Oliver Schnürer, Friederike Dittberner Universität Konstanz Wintersemester 2017/2018

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 1

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ in C^1 und konvex.

Zeige, dass für $x \in \Omega$

$$|Du(x)| \le \frac{1}{r} \operatorname*{osc}_{B_r(x)} u$$

mit $r = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ gilt.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Für welche $r > 0$ gibt es eine strikt konvexe Lösung der

(i) Monge–Ampère-Gleichung

$$\begin{cases} \det\big(D^2u\big) = 1 & \text{in} \quad B_r(0) \\ u = 0 & \text{auf} \quad \partial B_r(0). \end{cases}$$

(ii) Gleichung für vorgeschriebene Gausskrümmung

$$\begin{cases} \dfrac{\det\big(D^2u\big)}{\left(1+|Du|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} = 1 & \text{in} \quad B_r(0) \\ u = 0 & \text{auf} \quad \partial B_r(0). \end{cases}$$

Hinweis: Betrachte zunächst den Fall $r = 1$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Zeige, dass das Dirichletproblem

$$\begin{cases} \det\big(D^2u\big) = f(u, Du) & \text{in} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

mit $f_z \ge 0$ höchstens eine strikt konvexe Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar\Omega)$ besitzt.

(ii) Ist $A \in O(n)$ eine orthogonale Matrix mit $A\Omega = \Omega$, so gilt für jede Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$ von (1),

$$u(x) = u(Ax)$$

für alle $x \in \Omega$.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Seien $\lambda(A) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ die Eigenwerte der symmentrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda(A, g)$ die Eigenwerte von A bezüglich g. Betrachte die Differentialoperatoren

$$\begin{aligned}
P\big(D^2u\big) &= a \sum_{\lambda_i(D^2u)>0} \lambda_i\big(D^2u\big) + b \sum_{\lambda_i(D^2u)<0} \lambda_i\big(D^2u\big) \qquad \text{für } 0 < a \leq b\,,\\
H\big(D^2u, Du\big) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i\big(A\big(D^2u, Du\big), g(Du)\big)\ ,\\
K\big(D^2u, Du)\big) &= \prod_{i=1}^n \lambda_i\big(A\big(D^2u, Du\big), g(Du)\big)\ ,\\
|A|^2\big(D^2u, Du\big) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2\big(A\big(D^2u, Du\big), g(Du)\big)\ ,
\end{aligned}$$

wobei

$$A(D^2u, Du) = \frac{D^2u}{\sqrt{1+|Du|^2}}$$

und

$$g(Du) = \mathrm{Id} + Du \otimes Du\,.$$

Definiere für jeden dieser Differentialoperatoren F,

$$\lambda := \sup\left\{\mu : \mu\delta^{ij} \preceq \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}\big((r_{kl}), (p_k)\big)\right\}$$

und

$$\Lambda := \inf\left\{\mu : \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}\big((r_{kl}), (p_k)\big) \succeq \mu\delta^{ij}\right\}\,.$$

Welche Bedingungen / a priori Schranken an u erlauben es, $c > 0$ mit

$$0 < \frac{1}{c} \leq \lambda \leq \Lambda \leq c$$

zu kontrollieren? Nimm dazu im Fall $F = K$ und $F = |A|^2$ an, dass u konvex ist. Untersuche P und H sowie positive Potenzen von K und $|A|^2$ auf strikte Konkavität.

Abgabe: Bis Montag, 05.11.2018, 15:00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402 oder in der Vorlesung.