

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

Факультет физики

Пособие

«Термодинамика и молекулярная физика»

Автор курса: Кунцевич А. Ю.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

Москва  
2022

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>1. Лекция 1: Распределение Гиббса. Среднее по распределению. Примеры дискретных и непрерывных степеней свободы.</b>	<b>4</b>
1.1. Основные термины . . . . .	4
1.2. Пример: Распределение Больцмана для одной молекулы . . . . .	6
1.3. Идеальный газ как система независимых подсистем . . . . .	7
1.4. Вопросы усреднения и эргодические системы . . . . .	8
1.5. Примеры дискретных систем . . . . .	8
1.6. Стекло . . . . .	9
1.7. Задачи для решения на семинаре . . . . .	10
1.8. Задачи на дом . . . . .	10
<b>2. Лекция 2. Распределение Максвелла и расчет средних величин для идеального газа.</b>	<b>11</b>
2.1. Распределение Максвелла . . . . .	11
2.2. Число ударов молекул о единичную площадку и давление . . . . .	13
2.3. Вращательное движение молекул . . . . .	14
2.4. Колебательное движение молекул . . . . .	14
2.5. Задачи для решения на семинаре . . . . .	16
2.6. Задачи на дом . . . . .	16
<b>3. Лекция 3. Флуктуации.</b>	<b>17</b>
3.1. Примеры . . . . .	17
3.2. Флуктуация суммы . . . . .	18
3.3. Центральная предельная теорема . . . . .	18
3.4. Флуктуации макровеличин, связанные с тепловым движением . . . . .	19
3.5. Тепловой(найквистовский) шум резистора . . . . .	19
3.6. Задачи для решения на семинаре . . . . .	21
3.7. Задачи на дом . . . . .	21

## Введение

Семестровый курс основ термодинамики и молекулярной физики является стандартным в программе по общей физике физических специальностей ВУЗов. Изначально на факультете физики НИУ ВШЭ (г. Москва) за основу была взята программа курса, традиционно читавшегося в МФТИ. Устаревание классического курса, обратная связь от студентов, особенности преподавания лабораторных работ и оценки предметов в НИУ ВШЭ побудили к существенной переработке курса и смещению его преподавания на осенний семестр второго года обучения, вместо курса по электричеству, который сейчас читается весной на первом курсе. Впервые данный формат был опробован осенью 2020 года, в условиях санитарных ограничений, так что существенная часть лекций и семинаров прошла в онлайн формате. Курс получил положительные отзывы студентов.

Что было не так с классической программой и побудило автора к переработке курса? Можно выделить несколько причин:

- 1) Термодинамика уходит корнями в 18-19 век, когда был введен обширный понятийный аппарат, пригодный для описания идеального и слабонеидеального газа, процессов теплообмена и тепловых машин, сформулированы “начала” термодинамики. Многие из дискуссий того времени, представляя, безусловно, исторический и теоретический интерес, и отраженные в классических курсах (напр. учебник Д.В. Сивухина) никак не упрощают решения задач и не пригождаются в дальнейшем. Примеры: несколько эмпирических газовых законов, много формулировок 2 начала термодинамики, длинная дискуссия вокруг определения температуры.
- 2) Как правило, термодинамика неплохо проходит в школе. Поэтому, если начинать “по старинке” с расчета КПД тепловых машин, то оказывается, что сильные студенты с данным вопросом прекрасно знакомы, и их интерес к предмету падает.
- 3) Термодинамические потенциалы, наоборот, не знакомы студентам и мало им понятны, что тоже отворачивает слушателей от курса.
- 4) Статистическая физика обычно начинается с распределения Максвелла. Такое преподавание формирует укрепленное ещё в школе ложное представление, будто курс посвящен идеальному газу. Отучение от данного стереотипа и приучение к тому, что идеальный газ - это лишь одна из простейших точно решаемых моделей, становится неизбежной педагогической задачей. Также студент должен понимать, что распределение Максвелла не является первичным, это лишь частный случай гиббсовского распределения.
- 5) Классический набор задач был давно прорешан в решебниках, а доступ к интернету появился у каждого, что сделало решение домашнего задания по стандартному задачку бессмысленным с точки зрения оценивания. Требовались новые задачи.

Соответственно, курс был существенно изменен:

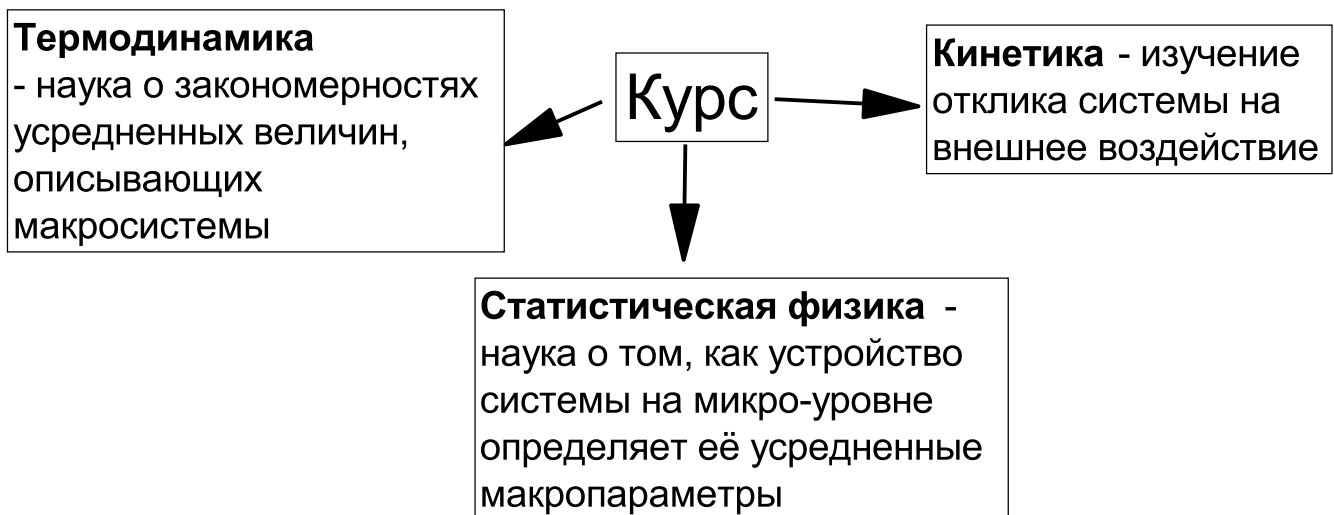
- 1) Статистическая часть была поставлена на первое место в порядке изложения (перед термодинамикой). На самом первом занятии постулируется справедливость распределения Гиббса, которая дает функциональное определение температуры и позволяет с первого семинара начать решать новые для студентов задачи. Еще более важным является то, что распределение Гиббса позволяет “задешево” получить распределение Максвелла и теорему о равномерном распределении, не прибегая к длинным искусственным конструкциям.

