Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2017/2018
Friederike Dittberner

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 2

Aufgabe 5. (16 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offes beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega \subset C^\infty$.

Seien $u_0 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ und $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in C^∞, wobei u_0 strikt konvex und f strikt positiv und konvex in $z \in \mathbb{R}$ sei.

Sei $\underline{u} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ eine strikt konvexe Lösung von

$$\begin{cases} \log\left(\dfrac{\det(D^2 u)}{f(\cdot, u, Du)}\right) \geq 1 & \text{in } \Omega\,, \\ \underline{u} \leq u_0 & \text{in } \Omega\,. \end{cases}$$

Betrachte die parabolische Monge–Ampére-Gleichung

$$\begin{cases} u_t = \log\left(\dfrac{\det(D^2 u)}{f(\cdot, u, Du)}\right) - 1 & \text{in } \Omega \times (0,T)\,, \\ u(\cdot, t) = \underline{u} & \text{auf } \partial\Omega \times (0,T)\,, \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{in } \Omega\,. \end{cases}$$

Formuliere die Inkompatibilitätsbedingung erster Ordnung.

Zeige:

(i) u ist konvex auf $\Omega \times (0,T)$
(ii) C^0-Abschätzungen
(iii) C^1-Abschätzungen:
- tangentiale und normale auf $\partial\Omega$
- normale auf $\partial\Omega$
- in Ω

(iv) C^2-Abschätzungen:
- doppelt tangentiale auf $\partial\Omega$
- gemischt tangential-normale auf $\partial\Omega$
- doppelt normale auf $\partial\Omega$
- in Ω

Abgabe: Bis Montag, 19.11.2018, 15:00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402 oder in der Vorlesung.