Übungen zur Vorlesung Mittlerer Krümmungsfluss

Blatt 4

Aufgabe 10 (Starkes Maximumprinzip für Tensoren III)**.** (12 Punkte)
Sei $A = (A_{ij})_{1\le i,j\le n}$ mit $A_{ij} \in C^\infty(M^n \times [0,T))$ symmetrisch.
Sei $B = (B_{ij}(A_{kl}, p, t))_{1\le i,j\le n}$ mit $B_{ij} \in C^1(M^n \times [0,T))$ symmetrisch, lokal Lipschitz in A und erfülle die Null-Eigenvektor-Bedingung.
Sei $u^k \in L^\infty(M^n \times [0,T))$, $1 \le k \le n$.
Gelte

$$\partial_t A_{ij} = \Delta_{g(t)} A_{ij} + u^k \nabla_k^{g(t)} A_{ij} + B_{ij}(A_{kl}, \cdot)$$

in $M^n \times (0,T)$ und $A_{ij}(\cdot, 0) \succeq 0$ für alle $t \in [0,T)$.

Zeige:

(i) Falls $t_2 > t_1$ in $[0,T)$, dann gilt

$$\inf_{p\in M^n} \operatorname{rang} A(p,t_2) \ge \sup_{p\in M^n} \operatorname{rang} A(p,t_1)$$

und es existiert $\delta > 0$ so dass $\operatorname{rang} A(p,t)$ konstant ist für alle $p \in M^n$ und $t \in (0,\delta)$.
Hinweis: Benutze Aufgabe 9.

(ii) ($\ker A$ ist glatt in Raum und Zeit). Sei $(0,\delta)$ das Zeitinervall aus (i). Dann gilt für alle $t \in (0,\delta)$, dass $\ker A(t) \subset TM^n$ ein glattes Unterraum, der glatt von der Zeit abhängt.
Hinweis:

(iii) Es gilt

$$\ker A(t) \subset \ker B(A(t),t) \qquad \text{und} \qquad \ker A(t) \subset \bigcap_{s\in(0,\delta)} \ker B(A(s),s)$$

für alle $t \in (0,\delta)$.

(iv) ($\ker A$ ist parallel in Raum und Zeit). Sei $(0,\delta)$ das Zeitinervall aus (i). Dann ist für $t \in (0,\delta)$, $\ker A(t)$ invariant unter parallelem Transport im Raum und konstant in der Zeit.
Hinweis: Zeige zunächst, dass

$$\nabla_v w\,,\ \Delta w\,,\ \partial_t w \in \ker A(t) \qquad \text{und} \qquad w\,,\ \nabla_v w \in \ker \nabla_v A(t)$$

für alle $w \in \ker A(t)$. Zeige dann, dass die Koeffizienten eines Vektors $v_0 \in \ker A(p_0,t_0)$ bezüglich einer Basis $\{w_i\}_{1\le i\le \dim\ker A(p_0,t_0)}$ zuerst für feste Zeit entlang einer beliebigen räumlichen Kurve eine gewöhnliche Differentialgleichung erfüllen, wirlche lösbar ist. Danach zeige dasselbe für festen Raum und variable Zeit.

Definition 1 (Typ-I-Reskalierung)**.** *Sei $T < \infty$ und $X : M^n \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ glatte Familie von Immersionen. Sei $(p_k,t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Blow-up-Folge in $M^n \times [0,T)$ mit $t_k \nearrow T$ für $k \to \infty$ und*

$$|A|^2(p_k,t_k) = \max_{p\in M^n} |A|^2(p,t_k) = \max_{M^n\times[0,t_k]} |A|^2(p,t)$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren $\lambda_k^2 := |A|^2(p_k, t_k)$ und $\alpha_k := -\lambda_k^2 T$ und die reskalierten Immersionen $X_k : M^n \times [\alpha_k, 0) \to \mathbb{R}^2$ durch

$$X_k(p,\tau) := \lambda_k \left(X\left(p, T + \frac{\tau}{\lambda_k^2}\right) - x_0 \right) .$$

Aufgabe 11 (Eigenschaften der Typ-I-Reskalierung)**.** (4 Punkte)
Sei $X : M^n \times (0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Lösung des MCF mit $T < \infty$.

Zeige, dass für die Typ-I Reskalierung im Falle einer Typ-I Singularität

$$\lambda_k \to \infty \qquad \text{und} \qquad \alpha_k \to -\infty$$

für $k \to \infty$, und

$$X_k(0,\tau_k) \in B_{3C_0^2}(0)\,, \qquad |A_k|^2(0,\tau_k) = 1 \qquad \text{und} \qquad \max_{M^n \times [\alpha_k, -\delta^2]} |A_k| \leq \frac{C_0}{\delta}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ gilt, wobei

$$\tau_k := -\lambda_k^2(T - t_k) \in \left[-\frac{C_0^2}{2}, -\frac{1}{2} \right] .$$

Definition 2 (Typ-II-Reskalierung)**.** *Sei $T < \infty$ und $X : M^n \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ glatte Familie von Immersionen. Sei $(p_k, t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $M^n \times [0, T - 1/k]$ mit*

$$T_k := |A|^2(p_k, t_k) \left(T - \frac{1}{k} - t_k \right) = \max_{(p,t) \in M^n \times [0, T-1/k]} \left(|A|^2(p,t) \left(T - \frac{1}{k} - t \right) \right)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren $\lambda_k^2 := |A|^2(p_k, t_k)$ und $\alpha_k := -\lambda_k^2 t_k$ und die reskalierten Immersionen $X_k : M^n \times [\alpha_k, T_k] \to \mathbb{R}^{n+1}$ durch

$$X_k(p,\tau) := \lambda_k \left(X\left(p, t_k + \frac{\tau}{\lambda_k^2}\right) - X(p_k, t_k) \right) .$$

Aufgabe 12 (Eigenschaften der Typ-II-Reskalierung)**.** (4 Punkte)
Sei $X : M^n \times (0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Lösung des MCF mit $T < \infty$.

Zeige, dass für die Typ-II-Reskalieruung im Falle einer Typ-II-Singularität

$$\lambda_k \to \infty\,, \qquad \alpha_k \to -\infty \qquad \text{und} \qquad T_k \to \infty$$

für $k \to \infty$, und

$$X_k(0,0) = 0\,, \qquad |A_k|^2(0,0) = 1 \qquad \text{und} \qquad \max_{M^n \times [\alpha_k, \bar{T}]} |A_k|^2 < 1 + \varepsilon$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ und $\bar{T} > 0$ gilt.

Abgabe: Bis Mittwoch, 09.01.2018, 10:00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.