- 2) Параллельно с газом (системой с непрерывной степенью свободы) рассматриваются простейшие дискретные системы (набор независимых спинов), чтобы студенты с самого начала уяснили, что термодинамика - это "не только про идеальный газ".
- 3) Нововведение 2022 года: начала кинетики, а именно явление диффузии вводится не в самом конце курса, а как только готов понятийный аппарат, то есть сразу после распределения Максвелла. Это способствует более цельному охвату курса и помогает студенту подойти теоретически подготовленным к лабораторным работам в начале второго модуля.
- 4) В рамках статистики даются определения энтропии и свободной энергии, что подготавливает студентов к усвоению термодинамических потенциалов (учит, что свободная и внутренняя энергия - это не одно и то же). Местами в общем виде, а местами на примерах показывается, что термодинамические определения тепловых величин следуют из статистических. Таким образом, у студента в голове формируется основы данного раздела науки.
- 5) Сразу же после введения термодинамических потенциалов идет тема фазовых переходов (уравнение Клайперона-Клаузиуса), чтобы использовать недавно освоенный аппарат.
- 6) Добавляется теория фазовых переходов второго рода (теория Ландау). Решается модель Изинга в теории среднего поля (микроскопика) и показывается её согласие с теорией Ландау. Данная часть курса вызывает наибольшие трудности у студентов, но мотивирует самых сильных.
- 7) Составлен новый набор задач.

Автор благодарит за многочисленные обсуждения коллектив факультета физики НИУ ВШЭ: В.В. Лебедева, Д.А. Хохлова, Я.В. Фомина, М.И. Банникова, И. Шарыкина, А.В. Шуплецова, С.И. Попеля. Отдельную благодарность выражаю студенту М.И. Блумену за набор первой версии конспекта, ставшей основой для данного пособия, а также декану факультета М.Р. Трунину и руководителю академической программы В.Н. Глазкову за безоговорочную поддержку данного педагогического эксперимента.

# 1. Лекция 1: Распределение Гиббса. Среднее по распределению. Примеры дискретных и непрерывных степеней свободы.

## 1.1. Основные термины



Курс содержит три части, каждой из которых можно дать краткое определение, как показано на схеме.

Приведем пару примеров:

Пример 1: Газ вблизи перехода в жидкое состояние.

Термодинамика: теплоемкость, фазовая диаграмма  $P(T)$ .

Стат. Физика: как термодинамические величины следуют из свойств молекул.

Кинетика: вязкость, теплопроводность, скорость зародышеобразования в переохлажденном газе.

Пример 2: Ферромагнетик вблизи точки Кюри.

Термодинамика: описание фазового перехода 2 рода – восприимчивость и теплоемкость.

Стат. Физика: вывод свойств перехода из микроскопических соображений, модели Изинга, Гейзинберга, среднего поля.

Кинетика: спиновые волны, движение доменных стенок, время релаксации спина.

В дальнейшем также понадобятся следующие определения (здесь – упрощённые, полные можно найти, например в “Теоретической физике” Л. Д. Ландау и Е. М. Лившица):

- Микросостояние – все значения полного набора переменных описывающих систему. (например: идеальный газ – значения координат и скоростей всех молекул; магнетик – значения спина всех частиц.)
- Макросостояние – набор микросостояний системы, характеризующийся средними значениями физических величин (например: давление, объём, средняя энерги запасённая в системе, флуктуация скоростей...).
- Состояние равновесия – макросостояние, в котором все средние значения стабильны во времени.
- Релаксация (термализация)– процесс установления равновесия.

- Время релаксации – время, по прошествии которого можно говорить о равновесии.

Существуют системы, которые никогда не приходят в положение равновесия, например стёкла. Проявляется это в том, что у них термализованы не все степени свободы, в частности нет температуры плавления.

Система, пришедшая в состояние теплового равновесия в своем макросостоянии реализует последовательность микросостояний, пронумерованных индексом  $i$ , вероятность найти систему в каждом из которых  $P_i$  подчиняется распределению Гиббса:

$$P_i = P_0 e^{-E_i/kT}.$$

Данное распределение можно считать функциональным статистическим определением термина “температура” (точное определение появится позже).

Разберемся со смыслом записанного выше распределения. Пусть наша система - газ (воздух) в комнате. Нужно взять микросостояние, описанное всеми координатами и всеми скоростями молекул газа, и посчитать полную энергию. Вероятность этого состояния пропорциональна

$$e^{-E_i/kT}$$

( $P_0$  играет роль коэффициента нормировки). Микросостояния будут чередоваться одно за другим. Для газа в комнате окажется, что чем меньше энергия, тем меньшим количеством способов можно реализовать такое микросостояние. И хотя экспонента в состоянии с меньшей энергией будет больше, малое количество способов приведет к тому, что такие состояния (когда все молекулы практически неподвижны) никогда не осуществляются. В термодинамических макросистемах в основном реализуются состояния вблизи наиболее вероятных значений энергии, которые, в свою очередь, зависят от температуры системы. Есть ли вероятность того, что какая-то из молекул приобретёт релятивистскую скорость? Согласно распределению Гиббса у этого события есть какая-то энергия и вероятность. Но практически это событие невозможно. В случае с молекулой с околосветовой скоростью это можно доказать. Если она возникла в комнате, то она должна была родиться ещё откуда-то. Тогда, после «возврата в прошлое» у нас будет 2 молекулы с околосветовыми практически сонаправленными скоростями, которые должны в определенном месте и времени встретиться. Отмотав время ещё сильнее назад, получим 4 молекулы с большими скоростями, которые должны встретиться в определенных точках в ещё более точно определенный момент и так далее. Таким образом, достижение молекулой околосветовой скорости зависит не только от скорости, но и от цепочки предшествующих крайне маловероятных событий. Вероятность возникновения сверхбыстрой молекулы, следовательно будет меньше, чем следует из распределения Гиббса. То есть распределение Гиббса - это не абсолютная догма, а приближение, работающее именно вблизи наиболее вероятной энергии системы.

