Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2018
Friederike Dittberner

Übungen zur Vorlesung Graphischer Mittlerer Kümmungsfluß

Blatt 1

Aufgabe 1 (Äquivalenz von Höldernormen)**.** (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Seien $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in (0,1)$ fixiert. Definiere

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} := \sum_{|\beta|\le k} \left\|D^\beta u\right\|_{C^0(\Omega)} + \sum_{|\beta|=k} \left[D^\beta u\right]_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$$

und

$$\|u\|'_{C^{k,\alpha}(\Omega)} := \sum_{|\beta|\le k} \left\|D^\beta u\right\|_{C^0(\Omega)} + \sum_{|\beta|\le k} \left[D^\beta u\right]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} .$$

Zeige, dass die beiden Normen äuquivalent sind.

Aufgabe 2 (Kompatibilitätsbedingungen I)**.** (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Seien $u_0 \in C^\infty(\bar\Omega)$, $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega \times [0,T))$ und $u \in C^{3;1}(\Omega \times (0,T))$ eine Lösung von

$$\begin{cases} \dot u = \sqrt{1+|Du|^2}\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) & \text{in } \Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \bar\Omega \\ u(x,t) = \varphi(x) & \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T) . \end{cases}$$

Wie lauten die Kompatibilitätsbedingungen der Ordnung 1,2,3?
Welche Bedingung ergibt sich an die mittlere Kümmung $H_{\operatorname{graph} u}$?

Aufgabe 3 (Kompatibilitätsbedingungen II)**.** (4 Punkte)
Sei $\Omega_0 = B_1(0)$ und $\Omega = \bigcup_{t>0} B_{1+t}(0) \times \{t\}$. Seien $u_0 \in C^\infty(\bar\Omega_0)$, $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega \setminus \Omega_0)$ und $u \in C^{3;1}(\Omega)$ eine Lösung von

$$\begin{cases} \dot u = \sqrt{1+|Du|^2}\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) & \text{in } \Omega \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \bar\Omega_0 \\ u(x,t) = \varphi(x,t) & \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \setminus \Omega_0 . \end{cases}$$

Wie lauten die Kompatibilitätsbedingungen der Ordnung 1,2,3?

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Eine Lösung $u : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ heißt homothetisch expandierend, falls $u(x,t) = v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ auf $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Sei Φ die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung und $u_0(x) = |x|$.

Zeige, dass die Faltung $u = \Phi * u_0$ unter der Wärmeleitungsgleichung eine homothetisch expandierende Lösung generiert.

Abgabe: Bis Donnerstag, 03.05.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.