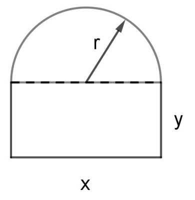
Extremwertaufgaben

Bsp. 4.72c) Timischl, Ing.-Math. 3

Hydraulisch günstiger Kanalquerschnitt in Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis



Vorgaben: A = 1 m² $A := 1$

aus der Skizze ist zu erkennen: r = x/2 $r := \frac{x}{2}$

1. HB formulieren: Der Umfang soll minimal werden. U --> Min.

$$u(x,y) := x + 2 \cdot y + r \cdot \pi \rightarrow x + 2 \cdot y + \frac{\pi \cdot x}{2}$$

Nachdem u von 2 Variablen abhängt, braucht man die NB.

2. NB formulieren: Der Flächeninhalt des Querschnitts ist mit 1 m² vorgegeben.

$$A = x \cdot y + \frac{r^2 \cdot \pi}{2} \rightarrow 1 = \frac{\pi \cdot x^2}{8} + y \cdot x \xrightarrow{solve, y} -\frac{\pi \cdot x^2 - 8}{8 \cdot x} \xrightarrow{simplify} \frac{1}{x} - \frac{\pi \cdot x}{8}$$

Aus der NB wurde zweckmäßigerweise die Variable y ausgedrückt. Warum?
y kommt in der HB nur einmal vor; x kommt in der NB linear und quadratisch vor.

3. NB --> HB (NB in die HB einsetzen, damit ist der Umfang nur noch von einer Variablen (x) abhängig.)

$$u(x) := x + 2 \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{\pi \cdot x}{8}\right) + \frac{\pi \cdot x}{2} \rightarrow x + \frac{\pi \cdot x}{4} + \frac{2}{x} \xrightarrow{simplify} x \cdot \left(\frac{\pi}{4} + 1\right) + \frac{2}{x}$$

4. Von dieser Fkt. u(x) wollen wir die **lokalen Extremwerte berechnen**. Also brauchen wir die **1. Ableitung** u'(x). Diese wird **gleich null gesetzt** und diese Gleichung **nach x gelöst**. Mit der 2. Abl. wird überprüft, ob ein lokales Minimum vorliegt.

$$u'(x) := \frac{d^1}{dx^1} u(x) \xrightarrow{simplify} \frac{\pi}{4} - \frac{2}{x^2} + 1$$

$$u'(x) = 0 \xrightarrow{solve, x} \begin{bmatrix} \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{\pi + 4}} \\ -\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{\pi + 4}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.058 \\ -1.058 \end{bmatrix}$$

$$u''(x) := \frac{d^2}{dx^2} u(x) \rightarrow \frac{4}{x^3}$$

Die 2. Abl. ist für positive x-Werte immer > 0.

5. Antwort und Interpretation (Beziehung zwischen x und y; weitere Größen berechnen und vergleichen)

Der minimale Umfang wird bei x = 1,058 m erreicht und beträgt dann ca. 3,78 m.

$$u_{min} := u(1.058) = 3.779$$

$x := \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{\pi + 4}}$ $\qquad y := \frac{1}{x} - \frac{\pi \cdot x}{8}$ $\qquad y \xrightarrow{simplify} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi + 4}}$

Die Seite y ist also halb so lang wie die Seite x.
Oder anders ausgedrückt: Die Gesamthöhe des Kanalquerschnitts ist gleich der Breite!

$x = 1.058 \qquad y = 0.529$

6. Graphische Darstellung der Umfangfunktion u(x) (Zum Verständnis)

$\text{clear}(x)$

$u(x) := x \cdot \left(\frac{\pi}{4} + 1\right) + \frac{2}{x}$