В жизни мы привыкли к другому, “термодинамическому” функциональному определению температуры. У нас есть термометр, и мы думаем: “Температура - это то, что измеряет термометр”. Если взять два термометра разных производителей, то их показания скорее всего будут отличаться. Значит, должен существовать “первичный” термометр, по которому можно откалибровать вторичный. В качестве такого термометра в широком диапазоне температур выступает давление разряженного газа. Таким образом **работа практического прибора попадает в зависимость от нашей веры в адекватность модели идеального газа** применительно к данному прибору. Измерение очень малых и очень больших температур при помощи газового термометра становится недоступным, приходится брать другие физические явления, и сшивать показания термометров на разных диапазонах. Возникает проблема т.н. ”теоретической нагруженности эмпирических утверждений”, впервые сформулированная Эрнстом Махом в начале

20 века, и впоследствии разработанная в философии науки Т. Куном, Н. Хэнсоном и П. Фейербаном, К. Поппером в рамках позитивизма и постпозитивизма в середине XX века. Проблема в том, что для ведения экспериментальных измерений мы должны полагаться на веру в работоспособность теорий. Конечно, данная проблема не ограничивается термодинамикой и относится почти ко всем эмпирически наблюдаемым величинам. Метрология путем рассуждений, опытов и многочисленных сравнений доказывает, что тот или иной прибор действительно измеряет температуру, а также оценивает точность и воспроизводимость.

Постулировав распределение Гиббса, мы уходим от дискуссий XIX века о смысле температуры, и сразу же можем начать считать термодинамические средние по макросостоянию. Средним значением  $\bar{A}$  (иногда используют также обозначение  $\langle A \rangle$ ) величины  $A$  по распределению называется

$$\bar{A} = \frac{\sum_i A_i P_i}{\sum_i P_i},$$

где сумма берется по всем микросостояниям системы. Измеряемые величины, как правило, являются средними.

Например: средняя энергия, средняя скорость, средняя флуктуация энергии в заданном объёме, среднее значение концентрации частиц в заданном объеме, среднее значение спина, а также производные величины, например теплоёмкость.

Когда мы пишем знак суммирования, то неявно подразумевается, что существует дискретная переменная. В физике встречаются как дискретные, так и непрерывные переменные. Примерами вторых могут быть: импульс, координаты. Дискретные величины (т.н. квантованные) встречаются в квантовой механике, примером является значение спина или углового момента (см. далее). Непрерывную величину можно рассматривать, как предельный случай дискретной.

## 1.2. Пример: Распределение Больцмана для одной молекулы

Найдем распределение молекулы газа по высоте и положение её центра тяжести. Считаем, что температура не зависит от высоты и равна  $T$ . Для удобства решения будем считать высоту дискретной величиной, как будто бы молекула может находиться только на ступеньках воображаемой лестницы с высотой ступеньки  $h$ .

Энергия молекулы представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергий:

$$E = E_k + mgH_i.$$

Вероятность занять высоту  $H$  определяется распределением Гиббса:

$$P(H) = P_0 e^{\frac{E_k + mgH}{kT}},$$

где  $H = hi$ , тогда

$$\bar{H} = \frac{\sum_i h i e^{\frac{-mgh_i + E_k}{kT}}}{\sum_i e^{\frac{-mgh_i + E_k}{kT}}}$$

Мы по определению записали среднюю высоту. Поскольку кинетическая энергия от высоты не зависит, числитель и знаменатель можно сократить на сумму членов с ней. Далее заметим, что нижний ряд - геометрическая прогрессия, а верхний ряд получается из нижнего дифференци-

рованием по параметру:

$$\bar{H} = \frac{\sum_i h i e^{-\frac{mgh_i}{kT}}}{\sum_i e^{-\frac{mgh_i}{kT}}}, \text{ если ввести обозначения}$$

$$I = \sum_i e^{-\frac{mgh_i}{kT}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{mgh}{kT}}}, \alpha = \frac{mgh}{kT},$$

$$\text{то для производной имеем } \frac{dI}{d\alpha} = h \frac{e^{-\alpha}}{(1 - e^{-\alpha})^2}.$$

$$\text{Соответственно } \bar{H} = \frac{e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}}.$$

Можно свести высоту к непрерывной степени свободы, устремив  $h$  к нулю, тогда:

$$e^{-\alpha} \approx 1 - \alpha$$

$$\bar{H} = \frac{e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} \approx \frac{h}{\alpha} = \frac{kT}{mg}$$

Тот же результат можно получить, перейдя к интегралу и считая высоту непрерывной величиной. Также, как видно из формулы, чем выше температура, тем выше будет и центр тяжести частицы. Из распределения Гиббса (в данном случае называемым распределением Больцмана) хорошо видно, что чем больше высота, тем разреженней газ. Существует простой опыт с трубкой горящего газа, демонстрируемый на лекции и прямо иллюстрирующий данное явление.

### 1.3. Идеальный газ как система независимых подсистем

Идеальный газ - система не взаимодействующих друг с другом частиц. Это простое, ёмкое и важное определение.

Обычно указывается ещё и нулевой объём частиц, но поскольку частицы не взаимодействуют, их объём роли не играет. На языке вероятностей (обозначаемых буквами  $P$ , от английского probability) отсутствие взаимодействия означает:

$$P(\text{частица 1 в сост. A и частица 2 в сост. B}) = P(\text{частица 1 в сост. A}) \times P(\text{частица 2 в сост. B})$$

Для невзаимодействующих частиц энергия системы равна сумме энергий:

$$E = E_1 + E_2$$

Согласно определению распределения Гиббса для системы из двух частиц вероятность такого микросостояния, где первая частица находится в своем состоянии  $A$ , а вторая - в состоянии  $B$  равна:

$$P(1A, 2B) \propto e^{-\frac{E_1}{kT}} e^{-\frac{E_2}{kT}} = e^{-\frac{E}{kT}}$$

То есть в идеальном газе каждая частица имеет своё распределение, при этом они “не чувствуют” друг друга. Энергии складываются, вероятности перемножаются.

Идеальный газ является удобной моделью для вычислений различных величин, но физически с ним есть проблема - из-за отсутствия взаимодействия он никогда не должен приходить в состояние равновесия. Предположим, что в идеальном газе оказалась релятивистская частица. Она будет вечно летать, искажать распределение, но никогда не перераспределит свою энергию между всеми. Для установления термодинамического равновесия таким образом **необходимо** взаимодействие частиц.



## 1.4. Вопросы усреднения и эргодические системы

Когда мы выполняем усреднение по вероятностям, у многих мог возникнуть вопрос: а по какой переменной физически берётся среднее? Неявно - по времени, то есть можно считать, что микросостояния в термодинамическом равновесии сменяют друг друга, и если подождать достаточно долго, то система пробежит по достаточному числу микросостояний, так что появится устойчивая средняя величина. Ещё можно взять среднее по ансамблю (реализациям). Как будто бы приготовили одновременно большое количество  $N$  одинаковых систем, в каждой одновременно посчитали величину и усреднили по ним.

Например, какова средняя скорость молекул в комнате? Можно взять одну молекулу и следить за ней (по показаниям секундомера/спидометра и определять скорость). А можно взять 1000 молекул, “сфотографировать их”, и поскольку молекулы можно считать независимыми реализациями, то из усреднения по ним можно найти скорость. Когда усреднение по ансамблю и времени даёт один и тот же ответ, мы говорим, что система **эргодическая**.

