $\cos^2 \alpha$; c) 1; d) $\sin \alpha$; e) $2 \sin^2 \alpha$; f) 1; g) 0; h) 2; i) $1 + \sin \alpha$; j) $\cos \alpha$; k) 1; l) -1.
- 3 a) -0,24; b) $2\frac{49}{60}$; c) -2; d) $\frac{6}{7}$; e) $\frac{1600}{1681}$; f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 5 a) $\operatorname{tg}^2 \alpha$; b) $\cos^2 \alpha$; c) 0; d) 0; e) $\frac{2}{\sin \alpha}$; f) 1; g) $\operatorname{ctg}^2 \alpha$; h) $\sin \alpha$; i) 2; j) $\frac{2}{\cos^2 \alpha}$; k) 0; l) $\sin \alpha - \cos \alpha$.
- 6 a) $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$; b) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$; $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$; c) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{26}}{26}$; $\cos \alpha = \frac{5\sqrt{26}}{26}$; d) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
- 7 a) $\frac{91}{150}$; b) 25,4; c) -2,7; d) -4,8.
- 8 a) 3; b) $-\frac{11}{15}$; c) $-\frac{17}{25}$; d) 0.
- 9 a) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$; b) 0,792; c) 3,76; d) $\frac{47}{128}$.
- 10 a) $-\sin \alpha$; b) $-\sin \alpha$; c) $-\operatorname{ctg} \alpha$; d) $-\operatorname{tg} \alpha$; e) $-\cos \alpha$; f) $\cos \alpha$; g) $-\operatorname{tg} \alpha$; h) $\operatorname{ctg} \alpha$.
- 11 a) 0; b) $\cos \alpha$; c) 0; d) $\cos^2 \alpha$; e) $2 \cos \alpha$; f) $-\sin \alpha$; g) 0; h) $-\cos^2 \alpha$.
- 12 a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $-\sqrt{3}$; d) 1; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; g) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; h) 1; i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; j) $\frac{1}{2}$; k) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; l) -1; m) $-\frac{1}{2}$; n) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; o) $-\sqrt{3}$; p) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; r) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; s) $\frac{1}{2}$; t) $-\sqrt{3}$; u) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- 15 a) 4; b) $-\frac{1}{4}$; c) $2\frac{2}{3}$; d) $\frac{1}{27}$.

P. 28 IŠMOK

Dviejų kampų skirtumo kosinuso formulę rekomenduojama išvesti per pamoką, aiškinant mokytojų. Remdamiesi šia formule mokiniai gali savarankiškai įrodyti ir dviejų kampų sumos kosinuso formulę („Pamėgink“ užduotis p. 29), ir dvigubojų kampų kosinuso formulę. Svarbu, kad jie gebėtų šias formules atpažinti ir taikyti prastindami trigonometrinius reiškinius. Minėtas formules mokiniai ras ir matematikos valstybinio brandos egzamino (VBE) užduoties formulių rinkinyje.

Dviejų kampų sumos sinuso formulę mokiniams galima pasiūlyti išvesti savarankiškai. Ja remdamiesi net ir silpnesni mokiniai nesunkiai išves dvigubojų kampų sinuso formulę ir dviejų kampų skirtumo sinuso formulę. Svarbu, kad visi mokiniai gebėtų atpažinti ir taikyti šias formules sprenddami uždavinius. „Pamėgink“ užduotis patariama išsiaiškinti per pamoką. Uždavinių yra daug, tačiau dalį jų galima spręsti žodžiu (16, 21 ir pan.).

Mokantis dviejų kampų sumos ir skirtumo tangento formulių, rekomenduojama pasiūlyti mokiniams remiantis pateiktu įrodymu savarankiškai atlikti „Pamėgink“ (II) užduotį (p. 33). Gabūs mokiniai gali susipažinti, kaip kampo α tangento galima išreikšti dvigubojų kampų sinusu ir kosinusu.

„Pamėgink“ užduočių atsakymai

- P. 31 1 a) 0; b) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; c) -1.
- 2 a) $\cos \alpha \cos \beta$; b) $2 \cos 10^\circ \cos \alpha$; c) $\sin (2\alpha) \sin (3\alpha)$.
- P. 34 1 a) $2 - \sqrt{3}$; b) $\frac{9}{19}$; c) $2 + \sqrt{3}$.

P. 34–37 Uždavinių atsakymai

- 16 a) $\cos^2 (6\alpha) - \sin^2 (6\alpha)$; b) $2 \cos^2 (3\alpha)$; c) $2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$; d) $\cos (2\alpha) \cos (3\beta) - \sin (2\alpha) \sin (3\beta)$; e) $\cos \alpha$; f) $\cos \frac{\alpha}{6}$; g) $1 + \cos \frac{\alpha}{2}$; h) $1 - \cos (18\alpha)$; i) $\cos 2$; j) $\cos^2 (8\alpha) - \sin^2 (8\alpha)$; k) $2 \cos^2 (6\alpha)$; l) $2 \sin^2 \frac{\alpha}{24}$; m) $\cos \alpha \cos (3\alpha) - \sin \alpha \sin (3\alpha)$; n) $\cos (3\alpha)$; o) $\cos \frac{2\alpha}{3}$; p) $1 + \cos (12\alpha)$.
- 17 a) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; b) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; g) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; h) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; i) $\frac{1}{2}$; j) 0; k) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; l) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- 18 a) $-\frac{56}{65}$; b) 0,28; c) $\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{15}}{12}$; d) 0,92.

- 19 a) $-\sin \alpha \sin \beta$; b) $-\sin \alpha$; c) $\cos \alpha + \sin \alpha$; d) $\cos^2(2\alpha)$; e) 2; f) $4 \cos(6\alpha)$; g) $\cos \alpha \cos \beta$; h) $\sqrt{2} \cos \alpha$;
i) $\frac{1}{\cos(2\alpha) - \sin(2\alpha)}$; j) $\sin^2(4\alpha)$; k) $2 \operatorname{ctg}^2(4\alpha)$; l) $-2 \cos(2\alpha)$.
- 21 a) $\sin(5\alpha)$; b) $2 \sin(2\alpha) \cos(2\alpha)$; c) $2 \sin\left(\frac{1}{2}\right)^\circ \cos\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$; d) $\sin(2\alpha) \cos(3\beta) + \cos(2\alpha) \sin(3\beta)$; e) $\sin(6\alpha)$;
f) $\sin(3\alpha) \cos(2\beta) - \cos(3\alpha) \sin(2\beta)$; g) $2 \sin(10\alpha) \cos(10\alpha)$; h) $2 \sin \frac{\alpha}{8} \cos \frac{\alpha}{8}$; i) $\sin 5$; j) $\sin \alpha$; k) $\sin(12\alpha)$;
l) 1.
- 22 a) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; b) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; c) $\frac{1}{2}$; d) 2,5; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{1}{2}$; g) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; h) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; i) 0; j) $\sqrt{3}$; k) $3\sqrt{2}$; l) $\frac{1}{2}$.
- 23 a) $-\frac{56}{65}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $-\frac{4\sqrt{3} + 3}{10}$; d) $\frac{7\sqrt{15}}{32}$.
- 24 a) $\cos \alpha \sin \beta$; b) $\operatorname{tg} \alpha$; c) $2 \cos \alpha$; d) $\sin(2\alpha)$; e) $\sin \alpha \cos \beta$; f) $2 \operatorname{tg}(6\alpha)$; g) $\sin \frac{\alpha}{2}$; h) 1.
- 26 a) $2 - \sqrt{3}$; b) 1; c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; e) $-2 - \sqrt{3}$; f) $\sqrt{3}$; g) 1; h) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- 27 a) $-\sqrt{3}$; b) $-\frac{5}{12}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{3}{4}$.
- 29 a) $\sqrt{3}$; b) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; c) 0,44; d) $-\frac{4\sqrt{6}}{23}$; e) -2; f) -3; g) 0,36; h) $\frac{4\sqrt{2}}{7}$.
- 31 a) $\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}, -3\frac{3}{7}$; b) $-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 1\frac{1}{3}$.
- 33 a) $\frac{\sqrt{5} + 4\sqrt{2}}{9}$; b) $\frac{4\sqrt{3} - 3}{10}$.
- 35 a) 0; -1; 0.
- 37 $2\sqrt{6}$ cm.
- 38 $\sqrt{7}$.
- 39 a) 1,5; b) $-\sqrt{2}$.

P. 38 TAIKYK

Šiame skyrelyje primenami trigonometrinių funkcijų grafikai ir paprasčiausių trigonometrinių lygčių sprendinių formulės. Patariama per pamoką taikyti kompiuterines grafikų braižymo programas, siekiant optimaliai naudoti laiką, skirtą kartojimui. Svarbu, kad mokiniai išnagrinėtų pateiktus pavyzdžius ir remdamiesi jais atliktų skirtingas užduotis. Akcentuojami trigonometrinių lygčių sprendinių skaičiaus nustatymo būdai. Uždavinių yra pateikta daug, tačiau nebūtina juos visus spręsti.

Išskiriami keturi trigonometrinių lygčių sprendimo būdai. Mokiniai turėtų gebėti pritaikyti reikiamą būdą, todėl kiekvieno būdo taikymo uždaviniai skiriami įgūdžiams įtvirtinti. Spręsdami uždavinius mokiniai gali naudotis VBE formulių rinkiniu.

Būtina atkreipti mokinių dėmesį į tai, kad sprendžiant trigonometrines lygtis negalima pamiršti jų apibrėžimo srities. Kartais sprendžiant atsiranda pašalinių sprendinių, t. y. sprendinių, nepriklausančių lygties apibrėžimo sričiai. Tada patogiu skaičių tiesėse žymėti gautus sprendinius ir pradinės lygties apibrėžimo sritį. Taip bus nesunku pastebėti tykantį pavojų. Mokytojai kartais mėgsta naudoti vienetinį apskritimą. Tai gerai, tačiau grafiko naudojimas yra universalesnis būdas, lengviau suprantamas moksliviams, todėl būtent jis ir pasirinktas vadovėlyje.

„Pamėgink“ užduočių atsakymai

- P. 40 1 $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$.
2 2 sprendinius.
3 $-\frac{\pi}{2}$.
4 456 sprendinius.
- P. 42 a) \mathbb{R} ; b) $\left(\pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$; c) $\left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$.
- P. 43 a) $\frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; b) $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; c) $\frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
- P. 44 a) $\frac{\pi}{2} + \pi k; (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; b) $\frac{\pi}{2} + \pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; c) $\pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- P. 45 a) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; b) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; c) $\frac{\pi}{4} + \pi k; \arctg 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- P. 46 a) $\arctg 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; b) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- P. 47 a) sprendinių nėra; b) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

P. 48–49 Uždavinių atsakymai

- 42) a) C; b) B.
- 43) a) 1) 2; 2) 4; 3) 4; 4) 2; 5) 1; 6) 0; b) 1) 1; 2) 2; 3) 2; 4) 2; 5) 2; 6) 0; c) 1) 2; 2) 3; 3) 3; 4) 3; 5) 2; 6) 0; d) 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) 2; 6) 1.
- 44) a) $(-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; b) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; c) $-\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; d) sprendinių nėra; e) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; f) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; g) $-\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; h) sprendinių nėra.
- 45) a) $(-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; b) $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; c) $\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; d) $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; e) $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; f) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; g) $-\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; h) $\arctg 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- 46) a) $90^\circ + 360^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}$; b) $-45^\circ + 360^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}$; c) $\frac{\pi}{2} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$; d) $\frac{\pi}{3} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$; e) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; f) sprendinių nėra; g) $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; h) $-30^\circ + 360^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}$; i) $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; j) $4\pi k, k \in \mathbb{Z}$; k) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; l) sprendinių nėra.
- 47) a) sprendinių nėra; b) sprendinių nėra; c) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; d) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; e) sprendinių nėra; f) $\frac{1}{2} \arctg 4 + \frac{\pi}{2} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$; g) sprendinių nėra; h) sprendinių nėra; i) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; j) $\frac{\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; k) sprendinių nėra; l) $2 \arctg 5 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- 48) a) $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$; b) $-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$; c) $\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$; d) $-\pi; -\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2}; \pi$.
- 49) a) 3; b) 3; c) 4; d) 1; e) 4; f) 4.
- 50) a) $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{\pi}{12}$; c) $\frac{3\pi}{4}$; d) $\frac{3\pi}{4}$; e) $\frac{\pi}{3}$; f) $\frac{3\pi}{4}$.
- 51) a) $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$; b) $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$; c) $[3; 4]$; d) $-\sqrt{5}; -\sqrt{3}; \sqrt{3}; \sqrt{5}$; e) $[0; 2]$; f) $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$; g) $[1; 2]$; h) 0.
- 52) a) $(2\pi k; \pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$; b) $(2\pi k; 2\pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$; c) $\left[\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$; d) $\left(\frac{\pi}{6} + \pi k; \pi + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$; e) $\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$; f) $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$; g) $\left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; -\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$; h) $\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$; i) $[-\pi + 2\pi k; 2\pi k], k \in \mathbb{Z}$; j) \mathbb{R} ; k) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$; l) $\left(\pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k\right], k \in \mathbb{Z}$; m) $\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$; n) $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{4\pi}{3} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$; o) $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$; p) $\left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$.
- 53) a) $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$; b) $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$; c) $(-\pi + 2\pi k; 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$; d) $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$; e) $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$; f) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$; g) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$; h) $\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$.
- 54) a) $(-\infty; 4]$; b) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$; c) $(6; +\infty)$; d) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.
- 55) a) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; b) $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; c) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; d) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; e) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; f) $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; g) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; h) $-\arctg \frac{1}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- 56) a) $(-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$; b) $\pm \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; c) $\pm \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; d) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; e) $(-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$; f) $-\frac{\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; g) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$; h) $\pm \frac{5\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; i) $\pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; j) $-\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; k) $\pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$; l) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$.

- 57 a) $\frac{\pi}{2} + \pi k; 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; b) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$; c) $\pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; d) $\frac{\pi}{12} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$;
 e) $\frac{\pi}{2} + \pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; f) $\frac{\pi}{2} \cdot k; \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; g) $\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; h) $\frac{\pi}{4} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$;
 i) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; j) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; k) $\frac{\pi}{2} \cdot k; (-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$; l) $\frac{\pi}{3} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$.
- 58 a) $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; b) $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; c) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k; (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; d) $\frac{\pi}{4} + \pi k; \arctg 4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 e) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; f) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k; (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; g) $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; h) $\frac{\pi}{4} + \pi k; \arctg 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- 59 a) $-\arctg \frac{1}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; b) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; c) $\arctg 3 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; d) $-\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$.
- 60 a) 4; b) 5; c) 8; d) 5; e) 9; f) 3; g) 2; h) 3.
- 61 a) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; b) sprendinių nėra; c) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; d) $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; e) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; f) sprendinių nėra;
 g) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; h) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- 62 a) 1) $\pi k; (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$; 3) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 4) $\arctg 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; 5) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 6) $\pi + 2\pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 7) $(-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} \cdot k; \pi k, k \in \mathbb{Z}$; 9) $\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 10) $\pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; 11) $\frac{\pi}{32} + \frac{\pi}{8} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$; 12) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 b) 1) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k; \frac{\pi}{3} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{1}{2} \arctg \frac{5}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; 3) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; 4) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 5) $\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k; \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; 7) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 8) $\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 9) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$; 10) $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 11) $\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; 12) sprendinių nėra.
- 63 a) $\left[\frac{1}{2}; \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right]$; b) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; c) $\pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; d) $\left[\frac{\sqrt{3}-6}{2}; -2,5\right]$; e) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; f) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- 64 a) 7; $\frac{2\pi}{3} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$; b) $6\pi; 3\pi k, k \in \mathbb{Z}$; c) $-11; -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; d) $4\pi; 4\pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- 65 a) $a = 2, b = 2, c = \frac{\pi}{2}, d = 3$; b) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{2}{3}, c = \frac{\pi}{2}, d = \frac{1}{2}$.
- 66 a) $f(x) = -2 \cos x; 30$ sprendinių; b) $f(x) = \cos\left(\frac{2}{3}x\right); 20$ sprendinių; c) $f(x) = 4 \sin x - 1; 30$ sprendinių;
 d) $f(x) = 2 \cos(2x) + 3; 0$ sprendinių; e) $f(x) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2}{3}x\right); 20$ sprendinių;
 f) $f(x) = 1,5 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right); 30$ sprendinių.
- 67 a) 1) $f(x) = -2 \cos(2x); 2) \mathbb{R}; 3) [-2; 2]; 4) \pm \frac{3\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; 5) \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; 6) \text{ sprendinių nėra};$
 7) $-\pi; -\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \pi$; b) 1) $\sin(8x); 2) \mathbb{R}; 3) [-1; 1]; 4) \text{ sprendinių nėra}; 5) (-1)^k \cdot \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{8} \cdot k, k \in \mathbb{Z};$
 6) $(-\pi + 2\pi k; 2\pi k), k \in \mathbb{Z}; 7) 0; \frac{\pi}{16}; \frac{5\pi}{16}; \frac{9\pi}{16}; \frac{13\pi}{16}; \pi$.
- 68 Daugiausia – gruodžio mėn., mažiausiai – birželio mėn.; lapkričio, gruodžio, sausio mėnesiais.
- 69 0,04; 0,43; 0,82.
- 70 $1,72^\circ$.
- 71 40° .
- 72 a) 46 cm; b) 32° .

P. 54–55 „Pasitikrink“ uždavinių atsakymai

1 variantas

- 1 a) ne; b) taip.
 2 a) 6; b) 1; c) $\cos^2 \alpha$; d) 0; e) -1; f) 0.
 4 a) $-\frac{4}{5}$; $1\frac{1}{3}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\frac{1}{2}$; d) 0.
 5 a) -1; b) 3.
 6 a) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; b) $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
 c) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
 d) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$.
 7 a) 6; b) 2; c) 3; d) 8.
 8 a) $200\frac{1}{3}\pi$; b) $200\frac{1}{6}\pi$.
 9 6.
 10 a) R; b) sprendinių nėra;
 c) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
 d) $(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

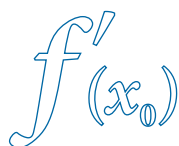
2 variantas

- 1 a) $-\frac{40}{41}$; b) $\frac{3}{5}$; $\frac{3}{4}$.
 2 a) 0; b) $\cos^2 \alpha$; c) $\cos^2 \alpha$; d) 1; e) $-\sin^2 \alpha$;
 f) $\sin(2\alpha)$; g) $2\sin \alpha$; h) $\operatorname{ctg}(2\alpha)$.
 4 a) $-\frac{3}{4}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\frac{527}{625}$; d) 0.
 5 a) $\frac{1}{2}$; b) 1; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
 6 a) -2π ; b) $-\frac{\pi}{2}$; c) $-\frac{\pi}{2}$; d) $-\frac{\pi}{3}$.
 7 a) -2π ; $-\pi$; 0; π ; b) $-\frac{7\pi}{4}$, $-\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$;
 c) -2π ; $-\frac{7\pi}{4}$; $-\pi$; $-\frac{3\pi}{4}$; 0; $\frac{\pi}{4}$; π ; d) $-\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$;
 e) -2π ; $-\frac{3\pi}{2}$; 0; $\frac{\pi}{2}$; f) -2π ; $-\pi$; 0; π .
 8 a) lyginė; b) $(\pi + 2\pi k; 0)$; $(\pm \arccos \frac{3}{4} + 2\pi k; 0)$,
 $k \in \mathbb{Z}$; c) 26 taškuose; d) 4.
 9 $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\}$, $k \in \mathbb{Z}$; $E(f) = 1$.
 10 a) $(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$;
 b) $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$;
 c) $(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$;
 d) $(\pi k; \arctg 2 + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

P. 56 „Ar priimsi iššūkį?“ uždavinių atsakymai

- 2 a) πk ; $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k$; $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; b) $\frac{\pi}{2} \cdot k$; $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; c) πk , $k \in \mathbb{Z}$; d) πk ; $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
 e) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; f) sprendinių nėra.
 3 a) $(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$; b) $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$; c) $(-\frac{3\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$;
 d) $(-\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2} \cdot k; \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2} \cdot k)$, $k \in \mathbb{Z}$; e) $[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$; f) R; g) R;
 h) $\pi + 2\pi k < x < 1,5\pi + 2\pi k$; $1,5\pi + 2\pi k < x < 2\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
 5 a) $4\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$; b) 1.
 6 $k = 10\sqrt{3}$; $\varphi = \frac{\pi}{6}$.
 7 90° .

2 skyrius



Funkcijos išvestinė ir jos taikymas

Šiam skyriui išplėstiniame kurse skiriama 30 pamokų, iš jų 5 pamokos – kartojimui. Bendrajame kurse jam numatytos 22 pamokos, iš jų 6 – kartojimo pamokos. Skyrius pradedamas jau žinomų funkcijų ir jų savybių kartojimu: nuo tiesinės funkcijos iki trigonometrinių funkcijų. Čia primenama funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sričių apibrėžtys, kokia funkcija yra didėjančioji, o kokia – mažėjančioji, lyginė ir nelyginė, kaip nustatyti funkcijos didžiausią ir mažiausią reikšmę, kaip iš grafiko atpažinti tolydžiąją funkciją, kaip rasti funkcijai atvirkštinę funkciją. Pateikiama daug pavydžių funkcijų transformacijoms kartoti. Šiek tiek neįprasta uždavinių pateikimo metodika – funkcijų savybės atskleidžiamos per žinomas funkcijas. Kartojant tiesinę funkciją, prisimenama ir monotoniškumo savybė, kalbant apie atvirkščiojo proporcingumo funkciją – funkcijos tolydumas ir t. t., kol pakartojamos visos elementariosios funkcijos ir jų savybės. Nuo 10 uždavinio prasideda funkcijų savybių kartojimas pagal jų analizinę išraišką.

Skyriaus „Funkcijos išvestinė ir jos taikymas“ skirstymo pamokomis pavyzdys

■ Išplėstinis kursas

Pamokos eil. nr.	Pamokos tema
1.	Pakartok: funkcijos ir jų savybės
2.	Pakartok: funkcijos ir jų savybės
3.	Pakartok: funkcijos ir jų savybės
4.	Pakartok: funkcijos ir jų savybės
5.	Pakartok: funkcijos ir jų savybės
6.	Susipažink: funkcijos riba taške, funkcijos pokytis
7.	Susipažink: materialiojo taško judėjimo greitis, funkcijos grafiko liestinės krypties koeficientas
8.	Susipažink: funkcijos išvestinės apibrėžtis
9.	Susipažink: funkcijos išvestinės mechaninė prasmė
10.	Susipažink: funkcijos išvestinės geometrinė prasmė
11.	Išmok: pagrindinės diferencijavimo taisyklės
12.	Išmok: pagrindinės diferencijavimo formulės
13.	Išmok: sudėtinės funkcijos išvestinė
14.	Išmok: sudėtinės funkcijos išvestinė
15.	Išmok: lygčių ir nelygybių su išvestinėmis sprendimas
16.	Savarankiškas darbas
17.	Taikyk: materialiojo taško judėjimo greitis
18.	Taikyk: funkcijos grafiko liestinė

19.	Taiky: funkcijos grafiko liestinė
20.	Taiky: funkcijos monotoniškumo intervalai ir kritiniai taškai
21.	Taiky: funkcijos monotoniškumo intervalai ir kritiniai taškai
22.	Taiky: funkcijos tyrimas ir grafiko braižymas
23.	Taiky: funkcijos tyrimas ir grafiko braižymas
24.	Taiky: didžiausia ir mažiausia funkcijos reikšmės
25.	Taiky: optimizavimo uždaviniai
26.	Taiky: optimizavimo uždaviniai
27.	Taiky: optimizavimo uždaviniai
28.	Taiky: įvairių uždavinių sprendimas
29.	Apibendrinimas ir kartojimas
30.	Kontrolinis darbas

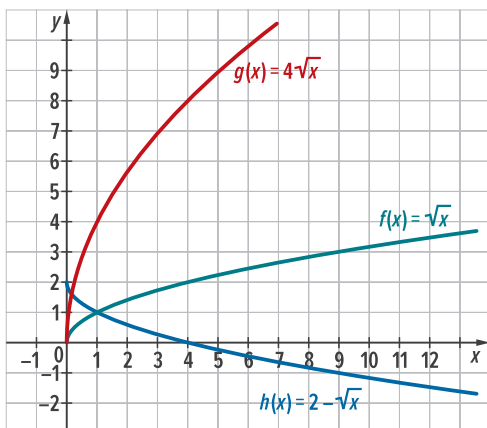
■ Bendrasis kursas

Pamokos eil. nr.	Pamokos tema
1.	Pakartok: funkcijos ir jų savybės
2.	Pakartok: funkcijos ir jų savybės
3.	Pakartok: funkcijos ir jų savybės
4.	Pakartok: funkcijos ir jų savybės
5.	Pakartok: funkcijos ir jų savybės
6.	Pakartok: funkcijos ir jų savybės
7.	Susipažink: funkcijos pokytis
8.	Susipažink: funkcijos išvestinės apibrėžtis
9.	Susipažink: funkcijos išvestinės mechaninė prasmė
10.	Išmok: daugianario išvestinė
11.	Išmok: daugianario išvestinė
12.	Išmok: išvestinės reikšmė taške, įvairių uždavinių sprendimas
13.	Taiky: materialiojo taško judėjimo greitis
14.	Taiky: funkcijos monotoniškumo intervalai ir kritiniai taškai
15.	Taiky: funkcijos tyrimas ir grafiko braižymas
16.	Taiky: funkcijos tyrimas ir grafiko braižymas
17.	Taiky: didžiausia ir mažiausia funkcijos reikšmės
18.	Taiky: optimizavimo uždaviniai
19.	Taiky: optimizavimo uždaviniai
20.	Taiky: įvairių uždavinių sprendimas
21.	Apibendrinimas ir kartojimas
22.	Kontrolinis darbas

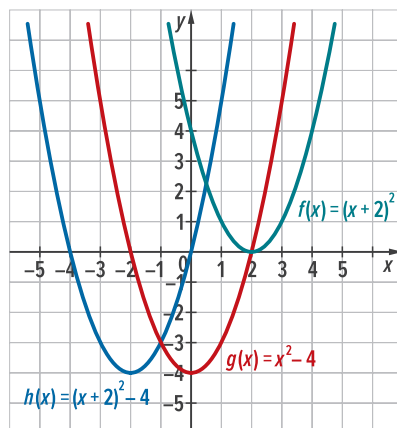
P. 60–74 „Pakartok“ užduočių atsakymai

- 1** a) negali; b) gali; c) negali; d) gali.
- 2** a) 1) $x = -5$; 2) $y = 2x + 3$ – didėjančiosios funkcijos, $y = -x - 3$ – mažėjančiosios, $y = -2$ – pastovios; 3) $(-\infty; -1)$. *Apibendrink:* yra didėjančioji, kai $k > 0$; yra mažėjančioji, kai $k < 0$; grafikas kerta ašį Oy taške $(0; b)$; lygiagreti su ašimi Oy ; lygiagreti su ašimi Ox .
- b) 1) $D(f) = D(g) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) $E(f) = E(g) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 3) $g(x)$ – didėjančioji, $f(x)$ – mažėjančioji; 4) $(0; +\infty)$; 5) $x = 0$; 6) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. *Apibendrink:* $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; didėjančioji, kai $k < 0$; mažėjančioji, kai $k > 0$; tolydumo intervalai: $(-\infty; 0)$ ir $(0; +\infty)$.
- c) 1) $E(f) = [-9; +\infty)$; $E(g) = (-\infty; -1\frac{3}{4}]$; 2) $x = -2$; $x = 4$; 3) $(-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$; 4) $(-\infty; +\infty)$;
- 5) $f(x)$: $(0; -8)$; $g(x)$: $(0; -2)$; 6) $x = 1$. *Apibendrink:* šakos eina aukštyn, kai $a > 0$; žemyn, kai $a < 0$; kerta ašį Oy taške $(0; c)$; sprendžiame lygtį $ax^2 + bx + c = 0$; kai lygtis $ax^2 + bx + c = 0$ turi du skirtingus sprendinius (t. y. kai $D > 0$); kai lygtis $ax^2 + bx + c = 0$ neturi sprendinių ($D < 0$); kai lygtis $ax^2 + bx + c = 0$ turi du lygius sprendinius ($D = 0$); simetrijos ašies lygtis $x = -\frac{b}{2a}$.
- d) 1) $f(x)$ – lyginė, $g(x)$ – nelyginė; 2) 0; 1; 3) $(1; +\infty)$; 4) $E(f) = [0; +\infty)$; 5) $E(g) = \mathbf{R}$; 6) kai $a > 1$, $a^5 > a^4$; kai $0 < a < 1$, $a^7 < a^4$; kai $a > 1$, $a^8 > a^4$; kai $a < -1$, $a^8 > a^6$; kai $a < 0$, $a^5 < a^4$; kai $0 < a < 1$, $a^6 < a^2$; kai $a < -1$, $a^5 < a^3$; kai $0 < a < 1$, $a^7 < a^3$. *Apibendrink:* yra lyginė, kai n lyginis ($n = 2k$, $k \in \mathbf{N}$); yra nelyginė, kai n nelyginis ($n = 2k + 1$, $k \in \mathbf{N}$).
- e) 1) $f(x)$ – nei lyginė, nei nelyginė, $g(x)$ – nelyginė; 2) 0; 1; 3) $(0; 1)$; 4) $D(f) = [0; +\infty)$; $E(f) = [0; +\infty)$; 5) mažiausia 0, didžiausia 2; 6) didžiausia 2, mažiausia -1 .
- f) 1) $D(f) = D(g) = \mathbf{R}$; 2) $E(f) = E(g) = (0; +\infty)$; 3) $f(x)$ – didėjančioji, $g(x)$ – mažėjančioji; 4) $(-\infty; 0)$. *Apibendrink:* didėjančioji, kai $a > 1$; mažėjančioji, kai $0 < a < 1$; $E(y) = (0; +\infty)$.
- g) 1) $D(f) = D(g) = (0; +\infty)$; 2) $E(f) = E(g) = \mathbf{R}$; 3) $f(x)$ – didėjančioji, $g(x)$ – mažėjančioji; 4) $(0; 1)$. *Apibendrink:* didėjančioji, kai $a > 1$; mažėjančioji, kai $0 < a < 1$; $E(y) = (-\infty; +\infty)$.
- h) 1) $f(x) = \sin x$; 2) $T = 2\pi$; 3) $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = [-1; 1]$; 4) $D(g) = [-1; 1]$, $E(g) = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$;
- 5) $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$.
- i) 1) $f(x) = \cos x$; 2) $T = 2\pi$; 3) $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = [-1; 1]$; 4) $D(g) = [-1; 1]$, $E(g) = [0; \pi]$; 5) $[0; \pi]$;
- 6) $\cos(-x) = \cos x$; $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.
- j) 1) $T = \pi$; 2) $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}\}$, $E(f) = \mathbf{R}$; 3) $D(g) = \mathbf{R}$, $E(g) = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$; 4) $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$;
- 5) $f(x) = \operatorname{tg} x$ – nelyginė, $g(x) = \operatorname{arctg} x$ – nelyginė.
- k) 1) $T = \pi$; 2) $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{\pi k, k \in \mathbf{Z}\}$, $E(f) = \mathbf{R}$; 3) $D(g) = \mathbf{R}$, $E(g) = (0; \pi)$; 4) $[0; \pi]$; 5) $f(x) = \operatorname{ctg} x$ – nelyginė, $g(x) = \operatorname{arctg} x$ – nei lyginė, nei nelyginė. *Apibendrink:* lyginė funkcija yra $f(x) = \cos x$; nelyginės funkcijos: $f(x) = \sin x$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $g(x) = \arcsin x$ ir $g(x) = \operatorname{arctg} x$; lygybė $f(-x) = \pi - f(x)$ galioja šioms trigonometrinėms funkcijoms: $g(x) = \arccos x$ ir $g(x) = \operatorname{arctg} x$.
- 3** 2 grafikas – $y = (\frac{1}{2})^x$; 1 grafikas – $y = x^4$; 6 grafikas – $y = \sqrt[3]{x}$; 5 grafikas – $y = \log_3 x$;
- 8 grafikas – $y = |x|$.
- 4** a) $f(x) = g(x)$, kai $x = 0,5$; $f(x) \geq g(x)$, kai $x \in [0,5; +\infty)$; b) $f(x) = g(x)$, kai $x = 0$; $f(x) \geq g(x)$, kai $x \in (-\infty; 0]$; c) $f(x) = g(x)$, kai $x = 1$; $f(x) \geq g(x)$, kai $x \in [1; +\infty)$; d) $f(x) = g(x)$, kai $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; $f(x) \geq g(x)$, kai $x \in [-\frac{\pi}{4} + \pi k; \pi k] \cup [\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k]$, $k \in \mathbf{Z}$; e) $f(x) = g(x)$, kai $x \approx -2,5$, $x \approx 2,5$; $f(x) \geq g(x)$, kai $x \in (-\infty; \approx -2,5] \cup [\approx 2,5; +\infty)$; f) $f(x) = g(x)$, kai $x = 0$, $x = 1,5$; $f(x) \geq g(x)$, kai $x \in [0; 1,5]$;
- g) $f(x) = g(x)$, kai $x = 0$; $f(x) \geq g(x)$, kai $x \in [0; +\infty)$; h) $f(x) = g(x)$, kai $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; $f(x) \geq g(x)$, kai $x \in [\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{5\pi}{4} + \pi k]$, $k \in \mathbf{Z}$.

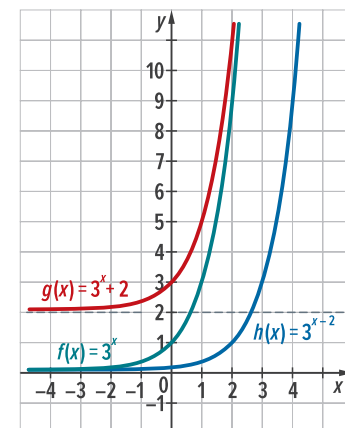
5 a)



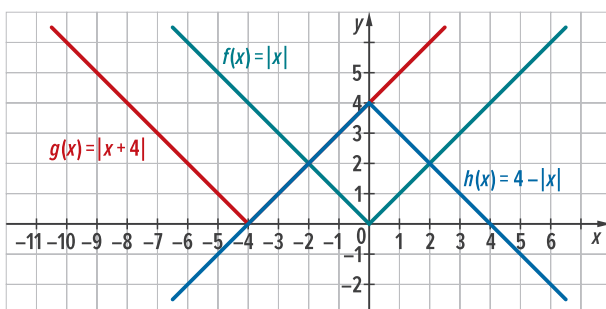
b)



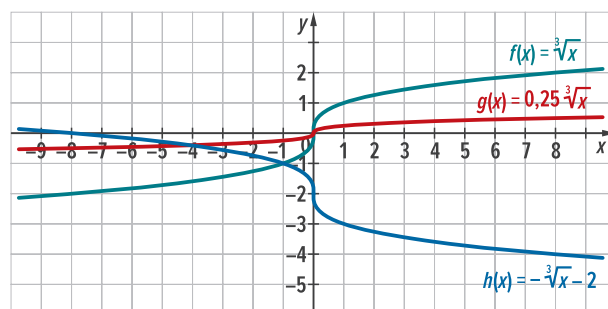
c)



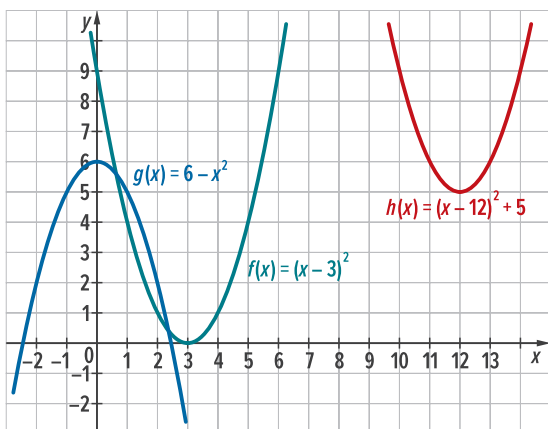
d)



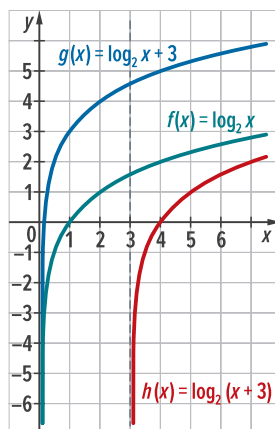
e)



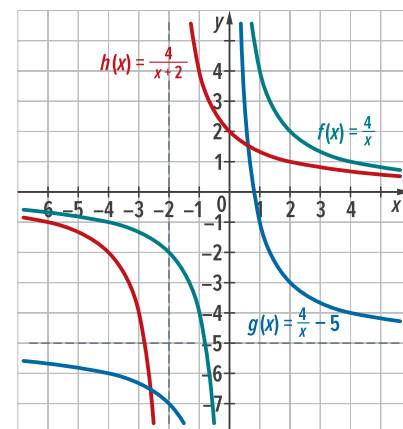
f)



g)

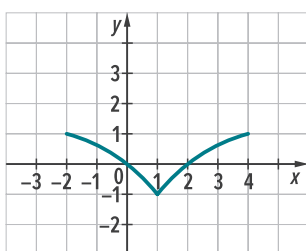


h)

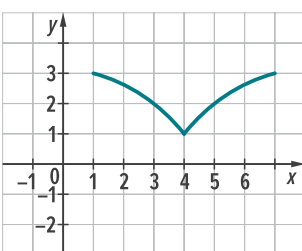


6 a)

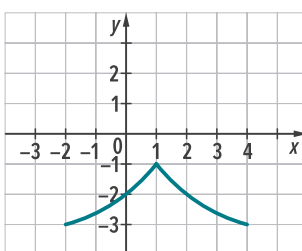
①



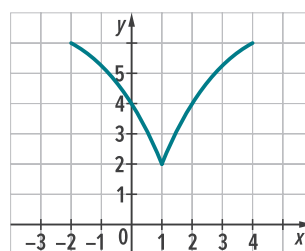
②



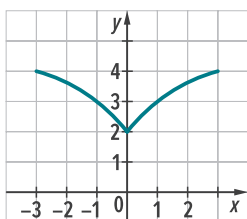
③



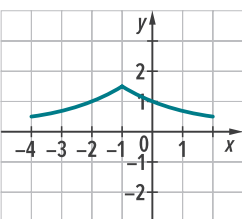
④



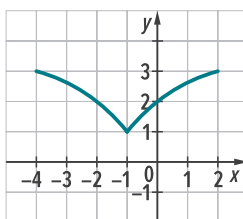
⑤



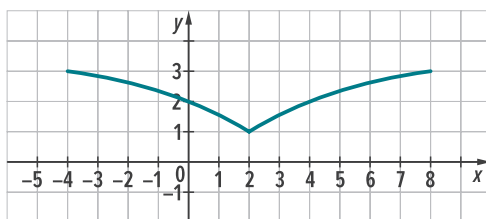
⑥



⑦

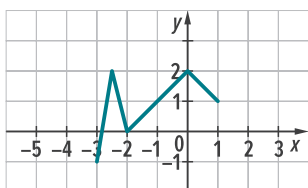


⑧

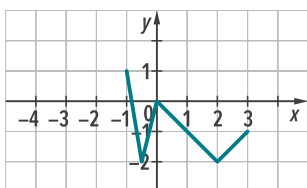


b)

