Oliver Schnürer, Friederike Dittberner Universität Konstanz Sommersemester 2018

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Blatt 2

Aufgabe 5. (4 Punkte)
Der Halbraum $\{x^n > 0\} \subset \mathbb{R}^n$ mit der Metrik
$$\frac{dx_1^2 + \ldots + dx_n^2}{x_n^2}$$
heißt hyperbolischer Raum.

Alternative: Der offene Ball $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ mit der Metrik
$$4\frac{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{\left(1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2\right)^2}$$
heißt ebenfalls hyperbolischer Raum.

Bestimme alle maximalen Geodätischen im hyperbolischen Raum.

Aufgabe 6. (4 Punkte)
Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Folgere aus der Definition $\ddot{\alpha}(t) \in (T_{\alpha(t)}M)^\perp$ und einer gewöhnlichen Differentialgleichung, dass die Geodätischen auf M auch in beliebiger Kodimension nur von der Metrik auf M abhängen und nicht von der Immersion.

Aufgabe 7. (4 Punkte)
Zeige, dass die Schwarzschildsche Metrik
$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$
die Einsteinschen Feldgleichungen im Vacuum
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$$
löst.

Aufgabe * 8. (4 Punkte)
Zeige, dass der räumliche Anteil der Schwarzschildschen Metrik bei $\{t = \text{konstant}\}$
$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$
eine isometrische Inversion am Ereignishorizont $\partial B_{m/2}(0)$ besitzt.

Hinweis: Betrachte einen Schnitt entlang der r-Koordinate und zeige, dass sich dieser als Graph darstellen lässt.

Abgabe: Bis Donnerstag, 03.05.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.