Теперь приведем простой пример неэргодической системы: Открылось казино. Правила такие: играть можно только на все деньги. Подбрасывается идеальная монета (шанс выпадения орла равен шансу выпадения решки и оба равны 50 процентам). Если выпадает орёл, то у участника сумма увеличивается в 1,5 раза, а если решка - умножается на 0,5.

В это казино пришёл ансамбль. У каждого музыканта из ансамбля было ровно 100 рублей. Тогда, после одного раунда примерно половина из них будет иметь по 150 рублей, а вторая половина - по 50. Казалось бы, заведение получило нулевую прибыль (ведь усреднение по ансамблю показывает равенство притока денег от музыкантов и оттока). Но каждый из участников ансамбля делает ещё ходы. Если человек сыграл  $N$  раз (пусть  $N$  - чётное), то он выйдет из казино в среднем с  $1,5^{\frac{N}{2}} 0,5^{\frac{N}{2}} \cdot 100 = (1 + 0,5)^{\frac{N}{2}} (1 - 0,5)^{\frac{N}{2}} \cdot 100 = (1^2 - (0,5)^2)^{\frac{N}{2}} \cdot 100$  рублями, что явно меньше 100. Сыграв достаточное количество раз, с высокой вероятностью игрок разорится.

Как видно, усреднение по времени и по ансамблю дало разный результат, что и является примером неэргодической системы. Неэргодическая система не находится в равновесии. Примером неэргодической системы из физики являются стекла, аморфные системы, в которых пусть очень редко, но происходят переключения.

В основном, конечно, исследуемые в физике системы эргодические.

## 1.5. Примеры дискретных систем

О простейшей дискретной системе можно думать как о монетке, которая поворачивается “орлом” или “решкой” с вероятностями, определяемыми распределением Гиббса. Природа такой системы, конечно, квантовая, но для статистической физики это не имеет значения: важно, что есть разные состояния с разными энергиями. Примером дискретной системы является электрон в атоме. Как известно, электроны занимают дискретные уровни. Если мы будем смотреть на атом со стороны распределения Гиббса, мы должны сказать, что центр масс атома испытывает непрерывное движение как целое, плюс к энергии добавляется дискретная энергия движения электрона относительно центра масс. Если в атоме 1 электрон, то распределение Гиббса скажет, с какой вероятностью какой уровень будет заполнен. Наибольшая (практически 100%) вероятность будет у электрона на самом нижнем уровне. Это связано с тем, что температура вокруг - комнатная (300 K), а потенциальный барьер, который нужно преодолеть, соответствует примерно 100 000 K. Если температуру поднять (например внутри Солнца около  $10^6$  K), то электрон, конечно, будет на всех состояниях, но с ещё большей вероятностью оторвётся и покинет атом: ведь количество состояний свободного электрона несоизмеримо больше.

Объект типа атома можно реализовать в твердотельных структурах, обычно полупроводниковых. Он называется квантовой точкой и представляет собой включение одного полупро-

водника малых размеров в другой. Размеры таких объектов сильно больше, чем у атомов, а энергии - сильно меньше. Электрон на донорной примеси в полупроводнике также будет иметь дискретные энергетические состояния. Характерная величина энергии электрона в обычном атоме (Ридберг,  $\sim 14000$  К) составляет  $\sim me^4/(\hbar\epsilon_0\epsilon)^2$ , где  $m$  - масса электрона,  $\hbar$  - постоянная планка,  $e$  - заряд электрона,  $\epsilon$  - диэлектрическая проницаемость среды, а характерный размер атома (боровский радиус)  $(\hbar\epsilon_0\epsilon)^2/(me^2)$ . Поскольку в полупроводниках  $\epsilon^2$  - на порядок-два больше, чем у вакуума, то у электрона, локализованного вблизи примеси или на квантовой точке размеры гораздо больше атома, а энергии связи - гораздо меньше.

Одной из самых удобных дискретных систем является спин. Спином обладают большинство элементарных частиц. Его рисуют как стрелочку. В квантовой механике можно выбрать базис, в котором состояние спина  $1/2$  (наименьшее нетривиальное значение) представляется так: он может смотреть либо вверх, либо вниз. Замечателен для физиков спин тем, что им можно управлять через связанный с ним магнитный момент. То есть, если прикладывать к нему магнитное поле, можно увидеть, что энергия спина, направленного по полю, становится меньше, а направленного против - возрастает. Когда спины приходят в тепловое равновесие, они термализуются по Гиббсу. Другой способ управлять спином - поглощение циркулярно поляризованного фотона. Одиночный спин - вполне реализуемый объект в атомных газах и в полупроводниках. Электрон и протон обладают одинаковыми спинами (то есть механическими моментами), но магнитный момент у **электрона** примерно в 2000 раз больше. Магнитное поле величиной в 1 Т расщепляет два состояния (спин по полю и против поля) у электрона приблизительно на 1К (в случае спина ядра - на 3 порядка меньше).

## 1.6. Стекло

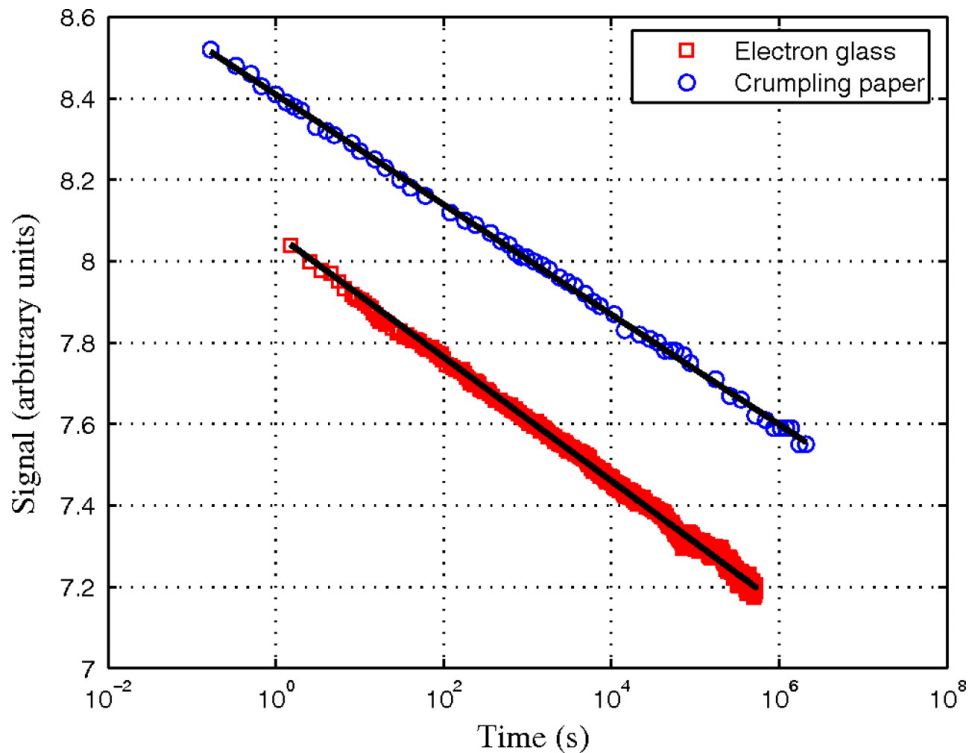
Стёкла, то есть не термализованные аморфные тела, конечно, не ограничиваются привычными нам материалами на основе  $\text{SiO}_2$ . Бывают электронные стекла, спиновые стекла, реализующиеся в различных твердых телах. Чтобы понять их аморфный характер, нужно следить за сопротивлением системы, или за нейтронной диффрактограммой, если речь идет о спинах. Также стекловое поведение демонстрируют сильно деформированные полимерные мембраны. Обычная термализуемая система, если её вывести из положения равновесия возвращается в него, как правило по экспоненте