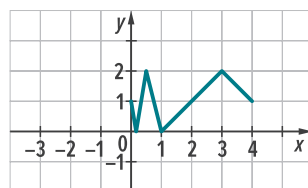
①



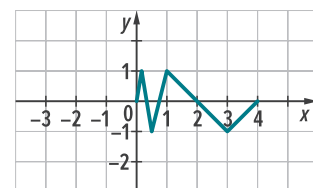
②



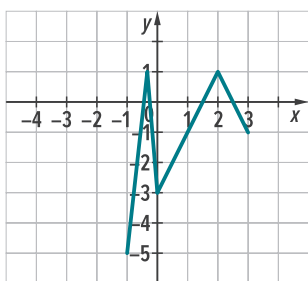
③



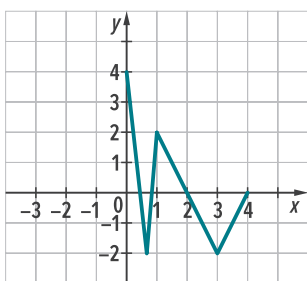
④



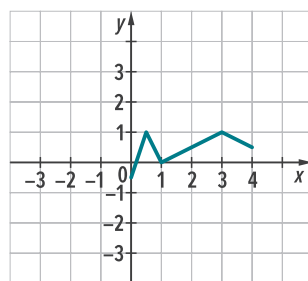
⑤



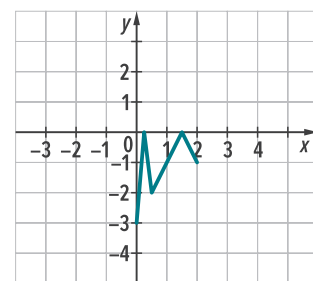
⑥



⑦



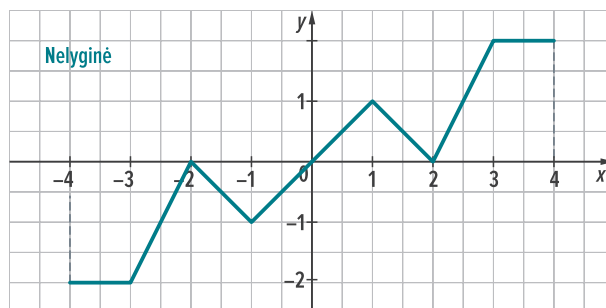
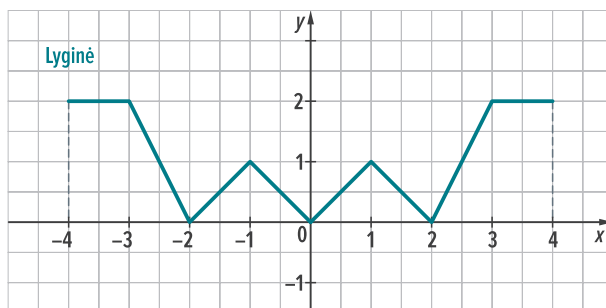
⑧



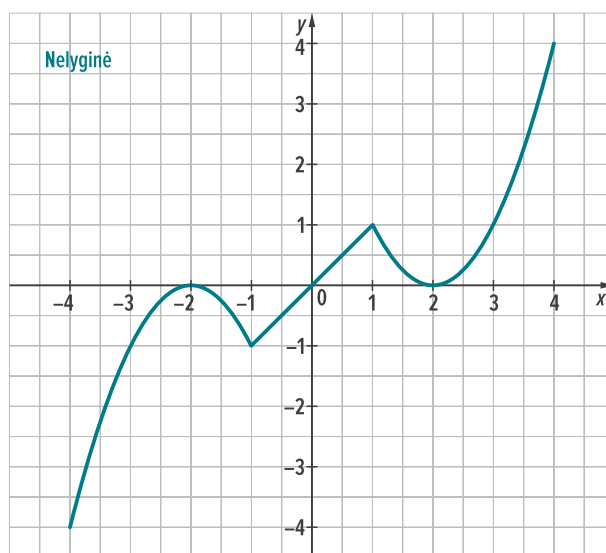
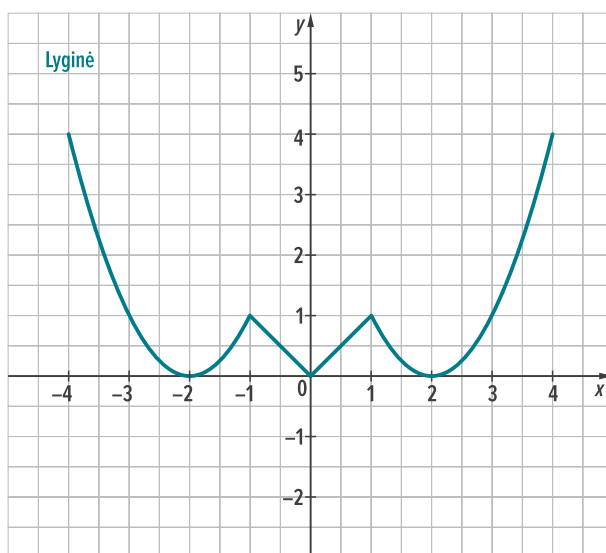
- ⑦ a) 1 grafiko $y = |x + 2| + 2$; 2 grafiko $y = |x - 2|$; 3 grafiko $y = |x| - 4$; 4 grafiko $y = -|x| - 1$;
b) 1 grafiko $y = (x - 2)^2$; 2 grafiko $y = 3 - x^2$; 3 grafiko $y = 1 - x^2$; 4 grafiko $y = (x + 2)^2 - 1$.
- ⑧ a) $D_g = [0; 1]$, $E_g = [2; 6]$; b) $D_g = [2; 3]$, $E_g = [-3; -2]$; c) $D_g = [-1; 0]$, $E_g = [0; 1]$;
d) $D_g = [-5; -4]$, $E_g = [2; 3]$; e) $D_g = [0; 1]$, $E_g = [-2; -1]$; f) $D_g = [-1; 0]$, $E_g = [0; 1]$.
- ⑨ a) $a = 2$, $b = 3$, $c = -1$; b) $a = 2$, $b = -3$, $c = 2$; c) $a = 1$, $b = -4$, $c = 0$; d) $a = -2$, $b = 0$, $c = 1$;
e) $a = 3$, $b = -2$; f) $a = 0,5$, $b = 3$; g) $a = 3$, $b = 2$; h) $a = -2$, $b = -1$; i) $a = 2$, $b = -\frac{\pi}{4}$, $c = 2$;
j) $a = -1$, $b = \frac{1}{3}$, $c = 1$; k) $a = -3$, $b = \frac{\pi}{6}$, $c = -2$; l) $a = 2$, $b = \frac{\pi}{4}$.
- ⑩ a) \mathbb{R} ; b) $(-\infty; 5)$; c) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k; 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$; d) $(12; 13) \cup (13; +\infty)$; e) $(-\sqrt{2}; 0) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$; f) $[-1; +\infty)$;
g) $\mathbb{R} \setminus \{\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$; h) $(-5; -1) \cup (-1; +\infty)$; i) $[-1, 4; -1]$; j) $(1, 5; 2) \cup (2; +\infty)$; k) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$; l) $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$;
m) $0, 2$; n) $[-1; 0) \cup (0; +\infty)$; o) $(-\infty; 0) \cup (0; 3)$; p) $(0; 1) \cup (1; 6)$; r) $(-2; 1) \cup (1; 2)$; s) $(0; 500) \cup (500; +\infty)$;
t) $[\pi k; \pi + \pi k] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$; u) $[e; +\infty)$.
- ⑪ a) $[1; +\infty)$; b) $[-2; 2]$; c) $[2; 4]$; d) $(4; +\infty)$; e) $(0; 16]$; f) $[0, 5; 1]$; g) $[1; 3]$; h) $[-5; +\infty)$; i) $[0; +\infty)$;
j) $(-\infty; +\infty)$; k) $\left[1\frac{2}{3}; 2, 5\right]$; l) $(-\infty; 0)$; m) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; n) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; o) $[-1; +\infty)$; p) $[0; +\infty)$; r) $[0; 2\pi]$; s) $[-3; -1]$;
t) $(1; +\infty)$; u) $(-\infty; 5]$.
- ⑫ a) mažėjančioji, nes $k = 1 < 0$; b) mažėjančioji, nes $k = 6 > 0$; c) mažėjančioji, nes $0 < 0,3 < 1$;
d) mažėjančioji, nes $0 < \frac{1}{5} < 1$; e) didėjančioji, nes $k = \frac{1}{16} > 0$; f) mažėjančioji, nes $x < 0$, $e > 1$;
g) mažėjančioji, nes $0 < 0,2 < 1$; h) didėjančioji, nes $-3 < 0$.
- ⑬ a) $x = -3$, $x = 1$; $y > 0$, kai $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$; $y < 0$, kai $x \in (-3; 1)$; b) nulių nėra; $y > 0$, kai $x \in (1; +\infty)$; $y < 0$, kai $x \in (-\infty; 1)$; c) $x = 1$; $y > 0$, kai $x \in (0; 1)$; $y < 0$, kai $x \in (1; +\infty)$; d) nulių nėra; $y > 0$, kai $x \in \mathbb{R}$; e) $x = 0$; $y > 0$, kai $x \in [-1; 0)$; $y < 0$, kai $x \in (0; 1]$; f) $x = -1$; $y > 0$, kai $x \in (-\infty; -1)$; $y < 0$, kai $x \in (-1; 0)$; g) nulių nėra; $y > 0$, kai $x \in \mathbb{R}$; h) $x = 10^4$; $y > 0$, kai $x \in (10^4; +\infty)$; $y < 0$, kai $x \in (0; 10^4)$;
i) $x = -11$, $x = 1$; $y > 0$, kai $x \in (-11; 1)$; $y < 0$, kai $x \in (-\infty; -11) \cup (1; +\infty)$; j) $x = 1$; $y > 0$, kai $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$; $y < 0$, kai $x \in (0; 1)$; k) $x = 0$; $y > 0$, kai $x \in (0; 1)$; $y < 0$, kai $x \in (-1; 0)$;
l) $x = e^{-3}$; $y > 0$, kai $x \in (0; +\infty)$; neigiamųjų reikšmių nėra.

- 14 a) nei lyginė, nei nelyginė; b) nelyginė; c) nelyginė; d) nei lyginė, nei nelyginė; e) lyginė; f) lyginė; g) nei lyginė, nei nelyginė; h) nelyginė; i) lyginė; j) lyginė; k) nelyginė; l) lyginė.

15 a)



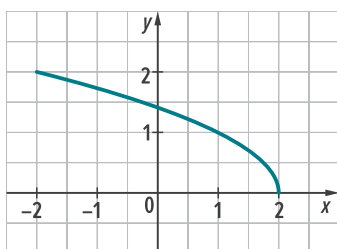
b)



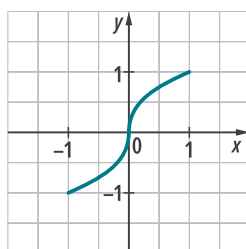
- 16 a) 0; b) -25; c) 28; d) -3.

- 17 a) $\max_{x \in [-2; -1]} f(x) = 3$; $\min_{x \in [-2; -1]} f(x) = 0$; b) $\max_{x \in [0; 2]} f(x) = 0$; $\min_{x \in [0; 2]} f(x) = -3$; c) $\max_{x \in [-1; 1]} f(x) = 3$; $\min_{x \in [-1; 1]} f(x) = -3$; d) $\max_{x \in [-2; 2]} f(x) = 3$; $\min_{x \in [-2; 2]} f(x) = -3$.

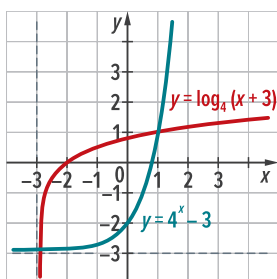
18 a)



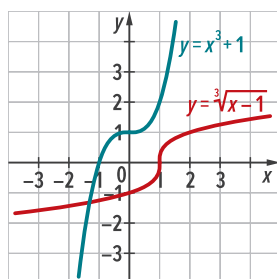
b)



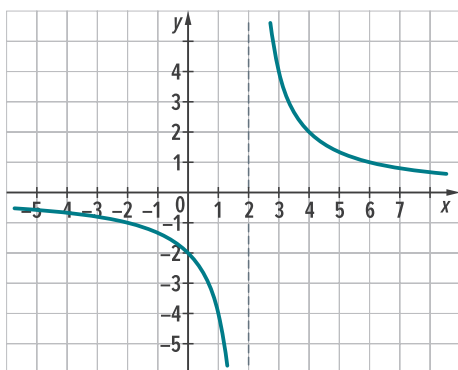
- 19 a) $y = \log_4(x + 3)$;



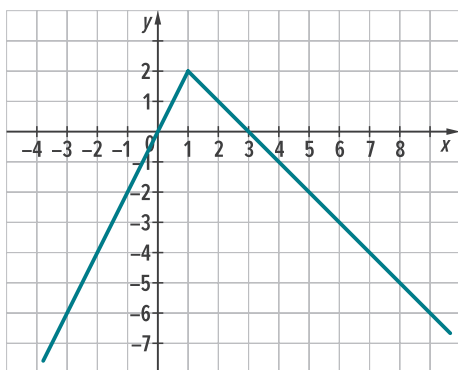
- b) $y = \sqrt[3]{x - 1}$.



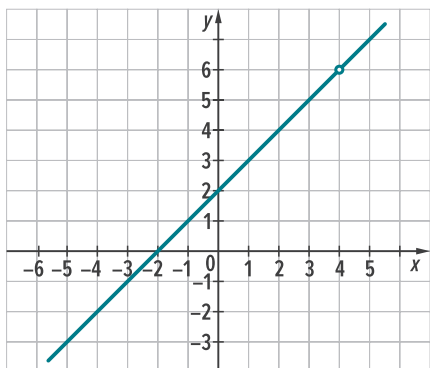
- 20 a) $g(x) = \frac{x}{2} + 1,5$; $D_f = E_g = \mathbf{R}$; $E_f = D_g = \mathbf{R}$; b) $g(x) = \sqrt{x-1}$; $D_f = E_g = [0; +\infty)$; $E_f = D_g = [1; +\infty)$;
 c) $g(x) = \sqrt{-x-9} + 3$; $D_f = E_g = \mathbf{R}$; $E_f = D_g = (-\infty; -9]$; d) $g(x) = \frac{1}{x} + 1$; $D_f = E_g = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$;
 $E_f = D_g = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; e) $g(x) = \log_7(x-3)$; $D_f = E_g = \mathbf{R}$; $E_f = D_g = (3; +\infty)$; f) $g(x) = x^5 + 2$;
 $D_f = E_g = \mathbf{R}$; $E_f = D_g = \mathbf{R}$; g) $g(x) = \sqrt[8]{x+1}$; $D_f = E_g = [0; +\infty)$; $E_f = D_g = [-1; +\infty)$;
 h) $g(x) = \log_{11}(x-2) - 1$; $D_f = E_g = \mathbf{R}$; $E_f = D_g = (2; +\infty)$; i) $g(x) = 6 - 10^x$; $D_f = E_g = (-\infty; 6)$;
 $E_f = D_g = \mathbf{R}$; j) $g(x) = e^{3-x}$; $D_f = E_g = (0; +\infty)$; $E_f = D_g = \mathbf{R}$; k) $g(x) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x$; $D_f = E_g = \mathbf{R}$; $E_f = D_g = \mathbf{R}$;
 l) $g(x) = -\sqrt{3-x}$; $D_f = E_g = (-\infty; 0]$; $E_f = D_g = (-\infty; 3]$; m) $g(x) = \sqrt{x+1} + 1$; $D_f = E_g = [1; +\infty)$;
 $E_f = D_g = [-1; +\infty)$; n) $g(x) = \frac{2+x}{3-x}$; $D_f = E_g = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; $E_f = D_g = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$;
 o) $g(x) = \log_6 x + 3$; $D_f = E_g = \mathbf{R}$; $E_f = D_g = (0; +\infty)$; p) $g(x) = (x-2)^4$; $D_f = E_g = [0; +\infty)$;
 $E_f = D_g = [2; +\infty)$; r) $g(x) = -\sqrt[6]{x-1} - 3$; $D_f = E_g = \mathbf{R}$; $E_f = D_g = [1; +\infty)$; s) $g(x) = 2 - \log_7(x-3)$;
 $D_f = E_g = \mathbf{R}$; $E_f = D_g = (3; +\infty)$; t) $g(x) = 2^{x-3}$; $D_f = E_g = (0; +\infty)$; $E_f = D_g = \mathbf{R}$; u) $g(x) = e^x + 1$;
 $D_f = E_g = (1; +\infty)$; $E_f = D_g = (-\infty; +\infty)$.
- 22 $(-3; -2), (1; 0), (5; 2)$.
- 23 a) $D_f = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; tolydi,
 kai $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$;



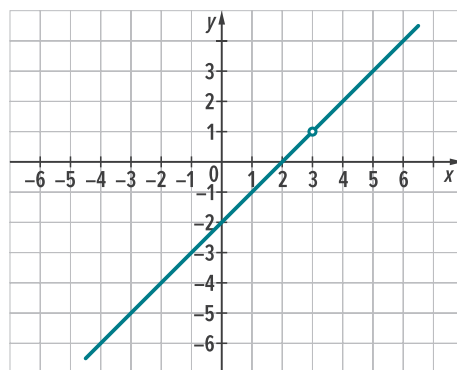
c) $D_f = \mathbf{R}$; tolydi visoje realiųjų skaičių aibėje;



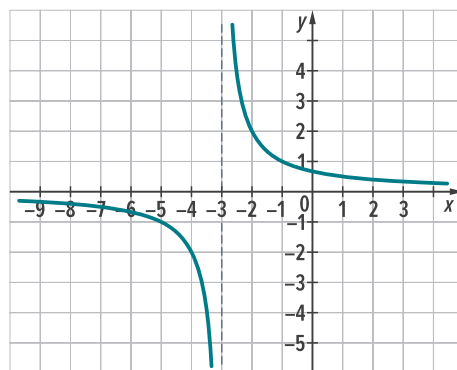
e) $D_f = (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$; tolydi,
 kai $x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$;



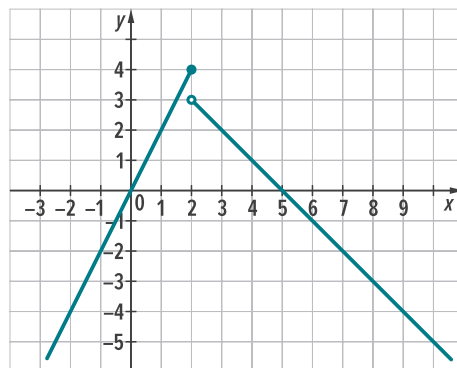
b) $D_f = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; tolydi,
 kai $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$;



d) $D_f = (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$; tolydi,
 kai $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$;



f) $D_f = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; tolydi,
 kai $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.



24 a) $k = 2$; b) $k = -1$.

25 a) $T = \frac{2\pi}{3}$; b) $T = 2\pi$; c) $T = 2\pi$; d) $T = \frac{\pi}{6}$; e) $T = 4\pi$; f) $T = \frac{3\pi}{2}$.

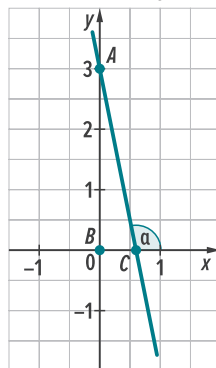
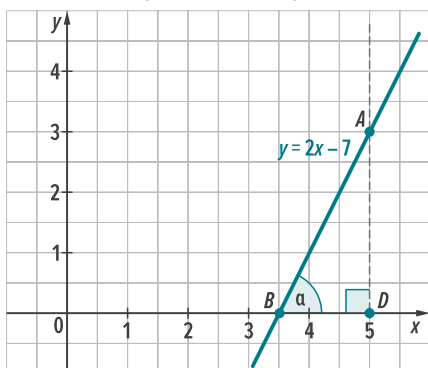
26 a) $f(g(x)) = |x|$; b) $g(f(h(x))) = 3x + 2$; c) $h(f(1)) + h(g(-1)) = 4$; d) $g(f(x)) = x$; e) $g(g(f(x))) = x^2 - 3$; f) $f(g(2)) + g(f(0)) = 2$.

27 a) du; b) neturi.

28 a) didžiausia 0, mažiausia -3 ; b) 1.

29 a) $y = 6,5x - 19$; c) $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$.

31 a) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $\operatorname{tg} \alpha = 2$; $y = 2x - 2$; c) $\sin \alpha = \frac{5\sqrt{26}}{26}$; $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{26}}{26}$; $\operatorname{tg} \alpha = -5$;



b) $y = 0,5x + 0,5$; iki ašies Ox lygus 1; iki ašies Oy lygus 1;

d) $y = \frac{1}{5}x - 7\frac{2}{5}$; $\sqrt{122}$.

32 a) $a = 4$; b) $a = \log_5 8$; c) $a = 2$ ir $a = 8$; d) $a = 5^8$.

33 a) $a = -2$, $b = 1$; $E_f = [0; +\infty)$; b) $E_f = (-\infty; -3]$; $D_g = (-\infty; -3]$; $E_g = [1; +\infty)$; $\sqrt{3}$.

34 a) $f(x) = \begin{cases} 5x, & \text{kai } x \leq 3, \\ 3x + 6, & \text{kai } 3 \leq x \leq 24, \\ x, & \text{kai } x > 24; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 3,27 + 0,11x, & \text{kai } x \leq 100, \\ 0,15x - 0,73, & \text{kai } x > 100. \end{cases}$

35 a) $f(x) = x^2 + \frac{1600}{x}$; $D_f = (0; +\infty)$; b) $f(x) = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{400 - x^2}$; $D_f = (0; 20)$;

c) $f(x) = x \cdot \sqrt{144 - x^2}$; $D_f = (0; 12)$; d) $f(x) = 6x + \frac{200}{x}$; $D_f = (0; +\infty)$.

Skyrelio pradžioje, nagrinėjant kvadratinę funkciją $f(x) = x^2$, mokiniai supažindinami su funkcijos ribos taške sąvoka. Toliau mokiniams pateikiamas konkrečios funkcijos pavyzdys ir grafikas. Išnagrinėję šį pavyzdį, mokiniai išsiaiškina, kada funkcija taške $x = x_0$ yra tolydi (jos riba šiame taške sutampa su funkcijos reikšme tame taške), kada funkcija neturi ribos tam tikrame taške, koks taškas vadinamas funkcijos trūkio tašku, kada funkcijos riba neegzistuoja. Svarbiausia, kad mokiniai iš grafiko suprastų, kas yra funkcijos riba taške. Šios sąvokos nebūtina gilinti. Akcentuojame taisyklę: jei funkcija yra tolydi tam tikrame taške, tai jos riba tame taške sutampa su funkcijos reikšme tame taške. Ribų skaičiavimui daug dėmesio skirti nereikia, nebent mokytojas siekia drauge pakartoti reiškinių prastinimą. Šiame vadovėlyje išvestinių skaičiavimo taisyklės pagrindžiamos ne jas įrodant, bet pabrėžiant geometrinę ir mechaninę išvestinės prasmę. Taip pasirinkta dėl to, kad netektų daug dėmesio skirti riboms, jų teorems, mat tai nenumatyta programoje.

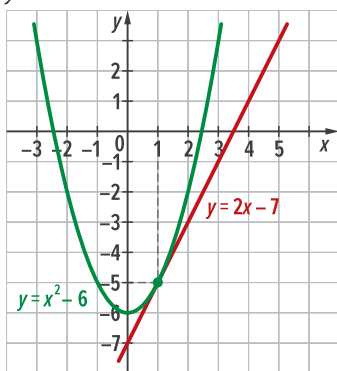
Supažindinant moksleivius su funkcijos pokyčiu, pravartu pradėti kalbėti apie jų ūgio pokytį per tam tikrą laiko tarpą (remiantis p. 76 esančia iliustracija). Taip moksleiviams bus nesunku suvokti argumento pokytį ir funkcijos reikšmės pokytį.

Mokant 3 ir 4 skyrelių, svarbu skatinti mokinius pastebėti aptariamų formulių panašumą. Abiem atvejais kalbame apie funkcijos ir argumento pokyčių santykio ribą. Atkreipkite moksleivių dėmesį į tai, kokiuose iš pirmo žvilgsnio skirtinguose kontekstuose aptinkama ši riba ir kuo tie kontekstai panašūs įsigilinus. Pabrėžkite, kad abiem atvejais iš esmės kalbame apie greitį, t. y. funkcijos reikšmių kitimo greitį. Taip nuosekliai prieisite prie išvestinės apibrėžties.

Nemanome, kad reikia spręsti daug sudėtingų uždavinių ieškant išvestinės pagal apibrėžtį. Atlikdami techninių gebėjimų reikalaujančias užduotis, mokiniai gali prarasti patį išvestinės prasmės supratimą. Vieno ar poros paprastų iliustruojančių pavyzdžių tikrai pakanka. Svarbu, kad būtų suprasta pati išvestinės sąvoka. O ji įtvirtinama 7 skyrelyje. Atkreipkite dėmesį į tai, kad jau šiame skyrelyje yra klojami pamatai funkcijos tyrimui. Vadovėlio 82 ir 83 puslapiuose pateikti apibendrinimai yra labai svarbūs, juos reikėtų išnagrinėti atidžiau.

„Pamėgink“ užduočių atsakymai

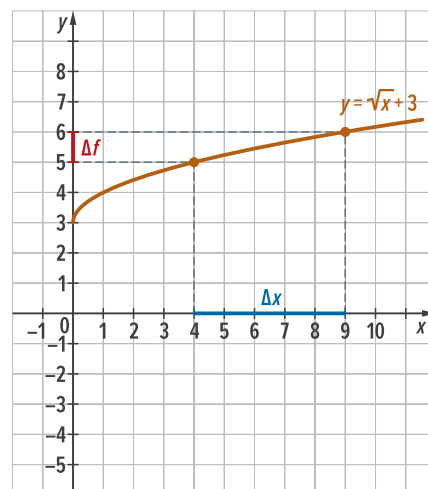
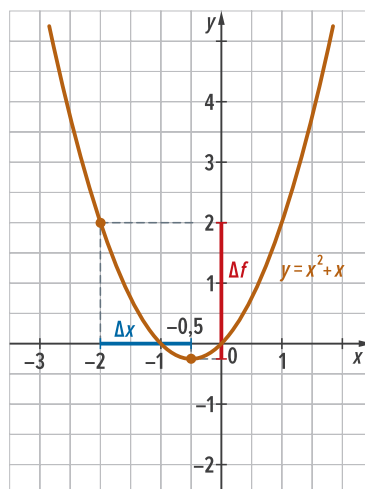
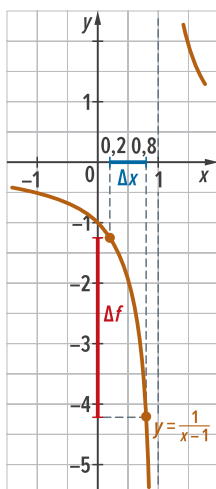
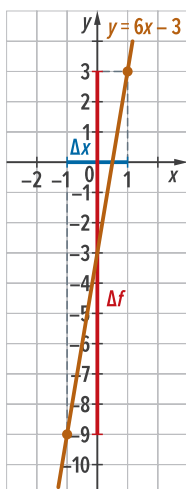
- P. 76 a) $-1,4$; b) $\frac{1}{2}$.
- P. 77 a) $0,0802$; b) $-0,0798$.
- P. 78 Didesnį atstumą nueina antrasis taškas; antrojo taško vidutinis greitis didesnis; trečiąją sekundę didesnis antrojo taško greitis.
- P. 79 $k = -2$.
- P. 81 I $f'(1) = -1$; $f'(x) = -2x + 1$.
II $v = 6$; kūnas sustos, kai $t = 1$.
- P. 82 1 $f'(x) = 2x$.
2 $y = 2x - 7$.
3



- P. 84 1 Teigiama intervale $(-1; +\infty)$, neigiama intervale $(-\infty; -1)$, lygi nuliui taške $x = -1$.
2 Funkcijos reikšmės didėja intervale $(-2; 0)$, mažėja intervaluose $(-\infty; -2)$ ir $(0; +\infty)$.

P. 85–87 Uždavinių atsakymai

- 1 a) 16 ; b) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $1,5$; d) 0 ; e) $0,5$; f) $2\sqrt{2}$; g) 8 ; h) 2 ; i) 3 ; j) $\frac{4}{3}$; k) $-0,5$; l) 2 .
- 2 a) $\Delta x = 2$; $\Delta f(x_0) = 2$; b) $\Delta x = 3$; $\Delta f(x_0) = 1$.
- 3 a) $\Delta x = 2$; $\Delta f(-1) = 12$; b) $\Delta x = 0,6$; $\Delta f(0,2) = -3,75$; c) $\Delta x = 1,5$; $\Delta f(-2) = -2,25$; d) $\Delta x = 5$; $\Delta f(4) = 1$.



4 a) 2; b) 0,1; c) 4; d) 1,5.

5 a) $\frac{20192\pi}{3} \text{ cm}^3$; b) $464\pi \text{ cm}^2$.

6 a) 2,5; b) 0,5; c) -2; d) 3.

7 1 ir -1.

8 a) 4; b) 0; c) -1; d) 6; e) 4; f) -9.

9 a) -1; b) $2x$; c) $-\frac{1}{x^2}$; d) 3; e) $1 + 2x$; f) $-\frac{2}{(2+x)^2}$.

10 a) $f'(x_1) > 0$; $f'(x_2) = 0$; $f'(x_3) < 0$; $f'(x_4) = 0$; $f'(x_5) > 0$; $f'(x_6) = 0$; $f'(x_7) < 0$;

b) $f'(x_1) < 0$; $f'(x_2) = 0$; $f'(x_3) > 0$; $f'(x_4) = 0$; $f'(x_5) < 0$; $f'(x_6) = 0$; $f'(x_7) > 0$.

11 Dalis	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x)$ neegzistuoja
a)	-	$(-\infty; +\infty)$	-	-
b)	$(-\infty; +\infty)$	-	-	-
c)	-	$(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$	-	-
d)	$(-2; 0)$	$(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$	-2; 0	-
e)	$(-\infty; -2) \cup (0; 2)$	$(-2; 0) \cup (2; +\infty)$	0	-2; 2
f)	$(-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (3; +\infty)$	$(0; 3)$	3	-

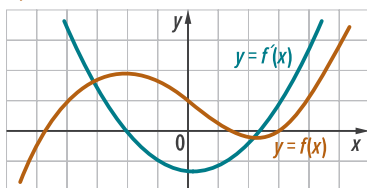
12 a) $x_2 = x_3$; x_4 ; x_1 ; b) x_1 ; x_4 ; $x_2 = x_3$.

13 Dalis	Didėjimo intervalas	Mažėjimo intervalas	Taškas, kuriame funkcijos reikšmė yra didžiausia	Taškas, kuriame funkcijos reikšmė yra mažiausia
a)	$(-1; 3)$	-	3	-1
b)	-	$(-3; 3)$	-3	3
c)	$(-2; 1)$	$(1; 3)$	1	Negalima nustatyti
d)	$(-2; -1)$	$(-1; 1)$	-1	Negalima nustatyti
e)	-	$(-3; 3)$	-3	3
f)	$(-2; 2)$	$(-3; -2)$	Negalima nustatyti	-2
g)	$(-2; 2)$	-	2	-2
h)	$(-1; 2)$	$(-3; -1)$	Negalima nustatyti	-1

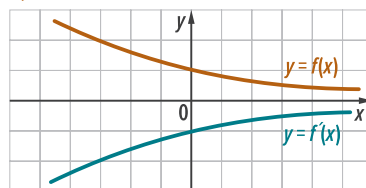
14 a) $f'(x_1) = 0$, $f'(x_2) = -1$; b) $f'(x_1) = 0$, $f'(x_2) = \frac{4}{3}$; c) $f'(x_1) = -\frac{6}{7}$, $f'(x_2) = 0$; d) $f'(x_1) = 0,8$, $f'(x_2) = 0$.

15 a) $g(x)$; b) $h(x)$; c) $f(x)$; d) $t(x)$.

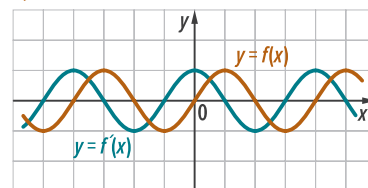
16 a)



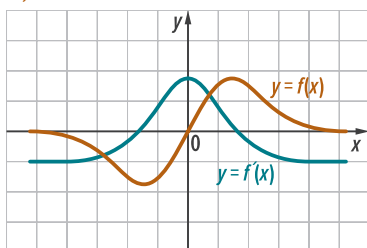
b)



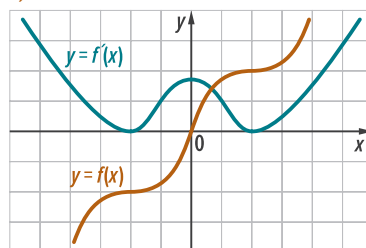
c)



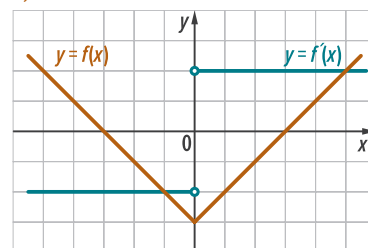
d)



e)



f)



P. 88 IŠMOK

Šiame skyrelyje pagrindines diferencijavimo taisykles stengiamasi pagrįsti remiantis geometrine ir mechanine išvestinės prasme. Elektroniniame vadovėlio priede rasite griežtesnius įrodymus, tačiau manome, kad jie prasmingi tik matematika besidomintiems moksleiviams. Nuolat įvairiuose kontekstuose kartojama išvestinės, kaip funkcijos reikšmių kitimo greičio, samprata, nuolatinis dėmesys jos geometrinei prasmei padeda įtvirtinti žinias.

Kai kurios išvestinių skaičiavimo formulės išvedamos remiantis anksčiau žinomomis formulėmis, kai kurios pateikiamos be įrodymo. Daugiau įrodymų rasite elektroniniame vadovėlio priede.

Sudėtingesnė sudėtinės funkcijos išvestinės skaičiavimo taisyklė taip pat išvesta elektroniniame vadovėlio priede. Čia svarbiausia, kad mokiniai gebėtų atpažinti sudėtinę funkciją, mokėtų ją sudaryti, kai duotos paprasčiausios funkcijos, ir, atvirkščiai, gebėtų pagal sudėtinės funkcijos išraišką nustatyti, iš kokių funkcijų sudaryta sudėtinė funkcija. Sudėtinių funkcijų išvestinių skaičiavimo įgūdžius siūlome lavinti per pavyzdžius (skaičiuoti daug ir įvairių nesudėtingų sudėtinių funkcijų pavyzdžių).

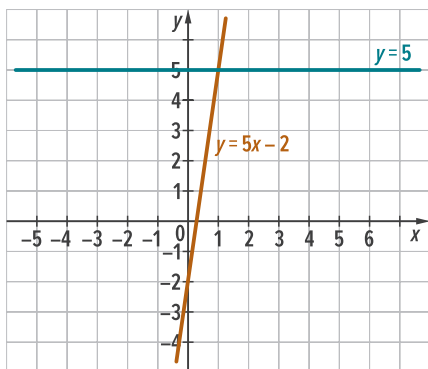
„Pamėgink“ užduočių atsakymai

- P. 89 a) $f'(x) = 2$; b) $g'(x) = 1$; c) $y' = 3$; d) $y' = 4x + 1$.
- P. 90 a) $y' = 3$; b) $y' = 20x - 38$; c) $y' = \frac{10}{(x+1)^2}$.
- P. 91 ① a) $f'(x) = 40x^4 - 6x^5 + 1$; b) $f'(x) = -12x^4$.
② $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$.
- P. 92 ② a) $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{5x\sqrt[5]{x^2}}$; b) $f'(x) = -\frac{15}{x^6} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2}$.
③ $3\sqrt{3}$.
- P. 93 a) $f'(x) = e^x + e^{x^{e-1}} - 2^x \ln 2 + 2x$; b) $g'(x) = \ln x + 1$; c) $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.
- P. 94 a) $f(g(x)) = 2 - x$; b) $g(f(x)) = \sqrt{2 - x^2}$; c) $f(p(x)) = \frac{x^2 - 12x + 18}{(x-3)^2}$; d) $p(f(x)) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1}$; e) $t(f(x)) = (2 - x^2)^4$;
f) $t(g(x)) = x^2$.
- P. 96 a) $y' = \cos x \cdot e^{\sin x}$; b) $y' = 5 \cos x \cdot (\sin x + 1)^4 + 48x^5 \cdot (x^6 + 1)^7$; c) $y' = 5 \cos^4 x \cdot \sin x$; d) $y' = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$.

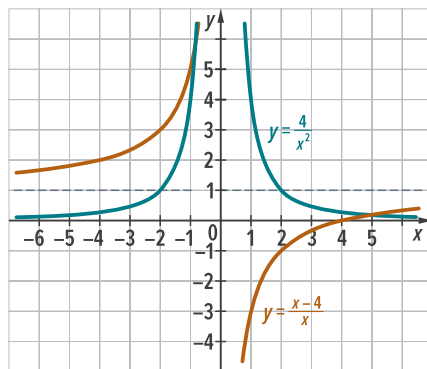
P. 96–99 Uždavinių atsakymai

- ⑰ a) $\varphi + \psi$; b) $3\psi - 2\psi$; c) $\frac{\varphi\nu - u\psi}{\nu^2}$; d) $\frac{\varphi + \psi}{2\nu}$; e) $\frac{u\psi - \varphi\nu}{5u^2}$; f) $3\varphi\nu + 3u\psi$; g) $\psi - \varphi$; h) $5\psi + 4\varphi$; i) $\frac{3u}{\psi} + \frac{\varphi}{3\nu}$;
j) $\frac{u\psi - \varphi\nu}{u^2}$; k) $-2\varphi\nu - 2u\psi$; l) $\frac{3\varphi\nu - 3u\psi}{\nu^2}$.
- ⑱ a) 4; b) $33 - 12x$; c) $-\frac{13}{(3x+2)^2}$; d) 9; e) $60 - 18x$; f) $\frac{3}{(3x-7)^2}$.
- ⑲ a) $f'(x) = 15x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 2$; b) $f'(x) = -36x^3 + 3x^2 + 1$; c) $f'(x) = x^2 - x + 1$; d) $f'(x) = 6x^2 - 2x - 18$;
e) $f'(x) = -4x^3$; f) $f'(x) = 0,24 + x^4$; g) $f'(x) = -3x^2$; h) $f'(x) = \frac{2x^3 + 12x^2 + 3}{(4+x)^2}$; i) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$;
j) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 27$; k) $f'(x) = 28x^6 + 9x^2 - 2x$; l) $f'(x) = 20x^4 - 12x^3 + 6x^2 - x$;
m) $f'(x) = x^4 - 0,5x^3 + 3$; n) $f'(x) = -2x$; o) $f'(x) = 3x^2$; p) $f'(x) = 7x^6 - 6x - \frac{1}{6}$; r) $f'(x) = 2x^4 + x^3 + 3x$;
s) $f'(x) = \frac{4x - x^2}{(2-x)^2}$; t) $f'(x) = -\frac{10x}{(x^2-4)^2}$; u) $f'(x) = 24x^2 - 24x + 6$.
- ⑳ a) $g'(0) = 3$; $g'(-1) = -1$; $g'(m) = 2m + 3$; $g'(m+2) = 2m + 7$;
b) $f'(-3) = -5$; $f'(0) = -\frac{5}{4}$; $f'(n) = \frac{5}{(2+n)^2}$; $f'(k+1) = -\frac{5}{(k+3)^2}$.
- ㉑ a) 2; b) 2; 4; c) 1; d) 0; 2; e) -1; 1; f) 12.
- ㉒ a) $(\frac{1}{5}; +\infty)$; b) $[-\frac{3}{4}; 0) \cup (0; +\infty)$; c) $(-2; 0) \cup (5; +\infty)$; d) $[-\frac{3}{8}; +\infty)$; e) $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$;
f) $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

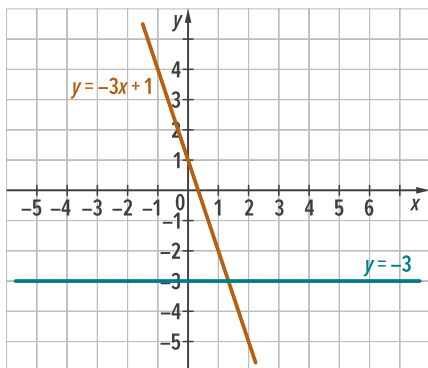
- 23 a)** kai $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) > 0$, o $f(x)$ yra didėjančioji;



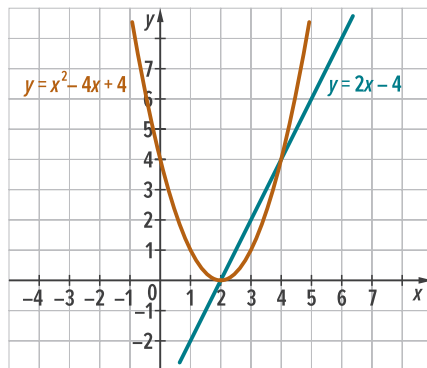
- b)** kai $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $f'(x) > 0$, o $f(x)$ yra didėjančioji;



- c)** kai $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) < 0$, o $f(x)$ yra mažėjančioji;



- d)** kai $x \in (-\infty; 2)$, $f'(x) < 0$, o $f(x)$ yra mažėjančioji; kai $x \in (2; +\infty)$, $f'(x) > 0$, o $f(x)$ yra didėjančioji.



