Das unbestimmte Integral und die Stammfunktion

Ergänzende Bemerkungen:
Wir wählen zur Einführung des Integrierens den Zugang als Umkehrung des Differenzierens (Bilden der Ableitung). D.h., wir suchen aus der Ableitungsfunktion f'(x) die ursprüngliche Fkt. f(x), also jene Fkt. f(x), deren Ableitung f'(x) ist. Diese ursprüngliche Fkt. bezeichnen wir als **Stammfunktion** und schreiben dafür F(x).
Etwas mathematischer ausgedrückt:

Gegeben ist eine Funktion f(x).
Gesucht ist die zugehörige Stammfunktion F(x), für die gilt: F'(x) = f(x)
Als Schreibweise hat sich seit G. W. Leibniz durchgesetzt: F(x) = $\int f(x)\,dx$ (gesprochen: Integral von f von x nach dx)

1. Bsp.: Gegeben ist die einfache Fkt. f(x) = x.
Gesucht ist $\int f(x)\,dx$. Hier also $\int x\,dx$.
Oder anders formuliert: Welche Fkt. F(x) (die Stammfunktion) ergibt beim Ableiten F'(x) = f(x) = x ?
Lösen durch Probieren:

1. Versuch:	$F(x) = x^2$	$F'(x) = 2x$	passt also nicht
2. Versuch:	$F(x) = x$	$F'(x) = 1$	passt auch nicht
3. Versuch:	$F(x) = x^3$	$F'(x) = 3x^2$	passt ebenso nicht

Am ehesten passt noch das Ergebnis des 1. Versuchs. Wir brauchen aber F'(x) = x, also die Hälfte des Ergebnisses vom 1. Versuch.

4. Versuch:	$F(x) = \frac{x^2}{2}$	$F'(x) = \frac{2x}{2} = x$	das passt jetzt!

Somit $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$, weil die Ableitung der rechten Seite eben x ergibt.

2. Bsp.: Jetzt drehen wir es um. Gegeben ist F(x) = $\frac{x^3}{3}$. Dann ist F'(x) = $\frac{3x^2}{3} = x^2$.
Somit können wir schreiben: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$ D.h., F(x) = $\frac{x^3}{3}$ ist die Stammfunktion von f(x) = x^2.
ABER VORSICHT! Ich behaupte, F(x) = $\frac{x^3}{3} + 2$ sei die Stammfunktion. Die Probe (die Ableitung) ergibt auch hier F'(x) = $\frac{3x^2}{3} = x^2$. Die Konstante 2 hat keinen Einfluss auf die Ableitung, sie fällt beim Ableiten weg. Die Konstante könnte jeden Wert C annehmen und würde wegfallen. Folglich ist jede Fkt. F(x) = $\frac{x^3}{3} + C$ Stammfunktion von x^2.

Darum schreibt man $\boldsymbol{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$ und nennt es das sogenannte **unbestimmte Integral** der Fkt. f.
f(x) … Integrand, x … Integrationsvariable, C … Integrationskonstante, dx … gibt an, nach welcher Variable zu integrieren ist.

Vergleiche dazu die Ausführungen im Buch mit der Kurvenschar, die alle in y-Richtung verschoben sind. (S.192)

Aus den vorigen Versuchen wissen wir schon:

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$
$$\int 1\,dx = \int dx = x + C$$
$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$
$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$
$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

Auf der rechten Seite steht jeweils die Stammfunktion (das unbestimmte Integral). Wenn man diese ableitet (differenziert), bekommt man die Funktion f(x), die jeweils auf der linken Seite als Integrand steht. Das Integrieren ist demnach die Umkehrung des Differenzierens. Auf diese Weise kann auch immer die Probe gemacht werden. Speziell aus den beiden letzten Bsp. kann eine wichtige Regel abgeleitet werden, die zu den sogenannten Grundintegralen gehört.

Ableitung der Potenzfunktion y = x^n (bzw. f(x) = x^n)

$\boldsymbol{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$ Diese Regel gilt für alle n außer -1.

Für diesen Fall haben wir: $\boldsymbol{\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C}$ (Vergleich Differentialrechnung, Ableitung von ln!)

Die weiteren **Grundintegrale** siehe Buch S.194.