Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2018
Friederike Dittberner

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Blatt 10

Aufgabe 35. (4 Punkte)
Beweise das Rangtheorem, Theorem 18.16:

Sei $f : M^m \to N^n$ eine Abbildung die in jedem Punkt den Rang k hat. Dann gibt es für jeden Punkt $p \in M$ Karten (U, φ) und (V, ψ) von M bzw. N mit $p \in U$, $f(p) \in V$ und $f(U) \to V$, so dass

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\big(x^1, \ldots, x^m\big) = \big(x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0\big)\,.$$

Hinweis: Benutze die Diffeomorphismen

$$\varphi\big(x^1, \ldots, x^m\big) = \Big(f^1\big(x^1, \ldots, x^m\big), \ldots, f^k\big(x^1, \ldots, x^m\big), x^{k+1}, \ldots, x^m\Big)$$

und

$$\psi^{-1}\big(y^1, \ldots, y^k, y^{k+1}, \ldots, y^m\big) = \Big(y^1, \ldots, y^k, y^{k+1} + \bar{f}^{k+1}\big(y^1, \ldots, y^k\big), \ldots, y^n + \bar{f}^n\big(y^1, \ldots, y^k\big)\Big)$$

für geeignetes $\bar{f}$.

Aufgabe 36. (4 Punkte)
Zeige, dass das Tangentialbündel $T\mathbb{S}^3$ ein triviales Vektorbündel ist.

Aufgabe 37. (4 Punkte)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

(i) Definiere Untervektorbündel.
(ii) Zeige, dass TM ein Untervektorbündel des trivialen Bündels $M \times \mathbb{R}^n$ ist.
(iii) Sei

$$NM := \bigcup_{x \in M} \{x\} \times (T_xM)^\perp$$

die disjunkte Vereinigung der Normalenräume von M.
Finde eine Unterbündelstruktur für NM bezüglich $M \times \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 38. (4 Punkte)
Sei $\Sigma_k \subset B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ eine Folge von eingebetteten, geschlossenen Kurven mit gleichmäßig beschränkter Krümmung, d. h. es existiert ein $C > 0$ sodass $|\kappa_k(p)| \le C$ für alle $p \in \mathbb{S}^1$ und alle $k \in \mathbb{N}$.

Zeige, dass jede Limeskurve Σ_∞ eingebettet ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, 28.06.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.