Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2018
Friederike Dittberner

Übungen zur Vorlesung Graphischer Mittlerer Kümmungsfluß

***Blatt 4***

**Aufgabe 11.** (4 Punkte)
Sei $X_0(\mathbb{S}^2) = M_0 \subset \mathbb{R}^3$ eine Hyperfläche mit $H > 0$. Löse $X : \mathbb{S}^2 \times [0,T) \to \mathbb{R}^3$ den inversen mittleren Kümmungsfluss

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{1}{H}\nu$$

mit Anfangswert $X_0$.

Berechne die Evolutionsgleichung von $g_{ij}$, $h_{ij}$, $\frac{1}{H}$ und $\det(g_{ij})$.

**Aufgabe 12.** (4 Punkte)
Sei $X_0(\mathbb{S}^2) = M_0 \subset \mathbb{R}^3$ eine sternförmige Hyperfläche mit $H > 0$. Löse $X : \mathbb{S}^2 \times [0,T) \to \mathbb{R}^3$ den inversen mittleren Kümmungsfluss $\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{1}{H}\nu$ mit Anfangswert $X_0$. Sei $M_t := X(\mathbb{S}^2, t)$. Dann besagt ein nicht ganz einfach zu zeigenes Resultat, dass $e^{-t/n}M_t$ glatt zu einer Sphäre mit einem Radius $R(M_0) > 0$ konvergiert.

Zeige, dass

$$E(M) := \frac{1}{|M|}\left(\int\limits_M H\,d\mu\right)^2 \geq 16\pi$$

für sternförmige Hyperflächen $M$ mit $H > 0$ gilt.

*Hinweis:* Berechne zunächst $\frac{\partial}{\partial t}E(M_t)$ unter dem inversen mittleren Kümmungsfluss. Glatte Konvergenz liefert hier insbesondere, dass $E\big(e^{-t/n}M_t\big) \to E\big(\mathbb{S}^2_R\big)$ gilt.

**Aufgabe 13.** (4 Punkte)
Let $X : \mathbb{S}^1 \times [0,T) \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung des Curve Shortening Flows $\frac{\partial}{\partial t}X = -\kappa\nu$. Sei $S \in \{\mathbb{S}, \mathbb{R}\}$ und $T_\infty \in \{0, \infty\}$.

Zeige

(i) Es existiert eine Folge von Reskalierungen

$$\big(X_k : I_k \times J_k \to \mathbb{R}^2\big)_{k\in\mathbb{N}}\ ,$$

welche für $k \to \infty$ gleichmäßig und glatt auf kompakten Teilmengen $I \times J \subset S \times (-\infty, T_\infty)$ (mit $0 \in I$) im Definitionsbereich und im umgebenen Raum zu einer maximalen, glatten Lösung $X_\infty : S \times (-\infty, T_\infty) \to \mathbb{R}^2$ konvergiert, die wieder den Curve Shortening Flow erfüllt.

(ii) Für eine Typ-I-Reskalierung um eine Typ-I-Singularität gilt $T_\infty = 0$ und es existiert eine Zeit $\tau_\infty \in \left[-\frac{C_0^2}{4}, -\frac{1}{4}\right]$ so dass

$$X_\infty(0,\tau_\infty) \in B_{3C_0}(0)\,, \quad |\kappa_\infty(0,\tau_\infty)| = 1 \quad \text{und} \quad \sup_{S\times(-\infty,-\delta^2]} |\kappa_\infty| \leq \frac{C_0}{\delta}$$

für alle $\delta < 0$.

(iii) Für eine Typ-II-Reskalierung um eine Typ-II-Singularität gilt $T_\infty = \infty$ und

$$X_\infty(0,0) = 0 \quad \text{ und } \quad \sup_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |\kappa_\infty| = |\kappa_\infty(0,0)| = 1\,.$$

*Hinweis:* Benutze folgendes Resultat: Falls $|\kappa| \leq C_0$ auf $\mathbb{S}^1 \times [0, \bar{T}]$, dann existiert für alle $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ eine Konstante $C_{n,m} = C_{n,m}(C_0, X_0)$ sodass

$$\left| \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{\partial^m \kappa}{\partial s^m} \right| \leq C_{n,m}$$

auf $\mathbb{S}^1 \times [0, \bar{T}]$.