- 24 a)** $g'(x) = 4x^3 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{3}{x^4}$; **b)** $g'(x) = -\frac{6}{x^7} - \frac{5}{x^6} - \frac{4}{x^5}$; **c)** $g'(x) = -\frac{8}{x^3} + \frac{1}{2}x$; **d)** $g'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - 3$;
e) $g'(x) = -\frac{2}{x^3\sqrt{x^2}} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$; **f)** $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{5x\sqrt{x}}{2}$; **g)** $g'(x) = \frac{5x-1}{4\sqrt[4]{x^3}}$; **h)** $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2}$;
i) $g'(x) = \frac{17}{6}x^6\sqrt{x^5}$; **j)** $g'(x) = 6x^2 + \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$; **k)** $g'(x) = \frac{3}{x^4} - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}$; **l)** $g'(x) = -\frac{9}{x^4} + x^2$;
m) $g'(x) = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}} - \frac{4}{x^3}$; **n)** $g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{2x^4\sqrt{x^3}}$; **o)** $g'(x) = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{2}\sqrt{x}$; **p)** $g'(x) = \frac{2x-1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 2\sqrt[3]{x}$;
r) $g'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$; **s)** $g'(x) = -\frac{25}{6x^5\sqrt[6]{x^5}}$.
25 a) 1,5; **b)** 4; **c)** $-54\frac{2}{27}$; **d)** $\frac{2}{3}$; **e)** 2,25; **f)** -122.
26 a) $y' = \cos x - \sin x$; **b)** $y' = 3e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$; **c)** $y' = \frac{1}{x}$; **d)** $y' = \frac{1}{\cos^2 x} - 15x^4$; **e)** $y' = 5x^4 - 5x\ln 5$; **f)** $y' = \frac{1}{x\ln 3}$;
g) $y' = \frac{1}{x}$; **h)** $y' = 2^x$; **i)** $y' = \frac{1}{x} + 2^x\ln 2 - 6$; **j)** $y' = 4e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$; **k)** $y' = -6\sin x - 3\cos x$;
l) $y' = 6^x\ln 6 - 6x^5$; **m)** $y' = -\frac{1}{x} + 2$; **n)** $y' = -\frac{1}{\sin^2 x} - 2$; **o)** $y' = 3^x$; **p)** $y' = -\frac{1}{x\ln 2}$; **r)** $y' = \frac{1}{x}$;
s) $y' = e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
27 a) $y' = -e^{-x}$; **b)** $y' = \ln x + 1$; **c)** $y' = \sin x + x\cos x + \frac{1 - \ln x}{\ln^2 x}$; **d)** $y' = \frac{2\cos x}{(1 - \sin x)^2}$;
e) $y' = 3^x\ln 3(x^3 - 2x) + (3x^2 - 2)3^x$; **f)** $y' = \frac{6-4x}{x\ln 2} - 4\log_2 x$; **g)** $y' = e^x + xe^x$; **h)** $y' = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2}$;
i) $y' = e^x(4 + x)$; **j)** $y' = 2x\ln x + x$; **k)** $y' = 3^x\ln 3\ln x + \frac{1}{x} \cdot 3^x$; **l)** $y' = \frac{2\sin x}{(1 + \cos x)^2}$.
28 a) $f(g(x)) = \sqrt{x-1} + 2$; **b)** $h(g(x)) = \frac{2}{x-1}$; **c)** $f(h(g(x))) = \sqrt{\frac{2}{x-1}} + 2$; **d)** $h(f(x)) = \frac{2}{\sqrt{x+2}}$;
e) $g(f(x)) = \sqrt{x} + 1$; **f)** $g(h(f(x))) = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$.
29 a) $f'(x) = 6(2x-5)^2$; **b)** $f'(x) = 14(x^2+x)^{13} \cdot (2x+1)$; **c)** $f'(x) = 3(2x+12x^3)(x^2+3x^4)^2$; **d)** $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}}$;
e) $f'(x) = \frac{6x-1}{2\sqrt{3x^2-x}}$; **f)** $f'(x) = \frac{3x^2-6x}{2\sqrt{x^3-3x^2+1}}$; **g)** $f'(x) = -5(x+4)^4$; **h)** $f'(x) = -75x^4(4-5x^5)^2$;
i) $f'(x) = 4(8x+6x^2)(2x^3+4x^2)^3$; **j)** $f'(x) = -\frac{7}{2\sqrt{3-7x}}$; **k)** $f'(x) = \frac{x-8x^3}{\sqrt{x^2-4x^4}}$; **l)** $f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{5-4x+x^2}}$.

- 30** a) $f'(x) = 3e^{3x}$; b) $f'(x) = \frac{3}{3x+1}$; c) $f'(x) = 2 \cos(2x)$; d) $f'(x) = \frac{3 \ln^2 x}{x}$; e) $f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$; f) $f'(x) = e^{-x}$;
 g) $f'(x) = \sin(2x)$; h) $f'(x) = -\sin x \cdot e^{\cos x}$; i) $f'(x) = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$; j) $f'(x) = \frac{2x}{x^2-3}$; k) $f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$; l) $f'(x) = -\frac{2 \operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}$;
 m) $f'(x) = 4x \cdot \cos(2x^2)$; n) $f'(x) = \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$; o) $f'(x) = \frac{3-2x}{3x-x^2}$; p) $f'(x) = 4^{2x^2-3x} \cdot (4x-3) \cdot \ln 4$;
 r) $f'(x) = \frac{4 \ln^3 x}{x}$; s) $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2}$.
- 31** a) $f'(x) = 2xe^{x^2+1}$; b) $f'(x) = -\operatorname{tg} x - \frac{\sin(\ln x)}{x}$; c) $f'(x) = 2 \cos(2x) + \frac{1}{x}$; d) $f'(x) = 3 \sin^2 x \cdot \cos x + \frac{1}{\sqrt{2x}}$;
 e) $f'(x) = -\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} - \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$; f) $f'(x) = 2e^{2x} + 2e^{-2x}$; g) $f'(x) = \cos x \cdot e^{\sin x} + \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$; h) $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$;
 i) $f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+5}$; j) $f'(x) = 6e^{6x} + 30x(3x^2+2)^4$; k) $f'(x) = 2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2x}{\cos^2(x^2)}$;
 l) $f'(x) = 2 \cos(2x) - \sin(2x)$; m) $f'(x) = -4 \sin(4x) + \frac{1}{x}$; n) $f'(x) = 4^{x^3+2x^2-9x+1} \cdot (3x^2+4x-9) \cdot \ln 4$;
 o) $f'(x) = \frac{3 \ln^2 x}{x} + \frac{5x^4}{2\sqrt{x^5}}$; p) $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} - 6e^{6x+8}$.
- 32** a) $g'(x) = \frac{x}{x^2+5}$; b) $g'(x) = \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$; c) $f'(x) = \frac{\sin(2 \ln x)}{x}$; d) $g'(x) = 3(2x-1)(x-x^2)^2 \cdot \sin(x-x^2)^3$;
 e) $f'(x) = -3(1-2x) \cos^2(x-x^2) \cdot \sin(x-x^2)$; f) $g'(x) = \frac{2}{x} \cdot (\ln(2x)+3)$; g) $f'(x) = \frac{xe^{x^2+3}}{\sqrt{e^{x^2+3}}}$;
 h) $g'(x) = 4 \ln(\sin(2x)) \cdot \operatorname{ctg}(2x)$; i) $f'(x) = 3(x \ln x)^2 \cdot (\ln x + 1)$; j) $f'(x) = (2x+2) \cdot \sin(2x^2+4x)$;
 k) $g'(x) = (4x+4)(x^2+2x) \cos(x^2+2x)^2$; l) $g'(x) = -4(5-\sin(2x+3)) \cos(2x+3)$.
- 33** a) $g'(x) = x^4 \cdot (5 \ln(4x) + 1)$; b) $g'(x) = \frac{5^{-2x}}{2\sqrt{x+2}} - 2 \cdot 5^{-2x} \cdot \sqrt{x+2} \cdot \ln 5$; c) $f'(x) = -\frac{4 \cos(2x)}{(1+\sin(2x))^2}$;
 d) $g'(x) = \sqrt{x^4-2x} + \frac{4x^4-2x}{\sqrt{x^4-2x}}$; e) $f'(x) = \frac{1}{\cos x} - \sin x \operatorname{tg} x + \sin x$; f) $g'(x) = \frac{127-45x}{2\sqrt{11-15x}}$;
 g) $f'(x) = \frac{2^{2x} \cdot ((4x+2) \ln 2 + 1)}{\sqrt{2x+1}}$; h) $g'(x) = 3x^2 \cdot \ln(2x) + x^2$; i) $f'(x) = \sin x + \frac{\sin x - 1}{\cos^2 x}$; j) $f'(x) = -\frac{2 \sin(2x)}{(1+\cos(2x))^2}$;
 k) $g'(x) = 6(2x+1)^2 \cdot \ln x + \frac{(2x+1)^3}{x}$; l) $g'(x) = \frac{5x^2-12x+4}{\sqrt{2x}}$.
- 34** a) 12; b) $\ln \sqrt{2}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{6e}$; d) 0; e) $-\frac{4}{3 \ln 2}$; f) $-3e^2$; g) $36 \ln 3 - 24$; h) 7,5.
- 35** a) $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4-3\sqrt{2}}{2}$; b) $f'(1) = 18 \ln 3 + \pi$; c) $f'(\pi) = \frac{1}{\pi^3}$; d) $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$; e) $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$; f) $f'(0) = 0$;
 g) $f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = -10$; h) $f'(0) = 2$.
- 36** a) 2; b) $\pm \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; c) 0; d) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
- 37** a) $(-\ln 2; +\infty)$; b) $\pi + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}$; c) $(-\infty; 0)$; d) $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$.
- 38** a) $y' = e^x$; b) $y' = 2x + 4$; c) $y' = \frac{2 \operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}$; d) $y' = -\frac{5}{3^{5x}} \cdot \ln 3$; e) $y' = -\frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$; f) $y' = 2x + 3$; g) $y' = \frac{1}{x}$;
 h) $y' = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{x}}$; i) $y' = -4 \sin(2x)$; j) $y' = 30 \cdot 2^{30x} \cdot \ln 2$; k) $y' = \frac{1}{\cos^2(2x)}$; l) $y' = \frac{3}{x^2}$.

Pradedant šį skyrelį siūlome remtis skyrelyje „Susipažink“ įgytomis žiniomis. Iš esmės čia tos žinios įtvirtinamos sprendžiant uždavinius.

Sprendžiant monotoniškumo intervalų nustatymo, ekstremumų radimo uždavinius, reikia prisiminti įvairių nelygybių sprendimo būdus. Mokiniam būtina pabrėžti, kad reikia nustatyti funkcijos apibrėžimo sritį ir į ją atsižvelgti ieškant monotoniškumo intervalų. Mokiniai turi tvirtai žinoti, kokie taškai vadinami funkcijos kritiniais taškais, kurie kritiniai taškai yra ekstremumo taškai, kokių yra ekstremumo taškų, gebėti patikrinti, ar duotasis taškas yra nagrinėjamos funkcijos ekstremumo taškas. Siūlome atkreipti mokinių dėmesį į tai, kad skaičių tiesėje intervalų ženklai nustatomi įrašius reikšmes į funkcijos išvestinės, o ne į funkcijos formulę. Taip pat mokiniams svarbu suvokti, kaip užrašomas atsakymas, kai uždavinio sąlygoje prašoma rasti ekstremumus ir kai ekstremumo taškus. Pabrėžkime, kad funkcijos maksimumas ar minimumas ir didžiausia ar mažiausia funkcijos reikšmė tam tikrame intervale nebūtinai sutampa.

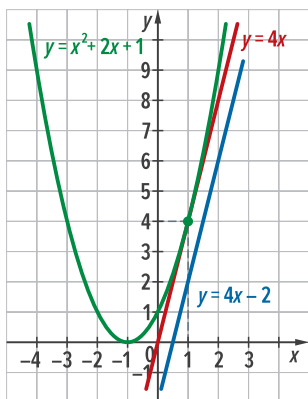
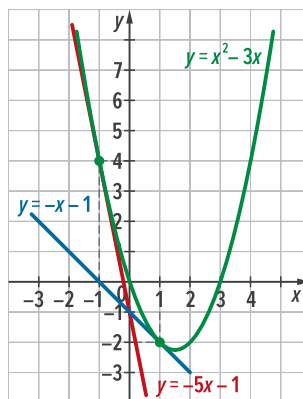
Labai svarbūs optimizavimo uždaviniai. Jų stengiamasi išspręsti kuo daugiau tiek bendrajame, tiek išplėstiname kurse.

„Pamėgink“ užduočių atsakymai

P. 100

a) 14 m; b) 7 m/s; c) 5 m/s; d) 4 m/s².

P. 102

1 $y = 4x$; $y = 4x - 2$.2 $(-1; 4)$ ir $(1; -2)$; $y = -5x - 1$ arba $y = -x - 1$.

P. 104

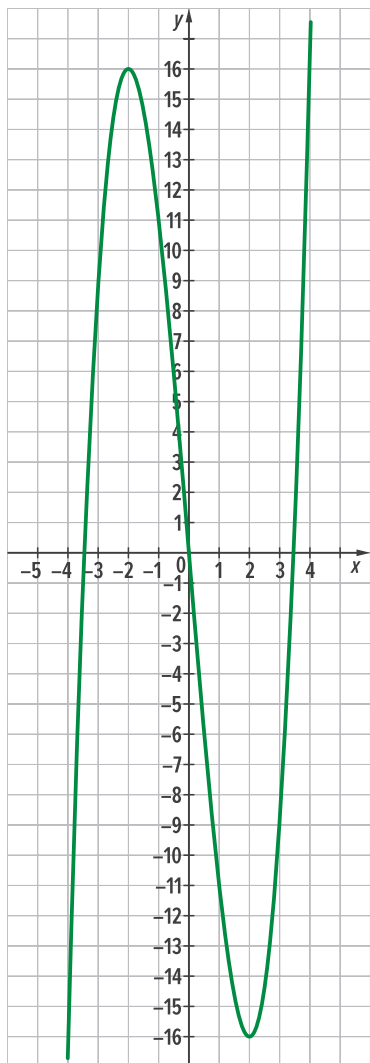
1 Didėjančioji, kai $x \in [0; 1)$; mažėjančioji, kai $x \in (1; 2]$.

P. 106

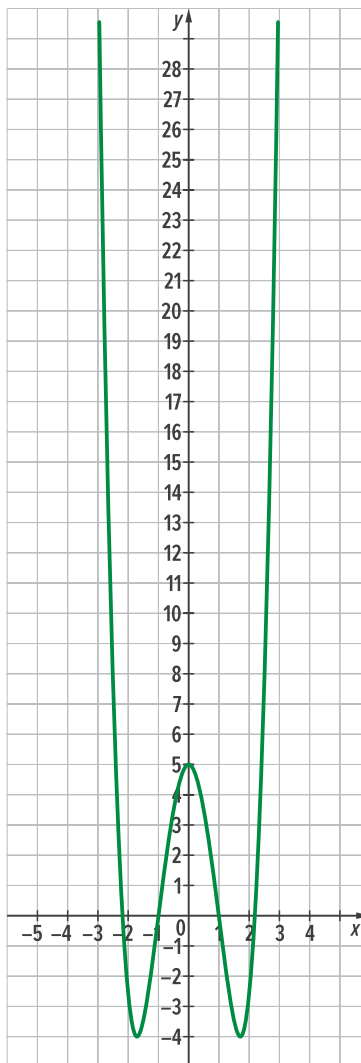
1 a) didėjančioji, kai $x \in (2; +\infty)$; mažėjančioji, kai $x \in (-\infty; 2)$; $f_{\min} = f(2) = \frac{4}{\ln 2} - 8$; b) didėjančioji, kai $x \in (0; 2)$; mažėjančioji, kai $x \in (-\infty; 0)$ ir $x \in (2; +\infty)$; $f_{\min} = f(0) = -17$; $f_{\max} = f(2) = -13$.2 Minimumo taškai: $x = \frac{\pi}{4}$ ir $x = \frac{3\pi}{2}$.

P. 109

a)



b)



P. 110

a) $\min_{x \in [-3; 1]} f(x) = -78$; $\max_{x \in [-3; 1]} f(x) = -22$; b) $\min_{x \in [1; e]} f(x) = 1$; $\max_{x \in [1; e]} f(x) = 1 + e$.

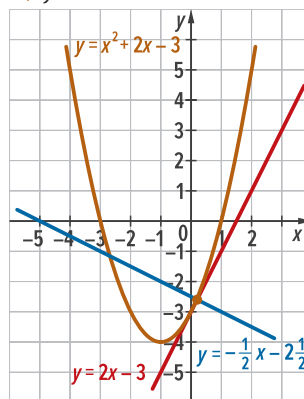
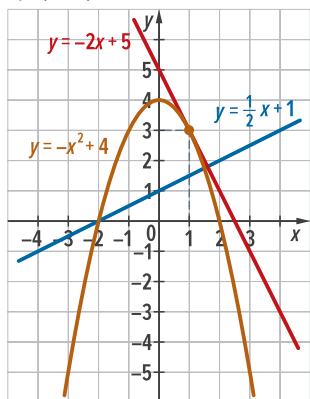
P. 114

1 12, 12 ir 12.

2 1,5 cm.

P. 114–120 Uždavinių atsakymai

- 39 a) $v_{\text{vid}} = 9 \text{ m/s}$, $v(5) = 17 \text{ m/s}$; b) 13 m/s ; 18 m/s^2 ; c) $2,5 \text{ s}$; d) 3 s .
 40 a) $\text{tg } \alpha = -6$; b) $\text{tg } \alpha = 12$; c) $\text{tg } \alpha = 1$; d) $\text{tg } \alpha = 2$.
 41 a) $y = 23x - 50$; b) $y = -3x - 6$; c) $y = \frac{3}{8}x + \frac{7}{4}$; d) $y = x - e$; e) $y = \frac{1}{e}x$; f) $y = 3x - \pi$; g) $y = 19x - 11$;
 h) $y = \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}$; i) $y = \frac{1}{4}x + 1$; j) $y = -\frac{1}{e}x + 2$; k) $y = 2ex - e$; l) $y = -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \frac{1}{2}$.
 42 a) $k = 2$; $\approx 63^\circ$; $y = 2x - 5$; b) $k = -\frac{1}{2}$; $\approx 153^\circ$; $y = -\frac{1}{2}x + 2$.
 43 a) $y = -4x - 8$ ir $y = 4x - 8$; b) $(3; -4)$; $y = -4$; c) $(-1; -8)$; d) $y = 3$.
 44 a) $(3; -7)$; $(-1; -3)$; b) $y = -x + 2$, $y = -x + \frac{22}{27}$.
 45 a) $(1; 0)$ ir $(-1; 2)$; b) $(1; 3)$; c) $(2; -8)$; d) $y = -0,5x - 2,5$.



- 46 a) $\text{tg } \alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{tg } \alpha_2 = -\sqrt{3}$; b) 135° ; c) $y = 3x + 2 - 2 \ln 2$; d) $y = -4$; $(0; -4)$.
 47 a) $(2; 1)$ ir $(-2; 9)$; b) $(0; 0)$ ir $(2; 2)$.
 48 a) didėja, kai $x \in (2; +\infty)$; mažėja, kai $x \in (-\infty; 2)$; b) didėja, kai $x \in (-\infty; 0)$ ir $x \in (4; +\infty)$; mažėja, kai $x \in (0; 4)$; c) didėja, kai $x \in (-1; 0)$ ir $x \in (2; +\infty)$; mažėja, kai $x \in (-\infty; -1)$ ir $x \in (0; 2)$; d) didėja, kai $x \in (-8; -4)$ ir $x \in (0; 4)$; mažėja, kai $x \in (-\infty; -8)$, $x \in (-4; 0)$ ir $x \in (4; +\infty)$.
 49 a) didėjančioji, kai $x \in \mathbf{R}$; b) didėjančioji, kai $x \in (0, 3; +\infty)$; mažėjančioji, kai $x \in (-\infty; 0, 3)$; c) didėjančioji, kai $x \in (-\infty; -3)$ ir $x \in (3; +\infty)$; mažėjančioji, kai $x \in (-3; 3)$; d) didėjančioji, kai $x \in (-1; 0)$ ir $x \in (1; +\infty)$; mažėjančioji, kai $x \in (-\infty; -1)$ ir $x \in (0; 1)$; e) didėjančioji, kai $x \in (-\infty; 2)$ ir $x \in (2; +\infty)$;
 f) didėjančioji, kai $x \in (0; \frac{\sqrt{7}}{7})$; mažėjančioji, kai $x \in (\frac{\sqrt{7}}{7}; +\infty)$; g) didėjančioji, kai $x \in (-\infty; 1)$; mažėjančioji, kai $x \in (1; +\infty)$; h) didėjančioji, kai $x \in (2; +\infty)$; mažėjančioji, kai $x \in (-\infty; 0)$; i) didėjančioji, kai $x \in (\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$; mažėjančioji, kai $x \in (\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$; j) mažėjančioji, kai $x \in \mathbf{R}$;
 k) didėjančioji, kai $x \in (1; +\infty)$; mažėjančioji, kai $x \in (-\infty; 1)$; l) didėjančioji, kai $x \in (-\infty; 0)$ ir $x \in (2; +\infty)$; mažėjančioji, kai $x \in (0; 2)$; m) didėjančioji, kai $x \in (-1; 0)$ ir $x \in (2; +\infty)$; mažėjančioji, kai $x \in (-\infty; -1)$ ir $x \in (0; 2)$; n) mažėjančioji, kai $x \in (-\infty; -0,2)$ ir $x \in (-0,2; +\infty)$; o) didėjančioji, kai $x \in (-5; -2)$; mažėjančioji, kai $x \in (-2; 1)$; p) didėjančioji, kai $x \in (0; 1,5)$; mažėjančioji, kai $x \in (1,5; +\infty)$; r) didėjančioji, kai $x \in (-\infty; -2)$ ir $x \in (0; +\infty)$; mažėjančioji, kai $x \in (-2; 0)$; s) didėjančioji, kai $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$; mažėjančioji, kai $x \in (\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$.
 51 a) nėra kritinių taškų; b) $x = 3$; c) $x = -3$, $x = 3$; d) $x = -1$, $x = 1$; e) $x = 0$, $x = 2$; f) nėra kritinių taškų;
 g) nėra kritinių taškų; h) $x = 4$; i) $x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$; j) nėra kritinių taškų; k) $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$; l) $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; m) $x = 0$; n) $x = 1$; o) $x = 0$; p) $x = -4$; r) nėra kritinių taškų;
 s) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$.
 52 a) $f_{\min} = f(\frac{3}{4}) = -\frac{9}{4}$; b) $f_{\max} = f(-2) = 4$; $f_{\min} = f(0) = 0$; c) $f_{\max} = f(\frac{1}{e}) = e$; d) ekstremumų nėra;
 e) $f_{\max} = f(3) = 27e^{-3}$; f) $f_{\min} = f(2) = 4 \log_2 e - 8$; g) $f_{\min} = f(-3) = -4,5$; h) $f_{\max} = f(0) = 5$; $f_{\min} = f(2) = -3$;
 i) $f_{\min} = f(e) = e$; j) $f_{\max} = f(-1) = -2$; $f_{\min} = f(1) = 2$; k) $f_{\max} = f(-4) = 8e^{-4}$; $f_{\min} = f(2) = -4e^2$;
 l) $f_{\max} = f(1) = 18 - \frac{9}{\ln 3}$.

53 a) $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}$; b) $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{7\pi}{6}$; c) $x = \frac{5\pi}{12}, x = \frac{11\pi}{12}$; d) $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{4\pi}{3}$.

54 a) didėjančioji, kai $x \in (-1; 1)$; mažėjančioji, kai $x \in (-\infty; -1)$ ir $x \in (1; +\infty)$; $f_{\min} = f(-1) = 3$; $f_{\max} = f(1) = 7$;

b) didėjančioji, kai $x \in (0; 1)$ ir $x \in (2; +\infty)$; mažėjančioji, kai $x \in (-\infty; 0)$ ir $x \in (1; 2)$; $f_{\min} = f(0) = f(2) = 0$;

$f_{\max} = f(1) = 1$; c) didėjančioji, kai $x \in (-1; 1)$; mažėjančioji, kai $x \in (-\infty; -1)$ ir $x \in (1; +\infty)$; $f_{\min} = f(-1) = -0,5$;

$f_{\max} = f(1) = 0,5$; d) didėjančioji, kai $x \in (0,5; +\infty)$; mažėjančioji, kai $x \in (-\infty; 0,5)$;

$f_{\min} = f(0,5) = 0,25 - \ln 2$; e) didėjančioji, kai $x \in (0; 2)$; mažėjančioji, kai $x \in (2; 4)$; $f_{\max} = f(2) = 2\sqrt{2}$;

f) didėjančioji, kai $x \in (0; 1)$; mažėjančioji, kai $x \in (1; +\infty)$; $f_{\max} = f(1) = \frac{1}{2}$; g) didėjančioji,

kai $x \in (-\infty; -2)$ ir $x \in (2; +\infty)$; mažėjančioji, kai $x \in (-2; 2)$; $f_{\min} = f(2) = -5\frac{1}{3}$; $f_{\max} = f(-2) = 5\frac{1}{3}$;

h) didėjančioji, kai $x \in (-\sqrt{3}; 0)$ ir $x \in (\sqrt{3}; +\infty)$; mažėjančioji, kai $x \in (-\infty; -\sqrt{3})$ ir $x \in (0; \sqrt{3})$;

$f_{\min} = f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3}) = -4$; $f_{\max} = f(0) = 5$; i) didėjančioji, kai $x \in (1; +\infty)$; mažėjančioji, kai

$x \in (-\infty; -1)$; ekstremumų nėra; j) didėjančioji, kai $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; ekstremumų nėra; k) didėjančioji,

kai $x \in (1; +\infty)$; mažėjančioji, kai $x \in (-3; 1)$; $f_{\min} = f(1) = 1 - 12 \ln 4$; l) didėjančioji, kai $x \in (0; 2)$;

mažėjančioji, kai $x \in (2; +\infty)$; $f_{\max} = f(2) = 4\sqrt{2}$.

55 a) $D(f) = \mathbb{R}$; lyginė; ašies Ox nekerta; ašį Oy kerta taške $(0; 5)$; kritiniai taškai: $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x = 0, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

didėjančioji, kai $x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0)$ ir $x \in (\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty)$; mažėjančioji, kai $x \in (-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2})$ ir $x \in (0; \frac{\sqrt{2}}{2})$;

$f_{\max} = f(0) = 5$; $f_{\min} = f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 4,25$; b) $D(f) = \mathbb{R}$; nei lyginė, nei nelyginė; ašį Ox kerta

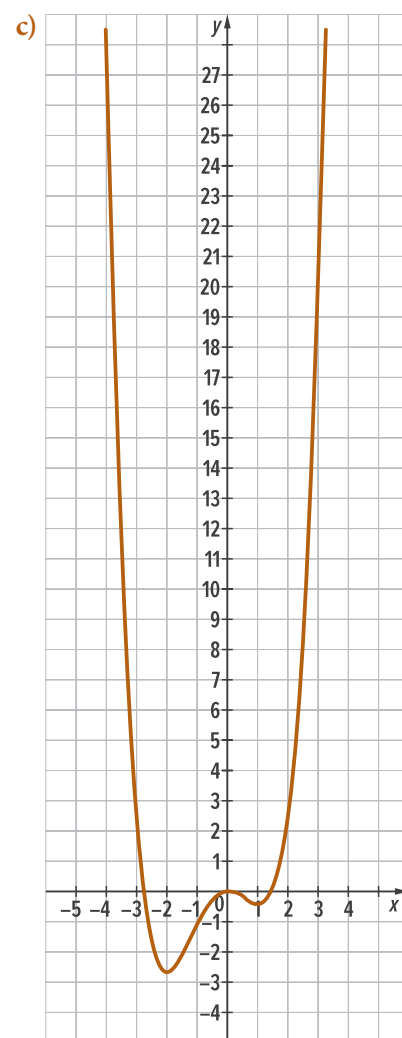
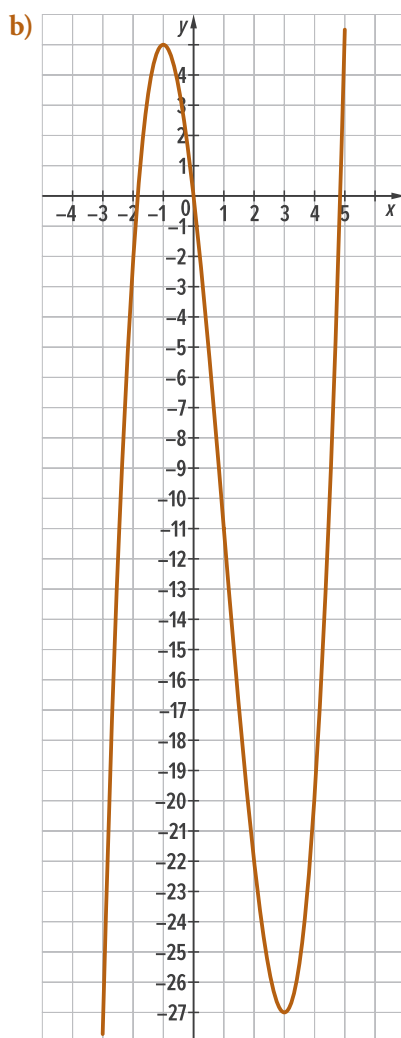
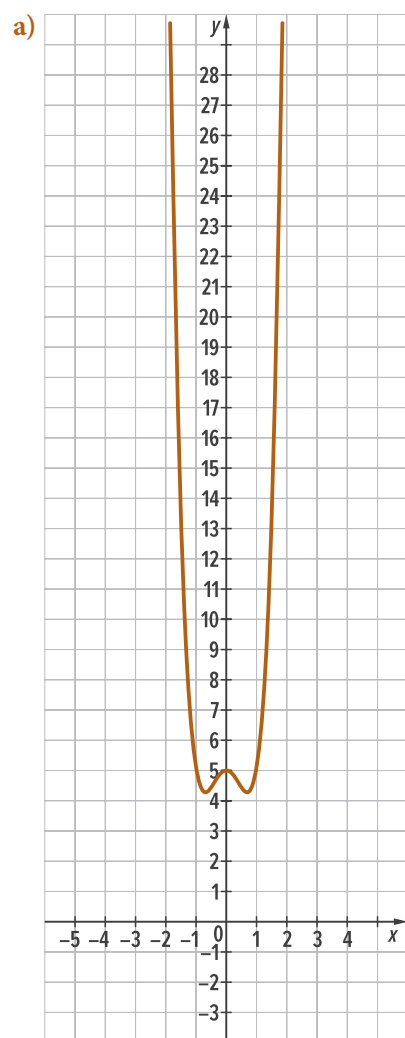
taškuose $(0; 0), (\frac{3-3\sqrt{5}}{2}; 0)$ ir $(\frac{3+3\sqrt{5}}{2}; 0)$; ašį Oy kerta taške $(0; 0)$; kritiniai taškai: $x = -1, x = 3$;

didėjančioji, kai $x \in (-\infty; -1)$ ir $x \in (3; +\infty)$; mažėjančioji, kai $x \in (-1; 3)$; $f_{\max} = f(-1) = 5$; $f_{\min} = f(3) = -27$;

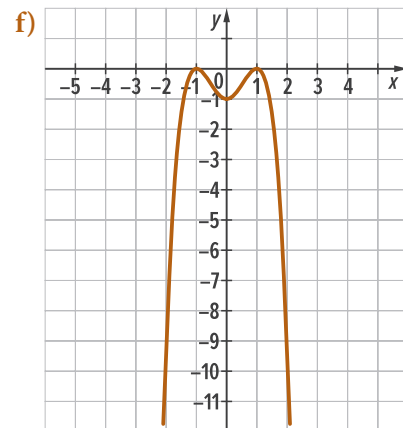
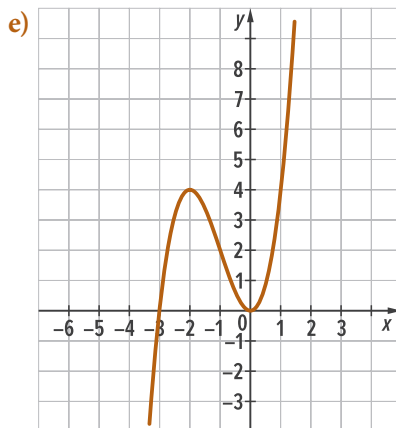
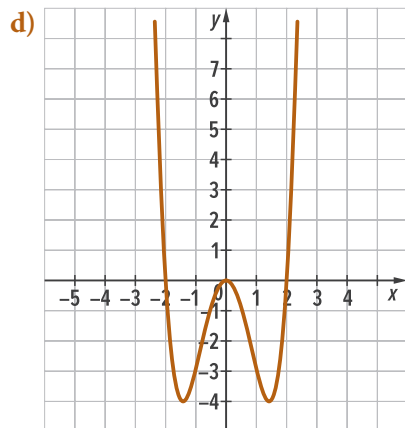
c) $D(f) = \mathbb{R}$; nei lyginė, nei nelyginė; ašį Ox kerta taškuose $(0; 0), (-6-2\sqrt{10}; 0)$ ir $(-6+2\sqrt{10}; 0)$,

ašį Oy kerta taške $(0; 0)$; kritiniai taškai: $x = -2, x = 0, x = 1$; didėjančioji, kai $x \in (-2; 0)$ ir $x \in (1; +\infty)$;

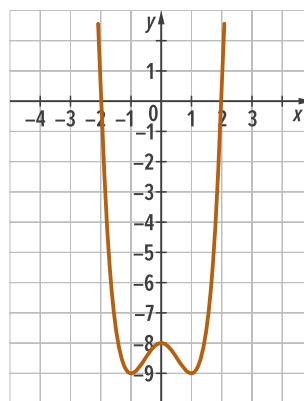
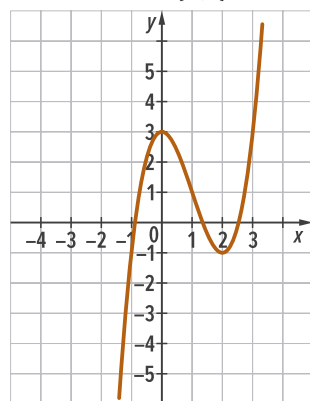
mažėjančioji, kai $x \in (-\infty; -2)$ ir $x \in (0; 1)$; $f_{\max} = f(0) = 0$; $f_{\min} = f(-2) = -2\frac{2}{3}$ ir $f_{\min} = f(1) = -\frac{5}{12}$;



- d)** $D(f) = \mathbf{R}$; lyginė; ašį Ox kerta taškuose $(0; 0)$, $(-2; 0)$ ir $(2; 0)$; ašį Oy kerta taške $(0; 0)$; kritiniai taškai: $x = -\sqrt{2}$, $x = 0$, $x = \sqrt{2}$; didėjančioji, kai $x \in (-\sqrt{2}; 0)$ ir $x \in (\sqrt{2}; +\infty)$; mažėjančioji, kai $x \in (-\infty; -\sqrt{2})$ ir $x \in (0; \sqrt{2})$; $f_{\max} = f(0) = 0$; $f_{\min} = f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = -4$; **e)** $D(f) = \mathbf{R}$; nei lyginė, nei nelyginė; ašį Ox kerta taškuose $(0; 0)$ ir $(-3; 0)$; ašį Oy kerta taške $(0; 0)$; kritiniai taškai: $x = -2$, $x = 0$; didėjančioji, kai $x \in (-\infty; -2)$ ir $x \in (0; +\infty)$; mažėjančioji, kai $x \in (-2; 0)$; $f_{\max} = f(-2) = 4$; $f_{\min} = f(0) = 0$; **f)** $D(f) = \mathbf{R}$; lyginė; ašį Ox kerta taškuose $(-1; 0)$ ir $(1; 0)$; ašį Oy kerta taške $(0; -1)$; kritiniai taškai: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$; didėjančioji, kai $x \in (-\infty; -1)$ ir $x \in (0; 1)$; mažėjančioji, kai $x \in (-1; 0)$ ir $x \in (1; +\infty)$; $f_{\max} = f(-1) = f(1) = 0$; $f_{\min} = f(0) = -1$.



- 56 a)** $D(g) = \mathbf{R}$; nei lyginė, nei nelyginė; grafikas kerta ašį Oy taške $(0; 3)$; kritiniai taškai: $x = 0$, $x = 2$; didėjančioji, kai $x \in (-\infty; 0)$ ir $x \in (2; +\infty)$; mažėjančioji, kai $x \in (0; 2)$; $g_{\max} = g(0) = 3$; $g_{\min} = g(2) = -1$; $\min_{x \in [-1; 1]} g(x) = g(-1) = -1$; $\max_{x \in [-1; 1]} g(x) = g(0) = 3$; $\min_{x \in [-1; 3]} g(x) = g(-1) = -1$; $\max_{x \in [-1; 3]} g(x) = g(0) = g(3) = 3$; **b)** $\max_{x \in [0; 1]} g(x) = g(0) = -8$; $\min_{x \in [0; 1]} g(x) = g(1) = -9$; $\max_{x \in [-2; 1]} g(x) = g(-2) = 0$; $\min_{x \in [-2; 1]} g(x) = g(1) = g(-1) = -9$; $D(g) = \mathbf{R}$; lyginė; ašį Ox kerta taškuose $(-2; 0)$ ir $(2; 0)$; ašį Oy kerta taške $(0; -8)$; kritiniai taškai: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$; didėjančioji, kai $x \in (-1; 0)$ ir $x \in (1; +\infty)$; mažėjančioji, kai $x \in (-\infty; -1)$ ir $x \in (0; 1)$; $g_{\max} = g(0) = -8$; $g_{\min} = g(-1) = g(1) = -9$.