$$\Delta A(t) = \Delta A_0 e^{-t/\tau},$$

где  $\tau$  - время релаксации. Стекло “плывет” постоянно. Этот процесс связан с тем, что оно состоит из нанокристалликов, в которых есть ближний порядок. Наиболее энергетически выгодным состоянием, конечно же был бы единый большой монокристалл с дальним порядком. Но у атомов слишком мала кинетическая энергия, чтобы в такой порядок встать. Иногда, в результате флуктуаций отдельный атом на границе нанокристалла приобретает достаточную кинетическую энергию, чтобы поменять свое расположение. Он может встать в такой же порядок так, как в соседнем нанокристалле, а потом в результате подобной флуктуации - встать обратно. Если одно из положений более выгодное, то постепенно именно в него будут перемещаться атомы, согласно распределению Гиббса. Как следствие, для стекол характерна не экспоненциальная релаксация, а логарифмическая

$$\Delta A(t) = \Delta A_0 \ln(t/\tau)$$

Нетрудно видеть, что хотя такая релаксация и замедляется со временем, в равновесие система не приходит никогда (см. пример релаксации сопротивления пленки оксида индия и толщины скомканной мембраны на рисунке из обзора <https://www.pnas.org/content/109/6/1850> ).



### 1.7. Задачи для решения на семинаре

- 1) Рассмотреть распределение Гиббса для двухуровневой системы (спин в магнитном поле, имеющий два уровня  $-\mu B$  и  $+\mu B$ ). Найти вероятности заполнения нижнего уровня и верхнего, посчитать среднюю энергию в нескольких случаях: предел  $T = 0$ , предел  $T \rightarrow \infty$ , случай  $T < 0$  (инверсия населённости). Посчитать теплоемкость такой системы как производную энергии по температуре, рассмотрев те же самые предельные случаи.
- 2) Считая атмосферу изотермической, уравнение молекулярно-кинетической теории известным из школьного курса, найти массу атмосферы напрямую и через распределение Больцмана.
- 3) Найти среднюю энергии одномерной частицы с законом дисперсии  $E = 0.5p^2/m$ , (фактически это одномерное распределение Максвелла). Обратить внимание на полученный результат, фактически являющийся теоремой о равнораспределении энергии по степеням свободы.
- 4) Квантовый гармонический осциллятор - дискретная система эквидистантных уровней  $E_0(n+1/2)$ , в которой частица может занимать любой из уровней. Найти среднюю энергию и отдельно рассмотреть предел высоких температур.

### 1.8. Задачи на дом

Срок сдачи для групп БФ3221 и БФ3222 — 12 сентября 14:39, для групп БФ3223 и БФ3224 — 12 сентября 16:19.

- 1) Моль одноатомного газа с молярной массой  $M$  находится в однородном поле тяжести с ускорением  $g$  при температуре  $T$  в сосуде высотой  $H$ . Определить добавку к теплоемкости из-за гравитационных эффектов (теплоёмкость вычисляется как производная от энергии

газа по температуре). Получить приближенный ответ для случаев  $mgH \ll k_B T$  и  $mgH \gg k_B T$ . Нарисовать график добавки к теплоёмкости от температуры  $\Delta C(T)$ .

- 2) При температуре  $T$  найти среднее значение энергии частицы, которая движется в одномерном пространстве. Энергия частицы зависит от “вектора” импульса по закону  $E(\mathbf{p}) = c|p_x|$  ( $p_x$  — проекция импульса на единственную ось пространства,  $c$  — постоянная скорость).
- 3) Термализованная частица со спином 1 в магнитном поле  $B$  может находиться в одном из трёх состояний, энергии которых равны  $-MB$ ,  $0$ ,  $+MB$ . При какой температуре вероятность того, что частица находится в самом низком по энергии состоянии составляет 99 %?
- 4) В квантовой механике состояние вращающегося тела задаётся при помощи пары квантовых чисел:  $L$  — “модуль” момента, и  $M$  — проекции момента. Допустимые значения  $L$  — целые числа от 0 (включительно) до  $+\infty$ . При заданном  $L$  допустимые значения  $M$  — целые числа от  $(-L)$  до  $(+L)$  включительно, то есть всего  $(2L + 1)$  значений. Энергия состояния зависит только от  $L$  и равна  $E_L = \hbar^2 L(L + 1)/(2I)$ , где  $\hbar$  — приведённая постоянная Планка,  $I$  — момент инерции вращающегося тела. Написать точное выражение в виде ряда для средней энергии вращательного движения при температуре  $T$  (просуммировать по всем  $L$  и по всем  $M$ ). Найти приближённые выражения для суммы ряда в пределах низких и высоких температур. Построить график зависимости средней энергии от температуры.
- 5) Два одинаковых макроскопических набора одинаковых двухуровневых систем каждый по отдельности были приведены в равновесие. Один набор при температуре  $T$ , а другой при температуре  $-T$ . После этого их полностью изолировали от окружающего мира и привели в тепловой контакт друг с другом. Какая температура установится в получившемся наборе?

## 2. Лекция 2. Распределение Максвелла и расчет средних величин для идеального газа.

### 2.1. Распределение Максвелла

В данной главе рассматривается идеальный газ термализованных частиц. Как было показано ранее, одинаковые невзаимодействующие частицы будут иметь одно и то же распределение по скоростям. Зависимость энергии от импульса в физике принято называть **законом дисперсии**. Для всех газов с высокой точностью можно считать закон дисперсии квадратичным:

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m}.$$

Данное предположение может быть несправедливо, если речь идет о частицах в твердом теле (где закон дисперсии может быть практически произвольным) или частицах, движущихся с околосветовыми скоростями ( $E = c\sqrt{p^2 + m^2 c^2}$  и как частный случай — для частиц без массы  $E = pc$ ). Отметим, что данное распределение изотропно, энергия зависит от модуля, но не от направления импульса.

