

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Blatt 5

Aufgabe 17. (4 Punkte)

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in \Omega$ und g_{ij} eine Metrik auf Ω .

Zeige, dass es eine offene Menge $\hat{\Omega}$ und einen Diffeomorphismus $\varphi : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$ gibt, sodass die zurückgezogene Metrik

$$\hat{g}_{ij} = (\varphi^* g)_{ij} := \varphi_i^k g_{kl} \varphi_j^l$$

in x_0

$$\hat{g}_{ij} = \delta_{ij}, \quad \hat{g}_{ij,k} = 0 \quad \text{und} \quad \hat{\Gamma}_{ij}^k = 0$$

erfüllt.

Aufgabe 18 (Codazzi–Mainardi-Gleichungen). (4 Punkte)

Zeige, dass

$$h_{ij,k} - h_{ik,j} = \Gamma_{ij}^l h_{lk} - \Gamma_{ik}^l h_{lj}$$

gilt, in einem Punkt, in dem $g_{ij} = \delta_{ij}$ gilt,

Aufgabe 19 (Simons' Identität). (4 Punkte)

Zeige, dass

$$\Delta h_{ij} = H_{,ij} + H h_{ik} g^{kl} h_{lj} - |A|^2 h_{ij}$$

gilt, wobei $|A|^2 = h_k^l h_l^k$.

Aufgabe 20 (Hamiltons Trick). (4 Punkte)

Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $u : [a, b] \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion. Dann ist $u_{\max}(t) := \max_{x \in [a, b]} u(x, t)$ lokal Lipschitz in $(0, T)$.

Zeige, dass zu einer differenzierbaren Zeit $t \in (0, T)$

$$\frac{du_{\max}}{dt}(t) \leq \sup \left\{ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) : x \in [a, b] \text{ mit } u(x, t) = u_{\max}(t) \right\}.$$

Hinweis: Benutze die Mittelwertformel und dass jede Lipschitz-Funktion fast überall differenzierbar ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, 24.05.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.