Übungen zur Vorlesung Mittlerer Krümmungsfluss

Blatt 3

Sei $T > 0$ und $(M^n, g(t))$ für $t \in [0, T)$ eine abgeschlossene Mannigfaltigkeit mit einer Familie von Metriken, die glatt von der Zeit abhängen.
Sei $A = (A_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ symmetrisch mit $A_{ij} \in C^\infty(M^n \times [0, T))$.
Sei $B = (B_{ij}(A, p, t))_{1 \leq i,j \leq n}$ symmetrisch mit $B_{ij} \in C^1(M^n \times [0, T))$ und erfülle die Null-Eigenvektor-Bedingung, d.h. aus $A_{ij}\xi^j = 0$ für $1 \leq i \leq n$ folgt auch $B_{ij}\xi^i\xi^j \geq 0$.
Seien $u^k \in L^\infty(M^n \times [0, T))$, $1 \leq k \leq n$.

Aufgabe 7 (Schwaches Maximumprinzip für Tensoren)**.** (4 Punkte)
Gelte

$$\partial_t A_{ij} \succeq \Delta_{g(t)} A_{ij} + u^k \nabla_k^{g(t)} A_{ij} + B_{ij}(A_{kl}, \cdot)$$

in $M^n \times (0, T)$ und $A_{ij}(\cdot, 0) \succeq 0$.

Zeige, dass dann $A_{ij}(\cdot, t) \succeq 0$ für $0 \leq t < T$ gilt.

Aufgabe 8 (Starkes Maximumprinzip für Tensoren I)**.** (4 Punkte)
Sei B lokal Lipschitz in A. Gelte

$$\partial_t A_{ij} = \Delta_{g(t)} A_{ij} + u^k \nabla_k^{g(t)} A_{ij} + B_{ij}(A_{kl}, \cdot)$$

in $M^n \times (0, T)$, $A_{ij}(\cdot, 0) \succeq 0$ für alle $t \in [0, T)$ und $A_{ij}(p_0, 0) \succ 0$ für ein $p_0 \in M^n$.

Zeige, dass dann $A_{ij}(\cdot, t) \succ 0$ für $0 < t < T$ gilt.

Hinweis: Für jeden Punkt $p \in M^n$ betrachte eine Umgebung $U \in M^n$ mit $p_0, p \in U$. Betrachte außerdem $\varphi_1 : \overline{U} \times [0, T) \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\leq \lambda_1(\cdot, 0) && \text{in } \overline{U} \\ \varphi_1 &\equiv 0 && \text{auf } \partial U \\ 2\varphi_1(p_0) &\geq \frac{1}{2}\lambda_1(p_0, 0) \end{aligned}$$

eine Lösung $f : \overline{U} \times [0, T) \to \mathbb{R}$ der Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_t f &= \Delta_{g(t)} f + u^k \nabla_k^{g(t)} f - Af && \text{in } U \times (0, T) \\ f &\equiv 0 && \text{auf } \partial U \times [0, T) \\ f(\cdot, 0) &= \varphi_1 && \text{in } U \end{aligned}$$

und den Tensor $\tilde{A}_{ij} = A_{ij} + (\varepsilon e^{Ct} - f)\delta_{ij}$, wobei $\varepsilon > 0$ und $C > 0$.

Aufgabe 9 (Starkes Maximumprinzip für Tensoren II)**.** (4 Punkte)
Sei

$$\begin{aligned}\phi_k(p,t) &:= \inf_{\{\tau_1,\dots,\tau_k\} \text{ orthonormal}} \left(A(\tau_1,\tau_1) + \cdots + A(\tau_k,\tau_k)\right) \\ &= \lambda_1(p,t) + \cdots + \lambda_k(p,t)\end{aligned}$$

wobei $k \in \{1,\dots,n\}$. Sei B lokal Lipschitz in A. Gelte

$$\partial_t A_{ij} = \Delta_{g(t)} A_{ij} + u^k \nabla_k^{g(t)} A_{ij} + B_{ij}(A_{kl},\cdot)$$

in $M^n \times (0,T)$, $A_{ij}(\cdot,0) \succeq 0$ für alle $t \in [0,T)$ und $\phi_k(p_0,0) \succ 0$ für ein k und ein $p_0 \in M^n$.

Zeige, dass dann $\phi_k(\cdot,t) \succ 0$ für $0 < t < T$ gilt.

Hinweis: Gehe ananlog, wie in Aufgabe 8 vor, wobei nun $\varphi_k : \overline{U} \times [0,T) \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} k\varphi_k &\le \phi_k(\cdot,0) \quad && \text{in } \overline{U} \\ \varphi_k &\equiv 0 && \text{auf } \partial U \\ k\varphi_k(p_0) &\ge \frac{1}{2}\lambda_1(p_0,0) \end{aligned}$$

und $f(\cdot,0) = \varphi_k$ auf $\overline{U}$. Definiere wieder $\tilde{A}_{ij} = A_{ij} + (\varepsilon e^{Ct} - f)\delta_{ij}$ und zeige $\tilde{\phi}_k > 0$ per Widerspruchsbewiris. Setze dazu ein orthonormales Vektorfeld $\{\tau_1^0, \dots \tau_k^0\}$ in einer Umgebung eines geeigneten Punktes parallel entlang Geodäten und konstant in der Zeit zu einem orthonormalen Vektorfeld $\{\tau_1, \dots \tau_k\}$ fürt. Wirnde dann die Differentialgleichung auf $\psi_k := \tilde{A}(\tau_1,\tau_1) + \cdots + \tilde{A}(\tau_k,\tau_k)$ an diesem geeigneten Punkt an.

Abgabe: Bis Mittwoch, 12.12.2018, 10:00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.