Частица будет распределена по состояниям согласно распределению Гиббса  $P = P_0 e^{-\frac{E}{kT}}$ .

Наиболее существенным является то, что заполнение импульсного (фазового) пространства происходит однородно. Данное свойство будет точно доказано в квантовой механике, и следует из того, что координата и импульс - сопряженные величины.

Рассматриваем случаи разной размерности. В одномерном случае вероятность найти частицу с импульсом, лежащем в промежутке  $p_{1x} < p < p_{x2}$  равна:

$$P(p_{1x} < p < p_{x2}) = \frac{\int_{p_{x1}}^{p_{x2}} e^{\frac{-p^2}{2mkT}} dp}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-p^2}{2mkT}} dp}$$

Нижний интеграл называется Гауссовым:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

В одномерном случае существуют два направления импульса (вперед и назад), обладающие одинаковой энергией. Чтобы записать вероятность частице иметь энергию в определенном интервале, мы должны сделать замену  $p = \sqrt{2mE}$  и умножить интеграл на 2, для учета положительного и отрицательного направлений:

$$P(E_1 < E < E_2) = \frac{\int_{p_{x1}}^{p_{x2}} e^{\frac{-p^2}{2mkT}} dp}{\sqrt{2\pi mkT}} = 2 \frac{\int_{E_1}^{E_2} e^{\frac{-E}{kT}} d\sqrt{E}}{\sqrt{\pi kT}}$$

Рассмотрим 2D случай. Мы говорим о вероятности найти частицу в области фазового пространства  $S_p$ , всё фазовое пространство обозначим  $S$ :

$$P(S) = \frac{\int_{S_p} e^{\frac{-p_x^2 - p_y^2}{2mkT}} dp_x dp_y}{\int_S e^{\frac{-p_x^2 - p_y^2}{2mkT}} dp_x dp_y} = \frac{\int_{S_p} e^{\frac{-p_x^2 - p_y^2}{2mkT}} dp_x dp_y}{2\pi mkT}$$

Т. к. нижний интеграл берётся по двум независимым друг от друга величинам, он равен произведению уже известных нам (см. предыдущий пункт про 1D). Зачастую верхний интеграл нужно брать по энергии, которая зависит от модуля скорости. Это позволяет упростить интегрирование, перейдя к полярным координатам. В случае круговой симметрии мы можем также выполнить замену:

$$p_x^2 + p_y^2 = p^2 = 2mE.$$

Тогда интеграл по фазовому пространству легко переписывается через энергию.

$$P(S) = \frac{\int 2\pi p e^{\frac{-E}{kT}} dp}{2\pi mkT} = \int e^{-\xi} d\xi,$$

где  $\xi = \frac{E}{kT}$ . Множитель  $2\pi p dp = \pi d(2mE)$  по смыслу означает полоску состояний с примерно одинаковой энергией, а математически - проинтегрированный по углу якобиан преобразования к от декартовых к полярным координатам.

По аналогии с двумерным можно рассмотреть и трехмерный случай. Разница заключается в том, что в качестве элемента полоски с примерно одинаковой энергией выступает сфера толщиной  $dp$  и объемом, соответственно  $4\pi p^2 dp$ :

$$P(S) = \frac{\int_{S_p} e^{\frac{-p_x^2 - p_y^2 - p_z^2}{2mkT}} dp_x dp_y dp_z}{(2\pi mkT)^{3/2}} = \frac{\int 4\pi p^2 e^{\frac{-p^2}{2mkT}} dp}{(2\pi mkT)^{3/2}} = \frac{\int 2\pi E^{1/2} e^{\frac{-E}{kT}} dE}{(\pi kT)^{3/2}}$$

Полученное выражение называют распределением Максвелла. Сам по себе подсчет вероятности несет мало физического смысла, так как поставить эксперимент по прямой проверке данного соотношения не просто. Гораздо важнее то, что зная распределение Максвелла, можно посчитать измеряемые величины, которые являются средними. Рассмотрим среднюю по модулю скорость (то есть отношение  $p/m$ ) молекул трёхмерного случая :

$$\bar{v} = \frac{1}{(2\pi mkT)^{3/2}} \int_0^\infty \frac{p}{m} 4\pi p^2 e^{-\frac{p^2}{2mkT}} dp = \left| \xi = \frac{p^2}{2mkT} \right| = \frac{4kT}{(2\pi mkT)^{1/2}} \int_0^\infty \xi e^{-\xi} = \frac{4kT}{(2\pi mkT)^{1/2}} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sqrt{\frac{kT}{m}}$$

Вычислим теперь среднеквадратичную скорость, то есть корень из среднего квадрата скорости, и убедимся, что она отличается от средней. Для начала, вычислим просто средний квадрат скорости:

$$\overline{v^2} = \frac{1}{(2\pi mkT)^{3/2}} \int_0^\infty \frac{p^2}{m^2} 4\pi p^2 e^{-\frac{p^2}{2mkT}} dp$$

Воспользуемся фактами:

$$\frac{d^n}{d\alpha^n} \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \int_0^\infty x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \frac{d^n}{d\alpha^n} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\overline{v^2} = \frac{4\pi}{m^2 (2\pi mkT)^{3/2}} \frac{3\sqrt{\pi} (2mkT)^{5/2}}{8} = \frac{3kT}{m}$$

Тогда:

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \frac{(3kT)^{1/2}}{m^{1/2}}$$

График распределения вероятности некой функции по Максвеллу принимает вид "колокольчика". Взяв производную от подынтегральной функции можно получить наиболее вероятную скорость, равную:  $v_{mp} = \frac{(2kT)^{1/2}}{m^{1/2}}$  Рассмотрим более простой способ получения среднего квадрата скорости:

$$\overline{v^2} = \frac{\int_{-\infty}^\infty dp_x \int_{-\infty}^\infty dp_y \int_{-\infty}^\infty dp_z e^{-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mkT}} \left( \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{m^2} \right)}{(2\pi mkT)^{3/2}}$$

Поскольку все направления равноправны, можно взять лишь один интеграл в числителе и умножить его на три. Тогда:

$$\overline{v^2} = \frac{3kT}{m}$$

## 2.2. Число ударов молекул о единичную площадку и давление

Теперь решим две задачи: есть идеальный газ и площадка площадью  $S$ . Сначала посчитаем число молекул, ударяющихся о неё. Пусть время наблюдения равно  $\tau$ . Если площадка достаточно большая, нам важно лишь перпендикулярное движение частичек. Частица, летящая к стенке, имеет скорость  $v_x$  и импульс  $p_x$ . За время наблюдения в стенку врежутся частицы, находящиеся на расстоянии не больше  $l_x = \frac{p_x}{m} \tau$ . Объем равен  $V = l_x S$ . Понятно, что число частиц содержит все частицы, нас же интересует только та часть, которая имеет подходящий по направлению импульс:  $dN = nV \frac{dp_x e^{-\frac{p_x^2}{2mkT}}}{(2\pi mkT)^{1/2}}$ , где  $n$  - концентрация, а  $\frac{e^{-\frac{p_x^2}{2mkT}}}{(2\pi mkT)^{1/2}}$  - вероятность.

