Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2017/2018
Friederike Dittberner

Übungen zur Vorlesung Mittlerer Krümmungsfluss

Blatt 1

Aufgabe 1. (2 Punkte)
Zeige, dass eine offene Überdeckung des Intervalles $[0,1]$ durch Teilintervalle eine endliche Überdeckung

$$[0,1] \subset \bigcup_{j=1}^{k} I_j \qquad \text{mit} \qquad \sum_{j=1}^{k} |I_j| \le 2$$

enthält.

Aufgabe 2 (Fubini)**.** (4 Punkte)
Sei $\mathbb{R}^{n-1}_t := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x^n = t\} \subset \mathbb{R}^n$. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ kompakt and $U_t := U \cap \mathbb{R}^{n-1}_t$ von Maß Null in $\mathbb{R}^{n-1}_t \cong \mathbb{R}^{n-1}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Zeige, dass dann auch U von Maß Null in $\mathbb{R}^n$ ist.

Hinweis: Betrachte zunächst $U \subset \mathbb{R}^{n-1} \times [0,1]$. Für festes $t \in [0,1]$ und $\varepsilon > 0$, überdecke U_t mit Würfeln W^i_t sodass $\sum_i |W^i_t| < \varepsilon$. Schätze die Menge $\{x \in U \,|\, |x^n - t| < \alpha\}$ für geeignetes α ab und benutze Aufgabe 1.

Aufgabe 3. (8 Punkte)
Seien $n, m \ge 1$ und $U \in \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ in C^k mit $k > \max\{n-m, 0\}$. Ein Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ heißt regulär, falls das Differential von f in p surjektiv ist. Ein Punkt $q \in \mathbb{R}^m$ heißt regulärer Wert, falls $f^{-1}(q)$ aus regulären Punkten besteht. Nicht reguläre Punkte/Werte nennt man singulär oder kritisch. Sei $D_i \subset U$ die Menge aller Punkte, in denen alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\le i$ verschwinden.

Es gelte für alle Funktionen $g : V \to \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, in C^l mit $l > \max\{n-1-m, 0\}$, dass die Menge der kritischen Werte von g in $\mathbb{R}^m$ Lebesgue-Maß Null hat.

Zeige, dass folgendes gilt

(i) $f(D \setminus D_1)$ hat Maß Null.
Hinweis: Betrachte für geeignete Koordinaten die Funktionen $h(x) = (f^1(x), x^2, \ldots, x^n)$ und $g = f \circ h^{-1}$.
(ii) $f(D_i \setminus D_{i+1})$ hat Maß Null.
Hinweis: Verfahre ähnlich wie in (i) mit $h(x) = \left(\frac{\partial^k}{\partial x^{\nu_1} \ldots \partial x^{\nu_k}} f^1(x), x^2, \ldots, x^n\right)$ für geeignete Koordinaten.
(iii) $f(D_k)$ von Maß Null.
Hinweis: Schätze $|f(x+h) - f(x)|$ mithilfe der Taylorentwickung auf kleinen Würfeln ab.

Aufgabe 4 (Satz von Sard)**.** (2 Punkte)
Seien N^n und M^m differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit einer abzählbaren Basis der Topologie. Sei $f : N^n \to M^m$ in C^k mit $k > \max\{n-m, 0\}$.

Zeige:

(i) Die Menge der kritischen Werte von f hat Lebesgue-Maß Null.
(ii) $f^{-1}(y) \subset N^n$ ist für fast alle $y \in M^m$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit der Kodimension m.
(iii) Sei $f \in C^\infty$. Dann liegen die regulären Werte von f dicht in M^m.

Aufgabe 5 (Zusatz)**.** (4 Punkte)
Sei $A \subset B$. Eine Retraktion ist eine stetige Abbildung $f : B \to A$, sodass $f|_A = \mathrm{Id}$, also $f(x) = x$ für alle $x \in A$, gilt.

(i) Zeige, dass es keine Retraktion von $\overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{S}^{n-1}$ gibt. *Hinweis:* Führe einen Widerspruchbeweis. Sei $f : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{S}^{n-1}$ eine Retraktion. Betrachte die Glättung der Funktion

$$g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{x}{|x|}\right) & 1/2 \leq |x| \leq 1 \\ f(2x) & 0 \leq |x| \leq 1. \end{cases}$$

Benutze dann Aufgabe 4.
(ii) Brouwerscher Fixpunktsatz: Sei $f : \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}$ stetig. Dann besitzt f einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $x \in \overline{B_1(0)}$ mit $f(x) = x$.

Abgabe: Bis Montag, 12.11.2018, 15:00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.