

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Blatt 4

Aufgabe 13. (4 Punkte)

Sei $n = 3$.

- (i) Stelle den Riemannschen Krümmungstensor mit Hilfe des Riccitors und der Metrik dar.
- (ii) Seien λ_i , $i = 1, 2, 3$, die Eigenwerte des Riccitors bezüglich der Metrik. Sei Anti der Raum der antisymmetrischen $(0, 2)$ -Tensoren,

$$\text{Anti} := \{(\eta_{ij})_{ij} : \eta_{ij} = -\eta_{ji} \text{ für alle } 1 \leq i \leq n\}.$$

Betrachte den Endomorphismus $f : \text{Anti} \rightarrow \text{Anti}$ mit

$$f : (\eta_{ij})_{ij} \mapsto (R_{ijkl}g^{kr}g^{ls}\eta_{rs})_{ij}.$$

Zeige, dass f eine wohldefinierte Selbstabbildung ist und bestimme die Eigenwerte von f .

Hinweis: Betrachte zunächst den Fall $g_{ij} = \delta_{ij}$ in einem Punkt.

Aufgabe 14. (4 Punkte)

Finde Karten für den reell projektiven Raum \mathbb{P}^n .

Hinweis: Betrachte offene Umgebungen $U_i = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{P}^n : x_i \neq 0\}$.

Aufgabe 15. (4 Punkte)

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und G eine Gruppe von Diffeomorphismen von M mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) Ist $\text{Id} \neq h \in G$, so besitzt h keinen Fixpunkt.
- (b) Seien $x_n \in M$ und $g_n \in G$ mit $x_n \rightarrow x$, $g_n(x_n) \rightarrow y$ für $n \rightarrow \infty$, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und $g \in G$ mit $g_n = g$ für alle $n \geq n_0$ (die Gruppe G operiert diskontinuierlich auf M)

oder

- (b') G ist endlich.

Definiere eine Äquivalenzrelation " \sim " durch $x \sim y$, falls es ein $g \in G$ gibt mit $g(x) = y$ gibt. Sei $\bar{M} = M/G$ der Quotientenraum bezüglich der Relation.

Zeige:

- (i) Die kanonische Projektion $p : M \rightarrow \bar{M}$ ist eine Überlagerung.
- (ii) Es gibt genau eine differenzierbare Struktur auf \bar{M} , so dass p ein lokaler Diffeomorphismus wird.
- (iii) Weise die Bedingungen (a) und (b) für den folgenden Fall nach: $M = \mathbb{R}^n$ und

$$G = \{g_q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : g_q(x) = x + q \text{ für ein } q \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Aufgabe 16. (4 Punkte)

Zeige, dass die reelle Grassmannsche Mannigfaltigkeit

$$\mathrm{Gr}_k(n) = \{V \subset \mathbb{R}^n : V \text{ ist ein } k\text{-dimensionaler Vektorraum}\}$$

eine Mannigfaltigkeit der Dimension $k(n - k)$ ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, 17.05.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.