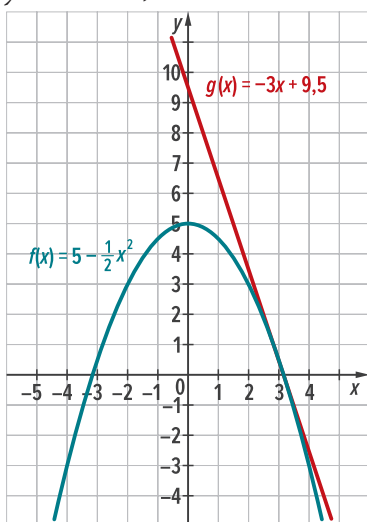
- 57 a)** $\max_{x \in [-1; 4]} g(x) = g(2) = 8$; $\min_{x \in [-1; 4]} g(x) = g(-1) = -10$; **b)** $\max_{x \in [-1; 2]} g(x) = g(1) = 2$; $\min_{x \in [-1; 2]} g(x) = g(-1) = g(2) = -2$; **c)** $\max_{x \in [0; 4]} g(x) = g(4) = 0,6$; $\min_{x \in [0; 4]} g(x) = g(0) = -1$; **d)** $\max_{x \in [0; 4]} g(x) = g(4) = 8$; $\min_{x \in [0; 4]} g(x) = g(0) = 0$; **e)** $\max_{x \in [-1; 0]} g(x) = g(0) = 5 \ln 2 - 1$; $\min_{x \in [-1; 0]} g(x) = g(-1) = 6 \ln 2 - 2$; **f)** $\max_{x \in [0; 1]} g(x) = g(0,5) = \frac{1}{2e}$; $\min_{x \in [0; 1]} g(x) = g(0) = 0$; **g)** $\max_{x \in [1; e]} g(x) = g(e) = 2e^2 - 1$; $\min_{x \in [1; e]} g(x) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2 + \frac{1}{2}$; **h)** $\max_{x \in [0; \frac{\pi}{2}]} g(x) = g(0) = -0,25$; $\min_{x \in [0; \frac{\pi}{2}]} g(x) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0,75$; **i)** $\max_{x \in [-2; 2]} g(x) = g(-2) = 19$; $\min_{x \in [-2; 2]} g(x) = g(1) = 1$; **j)** $\max_{x \in [-1; 1]} g(x) = g(-1) = 8$; $\min_{x \in [-1; 1]} g(x) = g(1) = -8$; **k)** $\max_{x \in [-6; 8]} g(x) = g(0) = 10$; $\min_{x \in [-6; 8]} g(x) = g(8) = 6$;

- l) $\max_{x \in [1; 6]} g(x) = g(1) = 2\frac{1}{8}$; $\min_{x \in [1; 6]} g(x) = g(4) = 1$; m) $\max_{x \in [-1; 1]} g(x) = g(1) = e^2$; $\min_{x \in [-1; 1]} g(x) = g(0) = 0$;
 n) $\max_{x \in [0; 1]} g(x) = g(1) = 9$; $\min_{x \in [0; 1]} g(x) = g(0) = 2$; o) $\max_{x \in [0; 3]} g(x) = g(1) = \ln 9$; $\min_{x \in [0; 3]} g(x) = g(3) = \ln 5$;
 p) $\max_{x \in [-\frac{\pi}{2}; \pi]} g(x) = g(\pi) = 2\pi$; $\min_{x \in [-\frac{\pi}{2}; \pi]} g(x) = g(-\frac{\pi}{2}) = -\pi$.
- 58 a) $18 = 9 + 9$; b) 10 ir $10\sqrt{2}$; c) $-0,5$; d) 2.
 59 a) $a = 3$; b) $a = 0$; c) $a = 1$; d) $a = 2$.
 60 a) $\sqrt{10}$; b) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$; $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $\frac{7\sqrt{5}}{5}$; e) $\pm \frac{\sqrt{22}}{4}$; f) $\frac{\sqrt{41}}{2}$.
 61 a) 10 Eur; b) 28 Eur.
 62 a) 625 cm^2 ; b) didžiausią 36 m^2 ; mažiausią $\frac{108}{7} \text{ m}^2 \approx 15,43 \text{ m}^2$; c) 40 cm; d) 32.
 63 a) 2) $20 - 2,5x$ (cm); 3) $S(x) = 20x - 2,5x^2$; 4) 4 cm;
 b) 2) $12 - 2,4x$ (cm); 3) $S(x) = 12x - 2,4x^2$; 4) 2,5 cm.
 64 a) 20000 m^2 ; b) $585937,5 \text{ m}^2$.
 65 a) didžiausia $\approx 796 \text{ cm}^2$, mažiausia $\approx 350 \text{ cm}^2$; b) $\approx 21087 \text{ cm}^2$.
 66 a) $\approx 28 \text{ m}^2$; b) $\frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$ ir $5\sqrt{2} \text{ cm}$.
 67 a) 30° ; b) po $\frac{23}{410} \text{ h}$.
 68 a) 72 m^2 ; b) $20\sqrt{74} \text{ cm} \approx 172 \text{ cm}$.
 69 a) 46656 cm^3 ; b) 1 dm.
 70 a) $\frac{5\sqrt{15}}{9} \text{ m}^3 \approx 2,15 \text{ m}^3$; b) $18 \times 9 \times 6$.
 71 a) $\frac{13}{15} \text{ h}$; b) 14 valandą; $40\sqrt{5} \text{ km}$.
 72 a) $18 \text{ cm} \times 9 \text{ cm}$; b) $3\sqrt{10} \text{ cm} \times 6\sqrt{10} \text{ cm}$.
 73 a) $\frac{20}{\sqrt[3]{\pi}} \text{ cm}$; b) $\frac{250\pi}{9\sqrt{3}} \text{ cm}^3$.
 75 -2 m/s^2 .
 76 a) po $\frac{2}{3} \text{ s}$; b) $\frac{2}{3} \text{ s}$; c) 5 s.
 77 a) laiko momentu $t = 4 \text{ s}$; 31 m/s^2 ; b) $t = 4 \text{ s}$.
 78 $a = -1$.
 79 $a = 0,4$.
 80 $a = -0,5$.
 81 $c = 1,92$; ne.
 82 $\frac{1}{2}ab$.
 83 $300 - 200\sqrt{2}$.
 84 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3e})$.
 85 20 km/h.
 86 0,5.
 87 $y = -2x + 4$.
 88 0.

P. 121–123 „Pasitikrink“ uždavinių atsakymai

1 variantas

- 1 a) $f'(x) = 2x - 1$; b) $f'(x) = \ln x + 1$;
 c) $f'(x) = \frac{x^2 - 6x}{(x - 3)^2}$; d) $f'(x) = 3(x + 6)^2$;
 e) $f'(x) = \cos x + \frac{1}{\sqrt{2x}}$;
 f) $f'(x) = -2 \sin(2x) - \frac{1}{3 - x}$.
- 2 a) $g'(-2) = -8$; b) $g'(-1) = 0$; c) $g'(1) = 5\frac{1}{3}$;
 d) $g'(-\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{2}$; e) $g'(\frac{\pi}{4}) = 2$; f) $g'(\ln 2) = -0,5$.
- 3 a) 1,5; b) -3; c) sprendinių nėra; d) πk ,
 $k \in \mathbb{Z}$; e) $-\frac{\pi}{6} + \pi k$, $\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; f) 0.
- 4 1.
- 5 $y = -3x + 9,5$.

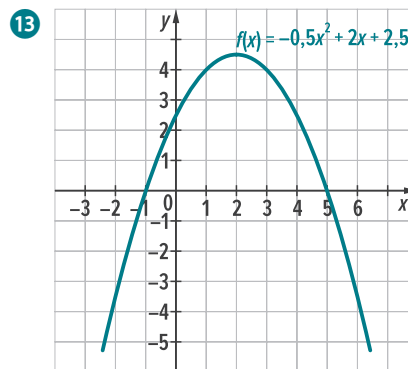


- 6 12.
- 7 -8 m/s; -24 m/s².
- 10 a) didėja, kai $x \in (-\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$; mažėja,
 kai $x \in (-\infty; -\frac{1}{3})$ ir $x \in (\frac{1}{3}; +\infty)$; b) didėja,
 kai $x \in (\frac{2}{3}; +\infty)$; mažėja, kai $x \in (-\infty; \frac{2}{3})$;
 c) didėja, kai $x \in (-\infty; 1)$ ir $x \in (5; +\infty)$; ma-
 žėja, kai $x \in (1; 3)$ ir $x \in (3; 5)$.

2 variantas

- 1 a) $f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{\sqrt{2x}}$; b) $f'(x) = -8x^3 + 9x^2 + 2$;
 c) $f'(x) = \frac{1}{3} + \frac{8}{x^3}$; d) $f'(x) = 14(2x + 1)^6$;
 e) $f'(x) = \ln x + \frac{x+3}{x}$; f) $f'(x) = 2e^{2x} - \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$;
 g) $f'(x) = 2 \cos(2x + \frac{\pi}{3})$; h) 2^{x-1} ;
 i) $e^{2x} + 2x \cdot e^{2x}$.
- 2 a) $g'(-3) = -5$; b) $g'(0) = 0$; c) $g'(\pi) = 3$;
 d) $g'(0) = \ln \sqrt{2}$.
- 3 a) 2 ir 4; c) $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

- 11 a) $x = -3$, $x = 3$; b) $x = 0$, $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$;
 c) $x = 3,5$; d) $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 12 a) $f_{\max} = f(-1) = 15$, $f_{\min} = f(5) = -93$;
 b) $f_{\max} = f(4) = 128$, $f_{\min} = f(-4) = -128$;
 c) $f_{\min} = f(1) = 1$; d) $f_{\min} = f(2) = -2e^2$.



- 14 a) $\max_{x \in [-1; 2]} f(x) = f(0) = 0$;
 $\min_{x \in [-1; 2]} f(x) = f(2) = -28$;
 b) $\max_{x \in [\frac{1}{2}; 3]} f(x) = f(3) = 3\frac{1}{3}$;
 $\min_{x \in [\frac{1}{2}; 3]} f(x) = f(1) = 2$;
 c) $\max_{x \in [-2; 2]} f(x) = f(2) = 57$;
 $\min_{x \in [-2; 2]} f(x) = f(-2) = -55$.
- 15 a) $6 = 4 + 2$; b) 8 cm; 8 cm.

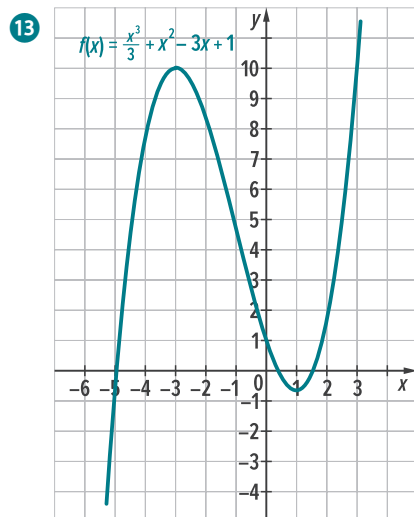
- 4 a) $y = 2 - \frac{x}{e}$; b) (1; 0) ir $(-\frac{1}{3}; -\frac{44}{27})$;
 c) (3; -2) ir $(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$.
- 5 $t \in (0; 2\frac{2}{3})$.
- 6 Laiko momentu $t = \frac{1}{6}$ s.
- 9 a) didėja, kai $x \in (-1; 3)$; mažėja, kai $x \in (-\infty; -1)$ ir
 $x \in (3; +\infty)$; b) didėja, kai $x \in (-\infty; 0)$ ir $x \in (0; +\infty)$;
 c) didėja, kai $x \in (-\frac{1}{2}; +\infty)$; mažėja,
 kai $x \in (-1\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$.
- 10 a) $x = \frac{1}{16}$; b) $x = 2$; c) $x = 2$;
 d) $x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

11 a) $f_{\min} = f(-1) = -2$; $f_{\max} = f(1) = 2$;

b) $f_{\max} = f\left(1\frac{1}{3}\right) = \frac{4\sqrt{6}}{9}$; c) $f_{\min} = f(e) = e$;

d) $f_{\min} = f(0,5) = 0,25 - \ln 2$.

12 $f_{\min} = f(1) = 4$; $f_{\max} = f(-1) = -4$;
 $y = 11,25x + 13$.



14 a) $\max_{x \in [-1; 2]} g(x) = g(-1) = 3,2$;

$\min_{x \in [-1; 2]} g(x) = g(\sqrt{3}) = -4,8\sqrt{3}$;

b) $\max_{x \in [-4; -1]} f(x) = f(-2) = -4$;

$\min_{x \in [-4; -1]} f(x) = f(-4) = f(-1) = -5$;

c) $\max_{x \in [0; \frac{\pi}{2}]} g(x) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$;

$\min_{x \in [0; \frac{\pi}{2}]} g(x) = g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{2}$;

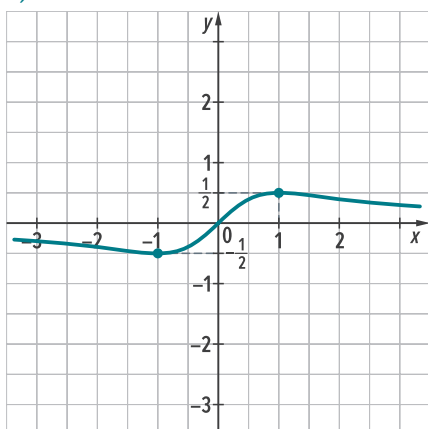
d) $\max_{x \in [-8; 1]} f(x) = f(-8) = 16$; $\min_{x \in [-8; 1]} f(x) = f(0) = 1$.

15 a) $180 = 40 + 60 + 80$; b) $8 \text{ cm}, 2\sqrt{3} \text{ cm}$.

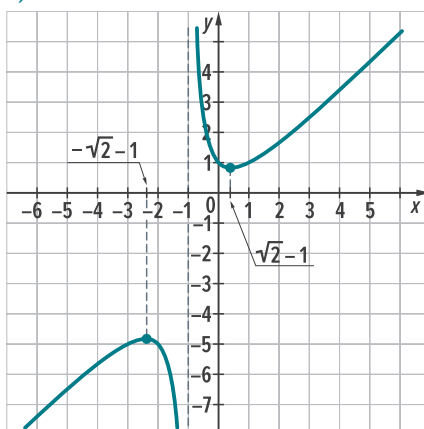
P. 124

„Ar priimsi iššūkį?“ uždavinių atsakymai

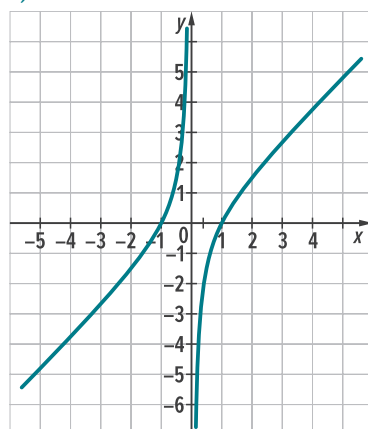
1 a)



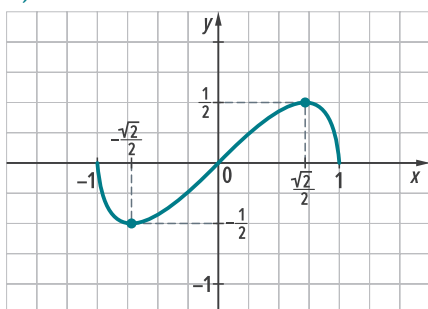
b)



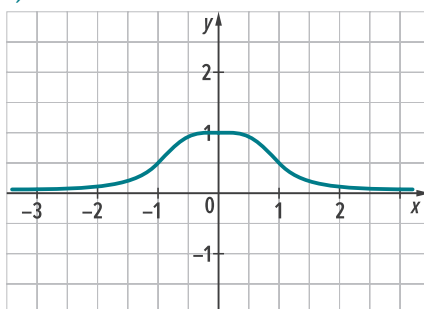
c)



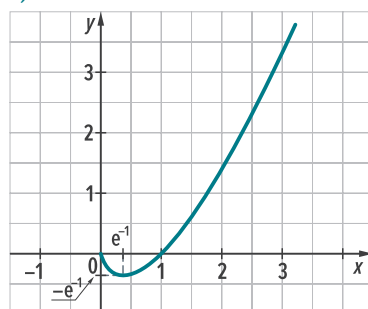
d)



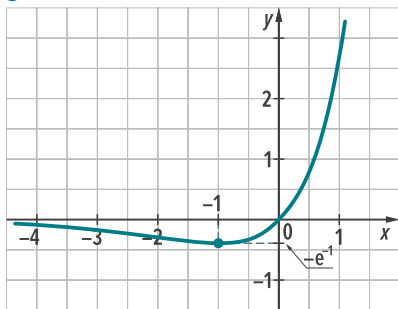
e)



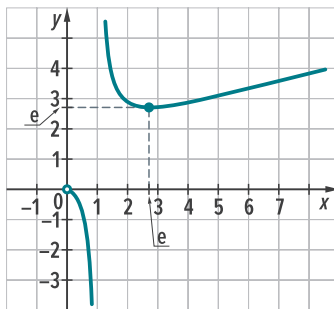
f)



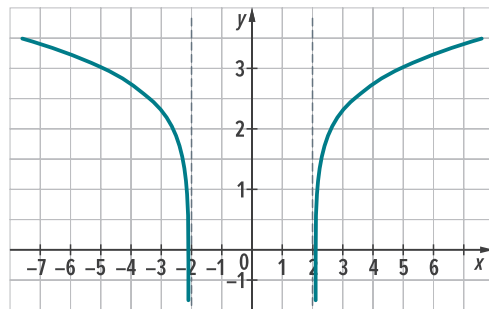
g)



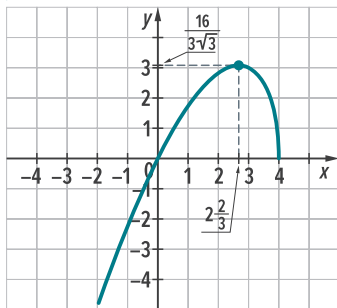
h)



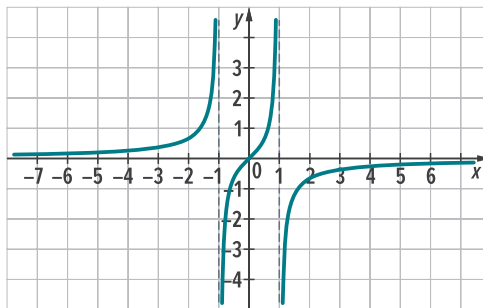
i)



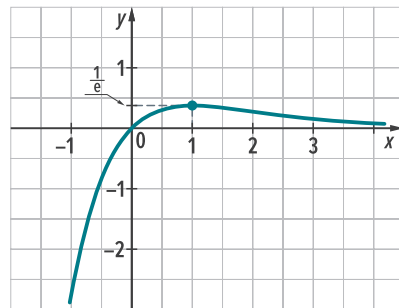
j)



k)



l)



2 a) $x = -6, x = -2, x = 0, x = 2, x = 6$; b) $x = -1, x = 1$.

3 200; 20×10 .

4 $L = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

5 49 cm.

6 $\left(0; \frac{7}{4}\right)$.

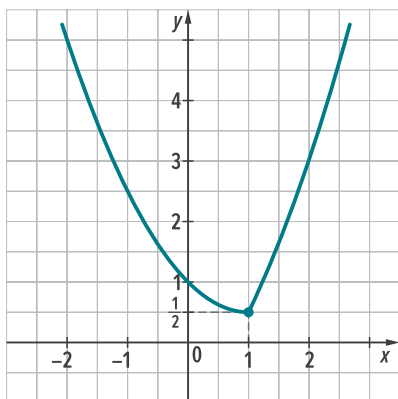
7 $\left(\frac{3}{2}; -1\right)$.

8 $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

9 $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

10 a) 0,25; b) 78.

11



12 Ilgiausiai 0,752 h, jeigu dalį kelio eitų, o dalį plauktų; trumpiausiai 0,524 h, jeigu eitų aplink ežerą.

3 skyrius

Pirmykštė funkcija ir integralas



Šiam skyriui išplėstiniame kurse skiriama 16 pamokų, iš jų 4 pamokos – kartojimui. Taigi pirmykštės funkcijos ir integralo temai lieka 12 pamokų. To turėtų pakakti, jei mokytojas, remdamasis programa, mokys tik daugianario pirmykštės funkcijos. Tokiu atveju skyrelis „Išmok“ praleidžiamas. Tačiau jei ketinama plėstis ir mokyti pirmykščių funkcijų lenteles, reikia dar 2–4 pamokų. Jas galima turėti sumažinus kartojimo skyriui skiriamų pamokų skaičių. Tačiau net ir nesimokant pirmykščių funkcijų lentelės verta išspręsti skyrelio „Išmok“ 28, 29, 30, 33, 34, 35 (išskyrus c dalį) uždavinius.

Kadangi nagrinėjant integralus tenka skaičiuoti, pertvarkyti integruojamuosius reiškinius, tai prasminga pakartoti skaičius, skaičiavimus ir reiškinius. Pradedant šį skyrių mokiniams reikėtų prisiminti veiksmus su trupmenomis, šaknimis, laipsniais, pakartoti greitosios daugybos formules, kvadratinio trinaro skaidymą daugikliais, reiškinių pertvarkius.

Supažindinant su integralu pravartu nuolat lyginti integravimą su išvestinės skaičiavimu ir pabrėžti, kad tai vienas kitam priešingi veiksmas. Padedami mokytojo mokiniai turi suvokti integralinio skaičiavimo prasmę, taikyti funkcijos pirmykštės funkcijos sąvoką modeliuodami matematinio ir praktinio turinio situacijas, pagrįsti, interpretuoti rezultatus.

Bendrąjį kursą pasirinkusiems moksleiviams pagal programą nereikia mokytis pirmykštės funkcijos ir integralo, taigi jiems skiriamas tik skyrelis „Pakartok“. Todėl jį galima gvildinti net 10 pamokų. Daugiau dėmesio siūloma skirti žodiniams ir procentų uždaviniams.

Skyriaus „Pirmykštė funkcija ir integralas“ skirstymo pamokomis pavyzdys

■ Išplėstinis kursas

Pamokos eil. nr.	Pamokos tema
1.	Pakartok: skaičiai ir skaičiavimai
2.	Pakartok: reiškiniai
3.	Pakartok: žodinių uždavinių sprendimas
4.	Pakartok: įvairių uždavinių sprendimas
5.	Susipažink: pirmykštės funkcijos apibrėžtis
6.	Susipažink: pirmykštės funkcijos savybės
7.	Susipažink: apibrėžtinio integralo samprata; integruojame, kai nereikia pertvarkyti integruojamojo reiškinio
8.	Susipažink: apibrėžtinio integralo samprata; integruojame, kai reikia pertvarkyti integruojamąjį reiškinį
9.	Taikyk: kūno nueitas kelias, greitis, pagreitis ir pirmykštė funkcija

10.	Taikyk: kreivinė trapecija ir jos plotas
11.	Taikyk: kreivėmis apriboto ploto apskaičiavimas, kai pateiktas brėžinys
12.	Taikyk: kreivėmis apriboto ploto apskaičiavimas, kai pačiam reikia nubrėžti brėžinį
13.	Taikyk: sudėtingesni ploto skaičiavimo atvejai
14.	Taikyk: įvairių uždavinių sprendimas
15.	Apibendrinimas ir kartojimas
16.	Kontrolinis darbas

■ Bendrasis kursas

Pamokos eil. nr.	Pamokos tema
1.	Procentų uždaviniai
2.	Laipsniai ir šaknys, standartinė skaičiaus išraiška
3.	Reiškinų prastinimas, greitosios daugybos formulės
4.	Reiškinų prastinimas
5.	Veiksmai su logaritmais
6.	Bendrieji dalikliai ir kartotiniai
7.	Žodiniai uždaviniai
8.	Žodiniai uždaviniai
9.	Apibendrinimas ir kartojimas
10.	Kontrolinis darbas

P. 128 PAKARTOK

Skyreliui skiriamos 4 pamokos. Uždavinių yra nemažai, mokytojas juos gali rinktis atsižvelgdamas į mokinių pasiekimų lygį. Kartojimo uždaviniai parinkti taip, kad mokiniai galėtų pakartoti šias temas:

1. Laipsniai ir šaknys
2. Laipsnis su racionaliuoju rodikliu
3. Veiksmai su kvadratinėmis šaknimis ir laipsniais, kurių rodiklis – sveikasis skaičius
4. Veiksmų su n -tojo laipsnio šaknimis taisyklės
5. Veiksmų su laipsniais, kurių rodiklis racionalusis, taisyklės
6. Pozicinis skaičiaus užrašymas
7. Begalinių periodinių dešimtainių trupmenų vertimas paprastosiomis
8. Standartinė skaičiaus išraiška
9. Apytikslis skaičiavimas, paklaidos
10. Algebrinių reiškinių pertvarkymas
11. Skaičiavimai su logaritmais.

P. 128–133 „Pakartok“ užduočių atsakymai

- 1 a) $\pm 3\sqrt{3}$; b) $3 - 2\sqrt{2}$; $3 + 2\sqrt{2}$.
- 2 2400 Eur.
- 3 66,7 %.
- 4 30 Eur.
- 5 90 g.
- 6 3400 Eur (už 10 %) ir 600 Eur (už 20 %).
- 7 237,5 %.
- 8 73 %.
- 9 61 %.
- 10 5900 Eur.
- 11 5 dienas.
- 12 40 000 Eur; 44 100 Eur.
- 13 23,5 %.
- 14 80 km.
- 15 a) 4; b) 81; vadovėlyje klaidinga sąlyga, turi būti $25 \cdot \left(-\frac{5}{9}\right)^{-2}$; c) 15; d) 1; e) 12; f) $11\sqrt{2}$; g) 24; h) 8; i) $2\sqrt[6]{32}$; j) 47.
- 16 a) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$; b) $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$; c) $(3x - 2)^3$; d) $x^3 + 27$; e) $6x + 12\sqrt{x} + x\sqrt{x} + 8$; f) $(\sqrt{x} - 3)(x + 3\sqrt{x} + 9)$; g) $(2\sqrt{x} + 1)^3$; h) $(e^x - 1)(e^{2x} + e^x + 1)$.
- 17 a) $5 \cdot 10^2$; b) 10^{-12} ; c) $7,4 \cdot 10^{12}$; d) $5,6 \cdot 10^{-4}$.
- 18 $3,346 \cdot 10^{19}$ molekulių.
- 19 $1,26 \cdot 10^{-7}$.
- 20 4.
- 21 20 m/s.
- 22 14 cm.
- 23 a) $\frac{5}{9}$; b) $\frac{8}{9}$; c) $\frac{13}{99}$; d) $\frac{53}{450}$; e) $\frac{103}{330}$.
- 24 a) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$; b) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$; c) $2\sqrt{6} - 5$; d) $-2 - \sqrt{3}$; e) $\frac{\sqrt{6}}{9}$; f) $3 + \sqrt{5}$.
- 25 a) $2\sqrt{2}$; b) $5 - 2\sqrt{5}$.
- 26 a) $2x$; b) $1 - 2a$.
- 27 a) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; b) $[-3; 3]$; c) $[1; +\infty)$; d) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.
- 28 a) $x(x - 2)(x + 2)$; b) $(x + 1)(x - 3)$; c) $\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})$; d) $(x + 3)(x - 3)(x + 2)$; e) $(x + y)(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$; f) $(\sqrt{x} + 1)^2$; g) $(2x + 1)(x - 3)$; h) $a^3(1 + a)(1 - a + a^2)(a^6 - a^3 + 1)$; i) $(x + 1)(\sqrt{x} + 1)$; j) $(m - 1)(n + 1)$; k) $e^x \cdot (e^x - 1)$; l) $\cos^2 x \cdot (1 + \sin^2 x)$.

- 29 a) 12; b) -96; c) 7.
- 30 a) $\frac{x+2}{x+1}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; c) $\sqrt{x} + \sqrt{c}$; d) $a - \sqrt{10}$; e) a^3 ; f) $a^{\frac{1}{2}} + 2$; g) $3 - x$, kai $x < 2$; $x - 3$, kai $x > 2$;
h) $\frac{1}{x^2 + 1}$; i) $\frac{x-1}{2y+3}$.
- 31 a) $\frac{2x^2-4}{x(x+2)}$; b) $\frac{3}{(x-1)x}$; c) $\frac{x+2}{x+1}$; d) $x+1$; e) $\frac{3+m}{3m-4}$; f) $\frac{m^2+n^2}{m^2n^2}$; g) $\frac{1}{2(1-2x)^2}$; h) $\frac{x}{3-y}$; i) $\frac{a^2}{a-b}$; j) $\frac{1}{a^2}$;
k) $-\frac{2}{y+3}$; l) 0,5; m) \sqrt{x} ; n) 1.
- 32 a) $a = \frac{2t}{t-b}$, $b = \frac{t(a-2)}{a}$, $t = \frac{ab}{a-2}$; b) $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, $R_1 = \frac{R R_2}{R_2 - R}$, $R_2 = \frac{R R_1}{R_1 - R}$.
- 33 a) -10; b) 12; c) $\frac{1}{12}$; d) 2.
- 34 a) -0,5; b) $y^2 \sqrt{x}$.
- 35 $a = \frac{1}{b^2}$.
- 36 $\Delta = \frac{3}{1100}$; $\delta = 1\%$.
- 37 7 kg.
- 38 8,4 kg.
- 39 23 metai.
- 40 151 min.
- 41 10^{15} smiltelių.
- 42 32 knygos.
- 43 78 km/h.
- 44 650 km/h.
- 45 24 km/h.
- 46 55 metai.
- 47 8.
- 50 2.
- 51 54.
- 52 23.
- 53 64 ir 78.
- 54 21 valandą.
- 55 3 bėdos.
- 56 29,8 km.
- 57 13 užduočių.
- 58 2 km.
- 59 36 km/h.
- 60 Per 6 s.

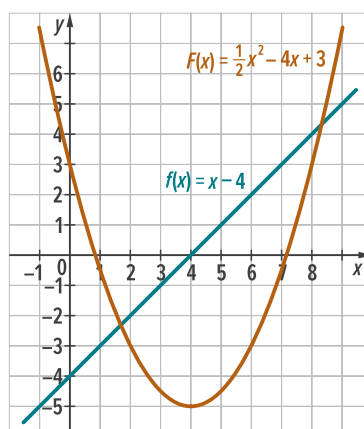
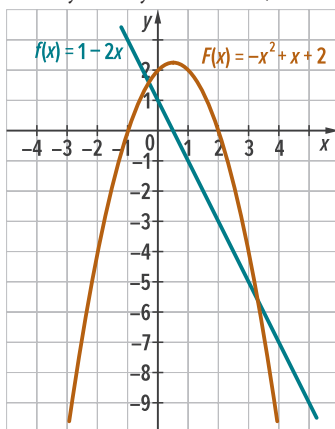
Skyreliui numatytos 4 pamokos. Rekomenduojama iš pradžių supažindinti su pirmąją funkcijos apibrėžtimi ir nagrinėti mokytojo parinktus pavyzdžius, panašius į 1–3 pavyzdžius (p. 134–135). Pastebėjus, kad pirmąją funkcijos radimo uždavinys turi be galo daug sprendinių, galima suformuluoti pagrindinę pirmąją funkcijos savybę, tada spręsti mokytojo parinktus uždavinius, panašius į 1–2 pavyzdžius (p. 136). Antrąją pamoką siūloma užrašyti pirmąją funkcijos savybes ir jas iliustruoti pavyzdžiais. Per trečią ir ketvirtą pamoką įvedama apibrėžtinio integralo sąvoka ir formuluojamos apibrėžtinio integralo savybės. Mokiniai išmoka apskaičiuoti apibrėžtinį integralą (žino ir taiko Niutono ir Leibnico formulę), sprendžia 14–17 uždavinius (p. 144).

„Pamėgink“ užduočių atsakymai

- P. 135 **1** a) $f(x) = 8x^3 - 3$; b) $f(x) = 0,5 \cos x + 2 \sin x$.
- P. 137 a) $F_1(x) = \frac{1}{4}x^2$, $F_2(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2$, $F_3(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$; b) $F_1(x) = \frac{1}{3}x^3$, $F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2$, $F_3(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$;
c) $F_1(x) = x^2 - x$, $F_2(x) = x^2 - x - 2$, $F_3(x) = x^2 - x + 3$.
- P. 138 a) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + x + C$; b) $F(x) = \frac{1}{25}x^5 - \frac{2}{9}x^3 + C$; c) $F(x) = \frac{2}{9}x^3 - 3x^2 + \sqrt{2}x + C$.
- P. 139 **1** $F(x) = x^2 + 3x - 11$.
2 $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x - 2\frac{1}{3}$.
3 $F(x) = 2x^2 + 1,5$.
- P. 140 **I** a) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$; b) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + C$.
II a) 2,5; b) 0,5.
- P. 142 a) 64; b) 0; c) 9; d) 3,6; e) 1.

P. 142–144 Uždavinių atsakymai

- 2** a) $f(x) = 10 \sin^4(2x) \cos(2x)$; b) $f(x) = \ln(6x) + 1$; c) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$; d) $f(x) = 3e^{3x}(1 + 3x)$;
e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$; f) $f(x) = \frac{3}{3x + 2}$.
- 3** a) $F(x) = 10x$; b) $F(x) = \frac{x^4}{16}$; c) $F(x) = 2,5x^2 - 2x$; d) $F(x) = 0,5x^6$.
- 4** a) pvz.: $F(x) = 2x^2 - 2x$, $F(x) = 2x^2 - 2x - 1$, $F(x) = 2x^2 - 2x + 3$; $F(x) = 2x^2 - 2x + 1$;
b) pvz.: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x$, $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - 2$, $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x + 1$; $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - 15$.
- 5** a) $F(x) = \frac{1}{8}x^2 + 2x + C$; b) $F(x) = 0,5x^6 + x^2 + x + C$; c) $F(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + x + C$;
d) $F(x) = \sqrt{2}x + C$; e) $F(x) = \frac{x^3}{9} - x^2 + x + C$; f) $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + x^4 + \frac{1}{9}x^3 - x^2 + C$.
- 6** a) $F(x) = -x^3 + 2$; b) $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + 1$.
- 7** a) $F(x) = -1,5x^2 + 3x + 6,5$; b) $F(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 2,5$.
- 8** a) $F(x) = 2,5x^2$; b) $F(x) = -4x^2$.
- 9** a) $A(-2; 5\frac{1}{3})$; $F(x) = \frac{x^4}{12} - 2x^2 + 12$; b) $A(-1; -\frac{2}{3})$; $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{13}{12}$.
- 10** a) $F(x) = -x^2 + x + 2$; didėjančioji, kai $x \in (-\infty; 0,5)$; mažėjančioji, kai $x \in (0,5; +\infty)$; b) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$; su $x \in (4; +\infty)$.



- 11** 1 ir 2 teiginiai.

$f'(x)$	> 0	0	< 0			
$f(x)$		Kritinis taškas		> 0	0	< 0
$F(x)$					Kritinis taškas	

12 a) 1; 3; 5; b) -3; 1; 3.

13 a) $F(x) = \frac{x^3}{3} + x + C$; b) $F(x) = \frac{1}{2}x(x+8) + C$; c) $F(x) = \frac{x^4}{4} + x + C$; d) $F(x) = \frac{1}{3}x(x^2 - 3) + C$;
e) $F(x) = x^2 + x + C$; f) $F(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 6x^2 - 8x + C$.

14 a) 1; b) 20,25; c) 16; d) $8\frac{2}{3}$.

15 a) 3,5; b) 8; c) $\frac{1}{6}$; d) $1\frac{7}{9}$; e) $-5\frac{1}{6}$; f) -16; g) $10\frac{5}{6}$; h) $186\frac{1}{11}$; i) $-\frac{2}{3}$; j) 10; k) $\frac{1}{3}$; l) 5; m) -74,25; n) -5;
o) 0,5; p) $3\frac{1}{3}$; r) $186\frac{1}{11}$; s) 15.

16 a) 8; b) 7; c) 9; d) 1; e) 0; f) 10.

17 a) $a = 2$; b) $a \in (0; +\infty)$.

P. 145 IŠMOK

Skyrelis nėra privalomas, programoje nenumatyta, kad mokiniai turėtų mokėti rasti kitokios nei dauginario funkcijos pirmąją funkciją. Tačiau daugelis mokytojų linkę pateikti visą pirmąsčių funkcijų lentelę.

Išnagrinėję šį skyrelį mokiniai turi: a) žinoti, kokios taisyklės taikomos, norint parašyti sudėtingesnių funkcijų pirmąsčių funkcijas; b) išmokti taikyti taisykles apskaičiuodami apibrėžtinį integralą.

Reikia nurodyti, kad galima rasti ne kiekvienos funkcijos pirmąją funkciją. Yra visiškai nesuintegruojamų integralų. Jei jie apibrėžtiniai, apytiksles jų reikšmes galime rasti tik skaitiniais metodais. Tokių metodų mokykloje nenagrinėjame. Yra daugybė integralų, kuriuos moksleiviai išmoks integruoti tik aukštojoje mokykloje. Čia mokysimės rasti pirmąją funkciją tik pačių paprasčiausių funkcijų, remdamiesi pirmąsčių funkcijų lentele, netaikydami jokių sudėtingesnių integravimo metodų. Sudėtinges funkcijas integruosime tik tas, kurių argumentas yra tiesinė funkcija $g(x) = kx + b$. Kadangi šiame skyrelyje yra daugiau uždavinių, negu galima išspręsti per 2–3 pamokas, tai mokytojas užduotis gali diferencijuoti pagal mokinių gebėjimus.

„Pamėgink“ užduočių atsakymai

P. 146 1 a) $F(x) = \frac{3}{7}x^2\sqrt{x}$; b) $F(x) = x\sqrt{x}$; c) $F(x) = \frac{6}{25}x^4\sqrt{x}$; d) $F(x) = 3\ln|x| - 2\cos x + C$.

Pastaba. Vadovėlyje liko klaida. Šio uždavinio sąlyga turi būti $y = \frac{3}{x} + 2\sin x$.

2 a) $F(x) = 5e^x - \frac{3}{2}x^4 - 5x + C$; b) $F(x) = 0,5\sin x + 3\cos x + C$.

3 $F(x) = 6x - \frac{8}{3}x\sqrt{x} - 11\frac{2}{3} + \frac{16\sqrt{2}}{3}$.

P. 147 a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) 1.

P. 148 I a) $F(x) = \frac{1}{12}(4x+2)^3$; b) $F(x) = \frac{1}{2}(0,5x-1)^4$; c) $F(x) = \frac{2}{3}\ln|3x+2|$; d) $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x+3)$.

II $\int_0^1 \left(\frac{1}{3}x - 5\right)^5 dx = -2648\frac{305}{1458}$, arba $\int_0^1 \left(\frac{1}{3}x - 5\right)^5 dx \approx -2648$; $\int_0^{\ln 3} e^{2x} dx = 4$.

P. 149–150 Uždavinių atsakymai

18 a) $F(x) = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$; b) $F(x) = \ln|x| + \frac{x^2}{2} + C$; c) $F(x) = \sin x - \frac{x^2}{2} + 3x + C$;

d) $F(x) = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$; e) $F(x) = -3\cos x + x + C$; f) $F(x) = 2\ln|x| - 2x + C$;

g) $F(x) = \frac{3}{4}x^3\sqrt{x} + C$; h) $F(x) = -3\operatorname{ctg} x + \frac{3}{2}x^2 + C$; i) $F(x) = 7\operatorname{tg} x + C$;

j) $F(x) = 6\ln|x| - \frac{1}{12}x^2 + C$; k) $F(x) = \pi\sin x + C$; l) $F(x) = \frac{3}{5}x^3\sqrt{x} + \frac{9}{7}x^2\sqrt{x} + C$.

19 a) $F(x) = \sin x - 1$; b) $F(x) = 3e^x - 2$.

20 a) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 8\ln|x| + C$; b) $F(x) = -2\cos x + C$; c) $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + C$; d) $F(x) = x + 3\ln|x| + C$;

e) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$; f) $F(x) = 3x + \ln|x| + C$; g) $F(x) = 2\sin x + C$; h) $F(x) = e^x + C$.

21 a) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$; c) $\ln 2$; d) $4\frac{2}{3}$; e) $2 - \sqrt{3}$; f) $\frac{3}{8}$; g) 1; h) $e - 1$.

