Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2018
Friederike Dittberner

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie II

***Blatt 6***

**Aufgabe 21.** (4 Punkte)
Sei $n \geq 3$ und $(M^n, g)$ eine Mannigfaltigkeit, so dass $R_{ij} = f g_{ij}$ für eine Funktion $f \in C^\infty(M)$ gilt.
Zeige, dass

$$R_{ij} = \frac{R}{n} g_{ij}$$

gilt und dass $R$ konstant ist.

**Aufgabe 22.** (12 Punkte)
Sei $n = 3$ und $M^n$ eine glatte Mannigfaltigkeit und $g = g(t)$ eine Familie von Riemannschen Metriken, welche den Ricci-Fluss $\partial_t g_{ij} = -2R_{ij}$ lösen. Nehme an, dass für $x_0 \in M$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ eine Karte $(U, \varphi)$ von $M$ existiert, so dass

$$g_{ij}(x_0) = \delta_{ij}\,, \qquad \Gamma^k_{ij}(x_0) = 0$$

gilt, wobei die Größen zur Zeit $t_0$ ausgewertet werden. Definiere

$$B_{ijkl} = g^{pr} g^{qs} R_{piqj} R_{rksl}\,.$$

Zeige in dem oben gewählten Koordinatensystem:

(i) Die Symmetrie

$$B_{ijkl} = B_{jilk} = B_{klij}$$

und

$$g^{jl}(B_{ijkl} - 2B_{ijlk}) = 0\,.$$

(ii) Die Identität

$$\begin{aligned}\Delta R_{ijkl} &+ 2(B_{ijkl} - B_{ijlk} - B_{iljk} + B_{ikjl}) \\ &= R_{jl;ik} - R_{jk,il} - R_{il;jk} + R_{ik;jl} + g^{pq}(R_{pjkl}R_{qi} + R_{ipkl}R_{qj})\,.\end{aligned}$$

*Hinweis:* Benutze die 1. und die 2. Bianchi Identität, welche lautet:

$$R_{jklm;i} + R_{kilm;j} + R_{ijlm;k} = 0\,.$$

(iii) Die Evolutionsgleichung des Riemannschen Krümmungstensors

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} R_{ijkl} &= \Delta R_{ijkl} + 2(B_{ijkl} - B_{ijlk} - B_{iljk} + B_{ikjl}) \\ &\quad + g^{pq}(R_{pjkl}R_{qi} + R_{ipkl}R_{qj} + R_{ijpl}R_{qk} + R_{ijkp}R_{ql})\,.\end{aligned}$$

(iv) Die Evolutionsgleichung der Ricci-Krümmung

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{ik} = \Delta R_{ik} + 2g^{pr} g^{qs} R_{piqk} R_{rs} - 2g^{pq} R_{pi} R_{qk}\,.$$

(v) Die Evolutionsgleichung der Skalarkrümmung

$$\frac{\partial}{\partial t} R = \Delta R + 2g^{ij} g^{kl} R_{ik} R_{jl}\,.$$

(vi) Falls $R > 0$ zu Zeit $t = 0$ gilt, dann gilt dies auch für $t > 0$.

**Abgabe:** Bis Donnerstag, 31.05.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.