**Aufgabe 14.** (4 Punkte)
Sei $S \in \{\mathbb{S}^1, \mathbb{R}\}$ und $X : S \times (0,T) \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung des Curve Shortening Flow $\frac{\partial}{\partial t} X = -\kappa\nu$. Sei $X_\infty : S \times (-\infty, T_\infty) \to \mathbb{R}^2$ eine Limeslösung nach einer Reskalierung um eine Singularität, wie in Aufgabe 13.

Zeige mit Hilfe von Theoremen 2 und 3:

(i) Es gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma_t} |\kappa|\, ds_t = -2 \sum_{\{\kappa(s,t)=0\}} \left| \frac{\partial \kappa}{\partial s}(s,t) \right|\,.$$

(ii) Seien $\tau_1, \tau_2 \in (-\infty, T_\infty)$ mit $\tau_1 < \tau_2$. Dann gilt

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{\{\kappa_\infty(s,\tau)=0\}} \left| \frac{\partial \kappa_\infty}{\partial s}(s,\tau) \right| d\tau = 0\,.$$

(iii) Es gilt $\kappa_\infty \neq 0$ auf $S \times (-\infty, T_\infty)$. Somit ist die Limeslösung $X_\infty$ entweder strikt konkav oder strikt konvex.

**Theorem 2** (Fatous Lemma)**.** *Sei $(\Omega, \sigma, d\mu)$ ein messbarer Raum und sei $(f_i : \Omega \to [0,\infty))_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge integrierbarer Funktionen mit $f \geq 0$ sodass $\liminf_{i\to\infty} \int_\Omega f_i\, d\mu < \infty$ gilt. Dann gilt auch*

$$\int_\Omega \liminf_{i\to\infty} f_i\, d\mu \leq \liminf_{i\to\infty} \int_\Omega f_i\, d\mu\,.$$

**Theorem 3** (Nullstellen der Krümmung)**.** *Sei $S \in \{\mathbb{S}^1, \mathbb{R}\}$ und $X : S \times (0,T) \to \mathbb{R}^2$ eine eingebettete Lösung des Curve Shortening Flow mit $\kappa \not\equiv 0$. Sei $t_0 \in (0,T)$. Dann gilt für alle $t \in (0, t_0)$, dass die Menge*

$$z(t) = \{p \in S \mid \kappa(p,t) = 0\}$$

*endlich ist falls $S = \mathbb{S}$ und abzählbar falls $S = \mathbb{R}$. Falls an einem Punkt $(p_1, t_1) \in S \times (0, t_0)$ gilt, dass $\kappa(p_1, t_1) = 0$ und $\frac{\partial}{\partial s}\kappa(p_1, t_1) = 0$, dann folgt:*

*(i) Falls $S = \mathbb{S}^1$, dann ist $\#z(t)$ streng monoton fallend für $t \in (t_1, t_0)$.*
*(ii) Falls $S = \mathbb{R}$, dann existiert eine Umgebung $U = [p_1 - \varepsilon, p_1 + \varepsilon] \times [t_1 - \delta, t_1 + \delta]$ so dass*
- *$u(p_1 \pm \varepsilon, t) \neq 0$ für $|t - t_1| \leq \delta$*
- *$u(\,\cdot\,, t + \delta)$ hat höchstens eine Nullstelle in dem Intervall $[p_1 - \varepsilon, p_1 + \varepsilon]$*
- *$u(\,\cdot\,, t - \delta)$ hat mindestens zwei Nullstellen auf dem Intervall $[p_1 - \varepsilon, p_1 + \varepsilon]$.*

**Abgabe:** Bis Donnerstag, 14.06.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.