- 22 a) -1 ; b) -3 ; c) $2\frac{1}{3}$; d) $1 - \frac{\pi}{4}$; e) $0,5$; f) e ; g) 2 ; h) $\frac{\pi}{2} + 1$; i) 0 ; j) $-6\frac{2}{3}$; k) $5\frac{2}{3}$; l) 36 ; m) $13\frac{1}{3}$;
 n) $7\frac{1}{3}$; o) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; p) $1 - \frac{\pi}{4}$.
- 23 a) $F(x) = -\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$; b) $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x+2}$; c) $F(x) = \ln|x+1|$; d) $F(x) = -2\operatorname{ctg}(2x+1)$;
 e) $F(x) = \frac{3^{4x+1}}{4\ln 3} + \frac{2^{-x}}{\ln 2}$; f) $F(x) = \frac{1}{2}\ln|2x+3|$; g) $F(x) = 3\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$; h) $F(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^{2x}$.
- 24 a) $\frac{1}{3}\ln\frac{11}{5}$; b) $-e^{-3} - e^3 + e^{-2} + e^2$; c) $\frac{1}{3}$; d) $8\frac{2}{3}$; e) $-\ln 5$; f) $\frac{3}{5}\ln\frac{9}{4}$; g) $8\frac{2}{3}$; h) 0 .
- 25 a) $\frac{5}{6}$; b) $-36\frac{4}{7}$; c) $\frac{128\sqrt{2}-16}{7}$; d) $\frac{8}{\ln 3} + \frac{8}{3}$; e) $-8\frac{2}{3}$; f) $\frac{8}{3e} - \frac{e^2}{3}$; g) 1220 ; h) $2 - \sqrt{2}$; i) $54\frac{6}{7}$; j) $4\frac{2}{3}$; k) $\frac{15}{\ln 2}$;
 l) $-\frac{1}{20}$; m) $2\frac{1}{3}$; n) $\ln 8$; o) $-2\frac{1}{3}$; p) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.
- 26 a) $F(x) = \frac{(7x-3)^3}{21} - 1\frac{19}{21}$; b) $F(x) = \frac{3(3x-1)^{\frac{4}{3}}}{4} + 4$; c) $F(x) = -\frac{1}{15}(7-3x)^5 + \frac{1}{3}$;
 d) $F(x) = -\frac{1}{3}(3-2x) \cdot \sqrt{3-2x} + 4\frac{1}{3}$.
- 27 a) $F(x) = 6\sin x - 4\cos x + 4\sqrt{2}$; b) $F(x) = \frac{1}{3}\ln|3x-2| + 3$; c) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 2 - \frac{1}{2}e^2$; d) $F(x) = \frac{1}{9}x^3 + 5\frac{7}{9}$.
- 28 $7,5$.
- 29 $(-\infty; -6,4]$.
- 30 $F(x) = 1,5x^2 - x + 5\frac{1}{6}$.
- 31 $C = -\frac{2}{3}$.
- 33 $a = -\frac{2}{3}$.
- 34 $a \in (0; 8)$.
- 35 a) 2 ; b) 1 .
- 36 a) $a \in (0; 4]$; b) $a \in (-2; 0) \cup (1; +\infty)$; c) $a > \ln 2$; d) $a \in \left[3\frac{1}{3}; 4\right]$.

P. 151 TAIKYK

Šiame skyrelyje daug praktinio taikymo uždavinių. Nueitas kelias, greitis, pagreitis siejami su pirmąją funkcija. Šiai temai užtenka vienos pamokos. Plačiau reikia nagrinėti kreivinių figūrų plotus. Atsiranda galimybė pakartoti grafikų braižymą. Uždaviniai parinkti taip, kad mokiniai galėtų nesudėtingais atvejais taikyti žinias apie pirmąją funkciją ir apibrėžtinį integralą matematinio ir praktinio turinio problemoms spręsti. Vadovėlyje pateikta daugiau uždavinių, negu galima išspręsti. Taigi mokytojas vėl gali juos parinkti pagal klasės mokinių gebėjimus.

„Pamėgink“ uždavinių atsakymai

- P. 152 $7\frac{2}{3}$.
- P. 153 1 a) $1\frac{1}{3}$; b) $1\frac{1}{3}$.
 2 $2\frac{2}{3}$.
- P. 154 a) 2 ; b) 1 ; c) 1 ; d) 2 ; e) 1 .
- P. 159 $21\frac{1}{3}$.

P. 159–163 Uždavinių atsakymai

- 37 a) 32 m; b) $s(t) = t^3 + 4t + 4$.
- 38 a) $s = 64,5$ m; b) 15 m/s².
- 39 a) 16 ; b) 5 ; c) 15 ; d) 28 .
- 40 a) 6 ; b) $4,5\pi + 6$; c) 2π ; d) 9 .
- 41 a) $21\frac{1}{3}$; b) 12 ; c) $1\frac{1}{3}$; d) $10\frac{2}{3}$.
- 42 a) $1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 14, 15, 16$; b) $2, 3, 6, 7, 8$.

43 a) $-\int_a^0 g(x) dx + \int_0^b g(x) dx$; b) $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx$; c) $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx$; d) $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx$;
 e) $2 \int_0^a f(x) dx$; f) $-2 \int_0^a f(x) dx$; g) $-\int_a^b g(x) dx$; h) $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$; i) $\int_a^c f(x) dx - \int_b^c g(x) dx$; j) $-\int_a^b g(x) dx - \int_b^c f(x) dx$;
 k) $\int_a^d f(x) dx - \int_b^c g(x) dx$; l) $2 \int_0^a (f(x) - g(x)) dx$.

44 a) 9; b) $10 \frac{2}{3}$; c) 40,5; d) 4,5; e) 4,5; f) $10 \frac{2}{3}$; g) 12; h) $9 \frac{1}{3}$.

45 a) $y = 3$, $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$; $S = 12$; b) $f(x) = 0,5x + 2$, $g(x) = -x + 5$; $S = 13,5$;

c) $y = x + 6$, $f(x) = x^2$; $S = 20 \frac{5}{6}$; d) $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = -x^2 + 4$; $S = 2 \frac{2}{3}$; e) $f(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + 2$,
 $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 2$; $S = 8$; f) $y = 0,5x + 1,5$, $y = 1,5x - 1,5$; $S = 6$; g) $y = -x + 6$, $f(x) = x^2$; $S = 10 \frac{2}{3}$;

h) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$; $S = 12$; $y = 2x$, $x = -2$, $y = -2$; $S = 4 \frac{1}{3}$; i) $y = 5$, $f(x) = x^2 + 1$; $S = 10 \frac{2}{3}$.

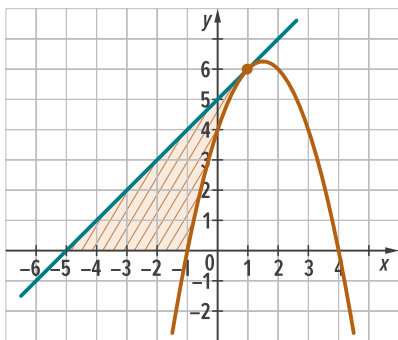
46 a) 1) 4,5; 2) $\frac{5}{6}$; 3) $6 \frac{1}{6}$; 4) $2 \frac{2}{3}$; b) 1) 4,5; 2) $6 \frac{1}{6}$; 3) 9; 4) $1 \frac{5}{6}$.

47 a) 4,5; b) 9; c) $11 \frac{2}{3}$; d) $10 \frac{2}{3}$; e) $4 \frac{2}{3}$; f) 0,3; g) 4,5; h) 4; i) $20 \frac{5}{6}$; j) $2 \frac{5}{6}$; k) $7 \frac{1}{3}$; l) 12.

48 a) $8 \frac{1}{3}$; b) 2; c) $4 \ln 2 + 1,5$; d) $\sqrt{2} - 1$.

49 a) $1 \frac{1}{3}$; b) $1 \frac{1}{3}$.

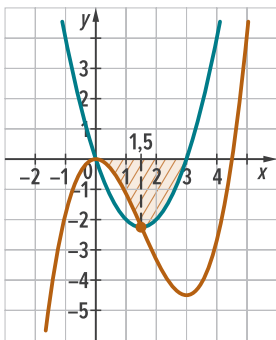
50 a) $y = x + 5$; b)  c) 15.



51 a) $x_B = -1$, $x_K = 0$, $x_N = 2$, $x_C = 3$; b) $14 \frac{1}{3}$; c) $10 \frac{2}{3}$.

52 a) $f(x) = -2x^2 + 8$; b) $a = \frac{1}{4}$.

53 a) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$; b) liestinės lygtis $y = 0$;  c) $3 \frac{33}{64}$.



54 a) $y = -2x + 4$; b) $2 \frac{2}{3}$.

55 a) taip; b) ne.

56 a) $y = -2x + 6$; $f(x) = -x^2 + x + 6$; b) 4,5.

57 $c = 6$.

58 $a = \sqrt[4]{8}$.

59 a) $22 + \pi$; b) nei lyginė, nei nelyginė; c) $379 \frac{3}{10} - \frac{2}{\pi}$.

60 $\ln 2 - \frac{1}{2}$.

P. 164 „Pasitikrink“ uždavinių atsakymai

1 variantas

- 2 a) $F(x) = 1,5x^2 - 2x + 2$;
 b) $F(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{6}x^2 + x + 5$.
 3 $F(x) = 1,5x^2 - 6x + 6$.
 4 a) 9; b) $\frac{3}{4}$; c) $16\frac{1}{3}$; d) -44; e) -4; f) 340.
 5 a) $\frac{1}{6}$; b) $1\frac{1}{3}$; c) $6\frac{2}{3}$.
 6 13,5.
 7 $14\frac{2}{3}$.

2 variantas

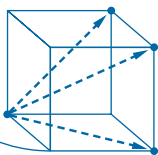
- 1 a) $F(x) = \frac{1}{3}\ln x + 1$;
 b) $F(x) = \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{18}\cos(3x) + \frac{4}{5}$.
 2 a) $2\frac{2}{3}$; b) 1,5; c) -1; d) $\frac{1}{2}\ln 5$; e) $\frac{1}{2}\ln 5$;
 f) $4\frac{2}{3} + \ln 2,5$; g) 0; h) 0,5; i) $\frac{1}{6}$; j) $\sqrt{3} + 2$;
 k) π ; l) $1 + \ln \frac{2}{3}$.
 3 83.
 4 $f(x) = -x + 1$, $g(x) = x^2 + 4x + 5$; plotas lygus 4,5.
 5 $S_{1(\text{žalsvas})} = 6\frac{2}{3}$; $S_{2(\text{rausvas})} = 9\frac{1}{3}$.
 6 a) 13,5; b) $17,5 - 6\ln 6$.
 7 $a = 1$.
 8 Tiesės lygtis yra $x = 2\sqrt[4]{8}$.

P. 166 „Ar priimsi iššūkį?“ uždavinių atsakymai

- 1 a) $a(t) = -\frac{1}{(t+1)^2}$; b) $\ln 6$ m, arba $\approx 1,8$ m.
 2 a) $\frac{\pi}{4}$; b) $1 - \frac{\pi}{4}$; c) $\frac{1}{2}$.
 3 -2.
 4 $\frac{14}{13}$.
 5 $\frac{1}{6}$.
 6 $\frac{2}{3}$.
 7 $\frac{1}{6}$.
 8 2.
 9 $\frac{2}{3}$.
 10 54.
 11 a) $e - 1$; b) $e - 1$; c) 4; $4e - 4$.

4 skyrius

Vektoriai erdvėje



Šiame skyriuje labai svarbus kartojimas, todėl jam skiriamos net 6 pamokos iš 16. Mokiniai, kurie pasirinko bendrąjį kursą, mokosi šio skyriaus tik skyrelį „Pakartok“. Išėjus šį skyrelį siūloma skirti kontrolinį darbą ir iš karto nagrinėti „Stereometrijos“ skyrių vadovėlio antrojoje dalyje. Besimokantys išplėstinį kursą mokiniai pagal programą turi mokėti įrodyti Pitagoro teoremą, Talio teoremą ir kt. Įrodymai, kurių nebuvo 11 klasės vadovėlyje, šio skyriaus skyrelyje „Pakartok“ pateikti kaip uždaviniai (14, 15, 16 uždaviniai).

Skyriaus „Vektoriai erdvėje“ skirstymo pamokomis pavyzdys

■ Išplėstinis kursas

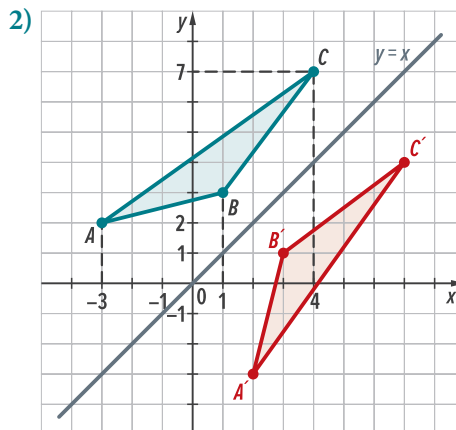
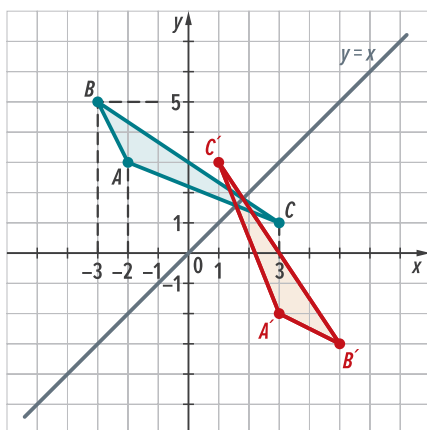
Pamokos eil. nr.	Pamokos tema
1.	Pakartok: kampai, trikampiai
2.	Pakartok: panašumas
3.	Pakartok: apskritimas
4.	Pakartok: keturkampiai
5.	Pakartok: įvairūs uždaviniai
6.	Pakartok: plokštumos vektoriai
7.	Susipažink: svarbiausios sąvokos, vektorių veiksmi
8.	Susipažink: skaliarinė vektorių sandauga, vektorių statmenumo ir kolinearumo sąlygos
9.	Išmok: stačiakampė erdvės koordinačių sistema
10.	Išmok: erdvės vektorių koordinatės
11.	Išmok: vektoriaus ilgis
12.	Išmok: skaliarinė vektorių sandauga
13.	Taikyk: vektorių taikymas uždaviniams spręsti
14.	Taikyk: įvairių uždavinių sprendimas
15.	Apibendrinimas ir kartojimas
16.	Kontrolinis darbas

■ Bendrasis kursas

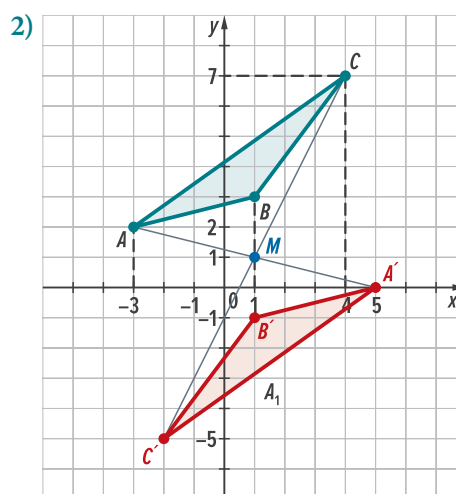
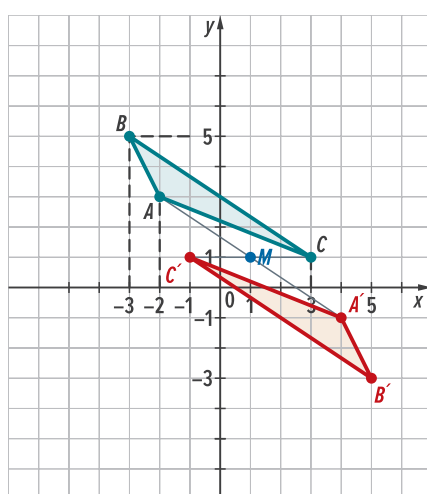
Pamokos eil. nr.	Pamokos tema
1.	Pakartok: kampai, trikampiai
2.	Pakartok: panašumas
3.	Pakartok: apskritimas
4.	Pakartok: keturkampiai
5.	Pakartok: įvairūs uždaviniai
6.	Kontrolinis darbas

P. 170–184 „Pakartok“ užduočių atsakymai

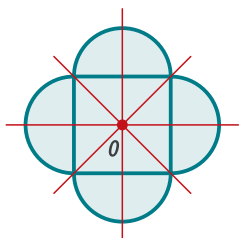
- 1 a) 180° ; b) 155° .
 2 a) 35° ; b) 40° ; c) 110° ; d) 65° ; e) 70° ; f) $22,5^\circ$; g) 100° ; h) 75° .
 3 a) 70° ; b) 124° ; c) 65° ; d) 80° ; e) 80° ; f) 100° .
 6 a) 1)



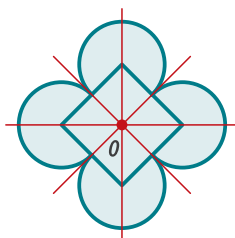
b) 1)



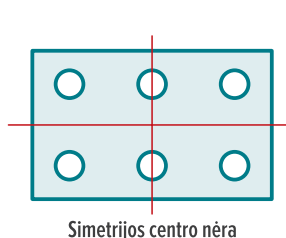
7 a)



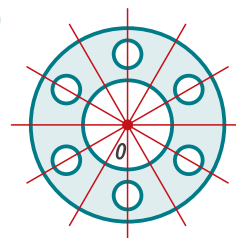
b)



c)



d)

8 a) 18; b) 20; c) $7,5\sqrt{2}$; d) $4\sqrt{3}$; e) 6; f) 54; g) 0,5; h) $3\sqrt{3}$; i) 16.

12 D.

13 7.

19 a) 2; b) $5\frac{1}{3}$; c) $6\frac{2}{3}$; d) $3\frac{1}{3}$.20 $16 : 25$.21 280 cm^2 .22 324 cm^2 ; 729 cm^2 ; 1296 cm^2 .23 $3 : 5$.26 a) 9 ir 4; b) $5\frac{1}{3}$; c) 6; d) 4 ir 3; e) $5\frac{1}{3}$; f) 18.

27 10 cm; 8 cm; 2 cm.

28 Per 6 min; 8 ratus.

29 Žiedo.

30 18; $3 : 1$.31 a) 20° ; b) 20° ; c) 60° ; d) 40° ; e) 40° ; f) 125° .33 30° .35 19,2 arba $3\frac{1}{3}$.

- 36 C.
- 37 B.
- 38 a) $R = \frac{8\sqrt{7}}{7}$ cm, $r = \frac{3\sqrt{7}}{7}$ cm arba $R = \frac{9}{2\sqrt{2}}$ cm, $r = \sqrt{2}$ cm; b) 1) 6,5 cm; 2) 2 cm; 3) 30 cm².
- 39 a) $AC = 3\sqrt{3}$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$; b) $AC = 2\sqrt{54}$, $\angle A = \arcsin 0,2$, $\angle B = \arccos 0,2$;
 c) $AC = 6 \operatorname{tg} 40^\circ$, $AB = \frac{6}{\sin 50^\circ}$, $\angle B = 40^\circ$; d) $\angle B = 50^\circ$, $AC = 6 \operatorname{tg} 50^\circ$, $AB = \frac{6}{\sin 40^\circ}$;
 e) $AB = \sqrt{193}$, $\angle A = \operatorname{arctg} \frac{12}{7}$, $\angle B = \operatorname{arctg} \frac{7}{12}$; f) $\angle A = 70^\circ$, $AC = 16 \sin 20^\circ$, $BC = 16 \cos 20^\circ$.
- 40 99 mm.
- 41 $P_{\triangle ACD} = 9,9$ cm; $S_{\triangle ACD} = 3,7$ cm²; $P_{\triangle ABD} = 8,7$ cm; $S_{\triangle ABD} = 2,4$ cm².
- 42 a) 7,6; b) 14; c) 10; d) 9,3; e) 117°; f) 101°; g) 34°; h) 73°.
- 43 $\arcsin 0,25$.
- 44 a) taip; b) ne; c) taip; d) taip.
- 46 $2\sqrt{19}$ cm; $30\sqrt{3}$ cm².
- 47 a) $4(\sqrt{37} + \sqrt{13})$ cm; $48\sqrt{3}$ cm²; b) $\sqrt{180 - 72\sqrt{2}}$ cm; $\sqrt{180 + 72\sqrt{2}}$ cm.
- 50 a) $4\sqrt{145}$ cm; $\sin \alpha = \frac{144}{145}$; b) $2\sqrt{5}$ cm.
- 51 a) $4\sqrt{3} \pi$ cm; b) $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ cm².
- 53 $3\sqrt{2}$ cm.
- 54 1.
- 55 2,3 m.
- 56 78 cm²; $10\sqrt{13}$ cm.
- 57 a) $\frac{3}{8} S$; b) $\frac{3}{8} S$; c) $\frac{5}{12} S$; d) $\frac{1}{4} S$; e) $\frac{1}{6} S$; f) $\frac{1}{5} S$.
- 58 $\frac{48\sqrt{2}}{5}$ cm.
- 59 2,56 cm².
- 60 27 cm².
- 61 225 cm².
- 62 50 cm.
- 63 14 cm; $39\sqrt{3}$ cm².
- 64 54 cm²; $(24 + 6\sqrt{2})$ cm.
- 68 10 cm, 25 cm, 35 cm ir 50 cm.
- 69 105° ir 125°.
- 70 125°, 125°, 55°.
- 72 180 cm².
- 73 2π cm².
- 74 10,625 cm.
- 75 a) 160°; b) 23 kraštines; c) 12 kraštinių.
- 76 9 kraštines.
- 77 $a\sqrt{3}$; $2a$; $S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.
- 79 a) $\overline{AB} = \vec{b}$, $\overline{BO} = \vec{a} - \vec{b}$, $\overline{BC} = 2\vec{a} - \vec{b}$; b) $\overline{AB} = \vec{b} + \vec{a}$, $\overline{BD} = -2\vec{a} - \vec{b}$, $\overline{DN} = \frac{4}{3}\vec{a} + \vec{b}$; c) $\overline{AB} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overline{AD} = -2\vec{b}$, $\overline{DC} = \vec{a} + 2\vec{b}$; d) $\overline{AC} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\overline{AD} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$, $\overline{CB} = -\vec{a} - \vec{b}$; e) $\overline{BD} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overline{DC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overline{BM} = \frac{2}{3}(2\vec{b} - \vec{a})$; f) $\overline{AD} = -2\vec{b}$, $\overline{BE} = -2(\vec{a} + \vec{b})$, $\overline{AM} = \vec{a} - 0,5\vec{b}$.
- 80 $\overline{AB} = (2; 4)$, $\overline{CD} = (1; -3)$, $\overline{GE} = (-1; 3)$, $\overline{KL} = (3; 0)$, $\overline{EF} = (-3; 0)$, $\overline{PS} = (3; 0)$, $\overline{VO} = (0; 4)$, $\overline{TZ} = (0; -7)$, $\overline{HN} = (-1; -2)$, $\overline{HJ} = (2; 0)$, $\overline{PR} = (2; -5)$, $\overline{TV} = (-3; -4)$.
- 81 a) \vec{a} ir \vec{m} , \vec{b} ir \vec{c} , \vec{d} ir \vec{n} ; b) \vec{b} ir \vec{c} , \vec{d} ir \vec{n} ; c) \vec{a} ir \vec{m} .
- 82 $m = 4$.
- 83 a) $\vec{a} = (1; -2)$; $|\vec{a}| = \sqrt{5}$; b) $\vec{b} = (0,5; 1)$; $|\vec{b}| = \sqrt{1,25}$; c) $\vec{c} = (0; -3)$; $|\vec{c}| = 3$.
- 84 $\vec{c} = 3\vec{a} + \vec{b}$.
- 85 $\vec{c} = -\vec{a} + 2\vec{b}$.
- 86 $\overline{KL} = (1; 0)$.
- 87 a) C(7; 3); b) (2,5; 3); c) M(1; 3); N(4; 3).

P. 185 SUSIPAŽINK

Skyrelio pradžioje mokiniams primenama gretasienio sąvoka. Ši sąvoka mokiniams gerai žinoma, čia ji praplečiama, mat braižant gretasienius galima puikiai iliustruoti visus erdvės vektorių veiksmus.

Toliau primenamos mokiniams jau žinomos pagrindinės su vektoriais susijusios sąvokos, mokoma erdvėje atpažinti lygiuosius, kolinearinius ir pan. vektorius. Pavyzdžius ir „Pamėgink“ užduotis (p. 186–187) galima atlikti mintinai. Daugiau dėmesio reikėtų skirti erdvės vektorių veiksmams. Prieš pradėdant kalbėti apie skaliarinę vektorių sandaugą, verta priminti, kaip randamas kampo tarp vektorių didumas.

„Pamėgink“ užduočių atsakymai

- P. 187 a) 1) \overline{AL} ir \overline{MD} , \overline{LE} ir \overline{BF} , \overline{EF} ir \overline{MC} ; 2) \overline{LE} ir \overline{BF} , \overline{EF} ir \overline{MC} ; 3) \overline{AL} ir \overline{MD} ; 4) $\overline{LE} = \overline{BF}$, $\overline{EF} = \overline{MC}$; 5) $\overline{AL} = -\overline{MD}$; b) $|\overline{AL}| = 5\sqrt{2}$, $|\overline{LE}| = |\overline{BF}| = 5\sqrt{2}$, $|\overline{MD}| = |\overline{AL}| = 5\sqrt{2}$, $|\overline{ON}| = \frac{1}{2}|\overline{NC}| = \frac{1}{2}|\overline{AL}| = 2,5\sqrt{2}$, $|\overline{MC}| = |\overline{EF}| = 5$; c) $\widehat{\overline{AL}, \overline{MD}} = 180^\circ$, $\widehat{\overline{MD}, \overline{ON}} = 90^\circ$, $\widehat{\overline{MC}, \overline{EF}} = 0^\circ$.
- P. 189 1 a) $\vec{a} - \vec{b} = \overline{M_1M}$; b) $\vec{a} - \vec{c} = \overline{M_1K_1}$; c) $\vec{b} - \vec{a} = \overline{LL_1}$; d) $\vec{c} - \vec{b} = \overline{K_1M}$.
2 a) $\overline{LL_1} - \overline{LK}$; b) $\overline{NM} - \overline{NK}$.
- P. 191 \vec{a} , \vec{b} ir \vec{c} .

P. 191–193 Uždavinių atsakymai

- 1 a) $\overline{CC_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{DD_1}$; b) \overline{CB} , $\overline{C_1B_1}$, \overline{DA} , $\overline{D_1A_1}$; c) \overline{AO} , \overline{CA} , \overline{AC} , \overline{OC} , \overline{CO} , $\overline{C_1A_1}$, $\overline{A_1C_1}$, $\overline{KC_1}$, $\overline{C_1K}$, $\overline{A_1K}$, $\overline{KA_1}$; d) \overline{DB} , \overline{OB} , $\overline{KB_1}$, $\overline{D_1K}$, $\overline{D_1B_1}$.
- 2 a) 6 cm; 3 cm; 6 cm; $\sqrt{3}$ cm; $2\sqrt{3}$ cm; b) 60° ; 120° ; 120° ; $\pi - \arctg \frac{1}{3}$; 60° ; $\pi - \arctg \sqrt{2}$; c) 6 cm; $3\sqrt{3}$ cm; 6 cm; $2\sqrt{3}$ cm; $2\sqrt{6}$ cm; $\sqrt{3}$ cm; d) 60° ; 60° ; 60° ; $\pi - \arctg(2\sqrt{2})$; 60° ; $\pi - \arctg(2\sqrt{2})$.
- 3 a) α ; b) $180^\circ - \beta$; c) $180^\circ - \alpha$; d) $180^\circ - \beta$; e) β ; f) $180^\circ - \alpha$.
- 4 a) \overline{DB} ; b) $\vec{0}$; c) $2\overline{DA}$; d) \overline{AC} .
- 5 a) \overline{AC} ; b) \overline{AD} ; c) \overline{DB} ; d) \overline{BA} .
- 6 a) $\overline{AC_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; $\overline{CA_1} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$; $\overline{BB_1} = \vec{a}$; $\overline{D_1C_1} = \vec{c}$; b) $\overline{AC_1} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$; $\overline{CA_1} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; $\overline{BB_1} = \vec{a}$; $\overline{D_1C_1} = \vec{b}$; c) $\overline{AC_1} = \vec{b} - 2\vec{c}$; $\overline{CA_1} = \vec{a} + \vec{c}$; $\overline{BB_1} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$; $\overline{D_1C_1} = -\vec{c}$; d) $\overline{AC_1} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; $\overline{CA_1} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; $\overline{BB_1} = \vec{c}$; $\overline{D_1C_1} = \vec{a}$; e) $\overline{AC_1} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$; $\overline{CA_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; $\overline{BB_1} = \vec{a}$; $\overline{D_1C_1} = -\vec{b}$; f) $\overline{AC_1} = -2\vec{a} + \vec{b}$; $\overline{CA_1} = \vec{b} - 2\vec{c}$; $\overline{BB_1} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$; $\overline{D_1C_1} = -\vec{a} + \vec{b}$.
- 7 a) $\overline{AC_1} + \overline{B_1D} = 2\vec{a}$; b) $\overline{AB} - \overline{DA} - \overline{AC_1} = -\vec{c}$; c) $\overline{A_1C} - \overline{AC_1} = -2\vec{c}$; d) $\overline{DA} - \overline{CD} - \overline{D_1B} = \vec{c}$.
- 8 a) $|\overline{AD_1}| = 13$ cm; b) $|\overline{DA}| = 12$ cm; c) $|\overline{B_1D}| = \sqrt{218}$ cm; d) $|\overline{CD_1}| = \sqrt{74}$ cm.
- 9 a) $\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{DC} - \overline{BD}$; b) $\overline{AB} = \overline{DC} + \overline{CB} - \overline{DA}$.
- 11 a) 0; 0; a^2 ; $-a^2$; b) 0; a^2 ; 0; $-a^2$.
- 12 a) $-\frac{a^2}{2}$; $\frac{a^2}{2}$; 0; $\frac{a^2}{6}$; 0; b) $\frac{a^2}{2}$; 0; $-\frac{a^2}{4}$; $-\frac{a^2}{2}$; $\frac{a^2}{12}$.
- 14 a) 1) 120° ; 2) -4; 4; b) 1) 120° ; 2) $[2; +\infty)$.
- 15 a) 1) 2; 2) -48; 3) $2\sqrt{31}$; b) 1) -2; 2) 14; 3) $2\sqrt{7}$.
- 16 a) -3; b) -20.
- 17 a) -2; b) 3; c) -23; d) $\sqrt{13}$.
- 18 a) 1) $\frac{3}{2}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) negalima; 4) $\frac{1}{2}$; 5) negalima; b) 1) $\frac{1}{3}$; 2) -2; 3) negalima; 4) negalima; 5) $\frac{1}{2}$.
- 19 a) taip; b) taip.
- 20 1, 4, 5, 6.

P. 194 IŠMOK

Šiame skyrelyje yra naujas dalykas – stačiakampė erdvės koordinačių sistema, visa kita mokiniams jau gerai žinoma. Kad mokiniai geriau suvoktų erdvės koordinačių sistemą, būtų puiku į pagalbą pasitelkti erdvinius modelius. Galima erdvės taško koordinatės iliustruoti net koordinačių pradžia laikant klasės kampą. Aišku, geriau turėti erdvinį modelį.

Mokant veiksmų su vektoriais, išreikštais koordinatėmis, būtina pabrėžti, kad erdvės ir plokštumos vektoriams galioja tos pačios savybės, tos pačios veiksmų atlikimo taisyklės.

„Pamėgink“ užduočių atsakymai

- P. 195 $A(6; 0; 0)$, $B(6; 8; 0)$, $C(0; 8; 5)$, $K(0; 0; 5)$, $L(6; 0; 5)$, $M(6; 8; 5)$, $N(0; 8; 5)$.
- P. 196
- $\overrightarrow{AD} = (0; 2; 0)$, $\overrightarrow{AC_1} = (-2; 2; 2)$, $\overrightarrow{D_1B} = (-2; -2; -2)$, $\overrightarrow{BF} = (0; 2; 1)$, $\overrightarrow{AF} = (-2; 2; 1)$, $\overrightarrow{EF} = (-2; 1; 1)$.
 - Vektorių, lygiagrečių su ašimi Ox , koordinatės: $\vec{a} = (m; 0; 0)$; vektorių, lygiagrečių su ašimi Oy , koordinatės: $\vec{a} = (0; m; 0)$; vektorių, lygiagrečių su ašimi Oz , koordinatės: $\vec{a} = (0; 0; m)$.
 - Vektorių, lygiagrečių su plokštuma Oxy , koordinatės: $\vec{a} = (m; n; 0)$; vektorių, lygiagrečių su plokštuma Oxz , koordinatės: $\vec{a} = (m; 0; p)$; vektorių, lygiagrečių su plokštuma Oyz , koordinatės: $\vec{a} = (0; n; p)$.
- P. 197
- $2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} = (8; 11; -13)$.
 - Vienakrypčiai \vec{a} ir \vec{c} , priešpriešiniai \vec{a} ir \vec{d} , \vec{c} ir \vec{d} .
- P. 199 a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -54,5$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 12,7$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$; b) statmeni yra vektoriai \vec{b} ir \vec{c} ; c) $\widehat{\vec{a}, \vec{b}} = \pi - \arccos \frac{54,5}{\sqrt{19765,3125}}$.

P. 199–200 Uždavinių atsakymai

- a) B; b) F; c) D; d) A, B, F; e) B, D, H; f) C, D, F, G.
- a) 1) $\overrightarrow{AB} = (-2; -10; 2)$; $\overrightarrow{CD} = (-4; -2; 2)$; 2) $(-3; -1; 6)$; 3) $(-8; -4; 4)$; 4) $(-10; -14; 6)$;
b) 1) $\overrightarrow{AB} = (-2; -8; 2)$; $\overrightarrow{CD} = (0; 2; -10)$; 2) $(1; 2; 1)$; 3) $(6; 24; -6)$; 4) $(-6; -26; 16)$.
- a) $(2; 0; 6)$; b) $(-10; 2; 21)$; c) $(4; 0; -3)$; d) $(3; 6; 19)$.
- a) $A(1; 1; -14)$; b) $B(9; -9; 3)$.
- a) taip; b) taip; c) ne; d) ne.
- a) $\overrightarrow{KL} = (-6; -4; -10)$; b) $B(0; 1; 3,5)$.
- a) $\frac{20}{3}$ ir $-\frac{9}{5}$; b) 0,1 ir -1.
- a) $\sqrt{41}$; b) $9\sqrt{2}$; c) $2\sqrt{5}$; d) $\sqrt{35}$.
- a) $\sqrt{362}$; b) $2\sqrt{6}$.
- a) 66; b) 2; c) 0; d) $(0; \sqrt{69}; 0)$; e) 1; f) 3; g) -4; h) 0; i) 0; j) $(\sqrt{69}; 0; 0)$.
- a) -2; -7; b) tokios reikšmės nėra; c) 0 ir $2\frac{2}{3}$; d) $\frac{9}{11}$.
- a) 37° ; b) 67° .
- a) $\sqrt{14}$; b) $\frac{3\sqrt{14}}{14}$; c) $(2; 3,5; 1)$; d) 62° ; e) 9,7; f) -4; 0.

P. 201 TAIKYK

Svarbu mokiniams parodyti, kaip paprastai, remiantis vektoriais, galima įrodyti, kad trys erdvės taškai yra vienoje tiesėje, kad dvi erdvės tiesės yra statmenos ir kt. Svarbesnis yra vadovėlio 201 puslapyje pateiktas 2 pavyzdys, todėl silpnesnėse klasėse 1 pavyzdį galima praleisti. Dar daugiau panašių, vektoriais pagrįstų įrodymų bus „Stereometrijos“ skyriuje.

P. 202 Uždavinių atsakymai

35 a) taip; b) ne; c) ne; d) taip.

36 a) 78° ; ne; b) 1) $B_1D = \sqrt{1193}$; 2) $BK = 20$; 3) $\beta = 57,8^\circ$; e) 1) $C(5; 4; 4)$, $B_1(3; 6; 12)$, $C_1(5; 5; 10)$, $D_1(6; 1; 7)$;2) $3; \sqrt{26}; \sqrt{37}$; 3) $\cos \varphi = \frac{11}{\sqrt{1079}}$.

37 950 km/h.

P. 203–205 „Pasitikrink“ uždavinių atsakymai

1 variantas

1 $\overrightarrow{B_1D_1} = \vec{c} - \vec{b}$; $\overrightarrow{KB} = \vec{b} - 0,5\vec{c}$; $\overrightarrow{KL} = 0,5(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})$.2 a) 1) $\overrightarrow{K_1M} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{K_1M_1} = -\vec{a} + \vec{c}$; $\overrightarrow{KM_1} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{KF} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{FK_1} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$; $\overrightarrow{FE} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$;2) $\vec{x} = -\vec{b}$; 3) $\vec{y} = \vec{c}$;b) $L(0; 0; 0)$; $K(6; 0; 0)$; $M(0; 8; 0)$; $N(6; 8; 0)$; $L_1(0; 0; 12)$; $K_1(6; 0; 12)$; $M_1(0; 8; 12)$; $N_1(6; 8; 12)$; $E(6; 4; 0)$; $F(0; 8; 6)$;c) $2\sqrt{22}$; d) 59° .3 $\overrightarrow{MC} = \frac{7\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MA}}{2}$.4 $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$; $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}(-2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$; $\overrightarrow{NM} = -\frac{1}{6}(2\vec{a} - \vec{b} + 4\vec{c})$.5 $x = 15$, $y = \frac{3}{5}$ arba $x = -15$, $y = -\frac{3}{5}$.6 $S = 5\sqrt{51}$.7 a) 0; b) 24; c) $12\sqrt{3}$; d) $12\sqrt{2}$.8 $|\vec{a}| = \sqrt{35}$ arba $|\vec{a}| = \sqrt{11}$ ir $|\vec{b}| = \sqrt{1336}$ arba $|\vec{b}| = \sqrt{1432}$.

9 8.

11 $\left(\frac{\sqrt{2}}{7}, \frac{\sqrt{7}}{7}, \frac{2\sqrt{10}}{7}\right)$ arba $\left(-\frac{\sqrt{2}}{7}, -\frac{\sqrt{7}}{7}, -\frac{2\sqrt{10}}{7}\right)$.12 Su ašimi Ox – 16° kampą, su ašimi Oy – 79° , su ašimi Oz – 101° .

2 variantas

1 a) $\overrightarrow{DA_1} = \vec{a} - \vec{c}$; $\overrightarrow{OO_1} = 0,5(\vec{a} - \vec{c})$; $\overrightarrow{O_1C_1} = 0,5(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$; b) taip.2 a) 1) $\overrightarrow{K_1M_1} = \vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{KM_1} = \vec{a} + \vec{c}$; $\overrightarrow{KF} = \vec{a} + 0,5\vec{c}$; $\overrightarrow{FK_1} = -\vec{b} - 0,5\vec{c}$; $\overrightarrow{FE} = -\vec{a} + 0,5\vec{b} + 0,5\vec{c}$; $\overrightarrow{K_1M} = -\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$;2) $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$; 3) $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$;b) $L(0; 0; 0)$; $K(4; 0; 0)$; $M(0; 8; 0)$; $N(4; 8; 0)$; $L_1(0; 0; 16)$; $K_1(4; 0; 16)$; $M_1(0; 8; 16)$; $N_1(4; 8; 16)$; $E(2; 8; 0)$; $F(0; 4; 16)$;c) $2\sqrt{69}$; d) 66° .4 $\overrightarrow{DM} = 0,5(\vec{a} + \vec{c})$; $\overrightarrow{KC} = \frac{1}{3}(2\vec{c} - \vec{b})$; $\overrightarrow{KM} = \frac{1}{6}(3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c})$.5 $(16; -20; -8)$; $(-16; 20; 8)$.6 2 ir $-0,75$.7 $t \in (0,0001; 100)$.8 $t \in \mathbf{R}$.

9 Nelygiašonė.

10 18.

12 $\left(\frac{4}{5\sqrt{2}}, -\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ arba $\left(-\frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{3}{5\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.13 Su ašimi Ox – 117° kampą, su ašimi Oy – 123° , su ašimi Oz – 45° .14 $2\sqrt{2}$.