Подставим все величины в  $dN$  и подсчитаем полное число частиц:

$$N = \int_0^\infty \frac{\tau p_x S dp_x e^{-\frac{p_x^2}{2mkT}}}{(2\pi mkT)^{1/2} m} = \frac{\tau n S (kT)^{1/2}}{(2\pi m)^{1/2}} = mnS\tau \frac{\bar{v}}{4}$$

Теперь посчитаем давление, как суммарный импульс (равный двойному импульсу  $p_x$  для упругого отскока от стенки) переданный молекулами площадке площадью  $S$  за время  $\tau$ :

$$p = P\tau S = nkTS \int_0^\infty \frac{\tau 2p_x^2 dp_x e^{-\frac{p_x^2}{2mkT}}}{(2\pi mkT)^{1/2}}$$

Данный интеграл очевидно берется и получается знакомый ответ:

$$P = nkT$$

### 2.3. Вращательное движение молекул

Вращательное движение молекул, в отличие от поступательного, является ограниченным. Поэтому, если момент импульса при вращении вокруг соответствующей оси мал, для описания вращательного движения необходимо применять язык квантовой механики, а само вращательное движение будет квантоваться.

Классическое описание можно применять при достаточно высоких температурах, больших чем расстояния между вращательными уровнями (которые как правило составляют Кельвины - десятки Кельвин), в частности при комнатной температуре. Когда речь идет о молекуле, например двухатомной молекуле водорода, в отличии от макроскопических тел, при вращении молекулы вокруг своей оси она переходит между физически неразличимыми состояниями, а значит данной степени свободы у неё нет. Поэтому когда считается её энергия, нужно разделить энергию на энергию движения центра масс и вращательную

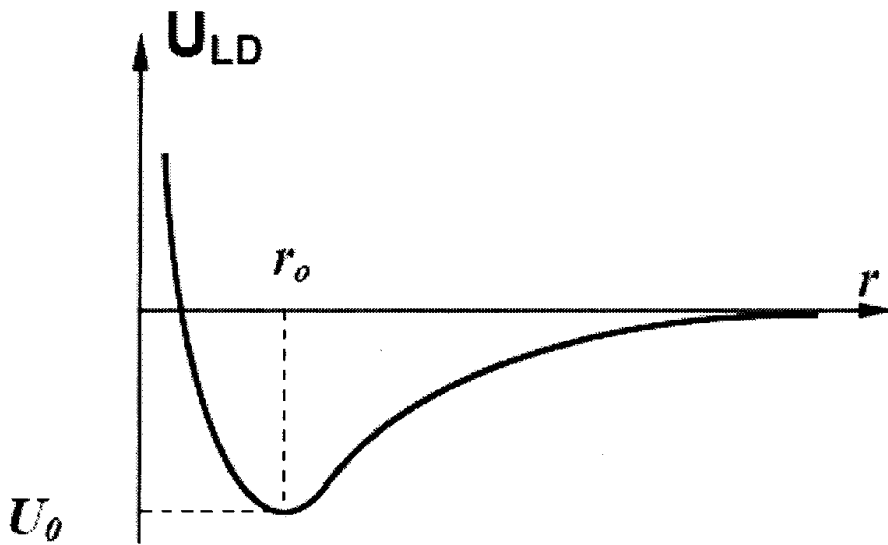
$$E = \frac{p_{cm}^2}{2m} + \frac{L^2}{2I}.$$

Поскольку вращательная степень свободы описывается двумя углами, связанная с ней кинетическая энергия, является квадратичной формой двух скоростей. Эту форму можно диагонализировать и выделить две угловых переменных (степени свободы). На каждую из этих степеней свободы приходится средняя энергия  $kT/2$ , следовательно полная энергия будет  $5/2kT$ . Трёх (и более) атомная молекула, как и твердое тело задатся тремя угловыми переменными (если её атомы не лежат на одной прямой), из-за чего  $E = 3kT$ .

### 2.4. Колебательное движение молекул

Связи между атомами в молекуле устанавливаются так, что система приходит в положение, близкое к минимуму энергии. Принято моделировать зависимость энергии от расстояния между молекулами потенциалом Леннарда-Джонса (см. рисунок). Данный потенциал очень важен для качественного понимания многочисленных физических явлений и объектов: теплового расширения, газа Ван-дер Ваальса, теплоемкости, диффузии атомов в твердых телах и т.д. Не обсуждая сейчас конкретную функциональную форму потенциала, отметим несколько основных его свойств:

а) при значительном сближении атомы расталкиваются, что связано с сильным непосредственным перекрытием электронных облаков



б) на больших расстояниях потенциальная энергия взаимодействия асимптотически стремится к нулю

в) есть область минимума энергии, вблизи которой потенциал приближенно можно считать квадратичным, как в гармоническом осцилляторе, но более точное рассмотрение, конечно, выявляет ангармонизм.

Как рассматривалось в домашней задаче, если зависимость энергии от координат и импульсов имеет вид

$$E = p^2/2m + \kappa x^2/2,$$

то предельные случаи будут качественно различны:

а) температура много меньше  $\hbar\sqrt{\kappa/m}$  - квантовый случай, осциллятор не возбужден, энергия, связанная с его возбуждением даже на самый низкий уровень будет экспоненциально мала  $\hbar\sqrt{\kappa/m} \cdot e^{-\hbar\sqrt{\kappa/m}/kT}$  и не внесет вклад в теплоемкость

б) температура много больше  $\hbar\sqrt{\kappa/m}$  - классический случай. По теореме о равнораспределении и кинетическая, и потенциальная энергии дадут по  $kT/2$  в среднюю энергию молекулы (итого  $kT$ ), а соответственно добавят  $k$  в теплоемкость.

На практике оказывается, что энергии  $\hbar\sqrt{\kappa/m}$  в газах составляют до 1000 К. Соответственно, теплоемкость  $C_V$  газов из двух (или более) атомов не стабилизируется на значениях  $5/2k$  (или  $3k$ , соответственно) на молекулу, а постепенно увеличивается с температурой.

