Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2018
Friederike Dittberner

Übungen zur Vorlesung Graphischer Mittlerer Kümmungsfluß

Blatt 2

Aufgabe 5. (8 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $T > 0$, und $Q_T := \Omega \times (0,T)$. Sei $u : \bar{\Omega} \times [0,T) \to \mathbb{R}$ in $C^{2,\alpha;1,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$ mit

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \sqrt{1+|Du|^2}\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) & \text{in } Q_T \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi & \text{in } \partial\Omega \times [0,T] \end{cases}$$

(i) Beschreibe die Kompatibilitätsbedingungen der Ordnung 0, 1 und 2.

(ii) Definiere

$$V := \left\{\eta \in C^{2+\beta,\frac{2+\beta}{2}}(\bar{Q}_1) \,:\, \eta|_{\Omega\times\{0\}} = 0\right\},$$

$$W := \left\{(\rho,\xi) \,:\, \rho \in C^{0+\beta,\frac{0+\beta}{2}}(\partial\Omega \times [0,T]), \xi \in C^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}(Q_T), \xi|_{\partial\Omega\times\{0\}} = 0\right\}$$

und $\Psi = (\Psi_1,\Psi_2) : V \to W$ mit

$$\Psi(\eta) = (\Psi_1(\eta),\Psi_2(\eta)) := \left(\frac{\partial\eta}{\partial t} - F(D^2(\eta),D(\eta))), \frac{\partial\eta}{\partial\nu} - \varphi\right).$$

Zeige eine analoge Aussage wie Lemma 1.7 für Ψ.

(iii) Zeige Kurzzeitexistenz für graphischen mittleren Krümmungsfluss mit Neumann-Randwerten. Benutze folgendes Theorem:

Theorem 1 (siehe Theorem IV.5.3, S. 320, Ladyzhenskaya et al., 68)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $T > 0$. Definiere $Q_T := \Omega \times (0,T)$. Seien $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1)$. Seien die Koeffizienten von*

$$L : u \mapsto \dot{u} - a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + du$$

in $C^{k+\alpha;\frac{k+\alpha}{2}}(Q_T)$. Sei $\partial\Omega \in C^{k,\alpha}$ (im unbeschränkten Fall mit einer lokal gleichmäßigen $C^{k,a}$-Darstellung des Randes). Dann gibt es für beliebige $f \in C^{k+\alpha;\frac{k+\alpha}{2}}\left(\overline{Q}_T\right)$, beliebige $u_0 \in C^{k+2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ und beliebige $\varphi \in C^{k+1+\alpha;\frac{k+1+\alpha}{2}}\left(\overline{Q}_T\right)$, die die Kompatibilitätsbedingungen bis zur Ordnung $\left[\frac{k+1+\alpha}{2}\right] = \left[\frac{k+1}{2}\right]$ erfüllen, eine Lösung $u \in C^{k+2+\alpha;\frac{k+2+\alpha}{2}}\left(\overline{Q}_T\right)$ des Randwertproblems

$$\begin{cases} Lu = f & \textit{in } Q_T\,, \\ \frac{\partial u}{\partial\nu} = \varphi & \textit{auf } \partial\Omega \times [0,T]\,, \\ u(\cdot,0) = u_0 & \textit{auf } \Omega\,. \end{cases}$$

Ist Ω beschränkt, so ist u unter allen $C^{2;1}(Q_T) \cap C^0\left(\overline{Q}_T\right)$-Lösungen eindeutig bestimmt. Es gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{C^{k+2+\alpha;\frac{k+2+\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)} \le c \cdot \left(\|f\|_{C^{k+\alpha;\frac{k+\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)} + \|u_0\|_{C^{k+2+\alpha}(\overline{\Omega})} + \|\varphi\|_{C^{k+1+\alpha;\frac{k+1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)}\right)$$

mit $c = c(\Omega,k,\alpha,L)$.

Aufgabe 6. (8 Punkte)
Seien $X_0, Y_0 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ reguläre, glatte Kurven und $X, Y : \mathbb{S}^1 \times [0,T) \to \mathbb{R}^2$ erfüllen

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(x,t) = -\kappa(x,t)\nu(x,t) & \text{für } \ (x,t) \in \mathbb{S}^1 \times (0,T)\,, \\ X(x,0) = X_0(x) & \text{für } \ x \in \mathbb{S}^1 \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial t}(y,t) = -\kappa(y,t)\nu(y,t) & \text{für } \ (y,t) \in \mathbb{S}^1 \times (0,T)\,, \\ Y(y,0) = Y_0(y) & \text{für } \ y \in \mathbb{S}^1\,. \end{cases}$$

Definiere $d : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times [0,T) \to \mathbb{R}$ durch

$$d(x,y,t) = \|X(x,t) - Y(y,t)\|_{\mathbb{R}^2}\,,$$

die Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial s_x} := \frac{1}{v(x,t)}\frac{\partial}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial}{\partial s_y} := \frac{1}{v(y,t)}\frac{\partial}{\partial y}$$

und die Tangentialvektoren

$$\tau_x := \tau(x,t) := \frac{\partial X}{\partial s_x}(x,t) \qquad \text{und} \qquad \tau_y := \tau(y,t) := \frac{\partial Y}{\partial s_y}(y,t)\,.$$

Die Zweipunkt-Differentiation definieren wir durch

$$(\tau_x \oplus \tau_y)(f) = \tau_x(f) + \tau_y(f) \qquad \text{und} \qquad (\tau_x \ominus \tau_y)(f) = \tau_x(f) - \tau_y(f)$$

für $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$.

(i) Berechne die Ableitungen

$$\tau_x(d)\,, \quad \tau_y(d)\,, \quad (\tau_x \oplus \tau_y)(d)\,, \quad (\tau_x \ominus \tau_y)(d)\,, \quad (\tau_x \oplus \tau_y)^2(d)\,, \quad (\tau_x \ominus \tau_y)^2(d)\,, \quad \frac{\partial d}{\partial t}\,.$$

(ii) Seien X_0 und Y_0 disjunkt. Zeige, dass $X(\mathbb{S}^1, t)$ und $Y(\mathbb{S}^1, t)$ disjunkt für alle $t \in [0,T)$ sind.
Hinweis: Benutze, dass an einem Minimum von d gilt, dass $\xi(d) = 0$ und $\xi^2(d) \geq 0$ für alle $\xi(x,y,t) \in T_{X(x,t)}X(\mathbb{S}^1,t) \bigoplus T_{Y(y,t)}Y(\mathbb{S}^1,t)$ gilt.

(iii) Sei X_0 eingebettet. Zeige, dass $X(\mathbb{S}^1, t)$ eingebettet für alle $t \in [0,T)$ sind.
Hinweis: Benutze (ii) und die Distanzfunktion $d_\varepsilon(x,y,t) = d(x,y,t) + \varepsilon t$.

Abgabe: Bis Donnerstag, 17.05.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.