P. 206 „Ar priimsi iššūkį?“ uždavinių atsakymai

3 a) $\overrightarrow{AB} = (-5; 0; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-5; 5; 0)$, $\overrightarrow{SO} = (0; 0; -7)$, $\overrightarrow{SD} = (2,5; 2,5; -7)$; b) 90° .4 b) $-1; 0; 1$; c) $120^\circ; 60^\circ$.

6 6.

7 a) $\overrightarrow{DK} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; b) 90° .

8 1 : 3.

II dalis

5 skyrius

Stereometrija

Šiam skyriui numatytos 22 pamokos išplėstiniame kurse ir 10 pamokų bendrajame kurse. Bendrajame kurse pamokų mažoka, tačiau nereikia teiginių pagrįsti, užtenka spręsti tik paprasčiausius uždavinius, todėl pamokų turėtų pakakti. O besimokantieji išplėstinį kursą šiame skyriuje yra tikrai nemažai uždavinių, kuriuos sprendžiant reikalaujama teiginius pagrįsti, įrodyti. Reikėtų mokinius nuteikti, kad tai padaryti nesunku, kai žinai atitinkamus požymius. Galima prisiminti, kokius požymius jau žinome (trikampių lygumo, panašumo, lygiagretainio) ir kaip juos taikome įrodydami teiginius.

Skyrelio pradžioje pateikiama trumpa kartojimo užduotis. Čia primenami matiniai skaičiai, paprasčiausių geometrinių kūnų tūriai ir paviršių plotai.

Skyriaus „Stereometrija“ skirstymo pamokomis pavyzdys

■ Išplėstinis kursas

Pamokos eil. nr.	Pamokos tema
1.	Pakartok: geometriniai kūnai
2.	Susipažink: svarbiausios sąvokos ir aksiomos
3.	Susipažink: tiesės erdvėje, prasilenkiančiųjų tiesių požymis
4.	Susipažink: tiesės ir plokštumos tarpusavio padėtis
5.	Susipažink: plokštumų tarpusavio padėtis, dvisienis kampas
6.	Išmok: tiesės ir plokštumos statmenumo požymis
7.	Išmok: tiesės ir plokštumos lygiagretumo, dviejų plokštumų statmenumo ir lygiagretumo požymiai
8.	Išmok: trijų statmenų teorema
9.	Išmok: įvairių uždavinių sprendimas
10.	Išmok: atstumai
11.	Išmok: atstumas tarp prasilenkiančiųjų tiesių
12.	Savarankiškas darbas
13.	Taikyk: prizmės

14.	Taikyk: piramidės
15.	Taikyk: nupjautinės piramidės
16.	Taikyk: ritinys
17.	Taikyk: kūgis
18.	Taikyk: nupjautinis kūgis
19.	Taikyk: rutulys
20.	Taikyk: įvairių uždavinių sprendimas
21.	Apibendrinimas ir kartojimas
22.	Kontrolinis darbas

■ Bendrasis kursas

Pamokos eil. nr.	Pamokos tema
1.	Pakartok: geometriniai kūnai
2.	Susipažink: svarbiausios sąvokos
3.	Susipažink: tiesių ir plokštumų tarpusavio padėtys erdvėje
4.	Susipažink: dvisienis kampas
5.	Taikyk: prizmės
6.	Taikyk: piramidės
7.	Taikyk: ritinys
8.	Taikyk: kūgis
9.	Apibendrinimas ir kartojimas
10.	Kontrolinis darbas

- P. 8–9 „Pakartok“ užduočių atsakymai
- 1 a) $111\,000\text{ mm}^3$; b) $1,2\text{ cm}^3$; c) 1400 dm^2 ; d) $0,003\text{ m}^2$; e) $0,023\text{ dm}^2$; f) 420 cm^2 ; g) 450 dm^3 ; h) $0,013\text{ m}^3$; i) $0,0000126\text{ m}^3$; j) $100\,000\text{ cm}^3$; k) 320 a ; l) $0,012\text{ ha}$; m) $0,002\text{ a}$; n) 500 m^2 ; o) $0,001\text{ a}$; p) $10\,000\,000\text{ cm}^2$; r) $2\,300\,000\text{ ml}$; s) 2000 cm^3 ; t) $50\,000\,000\text{ cm}^2$; u) $0,00002\text{ ha}$.
 - 2 a) 8 cm^3 ; b) $2\sqrt{2}\text{ cm}$; c) $2\sqrt{3}\text{ cm}$; d) 60° ; e) 24 cm^2 .
 - 3 a) 30 cm^3 ; b) $\sqrt{29}\text{ cm}$; c) $\sqrt{38}\text{ cm}$; d) 62 cm^2 .
 - 4 a) $6\sqrt{3}\text{ cm}$; b) $8\sqrt{3}\text{ cm}$; c) $2\sqrt{39}\text{ cm}$; d) $36\sqrt{3}\text{ cm}^2$; e) $36\sqrt{39}\text{ cm}^2$; f) $144\sqrt{3}\text{ cm}^3$.
 - 5 a) $6\sqrt{2}\text{ cm}$; b) $6\sqrt{3}\text{ cm}$; c) $144\sqrt{3}\text{ cm}^2$; d) $288\sqrt{2}\text{ cm}^3$.
 - 6 a) $720\pi\text{ cm}^3$; b) $240\pi\text{ cm}^2$.
 - 7 $32\pi\text{ cm}^3$.
 - 8 a) 32; b) 16π ; c) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$; d) 96π .
 - 9 a) 96π ; b) $128 - 2\pi$; c) $320 + 40\pi$; d) $426\frac{2}{3}$.

P. 10 SUSIPAŽINK

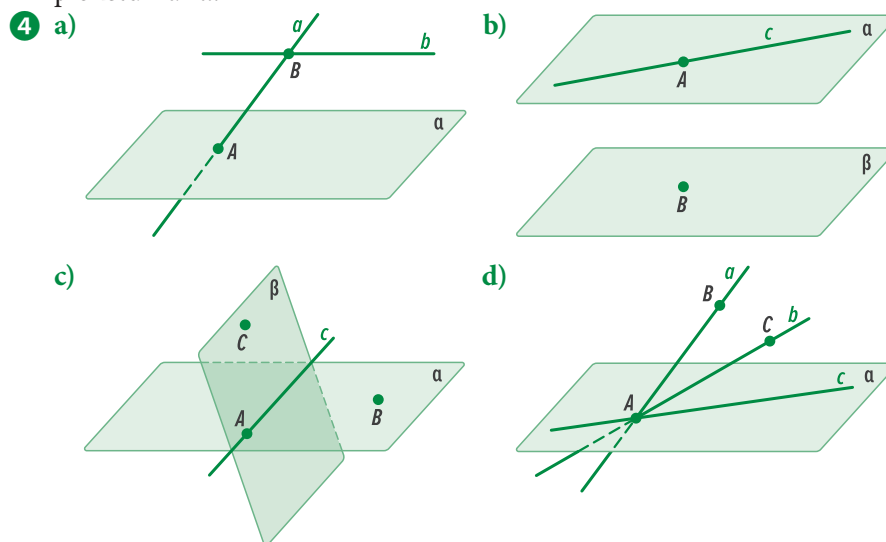
Vadovėlyje pateikiamos keturios aksiomos. Tai toli gražu nėra išbaigta aksiomų sistema. Nereikia labai daug dėmesio skirti aksiomomis paremtiems įrodymams. Tiesiog tai puiki proga pakalbėti apie loginę matematikos struktūrą, apie tai, kaip yra kuriamos ir grindžiamos matematinės žinios, apie istoriją, galbūt penktąjį Euklido postulatą. 12 puslapyje pateiktas pavyzdys gali tapti pavyzdžiu, iliustruojančiu aksiomų taikymą.

Pravartu moksleivius supažindinti su matematine kalba ir pratinti remiantis ja užrašyti uždavinių sprendimus, įrodymus.

Šiame skyrelyje daugiau dėmesio verta skirti kampo tarp tiesės ir plokštumos ir dvisienio kampo sampratai. Siūloma naudoti įvairius šių kampų sampratą iliustruojančius modelius.

„Pamėgink“ užduočių atsakymai

- P. 11
- 2 a), b), e), f), g), h), j), l).
 - 3 Tiesės AB taškas K priklauso plokštumai α , tiesės CD taškas M priklauso plokštumai α , nes abi tiesės priklauso šiai plokštumai. Jei du tiesės taškai K ir M priklauso plokštumai α , tai ir tiesė KM priklauso plokštumai α .



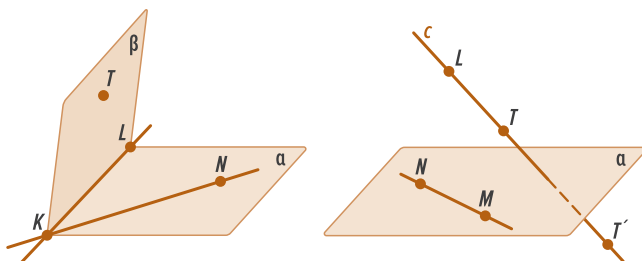
P. 16 a) $\alpha = \arctg \frac{2}{3}$; b) $\alpha = \arctg 0,25$; c) $\alpha = \arccos \frac{8}{\sqrt{221}}$; d) $\alpha = \arccos \frac{51}{53}$.

P. 19 1 a) $\arctg \frac{2\sqrt{3}}{3}$; b) $\arctg \frac{1}{2}$; c) 30° .

P. 21 $\arctg \sqrt{2}$.

P. 21–25 Uždavinių atsakymai

- 1 a) 1) $C_1 \in (A_1B_1C_1)$, $C_1 \in (BCC_1)$, $C_1 \in (DCC_1)$, $D \in (ABC)$, $D \in (DCC_1)$, $D \in (ADD_1)$, $M \in (ABC)$, $M \in (ABB_1)$, $T \in (ADD_1)$; 2) $C_1 \in B_1C_1$, $C_1 \in CC_1$, $C_1 \in D_1C_1$, $D \in AD$, $D \in DC$, $D \in DD_1$, $M \in AB$;
3) $TM \cap AB = M$, $TM \cap (ADD_1) = T$, $TM \cap (ABC) = M$, $TM \cap (ABB_1) = M$;
b) 1) $A_1 \in (A_1B_1C_1)$, $A_1 \in (ADD_1)$, $A_1 \in (ABB_1)$, $C \in (BCC_1)$, $C \in (DCC_1)$, $C \in (ABD)$, $M \in (DCC_1)$, $M \in (A_1B_1C_1)$, $T \in (ABC)$; 2) $A_1 \in AA_1$, $A_1 \in A_1D_1$, $A_1 \in A_1B_1$, $C \in BC$, $C \in CC_1$, $C \in CD$, $M \in D_1C_1$;
3) $TM \cap D_1C_1 = M$, $TM \cap (CDD_1) = M$, $TM \cap (ABC) = T$;
c) 1) $A \in (ABC)$, $A \in (ABB_1)$, $A \in (ADD_1)$, $D_1 \in (A_1B_1C_1)$, $D_1 \in (DCC_1)$, $D_1 \in (ADD_1)$, $M \in (AA_1D_1)$, $M \in (ABB_1)$, $T \in (B_1C_1D_1)$; 2) $A \in AB$, $A \in AA_1$, $A \in AD$, $D_1 \in A_1D_1$, $D_1 \in D_1C_1$, $D \in DD_1$, $M \in AA_1$;
3) $TM \cap AA_1 = M$, $TM \cap (ADD_1) = M$, $TM \cap (ABB_1) = M$, $TM \cap (A_1B_1C_1) = T$;
d) 1) $B \in (ABC)$, $B \in (ABB_1)$, $B \in (BCC_1)$, $D_1 \in (A_1B_1C_1)$, $D_1 \in (DCC_1)$, $D_1 \in (ADD_1)$, $M \in (DCC_1)$, $M \in (BCC_1)$, $T \in (B_1C_1D_1)$; 2) $B \in AB$, $B \in BB_1$, $B \in BC$, $D_1 \in A_1D_1$, $D_1 \in D_1C_1$, $D_1 \in DD_1$, $M \in CC_1$;
3) $TM \cap CC_1 = M$, $TM \cap BC \neq \emptyset$, $TM \cap (ABB_1) \neq \emptyset$, $TM \cap (DCC_1) = M$, $TM \cap (ABC) \neq \emptyset$.
2 a) $\alpha \cap \beta = a$, $b \notin \alpha$, $a \cap b = B$, $C \notin a$, $C \notin b$, $C \in \beta$, $A \notin a$, $A \notin b$, $A \in \beta$, $D \in \alpha$, $D \notin a$, $D \notin b$, $CD \cap \beta = C$, $CD \cap \alpha = D$; b) $\alpha \cap \beta = a$, $T \in \alpha$, $B \in \alpha$, $A \in \alpha$, $d \subset \alpha$, $d \cap a = A$, $M \in \beta$, $b \notin \alpha$, $b \in \beta$, $b \cap \alpha = A$, $b \cap a = A$, $c \cap b = M$, $MB \cap \alpha = B$, $MB \cap \beta = M$.
3 a) 1) $T \notin \alpha$; taškas T negali priklausyti tiesei KL (pagal aksiomą A_4 tiesėje KL yra visi bendri abiejų plokštumų taškai); 2) tiesė TN negali priklausyti plokštumui α , nes $T \notin \alpha$; tiesė TN negali priklausyti plokštumui β , nes jei $N \notin KL$, tai $N \notin \beta$; b) 1) taip, jei ji nelygiagreti su plokštuma; 2) taip, jei taškai T ir L yra skirtingose plokštumos α pusėse (taškas T').



- 4 a) AB , AC , AD , BD , BC , CD ; b) AM , BM , AC , AD , BD , BC ; c) BC , DC , BD ; d) $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$.
5 a) A_1B_1 ir CC_1 yra prasilenkiančiosios, nes $A_1B_1 \cap (BCC_1) = B_1$ ir $B_1 \notin CC_1$; A_1C ir B_1C_1 yra prasilenkiančiosios, nes $A_1C \cap (A_1B_1C_1) = A_1$ ir $A_1 \notin C_1B_1$; AB ir TL yra prasilenkiančiosios, nes $TL \cap (ABC) = T$, $T \notin AB$; MB ir B_1C_1 yra prasilenkiančiosios, nes $MB \cap (BCC_1) = B$ ir $B \notin B_1C_1$; TL ir A_1C_1 priklauso tai pačiai plokštumai A_1B_1C , jos susikerta; b) A_1C_1 ir BC yra prasilenkiančiosios, nes $A_1C_1 \cap (BCC_1) = C_1$ ir $C_1 \notin BC$; AB ir DD_1 yra prasilenkiančiosios, nes $DD_1 \cap (ABC) = D$ ir $D \notin AB$; AD ir BB_1 yra prasilenkiančiosios, nes $BB_1 \cap (ABC) = B$ ir $B \notin AD$; A_1D ir BC yra prasilenkiančiosios, nes $A_1D \cap (ABC) = D$ ir $D \notin BC$; KL ir BB_1 yra vienoje plokštumoje ir gali susikirsti.
6 a) 90° ; b) 35° ; c) 35° ; d) 60° ; e) 90° ; f) 35° ; g) 60° ; h) 35° .
7 a) 56° ; b) $4\sqrt{2}$; c) $4\sqrt{2}$; d) 69° .
8 a) 90° , 60° , 72° , 48° , 90° , 31° , 90° , 90° ; b) 90° , 72° , 72° , 48° , 90° , 39° , 90° , 57° .
9 a) 45° ; b) 45° ; c) 37° ; d) 39° ; e) 37° ; f) 45° ; g) 39° ; h) 28° ; i) 37° ; j) 45° ; k) 53° ; l) 39° ; m) 37° ; n) 45° ; o) 45° ; p) 28° .
10 a) $24\sqrt{2}$ cm; b) $46\frac{7}{13}$ cm ir $72\frac{7}{13}$ cm; c) 45° ; d) 26 cm; e) 30 cm, 54 cm; f) $\arccos \frac{1}{3}$.
11 a) $MB = 6\sqrt{2}$ cm; $OB = 3\sqrt{7}$ cm; b) $S_{\triangle AMB} = 9\sqrt{3}$ cm²; $S_{\triangle MOB} = 4,5\sqrt{7}$ cm².
12 a) 10 cm; b) $4\sqrt{13}$ cm.
14 a) 90° ; b) 90° ; c) 0° ; d) 90° ; e) 0° ; f) 90° .
15 a) 1) 45° ; 2) 45° ; b) 1) 45° ; 2) 45° .
16 a) 45° ; b) $\arctg \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\arctg \sqrt{2}$; d) $\arctg \sqrt{2}$; e) 45° ; f) $\arctg \sqrt{2}$; g) $\arctg \frac{\sqrt{2}}{2}$; h) $\arctg \sqrt{2}$.
17 a) $\arctg \frac{8\sqrt{3}}{9}$; b) $\arccos \frac{1}{3}$; c) $\arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $\arctg \frac{5}{3}$.

P. 26 IŠMOK

Svarbiausia šiame skyrelyje – tiesės ir plokštumos statmenumo požymis, trijų statmenų teorema ir atstumo samprata. Šiai medžiagai įtvirtinti pateikiama daug uždavinių su jau nubraižytais brėžiniais. Daugelį tų uždavinių (31, 32, 35 ir kt.) arba bent atskirus jų atvejus galima spręsti mintinai. Taip galima daug greičiau aptarti įvairias situacijas ir geriau suprasti sąvokas. Pravartu iliustravimui naudoti kompiuterines programas, kurių pagalba galima nubraižytus geometrinius kūnus apžvelgti iš visų pusių. Tai itin naudinga kalbant apie trijų statmenų teoremą.

„Pamėgink“ užduočių atsakymai

P. 27 $\triangle ACE$ yra statusis.

P. 30 **b)** $2\sqrt{41}$; **c)** 45° .

P. 33 57° ; $\frac{3}{\sin 57^\circ}$.

P. 34 **a)** $a\sqrt{3}$; **b)** a ; **c)** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; **d)** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; **e)** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

P. 35–43 Uždavinių atsakymai

20) **a)** 1 ir 2; **b)** 5.

22) **a)** lygiagrečios; **c)** lygiagretainis.

24) **a)** 3) 4 cm^2 ; **b)** 3) $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

26) **a)** 18; **b)** $12\sqrt{5}$; **c)** $3\sqrt{26}$; **d)** $\sqrt{427}$; **e)** $\sqrt{82}$; **f)** $2\sqrt{34}$.

27) **a)** 10 cm; **b)** 2) $\sqrt{113}$ cm; $\varphi = \arctg \frac{8}{7}$.

28) **a)** 1 cm; **b)** $\sqrt{2}$ cm; **c)** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ cm; **d)** $\frac{\sqrt{6}}{3}$ cm; **e)** 1 cm; **f)** $\sqrt{2}$ cm; **g)** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ cm; **h)** $\frac{\sqrt{6}}{3}$ cm.

29) **a)** $\sqrt{91}$; **b)** $4\sqrt{6}$.

30) **a)** 1 cm; **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm; **c)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm; **d)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm; **e)** 1 cm; **f)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm; **g)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm; **h)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm.

31) **a)** $\sqrt{2}$ cm; **b)** 1 cm; **c)** 1 cm; **d)** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ cm; **e)** 1 cm; **f)** $\sqrt{2}$ cm; **g)** 1 cm; **h)** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ cm.

32) **a)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ cm; **b)** $\frac{\sqrt{7}}{2}$ cm; **c)** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm; **d)** $2\sqrt{3}$ cm.

33) **a)** 1 cm; **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm; **c)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm; **d)** 1 cm; **e)** 1 cm; **f)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm; **g)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm; **h)** 1 cm.

34) **a)** 3) $\frac{8\sqrt{21}}{7}$ cm; **b)** 3) $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ cm.

35) **a)** a ; **b)** a ; **c)** a ; **d)** a ; **e)** a ; **f)** a ; **g)** a ; **h)** a .

36) **a)** 1) 3 dm; 2) $\sqrt{7}$ dm; 3) 49° ; **b)** 1) $\sqrt{15}$; 2) 8; 3) 29° .

37) **a)** 24 cm ir $2\sqrt{169}$ cm; **b)** 4 cm.

38) **a)** 2) 80 cm; **b)** 2) 5,1.

39) **a)** 2) $AD = 6 \text{ cm}$, $AE = 10 \text{ cm}$, $DE = 8 \text{ cm}$; $S = 24 \text{ cm}^2$; 3) $\angle DAE \approx 53^\circ$;

b) 2) $AE = 7,5 \text{ cm}$, $AD = 2,5 \text{ cm}$, $DE = 7 \text{ cm}$; 3) $\angle BAC \approx 69^\circ$.

40) **a)** $\cos \angle B = \frac{\sqrt{55}}{8}$; **b)** 13 cm; **c)** $8\sqrt{2 - \sqrt{3}}$; **d)** $4\sqrt{3}$ cm; **e)** 30° ; **f)** $5\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ cm.

41) **a)** 2) 6 cm; 3) $\angle PKL \approx 50^\circ$, $\angle PML \approx 37^\circ$; 4) 63° ; 5) 6,7; 6) 3,1;

b) 2) 3 cm; 3) visi lygūs $\varphi = \arcsin 0,8$; 4) $\arcsin \frac{4}{\sqrt{21}}$; 5) 2,4; 6) 1,5.

P. 44 TAIKYK

Šiame skyrelyje nagrinėjami visi programoje numatyti erdviniai kūnai. Skyrelio struktūra tradicinė – iš pradžių paaiškinama erdvinių kūnų klasifikacija, paskui nagrinėjami briaunainiai, tada – sukiniai. Su programoje numatytais briaunainių pjūviais supažindinama per pavyzdžius. Skyrelio gale yra trys apibendrinamieji uždavinių rinkiniai: 63 uždavinys, kuriame pateikiami įvairūs atvejai, kai vienas geometrinis kūnas yra kito viduje; 64 uždavinys, kuriame žinomi dydžiai nurodyti ne skaičiais, o raidėmis (parametrais); 65 uždavinys, kurį sprendžiant reikia prisiminti išvestinę ir ją taikyti ieškant sudarytos funkcijos didžiausios ar mažiausios reikšmės.

„Pamėgink“ užduočių atsakymai

- P. 46 I 1 Sienų turi 7, briaunų – 15, viršūnių – 10.
 2 Šešiolikakampis.
 3 Penkiolikakampis.
 4 27 sienas.
 II $35\sqrt{24,5} \text{ dm}^3$.
- P. 47 a) $n + 1$; b) $2n$.
- P. 50 I $256\sqrt{3} \text{ dm}^2$; $\frac{4096\sqrt{2}}{3} \text{ dm}^3$.
- P. 52 I 176 m^2 ; $\frac{224\sqrt{3}}{3} \text{ m}^3$.
 II a) du kūgius; b) ritinį ir du kūgius; c) du kūgius.
- P. 54 1 $128\pi \text{ cm}^2$; $384\pi \text{ cm}^3$.
 2 $72\sqrt{2} \pi \text{ cm}^2$; $12 \cos 67,5^\circ \text{ cm}$.
 3 Antrajame puodelyje telpa $2\frac{2}{3}$ karto daugiau skysčio.
- P. 56 $42\pi \text{ cm}^3$.
- P. 57 $\frac{2716\sqrt{3}\pi}{3} \text{ mm}^3$; $240\pi \text{ mm}^2$.
- P. 58 1 1, 2, 5, 6.
 2 a) dviejose nesikertančiose sferose; b) dviejose susikertančiose sferose; c) dviejose susiliečiančiose sferose.

P. 59–66 Uždavinių atsakymai

- 42 a) stačiakampiai; b) stačiakampiai; c) lygiagretainiai; d) kvadratai; e) taisyklingasis daugiakampis, stačiakampiai; f) bet koks daugiakampis, stačiakampiai.
- 43 a) 14 sienų; b) 18 įstrižainių; c) 22 viršūnės; d) 15 briaunų.
- 44 a) 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11 12; b) 3 kubo.
- 45 a) $AC_1 = 2\sqrt{61} \text{ cm}$; b) $AD_1 = 2\sqrt{106} \text{ cm}$.
- 46 a) 1) 45° ; 2) 90° ; 3) 0° ; 4) $\arctg 0,5$; 5) $\arctg 2$; 6) 90° ;
 b) 1) 90° ; 2) $\arctg \frac{3\sqrt{2}}{4}$; 3) $\arctg 1,5$; 4) $\arccos \frac{13}{\sqrt{221}}$; 5) $\arccos \frac{9}{13}$; 6) $\arctg \frac{2}{3}$.
- 47 a) $36\sqrt{2} \text{ cm}^2$; b) 360 cm^2 ; c) $32,5 \text{ cm}^2$; d) $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$; e) $\sqrt{2}$; f) $20\sqrt{39} \text{ cm}^2$ ir $60\sqrt{13} \text{ cm}^2$.
- 48 a) $2\sqrt{86} \text{ cm}$ ir $2\sqrt{201} \text{ cm}$; b) $2\sqrt{6}$; c) $\sqrt{517} \text{ cm}$ ir $\sqrt{679} \text{ cm}$; d) $\frac{60}{\sqrt{34}}$ ir $\frac{48}{\sqrt{17}}$.
- 49 a) $(4 + 8\sqrt{6}) \text{ cm}^2$; b) 960 cm^3 ; 752 cm^2 ; c) 25 cm ; d) $\frac{16\sqrt{3}}{45} \text{ cm}^3$; e) $960\sqrt{3} \text{ cm}^3$; f) $14\sqrt{3}$;
 g) $32\sqrt{3} \text{ cm}^3$; $\frac{176\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2$; h) $5\frac{1}{3} \text{ cm}$; i) 150 cm^2 ; j) $\sqrt{6} \text{ cm}$.
- 50 a) taisyklingasis daugiakampis; b) centrą; c) kvadratas; d) lygiašoniai trikampiai.
- 52 a) $\arctg 2$ ir $\arctg \sqrt{2}$; b) $\arctg 3$ ir $\arctg 1,5$.
- 53 a) 1) $160\sqrt{2} \text{ cm}^2$; 2) $128\sqrt{29} \text{ cm}^2$; 3) $1706\frac{2}{3} \text{ cm}^3$; 4) $92,16 \text{ cm}^2$; b) 1) $1800\sqrt{3} \text{ cm}^2$; 2) $4032\sqrt{3} \text{ cm}^3$;
 3) 252 cm^2 ; c) $180\sqrt{3} \text{ cm}^3$; $(18\sqrt{237} + 36\sqrt{3}) \text{ cm}^2$; 1 : 3; d) $75\sqrt{3} \text{ cm}^3$; e) 1) 960 cm^2 ; 2) 3072 cm^3 ;
 3) $192\sqrt{2} \text{ cm}^2$; 4) 144 cm^2 ; f) 1) $9\sqrt{147} \text{ cm}^2$; 2) $36\sqrt{3} \text{ cm}^3$; 3) $\sqrt{3} \text{ cm}^2$; g) 324 cm^3 ; $54(\sqrt{3} + \sqrt{15}) \text{ cm}^2$;
 1 : 5; h) 1280 cm^3 .

- 54 a) $19 : 27$; b) $\frac{112\sqrt{92}}{3} \text{ cm}^3$; $(80 + 24\sqrt{96}) \text{ cm}^2$; c) 4333 l ; d) $4 : 9$; e) $(2\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{6}) \text{ cm}^3$; 44 cm^2 ;
f) 1) 1 m ; 2) 2 m ; 3) $6,75\sqrt{7} \text{ m}^2$.
- 55 a) $432\pi \text{ cm}^3$; 144 cm^2 ; b) $96\pi \text{ cm}^2$; 128 cm^3 ; c) $108\pi \text{ cm}^3$; $90\pi \text{ cm}^2$; d) $144\pi \text{ cm}^3$; e) $\frac{48}{\pi}$; $2\frac{2}{3}$; f) 196π ; 686π ;
g) $50\pi \text{ cm}^2$; 3 cm ; h) $280\pi \text{ cm}^2$.
- 56 a) 16 ; b) $4 : 1$; c) $1 : 6$; d) $2\sqrt{2} : 1$.
- 57 a) $80\sqrt{3}$; b) $288\pi \text{ cm}^3$; $3\sqrt{3} \text{ cm}$.
- 58 a) 2312 g ; b) 18 cm ilgio vamzdelių; $\approx 57 \text{ cm}^3$; c) $4,81 \text{ m}^2$; d) 402 cm^3 .
- 59 a) 1) $768\pi \text{ cm}^3$; 2) $384\pi \text{ cm}^2$; 3) 53° ; b) 1) $75\sqrt{3} \text{ cm}^2$; 2) $150\sqrt{3} \pi \text{ cm}^2$; 3) $375\sqrt{3} \pi \text{ cm}^3$; c) nepasikeis;
d) $\frac{81\pi}{4}$; e) 3 kartus; f) 1) $\frac{4096\sqrt{3}\pi}{3} \text{ cm}^3$; 2) $512\pi \text{ cm}^2$; 3) $256\sqrt{3} \text{ cm}^2$; g) 1) $225\sqrt{3} \pi \text{ cm}^2$; 2) $450\pi \text{ cm}^2$;
3) $1125\sqrt{3} \pi \text{ cm}^3$; h) padidėjo 4 kartus; i) $\sqrt{3}$ karto; j) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{6}{\pi}}$.
- 60 a) $72\sqrt{3} \pi \text{ cm}^3$; $108\pi \text{ cm}^2$; b) 72° ; c) $V = 24\sqrt{7} \pi$; $S = 84\pi$; d) 180° .
- 61 a) 64 m^2 ; b) $5\frac{7}{13}$; c) $70\pi \text{ cm}^2$; d) $\sqrt[3]{2} : 1$; e) $84,672 \text{ cm}^3$; f) $261\frac{1}{3} \text{ cm}^3$.
- 62 a) $\sqrt[3]{5} \text{ m}$; b) 36π ; c) 1) $7776\pi \text{ cm}^3$; 2) $180\pi \text{ cm}^2$; 3) $5 : 36$; 4) $2 : 25$; d) $16\pi \text{ cm}^2$; 28 cm^3 ;
e) $\sqrt[3]{100} \text{ dm}$; f) 100π ; g) 1) 15 cm ; 2) $900\pi \text{ cm}^2$; 3) 4500 cm^3 ; 4) $7 : 243$; h) $36\pi \text{ cm}^2$; 149 cm^3 .
- 63 a) 2 cm ; b) pakilo $1,8 \text{ cm}$, buvo $16,2 \text{ cm}$; c) $8R$; d) 3 cm ; e) $7,8 \text{ cm}$; f) 60° , $\approx 103 \text{ mm}$.
- 64 a) $a^3\sqrt{3}\text{ctg}^2\alpha - 9$; b) $\frac{Q\sqrt{5Q}}{2}$, $\frac{2Q\sqrt{5Q}}{5}$; c) $S = 0,75\pi a^2$; $V = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{16}$; d) $\frac{3}{4}a^2$; e) $\frac{a^3b^2\pi}{3(a^2 - b^2)}$; f) $\frac{1}{3}dQ$;
g) $\frac{d^2(1 + \sin\alpha)\pi}{\sin\alpha\cos^2\alpha}$; h) $\frac{\pi}{3}a^3\sin\alpha\cos^2\alpha$; $\pi a^2\cos\alpha$; i) $\frac{r\sqrt{4a^2 - r^2}}{4}$; j) $\frac{a^2\pi}{2} \text{ cm}^2$; $\frac{a^3\sqrt{3}\pi}{24} \text{ cm}^3$.
- 65 a) 18 cm , 18 cm ir 12 cm ; b) $\frac{5}{\sqrt{3}} \text{ dm}$; c) $8 \text{ cm} \times 8 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$; d) $\sqrt[3]{2} \text{ dm} \times \sqrt[3]{2} \text{ dm} \times \frac{2}{\sqrt[3]{4}} \text{ dm}$;
e) $5\sqrt{2} \text{ dm} \times 5\sqrt{2} \text{ dm}$; f) 5 cm ; g) 22 cm ir 11 cm ; h) 16 cm ; i) 8 dm ; j) $120\sqrt{6}^\circ$.

P. 67–69

„Pasitikrink“ uždavinių atsakymai

1 variantas

- 1 a) 0° ; 90° ; 45° ; b) 45° ; $\arctg\frac{\sqrt{2}}{2}$;
c) $2\sqrt{2} \text{ cm}$; 2 cm ; d) 2 cm ;
e) 90° ; $\arctg(2\sqrt{2})$; f) $1,5 \text{ cm}^2$.
- 2 a) 45° ; b) $\arctg\sqrt{2}$; c) $(64 + 64\sqrt{3}) \text{ cm}^2$;
d) 16 cm^2 ; e) $2\sqrt{2} \text{ cm}$; f) $\frac{224}{3}\sqrt{2} \text{ cm}^3$;
g) 4 cm .
- 3 $6\sqrt{3} \text{ cm}^3$.
- 4 17 .
- 5 10 cm .
- 6 $\angle ACB = 60^\circ$.
- 7 $R = 9 \text{ cm}$; $S = 270\pi \text{ cm}^2$.
- 8 $67,2\pi \text{ cm}^2$; $76,8 \text{ cm}^3$.
- 9 $\frac{15\sqrt{83}}{4}$.
- 10 $\frac{128\sqrt{6}\pi}{27} \text{ cm}^3$.
- 11 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

2 variantas

- 1 a) 0° ; 90° ; $\arctg 0,7$; b) $\arctg 0,7$; $\arctg 0,4$;
c) 26 ; 7 ; d) 10 ; e) 90° ; 56° ; f) $150,6$.
- 2 a) 60° ; b) $\arctg(2\sqrt{3})$; c) $\frac{243\sqrt{3}}{4}$; d) $4,5$;
e) $\frac{81\sqrt{3}}{16}$; f) $107,1$; g) $6,75$.
- 3 324 cm^3 .
- 5 a .
- 6 20 cm .
- 7 $4\sqrt{10} \text{ cm}$.
- 8 $S = 182\sqrt{3} \text{ cm}^2$; $V = 2548\pi \text{ cm}^3$.
- 9 $144\pi \text{ cm}^2$; $144\sqrt{3} \pi \text{ cm}^3$.
- 10 7 cm^3 .
- 11 3 .

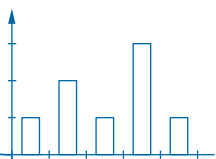
P. 70

„Ar priimsi iššūkį?“ uždavinių atsakymai

- 1 Kvadrato centras; 180 cm^3 .
- 2 42 cm^3 .
- 3 $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}} \text{ cm}$.
- 4 $2\arctg\frac{\sqrt{4h^2 + a^2}}{h}$.
- 5 $4\sqrt{3} d$.
- 6 $\frac{a\sqrt{14}}{4}$.
- 7 $1 : 3$.
- 8 $2\sqrt{2} - \sqrt{5}$.
- 9 $\sqrt{6} \text{ cm}$.
- 10 $\frac{9\pi}{4}$.
- 11 $\sqrt{\frac{5}{\pi}} \text{ m}$.
- 12 $1 : 1$.
- 13 $\frac{H\sqrt{-2\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.
- 14 $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

6 skyrius

Stochastika



Šiam skyriui išplėstiniame kurse skiriamos 24 pamokos (iš jų 4 pamokos – skyriaus „Skaičių sekos“ kartojimui), bendrajame kurse – 16 pamokų (iš jų 4 pamokos – kartojimui). Daugumą sąvokų mokiniai jau žino iš žemesniųjų klasių kurso, taigi jie turėtų gebėti suskaičiuoti įvykiams palankias baigtis, paprastais atvejais apskaičiuoti įvykių tikimybes. Tačiau stochastikos kursas mokiniams yra visada nelengvas, todėl vadovėlio autoriai pasirinko šiame skyriuje išdėstyti visą mokyklinį stochastikos kursą, tarsi būtų mokomasi iš naujo. Taip bus galima daugiau dėmesio skirti žinių gilinimui, gebėjimų lavinimui.

Skyriaus „Stochastika“ skirstymo pamokomis pavyzdys

■ Išplėstinis kursas

Pamokos eil. nr.	Pamokos tema
1.	Pakartok: aibės, skaičių aibės
2.	Pakartok: skaičių sekos, aritmetinė progresija
3.	Pakartok: skaičių sekos, geometrinė progresija
4.	Pakartok: skaičių sekos, įvairūs uždaviniai
5.	Susipažink: svarbiausios sąvokos, sutaikomieji ir nesutaikomieji įvykiai, įvykių veiksmas
6.	Susipažink: kombinatorinės daugybos ir sudėties taisyklės
7.	Susipažink: klasikinė tikimybės apibrėžtis
8.	Išmok: kėliniai
9.	Išmok: gretiniai
10.	Išmok: deriniai
11.	Išmok: deriniai
12.	Išmok: junginių apibendrinimas, tikimybių savybės
13.	Išmok: junginių apibendrinimas, tikimybių savybės
14.	Taikyk: atsitiktinis dydis ir jo skirstinys
15.	Taikyk: atsitiktinio dydžio matematinė viltis ir dispersija
16.	Taikyk: binominiai bandymai

17.	Apibendrinimas ir kartojimas
18.	Kontrolinis darbas
19.	Susipažink: svarbiausios sąvokos, statistinių duomenų vaizdavimas
20.	Išmok: imties vidurkis, moda ir mediana, imties dispersija ir standartinis nuokrypis
21.	Taikyk: taikymo uždaviniai
22.	Taikyk: įvairių tikimybių teorijos ir statistikos uždavinių sprendimas
23.	Apibendrinimas ir kartojimas
24.	Kontrolinis darbas

■ Bendrasis kursas

Pamokos eil. nr.	Pamokos tema
1.	Pakartok: aibės, skaičių aibės
2.	Pakartok: skaičių sekos, aritmetinė progresija
3.	Pakartok: skaičių sekos, geometrinė progresija
4.	Pakartok: skaičių sekos, įvairūs uždaviniai
5.	Susipažink: svarbiausios sąvokos, įvykių veiksmas
6.	Susipažink: kombinatorinės daugybos ir sudėties taisyklės, klasikinė tikimybės apibrėžtis
7.	Išmok: įvairių uždavinių sprendimas
8.	Išmok: tikimybių savybės
9.	Išmok: įvairių uždavinių sprendimas
10.	Apibendrinimas ir kartojimas
11.	Kontrolinis darbas
12.	Susipažink: svarbiausios sąvokos, statistinių duomenų vaizdavimas
13.	Išmok: imties vidurkis, moda ir mediana, imties dispersija ir standartinis nuokrypis
14.	Taikyk: taikymo uždaviniai
15.	Apibendrinimas ir kartojimas
16.	Kontrolinis darbas

P. 74–80 „Pakartok“ užduočių atsakymai

- 1 a) $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; b) $A \cup C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7\}$;
c) $B \cup C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7\}$; d) $A \cap B = \{-2, 1, 4, 7\}$; e) $A \cap C = \{-3, 0, 4, 6, 7\}$;
f) $B \cap C = \{-1, 2, 4, 7\}$.
- 2 a) $A \cup B = \{-3, 2; -3; -2, 5; -2; -1; 0; 0, 1; 1; 2, 5; 4\}$; b) $A \cap N = \{1, 4\}$; c) $A \cap Z = \{-3, -2, 0, 1, 4\}$;
d) $A \cap B = \{-2, 5; 2; 5; 4\}$; e) $B \cap N = \{4\}$; f) $B \cap Z = \{-1, 4\}$.
- 3 a) $A \cup B = (-3; 4]$; b) $A \cup C = (-3; 4]$; c) $B \cup C = [-2; 4]$; d) $A \cap B = [-2; 3]$; e) $A \cap C = [3; 4]$; f) $B \cap C = \emptyset$;
g) $A \cap N = \{1, 2, 3, 4\}$; h) $B \cap N = \{1, 2\}$; i) $C \cap N = \{3\}$; j) $A \cap Z = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$;
k) $B \cap Z = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; l) $C \cap Z = [3]$.
- 4 a) $A \setminus B = \{-3, 0, 3, 6\}$; b) $A \setminus C = \{-2, 1, 2, 7\}$; c) $B \setminus C = \{-2, 1, 7\}$; d) $B \setminus A = \{-1, 2, 5\}$; e) $C \setminus A = \{-1, 2, 5\}$;
f) $C \setminus B = \{-3, 0, 6\}$; g) $A \setminus N = \{-3, -2, 0\}$; h) $B \setminus N = \{-2, -1\}$; i) $C \setminus N = \{-3, -1, 0\}$; j) $A \setminus Z = \emptyset$;
k) $B \setminus Z = \emptyset$; l) $C \setminus Z = \emptyset$.
- 5 a) $A \setminus B = (-3; -2) \cup [3; 4]$; b) $A \setminus C = (-3; 3) \cup \{4\}$; c) $B \setminus C = [-2; 3]$; d) $B \setminus A = \emptyset$; e) $C \setminus A = \emptyset$; f) $C \setminus B = [3; 4]$.
- 6 a) $C \subset A$, $D \subset A$, $K \subset A$, $L \subset A$, $M \subset A$; b) $D \subset L$; c) yra 2, K ir M.
- 7 a) $\{1, 2, 3, 4\}$; b) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; c) $\{1, 2\}$; d) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$; e) $\{3\}$; f) $\{3\}$.
- 8 1, 2, 6.
- 9 a) C; b) B; c) C.
- 10 a) 1, 9, 25, 49; b) $1, \frac{8}{3}, \frac{27}{5}, \frac{64}{7}$; c) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{8}$; d) 8, 27, 64, 125; e) $2, \frac{5}{4}, \frac{8}{9}, \frac{11}{16}$; f) 2, -4, 8, -16.
- 11 a) $x_n = n^2$; b) $x_n = \frac{n}{n+1}$; c) $x_n = n!$; d) $x_n = n^3$; e) $x_n = \frac{2n-1}{2n+1}$; f) $x_n = 2^{n-1}$.
- 12 a) 10, 8, 6, 4; b) -2, -6, -18, -54; c) 1, 2, 3, 5; d) -5, 10, -5, 10; e) 3, -6, 12, -24; f) 1, 5, 5, 1.
- 13 a) 1; 0; -1; -2; -3; b) -4; 3; 10; 17; 24; c) -0,2; -0,6; -1; -1,4; -1,8; d) 4; 5; 6; 7; 8; e) -4; -17; -30; -43; -56;
f) 0,25; 1; 1,75; 2,5; 3,25.
- 14 a) -5; b) -30; c) -3; d) -17; e) 7; f) -1.
- 15 a) $a_n = 3n - 8$; b) $a_n = \frac{5-n}{4}$; c) $a_n = \frac{10-7n}{12}$.
- 16 a) 88; b) 267; c) 227; d) 22; e) 327; f) 448.
- 17 a) 42; b) $31\frac{1}{3}$; c) 126,1; d) 662; e) 2,75; f) -50.
- 18 a) 18; b) -10,5; c) -51.
- 19 a) -2; b) -32; c) 1,04; d) -1,5; e) 0; f) -2.
- 20 a) 55; b) 36; c) $9\frac{1}{3}$; d) -80,4; e) 189,2; f) $-2\frac{6}{7}$.
- 21 a) 12 430; b) $54\frac{2}{3}$; c) 124 559; d) -1608,75.
- 22 $a_5 = 25$, $a_n = 6n - 5$.
- 23 99 090.
- 24 a) -9,5; b) -44.
- 25 $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 26 Mažiausiai 10 eilių; $23\frac{13}{19}\%$.
- 27 Po 11 mėnesių.
- 28 Per 16 min.
- 29 a) 2, 4, 8, 16; b) -5, -10, -20, -40; c) -2, $\frac{2}{3}, -\frac{2}{9}, \frac{2}{27}$; d) 1, 3, 9, 27; e) -20, 80, -320, 1280; f) $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \frac{1}{128}$.
- 30 a) $b_n = -2^{2n-1}$; b) $b_n = -3 \cdot 2^{n-1}$; c) $b_n = -1,25 \cdot 0,4^n$; d) $b_n = 4 \cdot (-1)^{n-1}$; e) $b_n = 2 \cdot (-3)^n$; f) $b_n = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
- 31 a) 12; b) 5; c) 8; d) 9; e) 5; f) 11.
- 32 a) $-\frac{1}{81}$; b) $-\frac{1}{19683}$; c) -3125.
- 33 a) 16; b) 6,75 arba -6,75; c) $\frac{1}{31}$.
- 34 a) -5 arba 5; b) -3; c) -4; d) -8 arba 8; e) $\frac{2}{7}$; f) $3\sqrt[3]{3}$.
- 35 a) 315; b) 122; c) 6,125; d) 63; e) -121; f) -15,25.
- 36 a) 16 383; b) $85\frac{341}{1024}$; c) 4920; d) -781,24.
- 37 a) 10; b) $41\frac{1}{7}$; c) $3\frac{10}{13}$; d) -9; e) -50; f) -48.

- 38 a) 13,5; b) -256; c) 3; d) $-20\frac{4}{7}$.
 39 a) $1\frac{8}{11}$; b) 60; c) $1\frac{1}{3}$; d) 1,55.
 40 a) 3; b) 9; c) 0,2.
 41 0,5.
 42 Po 59 min.
 43 Po 8 savaitių.
 44 84.
 45 -960 arba 2640.
 46 79.
 47 a) 217 vamzdžių; b) $(3n^2 - 3n + 1)$ vamzdžių.
 48 85 rąstai.
 49 100 cm.
 50 365 kvadrateliai.
 51 4959 Eur.
 52 a) $\frac{100}{2^{49}} = \frac{25}{2^{47}}$ (cm); b) $2^n - 2$; c) $\frac{4(100 + 25\sqrt{2})\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{25}\right)}{3} \approx 180,47$ (cm);
 d) $\frac{8(100 + 25\sqrt{2})\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{25}\right)}{3} - 200 \approx 160,95$ (cm).

Įvykiai ir jų tikimybės

P. 81 SUSIPAŽINK

Kai kurios skyrelyje nagrinėjamos sąvokos mokiniams gerai žinomos, todėl jos tik trumpai pakartojamos. Pirmą pamoką daugiau dėmesio reikėtų skirti įvykių veiksams, jų vaizdavimui Veno diagramomis. Įvykių veiksmus ir Veno diagramas turi suprasti ir mokėti tiek bendrąjį, tiek išplėstinį kursą besimokantys mokiniai. Uždavinių, kuriuos sprendžiant reikėtų braižyti Veno diagramas, vadovėlyje mažai, jų papildomai gali sugalvoti mokytojas, be to, tokių uždavinių rasite elektroniniame vadovėlio priede.

Labai svarbu, kad mokiniai tvirtai išmoktų taikyti kombinatorines daugybos ir sudėties taisykles, klasikinę tikimybės apibrėžtį.

„Pamėgink“ užduočių atsakymai

- P. 82 a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b) $A = \{1, 3, 5\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$; $C = \emptyset$.
 P. 85 1 a) $M = \{2, 3, 4, 6, 8\}$; b) $L = \{2\}$; c) $T = \{4, 6, 8\}$.
 2 a) 27 mokiniai; b) 3; c) 17; d) įvykis $A \setminus C$ – „atsitiktinai pasirinktas mokinys mokosi tik chemijos išplėstinį kursą“, jam palankių baigčių skaičius yra 7; įvykis $B \setminus D$ – „atsitiktinai pasirinktas mokinys mokosi ir chemijos, ir matematikos išplėstinį kursą“, jam palankių baigčių skaičius yra 3.
 P. 87 1 a)
- | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 1, 1 | 1, 2 | 1, 3 | 1, 4 | 1, 5 | 1, 6 |
| 2 | 2, 1 | 2, 2 | 2, 3 | 2, 4 | 2, 5 | 2, 6 |
| 3 | 3, 1 | 3, 2 | 3, 3 | 3, 4 | 3, 5 | 3, 6 |
| 4 | 4, 1 | 4, 2 | 4, 3 | 4, 4 | 4, 5 | 4, 6 |
| 5 | 5, 1 | 5, 2 | 5, 3 | 5, 4 | 5, 5 | 5, 6 |
| 6 | 6, 1 | 6, 2 | 6, 3 | 6, 4 | 6, 5 | 6, 6 |
- b) 9; $A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 5)\}$; c) 12; d) 18.
 2 a) 33; b) 44.
 P. 89 1 a) $\frac{15}{22}$; b) $\frac{1}{33}$.
 2 a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{3}$.

P. 89–92 Uždavinių atsakymai

- 1 a) {1 ct, 2 ct, 5 ct, 10 ct, 20 ct, 50 ct, 1 Eur, 2 Eur}; b) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}; c) {2, 3, 5, 7, 11, 13}; d) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}.
- 2 a) $A = \{A, E, I\}$, $B = \{A\}$, $C = \{A, M, T\}$; b) $A = \{K, M, B, N, T, R\}$, $B = \{K, O, I, A\}$, $C = \{M, B, N, T, R\}$.
- 3 a) $A = \{1, 3, 9\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{8, 16, 24, 48, 72, 144\}$, $K = \{3\}$, $L = \{1, 3, 8, 9, 16, 24, 48, 72, 144\}$; nesutaikomieji įvykiai: A ir C , B ir C , C ir K ; b) $K = \{5, 10, 15, 20, 30, 40, 60, 120\}$, $L = \{10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$, $M = \{1, 3, 5, 15\}$, $A = \{5, 15\}$, $B = \{1, 3, 5, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$, $M = \{1, 3, 5, 15\}$, $A = K \cap M = \{5, 15\}$, $B = L \cup M = \{1, 3, 5, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$; nesutaikomųjų įvykių nėra.
- 4 a) 1) 18 mokinių; 2) 10 mokinių; 3) 3 mokiniai; b) 1) 3 mokiniai; 2) 15 mokinių; 2) 10 mokinių.
- 5 a) 26 mokiniai; b) 23 mokiniai.
- 6 a) 29 mokiniai; b) 31 mokiny.
- 7 a) 1) 7 būdais; 2) 72 būdais; 3) 54 būdais; b) 1) 27 būdais; 2) 672 būdais; 3) 236 būdais.
- 8 a) 1) 208; 2) 80; b) 1) 179; 2) 2000.

9 a) 1)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	4	6	8	10	12	14	16
3	3	6	9	12	15	18	21	28
4	4	8	12	16	20	24	28	32
5	5	10	15	20	25	30	35	40
6	6	12	18	24	30	36	42	48
7	7	14	21	28	35	42	49	56
8	8	16	24	32	40	48	56	64

- 2) $m_A = 48$, $m_B = 8$, $m_C = 16$, $m_D = 26$; 3) $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{8}$, $P(C) = \frac{1}{4}$, $P(D) = \frac{13}{32}$; 4) $P(C \cup D)$.

b) 1)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

- 2) $m_A = 45$, $m_B = 10$, $m_C = 0$, $m_D = 55$; 3) $P(A) = \frac{9}{20}$, $P(B) = \frac{1}{10}$, $P(C) = 0$, $P(D) = \frac{11}{20}$; 4) $P(A \cap B) = P(C \cup D)$.
- 10 a) 1) 12; 2) 72; 3) 7 būdais; 4) 210; b) 1) 10 būdų; 2) 40 būdų; 3) 7 knygos; 4) 210 būdų.
- 11 a) 24; b) 256; c) 18; d) 192.
- 12 a) $P(A) = \frac{4}{7}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{5}{42}$, $P(D) = \frac{8}{21}$; b) $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{4}{7}$, $P(C) = \frac{4}{21}$, $P(D) = \frac{10}{21}$.
- 13 a) $P(A) = \frac{6}{13}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{3}{52}$; b) $P(A) = \frac{6}{11}$, $P(B) = \frac{5}{9}$, $P(C) = \frac{2}{33}$.
- 14 a) $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{7}{18}$, $P(C) = \frac{1}{9}$; b) $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{7}{18}$, $P(C) = \frac{1}{9}$.

P. 93 IŠMOK

Tiems, kurie mokosi išplėstinį kursą, skyrelį siūloma išnagrinėti per 6 pamokas, o pasirinkusiems bendrąjį kursą – per 2 pamokas. Uždavinių daug, todėl nerekomenduojama juos visus spręsti užrašant išsamų sprendimą.

Bendrąjį kursą pasirinkusiems mokiniams nereikia mokėti junginių, taigi uždavinius šie mokiniai sprendžia taikydami tik kombinatorines sudėties ir daugybos taisykles.

Išplėstiniame kurse nagrinėjant junginių formules, reikėtų pabrėžti, kad be jų galima apsieiti ir uždavinius spręsti taikant kombinatorines sudėties ir daugybos taisykles. Todėl praverstų padėti mokiniams suprasti, kaip šios formulės išvedamos – išnagrinėti 95 ir 97 puslapiuose esančius paaiškinimus.

„Pamėgink“ užduočių atsakymai

- P. 94
- 1 24.
 - 2 5040 būdų.
 - 3 8640 galimybių.
 - 4 60 180 rinkinių.
- P. 96
- 1 24.
 - 2 6720.
 - 3 a) 2 743 372 800; b) 914 457 600; c) 914 457 600; d) 914 457 600; e) 32 006 016 000; f) 6 401 203 200.
- P. 98
- 1 4 poaibiai.
 - 2 56 galimybes.
 - 3 2925 trejetus; 325 trejetuose.
 - 4 35 būdais.
 - 5 630 būdų.
 - 6 170 įstrižainių.
 - 7 18 lygiagretainių.
- P. 102
- 1 $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{1}{5}$.
 - 2 $P(A) = \frac{95}{253}$, $P(B) = \frac{221}{506}$.

P. 103–111 Uždavinių atsakymai

- 15 a) 120; b) 5040; c) 720; d) 3 628 800.
- 16 a) 409 080; b) 46 224.
- 17 a) 1) 40 320; 2) 5040; 3) 4320; 4) 20 160; b) 1) 479 001 600; 2) 4 838 400; 3) 3 628 800; 4) 7 257 600.
- 18 a) 417 312 000; b) 40 320.
- 19 a) 720; b) 60; c) 720; d) 7560.
- 20 a) 2520; b) 1680; c) 990; d) 210.
- 21 a) 400; b) 109 200.
- 22 a) 116 280; b) 1920; c) 29 304; d) 138 744.
- 23 a) 491 400; b) 57 120; c) 179 520; d) 179 520; e) 434 280; f) 426 360.
- 24 a) 1320; b) 950 400; c) 253 440; d) 684 288 000.
- 25 a) 1365; b) 253; c) 35; d) 56.
- 26 a) 12 650; b) 3432; c) 12 155; d) 11 440.
- 27 a) 42 504; b) 15 504; c) 20; d) 27 000.
- 28 a) 1) 22 880; 2) 31 616; b) 1) 927 656; 2) 1 048 154.
- 29 a) 3; b) 5; c) 8; d) 98; e) 26; f) 9; g) 7; h) 10; i) 4; j) 6; k) 9; l) 23; m) 19; n) 11; o) 8; p) 11.
- 30 a) 1) 24; 2) 4; 3) 24; b) 1) 5040; 2) 35; 3) 210.
- 31 a) 1) 24!; 2) 255 024; 3) 10 626; b) 1) 18!; 2) 3060; 3) 4896.
- 32 a) 1) 12!; 2) 40 320; 3) 280; b) 1) 12!; 2) 7! · 5!; 3) 350.

- 33 a) 1) 120; 2) 720; b) 1) 35; 2) 210.
- 34 a) 1) 310 080; 2) 42 325 920; b) 1) 81 900; 2) 248 648 400.
- 35 a) 1) 60; 2) 0,6; 3) 0,4; 4) 0,2; 5) 0,24; b) 1) 60; 2) 0,6; 3) 0,4; 4) 0,2; 5) 0,24;
c) 1) 100; 2) 0,48; 3) 0,52; 4) 0,36; 5) 0,48; d) 1) 100; 2) 0,32; 3) 0,68; 4) 0,4; 5) 0,48.
- 36 a) 1) 625; 2) 0,6; 3) 0,2; 4) $\frac{369}{625}$; b) 1) 625; 2) 0,6; 3) 0,2; 4) $\frac{369}{625}$; c) 1) 1080; 2) 0,5; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{29}{54}$;
d) 1) 1080; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) 0.
- 37 a) 1) 325; 2) 0,4; 3) 0,2; 4) $\frac{64}{325}$; b) 1) 325; 2) 0,4; 3) 0,2; 4) 1; c) 1) 1630; 2) $\frac{159}{326}$; 3) $\frac{577}{1630}$; 4) $\frac{26}{163}$;
d) 1) 1630; 2) $\frac{554}{815}$; 3) $\frac{65}{326}$; 4) $\frac{26}{163}$.
- 38 a) 1) 3905; 2) 0,4; 3) 0,2; 4) $\frac{231}{355}$; b) 1) 3905; 2) 0,4; 3) 0,2; 4) 0; c) 1) 7775; 2) 0,5; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{4651}{7775}$;
d) 1) 7775; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{4651}{7775}$.
- 39 a) 252; b) 100 000; c) 4032; d) 1 200 000; e) 1 600 000; f) 6 655 744; g) 501 120; h) 415 744.
- 40 a) 0,625; b) $\frac{1}{7}$ arba $\frac{6}{7}$; c) $\frac{1}{6}$; d) 0,4.
- 41 a) $P(A) = 0,72$; $P(B) = 0,18$; $P(C) = 0,08$; $P(D) = 0,02$; $P(E) = 0,98$; b) $P(A) = 0,06$; $P(B) = 0,24$;
 $P(C) = 0,14$; $P(D) = 0,56$; $P(E) = 0,94$.
- 42 a) 20 rutulių; b) 3 kartus; c) 21 rutulys; d) $\frac{5}{12}$.
- 43 a) $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,288$; $P(C) = 0,936$; b) $P(A) = \frac{1}{10}$; $P(B) = \frac{6}{2500}$; $P(C) = \frac{9999}{10000}$.
- 44 a) $P(A) = \frac{16}{595}$; $P(B) = \frac{1784}{1785}$; b) $P(A) = \frac{15}{253}$; $P(B) = \frac{15}{253}$.
- 45 a) $P(A) = \frac{3}{11}$; $P(B) = \frac{9}{110}$; $P(C) = \frac{28}{55}$; $P(D) = \frac{3}{44}$; $P(E) = \frac{37}{44}$;
b) $P(A) = \frac{12}{55}$; $P(B) = \frac{3}{55}$; $P(C) = \frac{28}{55}$; $P(D) = \frac{6}{55}$; $P(E) = \frac{41}{55}$.
- 46 a) $P(A) = \frac{1}{120}$; $P(B) = \frac{1}{360}$; $P(C) = \frac{1}{720}$; b) $P(A) = \frac{2}{19305}$; $P(B) = \frac{1}{154440}$; $P(C) = \frac{1}{64864800}$;
c) $P(A) = \frac{1}{2520}$; $P(B) = \frac{1}{5040}$; $P(C) = \frac{1}{5040}$; d) $P(A) = \frac{1}{420}$; $P(B) = \frac{1}{75600}$; $P(C) = \frac{1}{151200}$.
- 47 a) $P(A) = \frac{1}{15^{10}}$; $P(B) = \frac{1}{15^9}$; $P(C) = \frac{3003}{15^{10}}$; b) $P(A) = \frac{1}{19^{10}}$; $P(B) = \frac{1}{19^9}$; $P(C) = \frac{92378}{19^{10}}$.
- 48 a) 0,512; b) 0,6561.
- 49 a) $\frac{7}{216}$; b) 0,25.
- 50 a) 0,1; b) 0,4; c) 24 mokiniai; d) $\frac{1}{3}$; e) 4 merginos; f) $\frac{5}{7}$.
- 51 a) $\frac{15}{19}$; b) 1.
- 52 a) 0,0296; b) $\frac{23}{30}$.
- 53 a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{3}$; c) 0,5; d) $\frac{3}{7}$.
- 54 a) $\frac{1}{3}$; b) 0,5.
- 55 a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{7}{19}$.
- 56 a) $\frac{19}{193}$; b) $\frac{121}{850}$.
- 57 a) $\frac{2}{3}$; b) 1.
- 58 a) $\frac{3}{4}$; b) 0; c) $\frac{3}{7}$; d) $\frac{2}{5}$; e) 1; f) $\frac{1}{3}$.
- 59 a) 1; b) 0,6; c) 0; d) 0,4; e) 0,4; f) 0.

Šiame skyrelyje yra daug naujų sąvokų, todėl itin svarbu tinkamai išnagrinėti pateiktus pavyzdžius, išspręsti „Pamėgink“ užduotis. Išsiaiškinus atsitiktinio dydžio sąvoką, galima išspręsti ne tik 60–63, bet ir 66–68 uždavinius (namuose). Kitą pamoką, pasitikrinus, ar tinkamai sudaryti atsitiktinių dydžių skirstiniai, galima skaičiuoti šių dydžių skaitines charakteristikas.

„Pamėgink“ užduočių atsakymai

P. 114

1 m	1	2	3	4
$P(X = m)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

2 m	0	1	2	3
$P(X = m)$	$\frac{14}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{1}{55}$

P. 115

1 a) $EX = 2\frac{5}{9}$; b) $DX = \frac{74}{81}$; c) $\sigma(X) \approx 0,96$.**2** $\sigma(X) \approx 0,74$.

P. 117

m	0	1	2
$P(X = m)$	0,0625	0,375	0,5625

$$EX = 1,5, DX = 0,375.$$

P. 117–118 Uždavinių atsakymai

60 a) $P(X = 10) = \frac{1}{6}$; b) $P(X = 3) = \frac{1}{8}$.

61 a) m	1	2	3	4
$P(X = m)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{125}$	$\frac{1}{125}$

b) m	1	2	3	4
$P(X = m)$	$\frac{7}{10}$	$\frac{21}{100}$	$\frac{63}{1000}$	$\frac{27}{1000}$

62 a) m	0	1	2	3
$P(X = m)$	$\frac{1}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{14}{55}$

b) m	1	2	3
$P(X = m)$	$\frac{1}{22}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{6}{11}$

63 a) m	0	1	2	3	4
$P(X = m)$	$\frac{1615}{3542}$	$\frac{760}{1771}$	$\frac{190}{1771}$	$\frac{40}{5313}$	$\frac{1}{10626}$

b) m	0	1	2	3	4
$P(X = m)$	$\frac{7192}{11781}$	$\frac{3968}{11781}$	$\frac{992}{19635}$	$\frac{128}{58905}$	$\frac{1}{58905}$

64 a) $P(Y = 0) = \frac{2}{15}$; $P(Y = 3) = \frac{7}{45}$; b) $P(Y = -1) = \frac{1}{30}$; $P(Y = 4) = \frac{7}{60}$.**65** a) $EX = 5,1$, $DX = 5,89$, $\sigma(X) \approx 2,4$; b) $EX = 5\frac{7}{20}$, $DX = 12\frac{51}{400}$, $\sigma(X) \approx 3,5$.

66 a) m	1	3	4	5
$P(X = m)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$EX = 3\frac{1}{3};$$

c) m	1	2	3	4	5
$P(X = m)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$EX = 3;$$

b) m	1	3	5
$P(X = m)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$EX = 3;$$

d) m	4	7	9
$P(X = m)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$EX = 5\frac{5}{6}.$$

67 a)

m	1	2	3	4	6
$P(Y=m)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$EY = 3,375;$$

b)

m	2	3	4	5	6
$P(Y=m)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$EY = 3,5;$$

68 a)

m	0	5	10	20	50
$P(X=m)$	$\frac{41}{50}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{100}$

$$EX = 1,9; \text{ mažiausia kaina } 1,9 \text{ Eur};$$

b)

m	0	5	10	20	50
$P(X=m)$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{3}{200}$

$$EX = 2,85; \text{ mažiausia kaina } 2,85 \text{ Eur}.$$

69 a)

m	1	2	5	10	20
$P(X=m)$	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

$$EX = 4,9; \text{ neverta};$$

b)

m	1	2	5	10	20
$P(X=m)$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$EX = 4,8; \text{ neverta}.$$

70 a) 1 iš 2; b) 7 iš 9; c) 2 iš 3; d) 3 iš 9.

71 a)

m	0	1	2	3	4
$P(Y=m)$	$\frac{625}{1296}$	$\frac{125}{324}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{5}{324}$	$\frac{1}{1296}$

$$EY = \frac{2}{3}; DY = \frac{5}{9};$$

b)

m	0	1	2	3	4	5
$P(Y=m)$	$\frac{3125}{7776}$	$\frac{3125}{7776}$	$\frac{625}{3888}$	$\frac{125}{3888}$	$\frac{25}{7776}$	$\frac{1}{7776}$

$$EY = \frac{5}{6}; DY = \frac{25}{36}.$$

72 a)

m	0	1	2	3	4	5
$P(X=m)$	$\frac{32}{3125}$	$\frac{48}{625}$	$\frac{144}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{162}{625}$	$\frac{243}{3125}$

$$EX = 3; DX = 1,2;$$

b)

m	0	1	2	3	4	5
$P(X=m)$	$\frac{1024}{3125}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{128}{625}$	$\frac{32}{625}$	$\frac{4}{625}$	$\frac{1}{3125}$

$$EX = 1; DX = 0,8.$$

73 a)

m	0	1	2	3
$P(X=m)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

$$EX = 1; DX = \frac{2}{3};$$

b)

m	0	1	2	3	4
$P(X=m)$	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	0,1296

$$EX = 1,6; DX = 0,96.$$

P. 119–121 „Pasitikrink“ uždavinių atsakymai

1 variantas

1 0,625.

2 a)

	1	2	3	4	5	6
1	3	4	5	6	7	8
2	5	6	7	8	9	10
3	7	8	9	10	11	12
4	9	10	11	12	13	14
5	11	12	13	14	15	16
6	13	14	15	16	17	18

b) $m_A = 18$, $m_B = 7$;c) C – „gauta suma yra skaičiaus 10 kartotinis“; $P(C) = \frac{1}{12}$; D – „gauta suma yra lyginis skaičius arba skaičiaus 5 kartotinis“; $P(D) = \frac{11}{18}$.3 a) 307; b) 0; c) $\frac{2}{3}$.4 a) 3276; b) 19 656; c) $\frac{3}{28}$; d) $\frac{1}{28}$.

5 a) 0,06; b) 0,94; c) 0,38.

6 $P(A) = \frac{2}{7}$; $P(B) = \frac{857}{1029}$.7 $\approx 99,6\%$.8 a) 19 840; b) $\frac{40}{3927}$.

9 0,2.

10 0,227.

11 $EX = 2,25$; $DX = 0,5625$.

m	0	1	2	3
$P(X = m)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

2 variantas

1 0,5.

2 a) 12 144; b) 2024; c) $\frac{1}{24}$; d) $\frac{1}{8}$.3 $P(A) = \frac{13}{18}$; $P(B) = \frac{1}{6}$.4 a) 82 080; b) $\frac{1}{46}$.5 a) $\frac{47}{91}$;

b)

m	0	1	2	3
$P(X = m)$	$\frac{44}{91}$	$\frac{198}{455}$	$\frac{36}{455}$	$\frac{1}{455}$

6 a) $\frac{55}{153}$; b) $\frac{77}{163}$; c) 20 384 galimybės;7 a) 16!; b) $6! \cdot 11!$; c) $2 \cdot 8! \cdot 8!$.8 a) $\frac{15}{64}$; b) $\frac{35}{256}$;

c)

X	1	2	3	4
P	$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{45}{512}$	$\frac{25}{512}$

$$EX = 1\frac{291}{512}.$$

9

m	0	1	2	3
$P(X = m)$	$\frac{6561}{390625}$	$\frac{34992}{390625}$	$\frac{81648}{390625}$	$\frac{108864}{390625}$

m	4	5	6	7	8
$P(X = m)$	$\frac{90720}{390625}$	$\frac{48384}{390625}$	$\frac{16128}{390625}$	$\frac{3072}{390625}$	$\frac{256}{390625}$

$$P(X < 8) = \frac{390369}{390625}.$$

10 a)

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{56}$	$\frac{1}{56}$

$$EX = \frac{15}{56}; DX = 1,687;$$

b)

Y	0	1	2	3	4	5
P	0,00032	0,0064	0,051	0,205	0,41	0,328

$$EY = 4,5; DY = 0,45.$$

Statistikos pradmenys

P. 122

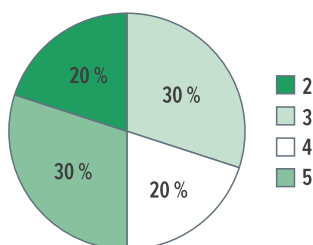
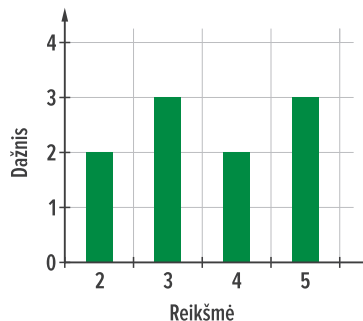
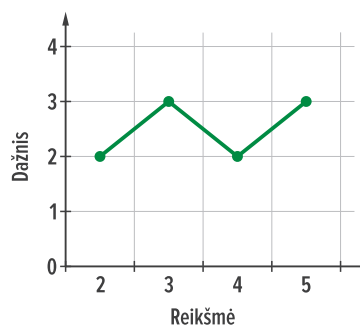
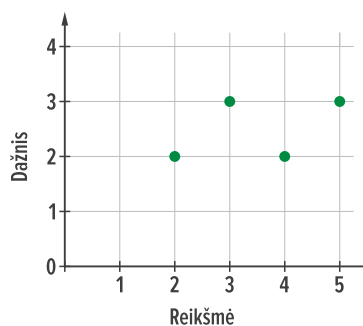
SUSIPAŽINK

Skyreliui skiriama viena pamoka. Jos metu svarbu išmokti taikyti įvairius statistinių duomenų vaizdavimo būdus. Siūlome mokiniams įvairiais būdais pavaizduoti savo visų (vieno ar kelių) dalykų pažymius. Svarbu suprasti, kad tuos pačius duomenis galima vaizduoti įvairiais būdais, todėl daugiau dėmesio reiktų skirti 77 ir 78 uždaviniams.

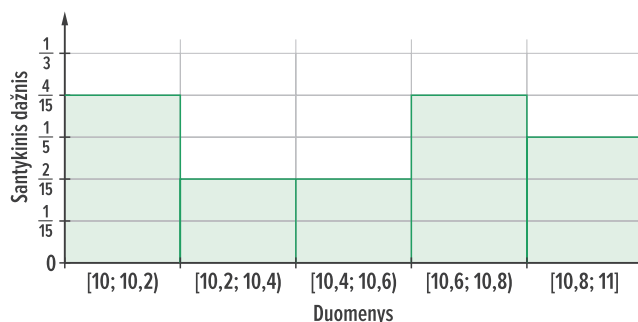
„Pamėgink“ užduočių atsakymai

P. 125

I	Reikšmė	2	3	4	5
	Dažnis	2	3	2	3
	Santykinis dažnis	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$



II	Intervalas	[10; 10,2)	[10,2; 10,4)	[10,4; 10,6)	[10,6; 10,8)	[10,8; 11]
	Dažnis	4	2	2	4	3
	Santykinis dažnis	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$



P. 126–128 Uždavinių atsakymai

74 a) 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 9;

Reikšmė	3	4	5	6	7	8	9
Dažnis	1	2	2	1	1	2	1
Santykinis dažnis	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

b) 1, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 9;

Reikšmė	1	2	4	5	6	7	8	9
Dažnis	2	1	1	1	1	2	1	1
Santykinis dažnis	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

c) 2, 2, 4, 4, 5, 5, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 11, 11, 12, 12;

Reikšmė	2	4	5	7	8	9	11	12
Dažnis	2	2	2	2	4	4	2	2
Santykinis dažnis	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

d) 2, 2, 4, 4, 5, 5, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 11, 11, 12, 12.

Reikšmė	-8	-5	-3	-2	2	4	5	7	8
Dažnis	3	1	1	3	3	2	3	2	2
Santykinis dažnis	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

75 a) 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 7, 7;

Reikšmė	1	2	3	5	7
Dažnis	4	2	5	3	2
Santykinis dažnis	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$

b) 1, 1, 1, 1, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7.

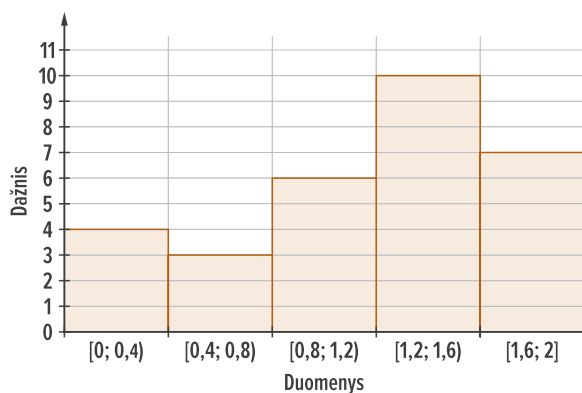
Reikšmė	1	3	5	6	7
Dažnis	4	2	4	7	3
Santykinis dažnis	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{20}$

76 C.

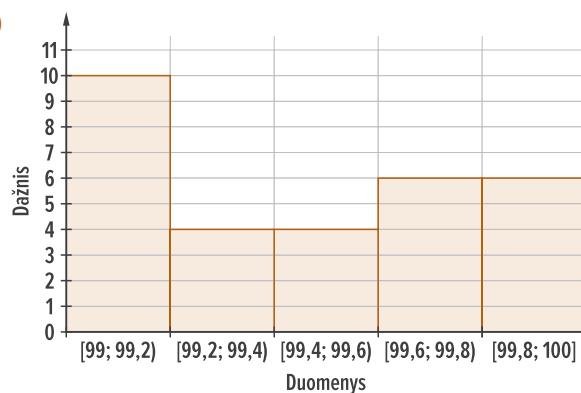
77 a) C; b) B; c) D; d) A.

78 1 ir 4, 2 ir 5, 3 ir 8, 6 ir 7.

80 a)



b)



81 a)

Reikšmė	a	b	c	d	e	f
Dažnis	2	3	7	5	2	1
Santykinis dažnis	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$

b)

Reikšmė	a	b	c	d	e	f
Dažnis	4	6	2	3	6	3
Santykinis dažnis	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

c)

Reikšmė	a	b	c	d	e
Dažnis	6	2	3	4	3
Santykinis dažnis	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$

d)

Reikšmė	a	b	c	d	e
Dažnis	5	20	15	8	12
Santykinis dažnis	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$

e)

Reikšmė	a	b	c	d	e
Dažnis	3	5	7	1	4
Santykinis dažnis	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$

f)

Reikšmė	a	b	c	d	e
Dažnis	2	3	4	5	1
Santykinis dažnis	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$

P. 129 IŠMOK

Skyreliui skiriama tik viena pamoka, todėl, norint išspręsti visus uždavinius, gali pritrūkti laiko. Daugiau dėmesio reikėtų skirti imties skaitinių charakteristikų skaičiavimo uždaviniams, kuriuose imtis pavaizduota ne dažnių lentele.

„Pamėgink“ užduočių atsakymai

P. 130 a) $M_0 = 5$, $M_d = 5$, $\bar{x} = 5\frac{2}{15}$, moda; b) $M_0 = 4$ arba $M_0 = 6$, $M_d = 6$, $\bar{x} = 5\frac{2}{3}$, vidurkis;

c) $M_0 = 5$, $M_d = 5$, $\bar{x} = 13\frac{6}{7}$, mediana.

P. 132 2) $\bar{x} = 1\frac{13}{30}$, $s^2 = \frac{62}{825}$.

P. 132–134 Uždavinių atsakymai

82 C.

83 D.

84 C.

85 a) plotis 7, moda -1 , mediana -3 , vidurkis $-3\frac{2}{3}$; b) plotis 90, moda 173, mediana 150,5, vidurkis $149\frac{5}{7}$;

c) plotis 8, moda 2, mediana 2, vidurkis $1\frac{7}{9}$; d) plotis 15, moda 3 ir 5, mediana 5, vidurkis 4,75;

e) plotis 6, moda 7, mediana 5,5, vidurkis $4\frac{11}{12}$; f) plotis 5, moda 2, mediana 3, vidurkis $3\frac{4}{7}$.

86 a) 6,2375; b) 21; c) 13; d) 7; e) 17; f) 10; g) 11; h) 3.

87 a) 19; b) 5.

88 a)

Reikšmė	3	5	6	8
Dažnis	4	6	5	5

b)

Reikšmė	-2	1	3	7
Dažnis	4	6	7	3

89 B.

90 a) antrosios; b) pirmosios.

91 a) $s^2 = 1,6$; $s \approx 1,3$; b) $s^2 \approx 2,2$; $s \approx 1,5$; c) $s^2 \approx 8,7$; $s \approx 2,9$; d) $s^2 \approx 2,0$; $s \approx 1,4$.

P. 135 TAIKYK

Šio skyrelio uždavinius siūlome spręsti visiems kartu, diskutuojant, kuri skaitinė charakteristika geriausiai apibūdina kiekvieną imtį, kokias išvadas būtų galima padaryti apskaičiavus visas imčių skaitines charakteristikas. Galima pasiūlyti moksleiviams ilgalaikį namų darbą – žiniasklaidoje paieškoti skaitinių charakteristikų pavyzdžių, pabandyti įvertinti, teisingai ar klaidingai daromos imtį apibūdinančios išvados.

„Pamėgink“ užduočių atsakymai

P. 135 3 gamintojo.

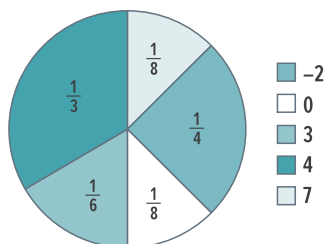
P. 136 Uždavinių atsakymai

- 92 Įmonę A.
- 93 Tiekėją L.
- 94 Tomo.
- 95 Monika.

P. 137–138 „Pasitikrink“ uždavinių atsakymai

1 variantas

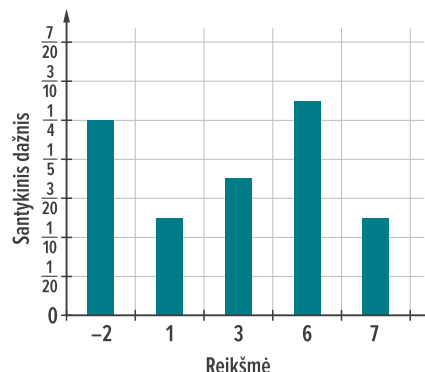
- 1 a) 7; b) $-0,5$.
- 2 Plotis 5, moda 7, mediana 7,5, vidurkis $7\frac{5}{11}$.
- 3 Moda 4.



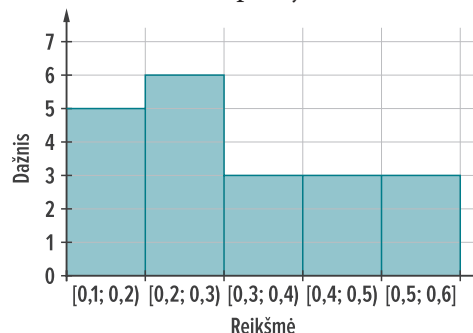
- 4 4.
- 5 Pirmojo vidutinis rezultatas 8,16, antrojo – 8; pastovesni antrojo rezultatai.

2 variantas

- 1 a) 4 ir 8; b) 5.
- 2 Plotis 9, moda 3, mediana 8, vidurkis $7\frac{19}{32}$.
- 3 $x = \frac{1}{6}$.



- 4 8 arba 5 ir 9.
- 5 Pirmojo šaulio vidutinis rezultatas 8,75, antrojo – 8,8; pastovesni pirmojo šaulio rezultatai.
- 6 Vidurkis 0,315; dispersija 0,02.



P. 139 „Ar priimsi iššūkį?“ uždavinių atsakymai

- 1 a) 5040; b) 720.
- 2 23 žmonės.
- 3 a) 472; b) 1023; c) 1153.
- 4 $\frac{2}{3}$.
- 5 a) 0,2; b) 0,32.
- 6 a) 5; b) 8.
- 7 a) 7; b) 23,5.

7 skyrius

Kurso kartojimas

Kiekvienas patyręs mokytojas taiko savus laiko patikrintus kurso kartojimo metodus. Paprastai tam naudojama papildoma mokomoji literatūra. Šiame vadovėlyje kurso kartojimo skyrius yra pakankamai išsamus, taigi papildomos literatūros gali neprireikti. Pradėdami mokytis šį skyrių, mokiniai yra jau išsamiai pakartoję temomis visą mokyklinį matematikos kursą, todėl siūlome mokinius išsamiai supažindinti su matematikos brandos egzamino programa ir pirmiausia pakartoti visus faktus bei taisykles, kurias reikia žinoti. Tai padaryti padės „Pasitikrink, ar žinai“ skyrelyje pateikti uždaviniai su pasirenkamaisiais atsakymais. Jie parengti pagal brandos egzamino programą. Skyrelio „Pasitikrink, ar moki“ uždavinių variantai yra trumpesni, negu tie, kurie pateikiami per egzaminą. Jie pritaikyti maždaug vienai pamokai. Manome, kad vienai pamokai galima skirti du variantus: vieną spręsti klasėje, kitą – namie arba sunkesnius uždavinius spręsti klasėje, lengvesnius – namie. Variantų vadovėlyje yra daugiau, negu numatyta toliau pateikiamame plane, todėl mokytojas gali pasirinkti, jo nuomone, tinkamesnius. Baigus skyrių rekomenduojamas 3 valandų trukmės kontrolinis darbas ir 3 valandų trukmės bandomasis egzaminas.

7 skyriaus skirstymo pamokomis pavyzdys

■ Išplėstinis kursas

Pamokos eil. nr.	Pamokos tema
1.	Matematikos brandos egzamino programos analizė, vertinimo instrukcijų analizė, vertinimo kriterijų aptarimas
2.	Brandos egzamino programos skyriaus „Skaičiai, skaičiavimai, algebra. Lygtys, nelygybės ir jų sistemos“ turinio aptarimas
3.	Pasitikrink, ar žinai: skaičiai, skaičiavimai, reiškiniai; lygtys, nelygybės ir jų sistemos
4.	Brandos egzamino programos skyriaus „Geometrija“ turinio aptarimas
5.	Pasitikrink, ar žinai: geometrija
6.	Brandos egzamino programos skyriaus „Funkcijos ir analizės pradmenys“ turinio aptarimas
7.	Pasitikrink, ar žinai: funkcijos ir analizės pradmenys
8.	Brandos egzamino programos skyriaus „Kombinatorika, tikimybių teorija, statistika“ turinio aptarimas
9.	Pasitikrink, ar žinai: kombinatorika, tikimybės, statistika
10.	Kontrolinis darbas
11.	Pasitikrink, ar moki: 1–2 variantai
12.	Pasitikrink, ar moki: 3–4 variantai
13.	Pasitikrink, ar moki: 5–6 variantai
14.	Pasitikrink, ar moki: 7–8 variantai
15.	Pasitikrink, ar moki: 9–10 variantai

16.	Pasitikrink, ar moki: 11–12 variantai
17.	Pasitikrink, ar moki: 13–14 variantai
18.	Pasitikrink, ar moki: 15–16 variantai
19.	Pasitikrink, ar moki: 17–18 variantai
20.	Pasitikrink, ar moki: 19–20 variantai
21.	Pasitikrink, ar moki: 21–22 variantai
22.	Pasitikrink, ar moki: 23–24 variantai
23.	Pasitikrink, ar moki: 25–26 variantai
24.	Pasitikrink, ar moki: 27–28 variantai
25.	Pasitikrink, ar moki: 29–30 variantai
26.	Kontrolinis darbas
27.	
28.	
29.	Kontrolinio darbo aptarimas. Laiko valdymo problemų aptarimas
30.	Bandomasis egzaminas
31.	
32.	

■ Bendrasis kursas

Pamokos eil. nr.	Pamokos tema
1.	Matematikos brandos egzamino programos analizė, vertinimo instrukcijų analizė, vertinimo kriterijų aptarimas
2.	Brandos egzamino programos skyriaus „Skaičiai, skaičiavimai, algebra. Lygtys, nelygybės ir jų sistemos“ turinio aptarimas
3.	Pasitikrink, ar žinai: skaičiai, skaičiavimai, reiškiniai; lygtys, nelygybės ir jų sistemos
4.	Brandos egzamino programos skyriaus „Geometrija“ turinio aptarimas
5.	Pasitikrink, ar žinai: geometrija
6.	Brandos egzamino programos skyriaus „Funkcijos ir analizės pradmenys“ turinio aptarimas
7.	Pasitikrink, ar žinai: funkcijos ir analizės pradmenys
8.	Brandos egzamino programos skyriaus „Kombinatorika, tikimybių teorija, statistika“ turinio aptarimas
9.	Pasitikrink, ar žinai: kombinatorika, tikimybės, statistika
10.	Bandomasis egzaminas
11.	
12.	Bandomojo egzamino aptarimas
13.	Pasitikrink, ar moki
14.	Pasitikrink, ar moki
15.	Pasitikrink, ar moki
16.	Pasitikrink, ar moki
17.	Pasitikrink, ar moki

P. 144–165 „Pasitikrink, ar žinai“ uždavinių atsakymai

1. Skaičiai, skaičiavimai, reiškiniai. Lygtys, nelygybės ir jų sistemos

- 1 C. 2 C. 3 B. 4 A. 5 A. 6 C. 7 C. 8 A. 9 C. 10 A. 11 D. 12 C. 13 C. 14 B. 15 B. 16 C. 17 C.
 18 C. 19 B. 20 C. 21 D. 22 B. 23 B. 24 C. 25 D. 26 D. 27 A. 28 B. 29 B. 30 A. 31 D. 32 B. 33 B. 34 C.
 35 D. 36 D. 37 A. 38 D. 39 B. 40 A. 41 D. 42 C. 43 B. 44 B. 45 D. 46 C. 47 C. 48 D. 49 C. 50 C. 51 C.
 52 D. 53 B. 54 A. 55 C. 56 C. 57 B. 58 C. 59 B. 60 A. 61 D.

2. Geometrija

- 1 C. 2 B. 3 A. 4 B. 5 D. 6 D. 7 B. 8 D. 9 C. 10 B. 11 C. 12 B. 13 C. 14 B. 15 A. 16 D. 17 C. 18 C.
 19 C. 20 D. 21 A. 22 A. 23 B. 24 B. 25 C. 26 A. 27 B. 28 C. 29 C. 30 A. 31 D. 32 B. 33 C. 34 B. 35 A.
 36 D. 37 C. 38 D. 39 B. 40 A. 41 C. 42 B. 43 B. 44 B. 45 C. 46 C. 47 D. 48 B. 49 D. 50 B. 51 B. 52 A.
 53 C. 54 A. 55 A. 56 D. 57 B. 58 A. 59 D. 60 C.

3. Funkcijos ir analizės pradmenys

- 1 C. 2 B. 3 C. 4 A. 5 B. 6 B. 7 B. 8 B. 9 C. 10 C. 11 D. 12 D. 13 A. 14 C. 15 A. 16 C. 17 B. 18 C.
 19 D. 20 C. 21 D. 22 A. 23 D. 24 C. 25 C. 26 C. 27 D. 28 A. 29 D. 30 B. 31 B. 32 C. 33 C. 34 C. 35 B.
 36 A. 37 B. 38 B. 39 D. 40 C. 41 B. 42 C. 43 D. 44 B. 45 C. 46 D. 47 A. 48 D. 49 C. 50 C. 51 B. 52 A.
 53 B. 54 C. 55 A. 56 B. 57 C. 58 C. 59 D. 60 C. 61 A. 62 A. 63 B. 64 B. 65 C. 66 A. 67 B. 68 C. 69 D.
 70 B. 71 C.

4. Kombinatorika. Tikimybės. Statistika

- 1 C. 2 C. 3 D. 4 D. 5 A. 6 D. 7 C. 8 C. 9 C. 10 B. 11 D. 12 B. 13 A. 14 C. 15 D. 16 C. 17 D.
 18 C. 19 A. 20 D. 21 D. 22 A. 23 C. 24 B. 25 C. 26 D. 27 B. 28 D. 29 C. 30 A. 31 C. 32 A. 33 C. 34 D.
 35 A. 36 A. 37 B. 38 B. 39 C. 40 A.

P. 166–205 „Pasitikrink, ar moki“ uždavinių atsakymai

1 variantas

- 1 $\frac{\pi}{6}$.
 2 3.
 3 \overline{AL} .
 4 $4^4\sqrt{2}$.
 6 $\frac{1}{3}$ arba $\frac{2}{3}$.
 7 a) 216; b) $3\sqrt{13}$; c) $36\sqrt{22}$.
 8 a) $D(f) = (-\infty; -3 - \sqrt{3}] \cup [-3 + \sqrt{3}; +\infty)$;
 b) -5; -1; d) 4.
 9 3.
 10 a) 3 628 800 būdų; b) 0,2; c) $\frac{1}{9}$.
 11 $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.
 12 -3.

2 variantas

- 1 $2\sqrt{17} - 7$.
 2 -2,5; 2.
 3 77 440.
 4 41.
 5 8.
 6 a) -4; b) $D(f) = \left(-3\frac{1}{17}; 13\right)$;
 c) $\left(-3\frac{1}{17}; -2\frac{1}{17}\right) \cup [12; 13]$.
 7 $a = 2$, $b = -3$.
 8 $P = 18\sqrt{3}$; $S = \frac{81\sqrt{3}}{2}$.
 9 $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
 10 a) $-\frac{5}{3}$; b) $3 + 2\ln 2$; c) $3780\frac{6}{13}$.
 11 10.
 12 0,0225.

3 variantas

- 1 27° .
- 2 a) 3,4; b) 1; c) 3,5.
- 3 a) -4 ; b) $D(f) = (-8; 10)$; c) -6 .
- 4 a) 512; b) 384; c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; d) 45° ; e) $4\sqrt{2}$.
- 5 $-\frac{1}{3}$.
- 6 14.
- 7 $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k\right], k \in \mathbb{Z}$.
- 8 $y = \frac{x+4}{3}$.
- 9 a) nelyginė; b) nei lyginė, nei nelyginė; c) lyginė; d) nelyginė.
- 10 Per 45 min.
- 11 48.
- 12 a) $F(x) = 0,25x^2 - 5x + 5$; b) 243.

5 variantas

- 1 24.
- 2 $-1; 4$.
- 3 $[-3; +\infty)$.
- 4 $x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- 5 a) -6 ; b) 23; c) $6\sqrt{3}$.
- 6 $64 + 2\sqrt{274}$ arba $64 + 2\sqrt{754}$.
- 7 4 km/h.
- 8 $72\sqrt{3}$.
- 9 21 m/s².
- 10 0,55.
- 11 0,8.
- 12 2,25.

7 variantas

- 1 $y = 0,2x - 0,32$.
- 2 $(0,8; 2,75]$.
- 3 $\approx 32,2$ arba $\approx 42,3$.
- 4 a) -2360 ; b) -208 ; c) -12 ; d) $a_n = 8 - 12n$.
- 5 $D(f) = (-\infty; +\infty)$; $E(f) = (0; 81]$.
- 6 562.
- 7 a) 18; b) -18 ; c) 0; d) -27 ; e) -9 .
- 8 $-1\frac{1}{18}$.
- 9 $-\pi; \pi; 2\pi$.
- 10 $20\frac{5}{6}$; $\Delta = \frac{1}{6}$; $\delta = \frac{1}{126}$; $\delta \approx 0,8\%$.
- 11 a) $f_{\max} = f(-4) = 184$; $f_{\min} = f(0,5) = 1,75$;
b) $f_{\min} = f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$.

12 a)	m	0	1	2	3	4
	$P(X=m)$	$\frac{1}{625}$	$\frac{16}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{256}{625}$

b) 3,2; c) vienodai tikėtina.

4 variantas

- 1 $[2; +\infty)$.
- 2 a) be galo daug; b) 2; c) 0; d) 2.
- 4 3,5.
- 5 0,5.
- 6 a) 272; b) 4080; c) $\frac{15\pi}{68}$.
- 7 45° .
- 8 248 832.
- 9 $y = -\frac{5}{3}x$ arba $y = -\frac{5}{3}x + 10$.
- 10 $\frac{67}{165}$.
- 11 a) 576; b) $216\sqrt{3}$; c) $12\sqrt{2}$.
- 12 12.

6 variantas

- 1 a) $y = 0,5x^2 + 1,5x - 2$; b) $y = x^2 + 6x + 10$;
c) $y = -0,5x^2 - 1,5x - 1$.
- 2 $-2; 2$.
- 3 $D(f) = (-\infty; +\infty)$; $E(f) = (-\infty; 3)$.
- 4 a) 0 ir 3; b) -2 .
- 5 $(-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- 6 95.
- 7 a) $x = -0,25$; $x = 1$; b) $x = 0$; $x = 2$; $x = 4$.
- 8 $[-0,5; +\infty)$.
- 9 $166\frac{2}{3}$.
- 10 a) 700; b) 735.
- 11 a) 220; b) 55 kartus.
- 12 1 kg apelsinų kainuoja 3,5 Eur,
mandarinų – 4,25 Eur, greipfrutų – 4,5 Eur.

8 variantas

- 1 $\frac{2}{3}$.
- 2 $-6; -3; -2; 1$.
- 3 a) 4320; b) 408.
- 4 $\sqrt{3} + 2$.
- 5 a) $\frac{1296\pi}{25}$; b) $64\frac{1}{30}$.
- 6 $a = -2, b = 2, c = 1$.
- 7 1.
- 8 14.
- 9 -122 arba -121 .
- 10 a) $F(x) = \frac{x^2}{6} + \frac{x\sqrt{x}}{3} + C$;
b) $F(x) = \frac{2(x-2)\sqrt{2-x}}{3} + C$;
c) $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$.
- 11 $\frac{2000\sqrt{3}\pi}{27}\text{ cm}^3$.
- 12 40.

9 variantas

1. 1.
2. 5.
3. a) 10; b) $-4\sqrt{6}$; $4\sqrt{6}$; c) 4.
4. $12 + 16\sqrt{3} - \frac{25\pi}{3}$.
5. 7 kartus.
6. -5.
7. $(-\infty; -1]$.
8. $\frac{98}{125}$.
9. a) $E(f) = [0; 1]$; b) $D(g) = (-\infty; +\infty)$;
c) $E(h) = [-1; 1]$.
10. $F(x) = 3x^2 + 15x + 18,75$.
11. $\overrightarrow{ON} = \frac{3}{5}\vec{b} - \frac{1}{5}\vec{a}$.
12. b) $12\frac{2}{3}$ km; c) po 0,16 h = 9,6 min; d) $\approx 7,55$ km.

11 variantas

1. a) 4; b) 56; c) 1.
2. a) $\frac{3-x}{x}$; b) $\frac{1}{2}$.
3. 58 %.
4. 45° .
5. 1,44.
7. a) -1; 4; b) 0,2; c) 16,5.
8. a) $5 + e$; b) $6\ln 2$; c) $-2\frac{2}{3}$; d) 1.

9. a)	m	4	5	6	7
	$P(X=m)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{105}$	$\frac{6}{21}$	$\frac{4}{7}$

- b) $EX = 6,4$.
10. a) 64 cm^3 .
 11. Negalima.
 12. 4 : 1.

13 variantas

1. $x + 3$.
2. 275.
3. $b = 1,5$, $c = 0,5$.
4. a) -1; 2; b) 5; c) 3; d) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
5. $\operatorname{tg} \alpha = 0,75$.
6. a) $x = -1$ ir $x = 1$; b) $(-1; 1)$;
c) $f_{\min} = f(1) = -2$; $f_{\max} = f(-1) = 2$.
7. 1,5.
8. 5.
9. c) $4\frac{8}{13}$; d) $\frac{7}{13}$.
10. $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{6}$.
11. c) 4; d) 8.
12. 25 %.

10 variantas

1. $\frac{81}{25600}$.
2. a) $(-\infty; -0,125]$; b) $[-10; 10]$;
c) $(-\infty; -3] \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$; d) $[-3; 1) \cup (1; 5)$.
3. a) 48; b) $8\sqrt{2} + 4\sqrt{5} + 12$.
4. 735.
5. $D(g) = [-6; 2]$; $E(g) = [-6; 6]$.
6. 4 s.
7. a) $x \in (-\infty; -\frac{4}{3})$ ir $x \in (2,5; +\infty)$;
b) $x \in (-\infty; -1)$ ir $x \in (3; +\infty)$;
c) $x \in (-\infty; -3)$ ir $x \in (2; 4)$.
8. $\frac{8}{9}$.
9. 13π .
10. -1.
11. 0,4.
12. a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; c) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; d) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

12 variantas

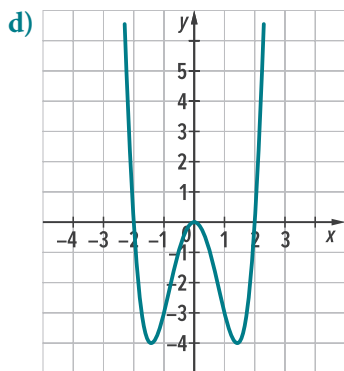
1. a) $1 + 2x$; b) -4; -3; -2; 4; 5; 6; c) -6; 8.
2. a) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$; b) $\frac{5\pi}{6}$; c) 2.
3. a) -2; 2; b) 1; c) πk , $k \in \mathbb{Z}$.
4. $\frac{1}{3}$.
5. a) (2; 0) ir (-1; 3); b) 9.
6. (-1; 2).
7. a) $x \in (-\pi + 2\pi k; 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$; b) $(-2; +\infty)$;
c) funkcija yra mažėjančioji, didėjimo intervalų nėra.
8. $a = 0,5$, $b = -2$.
9. $\max_{x \in [-2; 2]} f(x) = 4$; $\min_{x \in [-2; 2]} f(x) = -24$.
10. 1.
11. a) $D(7; 3)$; b) 45° ; c) $\overrightarrow{AK} = \vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$;
 $\overrightarrow{KD} = -\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$; d) $\overrightarrow{CK} = (-3, 6; 0)$.
12. $b_1 = 6$, $q = \frac{1}{4}$ arba $b_1 = -6$, $q = -\frac{1}{4}$.

14 variantas

1. $\frac{5}{6}$.
2. 3.
3. a) $5e^{x+1}$; b) -1.
4. a) (1; 6); b) $y = 6$.
5. $(1; 4\frac{8}{9})$.
6. Antrojo kvadrato plotas didesnis.
7. 40.
8. $26 = 13 + 13$.
9. 25.
10. a) $\frac{1}{18}$; b) $\frac{41}{81}$; c) $\frac{20}{81}$.
11. a) $[0; 5]$; b) $[-1; 6]$; c) $D(g) = [-3; 4]$;
 $E(g) = [-2; 3]$; d) $x = -1$.
12. Pro Vartus.

15 variantas

- 1 4,3.
- 2 3.
- 3 -2; -1; 0; 1.
- 4 a) $\frac{200\pi}{3} \text{ cm}^2$; b) $\frac{4000\sqrt{5}\pi}{81} \text{ cm}^3$.
- 5 $f(x) = 3x^2 + 6x + 2$.
- 6 $a = -1,5$, $b = 4$.
- 7 60 būdų.
- 8 a) $D(f) = (-1; 2) \cup (2; 3)$; b) $D(f) = (3; 7]$.
- 9 a) $\pm \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$; b) $\frac{\pi k}{3}$, $-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$;
c) sprendinių nėra;
d) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$; $\frac{1}{3} \left(\arctg \frac{3}{2} + \pi k \right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 10 a) 8 cm; b) 14 cm; c) $(336 + 98\sqrt{3}) \text{ cm}^2$.
- 11 a) $y = \frac{4}{9}x^2$; b) $\frac{1}{2}$.
- 12 a) $a = 0$; b) $x = -2$; $x = 0$; $x = 2$;
c) grafiko maksimumas $(0; 0)$,
minimumai $(-\sqrt{2}; -4)$ ir $(\sqrt{2}; -4)$;



17 variantas

- 1 a) 1; b) -1.
- 2 a) π ; b) 225; c) $\frac{1}{2}$.
- 3 $D(f) = (-2; 2)$.
- 4 187,5 kg.
- 5 $(0; 1)$; $R = 5$; $r = \frac{5}{2}\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$ kartų.
- 6 $3\frac{1}{3}$.
- 7 a)

X	0	1	2
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{12}{20}$
- b) $EX = 1,55$.
- 8 145.
- 9 a) $x = 2$; b) 128 cm^3 .
- 10 b) 1000 cm^2 .

16 variantas

- 1 a) 10; b) 4; c) 2,5.
- 2 -1.
- 3 a) $D(f) = (0; +\infty)$; $D(g) = \mathbb{R}$;
b) $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g'(x) = 2$; c) 0,5.
- 4 $\frac{3}{25}$.
- 5 4.
- 6 b) $\frac{\sqrt{874}}{2}$.
- 7 a) $\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{9}$, $k \in \mathbb{Z}$; b) $1\frac{1}{3}$; c) 0,5.
- 8 7776 cm^2 ; 34992 cm^3 .
- 9 a) $B(3; 7)$; b) $y = 3x - 2$.
- 10 a) antras; b) $g(x) = e^{|x|}$; c) -6.
- 12 640 km.

18 variantas

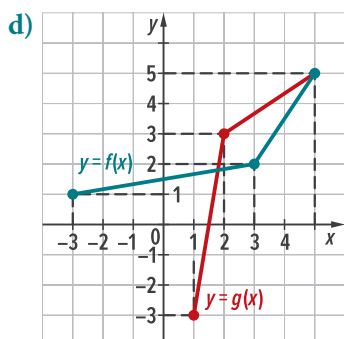
- 1 10.
- 2 $\frac{1}{m+3}$.
- 3 a) $(-\infty; -4)$; b) $[-9; -6) \cup (-6; -3]$; c) $[-8; -4) \cup (1; 6]$.
- 4 a) $m = 2$; b) $m = 1\frac{1}{3}$.
- 5 a) $\frac{1}{8}$; b) $\frac{7}{25}$.
- 6 a) 80 porcijų; b) 2,8 Eur.
- 7 (8; 4), (4; 8).
- 8 Per 18 h ir 24 h.
- 9 a) 8 ir 1; b) $h(x) = 3 - \log_2 3$.
- 10 a) $\sin \angle C = \frac{3}{5}$; $\cos \angle C = \frac{4}{5}$; b) 5 cm;
c) $\sin \angle A = \frac{24}{25}$.
- 11 a) $(-1; 1)$; $(3; +\infty)$;
b) $x \in (-\infty; -2)$, $x \in (0; 2)$ ir $x \in (4; +\infty)$.

19 variantas

- 1 a) $\frac{1}{1152}$; b) $1 - \sqrt{3}$; c) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}$.
- 2 290 eurų.
- 3 4 sprendinius.
- 4 a) 2; b) 3.
- 5 4 m.
- 6 $F(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2$.
- 7 $2x - 3y + 16 = 0$.
- 8 a) $x = 0$; $x = 2$; b) $x \in (0; 2)$; c) $f_{\min} = 0$; $f_{\max} = \frac{4}{e^2}$.
- 9 a) $P(A) = \frac{2}{3}$; b) $P(B) = 0$; c) $P(\overline{A}) = \frac{1}{3}$.
- 10 b) $4\sqrt{2}$ cm; c) 32 cm^2 .
- 11 a) 144; b) $16 + 4\sqrt{97}$.
- 12 $m = 24$.

21 variantas

- 1 a) 1; b) $\operatorname{tg} \alpha$; c) $\cos(4\alpha)$.
- 2 4.
- 3 0,3.
- 4 a) $F(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x + \frac{1}{2}$; b) 4,5; c) 36.
- 5 25 %.
- 6 a) 2; b) 3; c) 0.
- 7 a) 4 cm, 5 cm, 4 cm, 5 cm; c) 16 cm^2 .
- 8 Negalima, nes rutulio spindulio ilgis $\left(\sqrt[3]{\frac{3}{16}} \text{ dm}\right)$ didesnis už ritinio pagrindo spindulio ilgį.
- 9 15,5.
- 10 b) 200; c) $\approx 44^\circ$; $\approx 136^\circ$; d) $\frac{10\sqrt{58}}{29}$.
- 11 a) $D(g) = (1; 5)$; b) $g(2) = 3$; $g(f(5)) = 5$;
c) $f(g(a)) = a$;



20 variantas

- 1 a) 1; b) 4.
- 2 a) 4; b) $-\frac{4}{5}$; c) -4.
- 3 a) 10 cm; b) 9,6 cm; c) $\approx 16^\circ$.
- 4 a) -2 arba 2; b) 56; c) 32 760.
- 5 31,6 %.
- 6 $b = c = 2$.
- 7 0,05 m/s ir 0,03 m/s.
- 8 $\max_{x \in [1; 6]} f(x) = 2\frac{1}{8}$; $\min_{x \in [1; 6]} f(x) = 1$.

X	2	4	5	6	7	8
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

b) $EX = 6\frac{1}{3}$.

- 10 a) $\sqrt{13}$; b) 10; c) 6; d) 60.

22 variantas

- 1 $6\frac{1}{4}$.
- 2 Po 1 h 45 min.
- 3 $a = 4$.
- 4 a) -4; 2; b) $2\frac{2}{3}$; 3; c) 3.
- 5 -14,8; -11,6; -8,4; -5,2.
- 6 15 000 eurų; 18 000 eurų.
- 7 $-\frac{84}{85}$.
- 8 $m \in (2; +\infty)$.
- 9 20 dviviečių kambarių ir 5 keturviečiai kambariai.
- 10 c) 10 cm.
- 11 a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{4}{9}$;

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

d) $EX = 1$; $DX = \frac{2}{3}$.

- 12 20 cm.

23 variantas

- 1 a) 95; b) -600 ; c) $\frac{3a+b}{1-a}$; d) 4.
- 2 a) $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$; b) sprendinių nėra.
- 3 (5; 1); (-1; -5).
- 4 a) $E(f) = [0, 5; +\infty)$; c) 1.
- 5 $[0, 8; +\infty)$.
- 6 a) $y = -\frac{3}{845}x^2 + 15$; b) $DE = FG = 14,4$ m.
- 7 $\frac{1}{8}$.
- 8 $D(f) = \left(\frac{2}{3}; 1\right]$.
- 9 b) $\frac{4}{17}$.
- 10 b) 60° .

25 variantas

- 1 a) $\frac{1}{625}$; b) 100; c) 30,5; d) $\frac{1}{27}$.
- 2 3030.
- 3 a) 4,1; b) 5.
- 4 6.
- 5 $\max_{x \in [-1; 2]} f(x) = 3$; $\min_{x \in [-1; 2]} f(x) = -13$.
- 6 16 cm.
- 7 150° .
- 8 360° .
- 9 $A(-1; 0)$.
- 10 Po 6 h.

27 variantas

- 1 24 cm.
- 2 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.
- 3 315° .
- 4 -2; -5.
- 5 $\frac{4}{9}$.
- 6 b) 8; c) 50° ; d) 48.
- 7 11 m/s^2 ; 9 m/s^2 .
- 8 Du baltus ir vieną juodą.
- 9 $b = 4$.
- 10 Pirmasis 6 h 24 min, antrasis 8 h 40 min.
- 11 25 %; 62,5 %; 10 %.
- 12 2.

24 variantas

- 1 a) $E(f) = (-\infty; 9]$; b) $E(f) = [-2; 2]$; c) $E(f) = (3; +\infty)$; d) $E(f) = [-1; +\infty)$; f) $E(f) = [-4; -2]$.
- 2 3.
- 3 $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.
- 4 -5.
- 5 a) $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1)$; b) $x = \frac{a}{5-a}$; c) $a \in (-\infty; 0) \cup (5; +\infty)$.
- 6 13,5.
- 7 7 cm/s.
- 8 66.
- 9 a) $x - 2$; b) $y = -9x - \frac{3}{4}$; c) didėja, kai $x \in (2; +\infty)$; mažėja, kai $x \in (-\infty; 2)$.
- 10 $n = 9$.

26 variantas

- 1 45° .
- 2 Sveikųjų sprendinių nėra.
- 3 3.
- 4 1.
- 5 $\frac{1}{2}$.
- 6 a) 0,024; b) 0,084.
- 7 2 ir 4.
- 8 b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\frac{\pi}{6}$; d) $3 + \sqrt{3}$.
- 9 a) $f(x)$; b) 0; c) 0.
- 10 -1,4.
- 11 a) $\frac{1}{24}$; b) 1.
- 12 a) $u_3 = 3, u_4 = 4, u_5 = 5$; b) $u_n = n$.

28 variantas

- 1 1.
- 2 4.
- 3 $D(f) = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.
- 4 0,5.
- 5 a) nei lyginė, nei nelyginė; b) 1; c) $F(x) = e^x - \sin x + C$.
- 6 a) 8; b) $(-\infty; 3,5)$.
- 7 a) $\approx 60,37 \text{ km/h}$; b) $\frac{67}{123}$.
- 8 a) statusis; b) 5.

9 Taškas	A	B	C	D
$f(x)$	= 0	> 0	> 0	< 0
$f'(x)$	= 0	= 0	< 0	> 0

- 10 $\frac{59}{125}$.
- 11 $x = 20$.

29 variantas

- 1 $32\sqrt{2}$.
- 2 $-\sin \alpha + \cos \alpha$.
- 3 1.
- 4 a) 5; b) 8; 0,125; c) 1.
- 5 $c = 23$.
- 6 a) $(-\infty; 2)$; b) $(0; 1)$; c) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 7 c) $\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 8 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm.
- 9 a) 1) 576; 2) 1152; 3) 1440; b) $\frac{63}{64}$.
- 10 a) $2\sqrt{3}$; b) $\overline{AB} = 2\vec{a} - 2\vec{b}$.
- 11 50 laiptelių.
- 12 36 dalyviai.

31 variantas

- 1 a) R; b) sprendinių nėra; c) sprendinių nėra; d) $R \setminus \{3\}$; e) sprendinių nėra.
- 2 $b = \frac{2S}{a \sin \alpha}$.
- 3 a) $\frac{1}{3}$; b) -2; c) 2.
- 4 $D(f) = (0; 3)$.
- 5 $\frac{5\sqrt{5}}{4}$.
- 6 C.
- 7 $\frac{1}{22}$.
- 8 a) 8 %; b) 15 cm.
- 9 $(-1; 2)$; $(1; 2)$.
- 11 $y = -2x + 4$.
- 12 $(-5; 5\sqrt{3} + 10)$.

33 variantas

- 1 0.
- 2 C.
- 3 Į mokyklą broliai ateis vienu metu.
- 4 1.
- 5 5.
- 6 $\frac{1}{8}$.
- 7 a) 30° ; b) sprendinių nėra.
- 8 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.
- 9 1596 metais.
- 10 Per 12 min.
- 11 a) 3; b) 8; c) 4.

30 variantas

- 1 $3\pi\sqrt{2}$ cm.
- 2 13.
- 3 a) $\pi k; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$; b) $\frac{3\pi}{4}, \pi$.
- 4 -32 arba 32.
- 5 a) $(-\infty; -1] \cup [6; +\infty)$; b) $(1; +\infty) \cup \{-2\}$; c) $(-\infty; -2,5] \cup [0; +\infty)$.
- 6 20 %.
- 7 190 mokinių.
- 8 $(2\sqrt{6} + 6)$ cm.
- 9 $(19; -3)$; $(1; 3)$.
- 10 $\frac{125}{216}$.
- 11 b) $3\sqrt{3}$; c) $f(x) = \frac{x^3}{27\sqrt{3}}; g(x) = \frac{\sqrt{3}x^3}{9}$; d) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$; e) 30° ; f) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$; g) $3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4}$; h) 6π .

32 variantas

- 1 C.
- 2 $\sin \alpha = \frac{12}{13}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$.
- 3 a) 2; b) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; c) $\frac{2\pi}{3}$; d) 0.
- 4 4.
- 5 a) 40; b) 64; c) $16\sqrt{2}$; d) 72.
- 6 3.
- 7 2017.
- 8 a) $3\sqrt{3}$; b) 3.
- 9 a) -0,5; b) 3; c) 2.
- 10 16 šūvių; 6 šūviai.
- 11 Antanas yra vedęs Oną, Jonas – Mariją, Petras – Birutę.

34 variantas

- 1 1.
- 2 $x = 0$.
- 3 $64(4 - \pi)$.
- 4 a) kai $x < 1, \frac{x+1}{x-1}$; kai $x > 1, \frac{3x-1}{x-1}$; b) 4.
- 5 a) 32; b) $\sqrt{3}$; c) 5^{101} .
- 6 $\frac{23}{225}$.
- 7 a) $y' = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$; b) $y' = \sin(2x)$; c) $y' = \ln x + 1$.
- 8 a) $(1; +\infty)$; b) $(0; 4)$; c) $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$; d) $(-\infty; 0) \cup (0,5; +\infty)$.
- 9 $\max_{x \in [-1; 1]} f(x) = 1; \min_{x \in [-1; 1]} f(x) = -\frac{1}{3}$.
- 10 84.
- 11 2,4.
- 12 2 h 20 min.

35 variantas

- 1 $x \in (-8; -6)$ ir $x \in (-3; 3)$.
- 2 $D(f) = (0; 49) \cup (49; +\infty)$.
- 3 $16(4 - \pi)$.
- 4 a) 5; b) -10; c) 0,2.
- 5 Taip.
- 6 $k \in (-\infty; 0) \cup (0; 4)$.
- 7 $\frac{2\pi}{3}$.
- 8 $\frac{1}{3}$.
- 9 -48.
- 10 $EX = 1$.
- 11 Po du kiekvieno tipo lėktuvus arba vienas pirmojo tipo, trys antrojo tipo ir penki trečiojo tipo lėktuvai.

37 variantas

- 1 A.
- 2 2000 a.
- 3 a) $(2\sqrt{2}; 0)$; b) $(0; 0)$; $(4; 0)$; c) $(0; 0)$; $(4; 0)$.
- 4 $3\sqrt{3}$.
- 5 7.
- 6 0,8.
- 7 $a = -\frac{3}{4}$.
- 8 a) $(2; 1)$; b) $E_f = (-\infty; 1]$; d) $(0; 4)$; e) $10\frac{2}{3}$.
- 9 a) 0,026; b) 0,512; c) 0,7.
- 10 3, 4, 5, 6, 7 arba -7, -6, -5, -4, -3.

39 variantas

- 1 C.
- 2 a) $f'(x) = 2 \cos(2x)$; b) $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$;
c) $f'(x) = \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} + \sqrt{2}$.
- 3 a) $\frac{1}{3}$; 9; b) 0,1; $\sqrt{10}$.
- 4 a) $E_y = [3; 7]$; b) $E_y = [-4; -3]$.
- 5 a) 32 cm^2 ; c) 8 cm.
- 8 $p = 2$.
- 9 $m \in (2; +\infty)$.
- 10 64 vienetais.

36 variantas

- 1 $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.
- 2 171.
- 3 a) 4; b) 36.
- 4 $\frac{1}{6} a^3 \text{ cm}^3$.
- 5 6, 12, 24, 48.
- 6 a) $\sqrt{5}$; b) 0; c) $\sqrt{5}$; d) 1.
- 7 a) $f'(x) = \frac{6x^3 + 3x^2 + 6}{(3x+1)^2}$; b) $f'(x) = 3(x-5)^2$.
- 8 a) $\frac{5}{72}$; b) $\frac{2}{27}$.
- 9 a) $[-1; 1]$; b) $(-0,5; 3,5)$; c) $(-\infty; -2] \cup (-1; 0]$.
- 10 $60\sqrt{37} \text{ m}$.

38 variantas

- 1 $3,75\pi$.
- 2 11.
- 3 a) $\frac{1}{3}$; b) -2.
- 4 77.
- 5 1.
- 6 2; $y = 2x - 5$.
- 7 9.
- 8 $\frac{1}{9}$.
- 9 $a = -3$, $b = 6$.
- 10 3 m/s.

40 variantas

- 1 20° .
- 2 a) $y = -2x + 10$; b) $c = 6$.
- 3 0.
- 4 $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 5 a) 2; b) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; c) 4; d) 0,96.
- 7 $a + b + m - c$.
- 8 $(-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$.
- 10 $24\pi \text{ cm}^3$.

Serija „Tempus“

**Vilija Dabrišienė, Milda Marija Vosylienė, Antanas Apynis,
Ilona Knyzelienė, Erika Tumėnaitė, Vilija Šileikienė**

MATEMATIKA

Metodinės rekomendacijos 12 klasei

Leidinio vadovas *Mantas Vaišnoras*

Redaktorė *Zita Šliavaitė*

Brėžiniai *Elvio Zovės*

Dizaineris *Konstantinas Klimavičius*

Viršelio dizainerė *Jurga Želvytė*

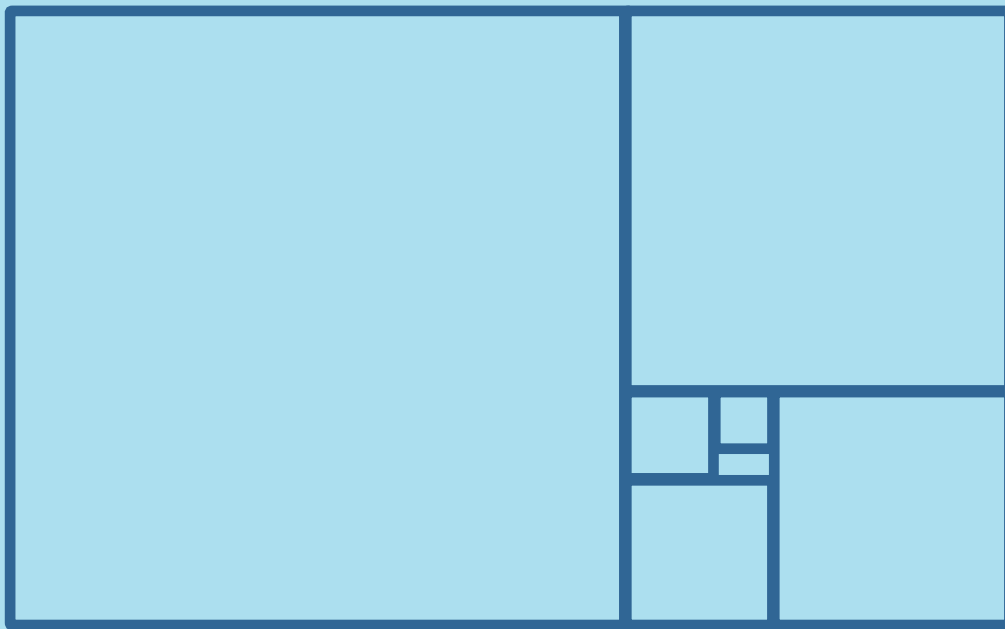
Meninis redaktorius *Elvis Zovė*

Maketuotoja *Rūta Atie*

Uždaroji akcinė bendrovė leidykla „Šviesa“, Vytauto pr. 29, LT-44352 Kaunas

El. p. info@sviesa.lt

Interneto puslapis www.sviesa.lt



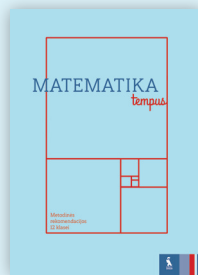
Komplektą sudaro:



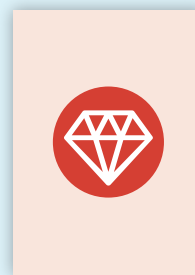
VADOVĖLIS
I DALIS
II DALIS



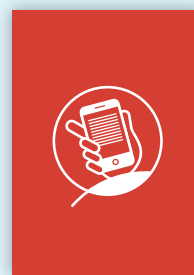
VADOVĖLIS
I DALIS
II DALIS



METODINĖS
REKOMENDACIJOS



UŽDUOČIŲ
BANKAS



E. PRIEDAS

eduka **KLASĖ**



eduka
KLASĖ
klase.eduka.lt

„EDUKA klasė“ – tai virtuali mokymosi aplinka,
kurioje yra daugybė skaitmeninių įvairių
mokomųjų dalykų vadovėlių ir papildomų
užduočių.