При решении задач по общей физике, содержащих условия, близкие к нормальным, принято пренебрегать колебательной степенью свободы. Теплоемкость является плавной функцией температуры и несет лишь косвенную информацию о вращательных и колебательных степенях свободы. Более прямую информацию можно получить при помощи различных методов спектроскопии. Например спектроскопия комбинационного рассеяния, когда энергия кванта света частично тратится на возбуждение кванта вращения или колебания прямо дает значения энергий. Другой вариант — возбуждение электронов в молекулах на высокие энергетические уровни с последующей эмиссией фотона и релаксацией молекулы в возбужденные состояния. При этом в спектре возникает сдвиг линий эмиссии (реплики).

Когда ковалентные (или какие-нибудь другие) связи объединяют атомы в твердое тело (кристалл), то оказывается, что существует много разных вариантов коллективного колебательного движения атомов в решетке (звуковых волн или фононов), каждый из типов которых может иметь свою энергию. Подсчетом энергии и теплоемкости фононной системы занимаются на



курсе физики конденсированного состояния (3 курс).

## 2.5. Задачи для решения на семинаре

- 1) Оценить долю частиц в водороде при комнатной температуре, которая имеет скорость больше первой космической.
- 2) В сосуде с газом имеется малое отверстие в вакуум. Посчитать среднюю энергию частиц, вылетающих в это отверстие. Используя полученное решение, найти зависимость температуры от давления в газе, пренебрегая теплоемкостью сосуда.
- 3) Если между двумя сосудами одинакового объема, заполненных разными газами (водород и азот) при одинаковом давлении и температуре проделать малое отверстие, как будет меняться давление в сосудах со временем? Дать качественное объяснение явлению.
- 4) Получить уравнение состояния трёхмерного релятивистского газа.

## 2.6. Задачи на дом

Срок сдачи для групп:

БФ3221: вторник 18 сентября 14:39;

БФ3222: вторник 26 сентября 14:39;

БФ3223: вторник 26 сентября 16:19;

БФ3224: вторник 18 сентября 16:19;

- 1) Для частиц с линейным законом дисперсии  $E = cp$  (это соответствует газу ультрарелятивистских частиц) в трёхмерном пространстве, термализованных при температуре  $T$ , найти:
  - а) значение импульса с наибольшей плотностью вероятности;
  - б) значение среднего по модулю импульса;
  - в) среднеквадратичное значение импульса.
- 2) Найти вероятность того, что скорость молекулы в термализованном газе по абсолютной величине меньше 0.1 от средней по модулю скорости.
- 3) Найти давление двумерного газа концентрацией  $n$  при температуре  $T$  с распределением Максвелла для двух типов закона дисперсии:
  - а)  $E = cp$
  - б)  $E = p^2/(2m)$

Примечание: в двумерной системе давление - это сила, действующая на единицу длины края, соответственно размерность не такая как в трёхмерной.

- 4) В тонкостенном сосуде, помещённом в вакуум, имеется очень малое отверстие, на которое извне направляется параллельный пучок двухатомных молекул массой  $m$ , летящих с одной и той же скоростью  $v_0$ , перпендикулярной плоскости отверстия. Концентрация молекул в пучке равна  $n_0$ . Найти среднюю скорость  $\bar{v}$ , концентрацию молекул  $n$  и температуру  $T$  газа в сосуде в установившемся равновесном состоянии. Вращательной энергией молекул во влетающем в отверстие извне пучке пренебречь.

- 5) Для того, чтобы осуществить напыление золота на поверхность кремниевой пластины в вакуумной установке, золотой шарик диаметром  $d = 2$  мм нагревают до температуры  $T = 1700$  °С. Пластина холодная, находится на расстоянии  $D = 10$  см от центра золотого шарика и расположена нормально падающему потоку. Сколько нанометров золота покроет пластину за одну минуту, если давление его насыщенных паров при данной температуре равно  $P_0 = 1$  мм.рт.ст.? За какое время шарик золота испарится целиком? Примечание: можно считать, что в напылённой на пластину плёнке атомы золота располагаются с той же плотностью числа частиц  $n$ , что и в шарике. Также поперечные размеры пластины много меньше расстояния до шарика, так что слой напылённого вещества можно считать однородным.

### 3. Лекция 3. Флуктуации.

Когда мы говорили о макросостоянии системы, мы считали что оно описывается средними термодинамическими величинами. В то же время микросостояния имеют отклоняющееся значение макропараметров (например энергии, импульса, числа ударов за определенный промежуток времени). Это означает, что происходят флуктуации средних величин.

Когда события нескоррелированы, их вероятности перемножаются:

$$\overline{A_i B_k} = \overline{A} \overline{B}$$

$$\overline{A_i + B_k} = \overline{A} + \overline{B}$$

Введем понятийный аппарат, связанный с флуктуирующими величинами. Среднеквадратическое отклонение или флуктуация  $\delta A$  случайной величины  $A$  определяется так:

$$\delta A^2 = \overline{(A - \overline{A})^2}$$

По определению, флуктуацию можно посчитать, зная статистику (Гиббсову) системы:

$$\delta A^2 = \frac{\sum_i (A_i - \overline{A})^2 p_i}{\sum_i p_i}$$

Преобразуя данное выражение (раскрывая скобки), получим:

$$\delta A^2 = \overline{A^2} - \overline{A}^2$$

#### 3.1. Примеры

Рассмотрим пример со спином (в нулевом магнитном поле)  $\pm 1/2$ , который изучался на первом семинаре в качестве примера двухуровневой системы. Вероятность каждого из состояний равна  $1/2$ , значит средний спин равен нулю. В то же время квадрат спина одинаков для обеих ориентаций и равен  $1/4$ . Значит для среднеквадратического отклонения имеем:

$$\overline{S^2} - \overline{S}^2 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

Посчитаем теперь среднеквадратическое отклонение для непрерывно распределенной величины, - энергии распределённой по Максвеллу **одной** частицы. Задача сводится к вычислению её средней энергии и квадрата средней энергии. Для средней энергии результат известен.

$$\overline{E} = \frac{3kT}{2}$$

Для нахождения квадрата можно продифференцировать максвелловский интеграл по параметру  $1/2mkT$  :

$$\overline{E^2} = \frac{1}{2m \cdot (2\pi mkT)^{3/2}} \int_0^\infty 4\pi p^2 e^{-\frac{p^2}{2mkT}} (p^2)^2 dp = \frac{1}{2m \cdot (2\pi mkT)^{3/2}} \times \frac{3}{2} \pi^{3/2} \times [(2mkT)^{5/2}]' = \frac{15(kT)^2}{4}$$

Среднеквадратическое отклонение:

$$\sqrt{\overline{E^2} - \overline{E}^2} = kT \sqrt{\frac{15}{4} - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}} kT$$

### 3.2. Флуктуация суммы

Следующим усложнением является идеальный газ, то есть суперпозиция независимых частиц(или спинов). В этом случае, интересующая нас флуктуирующая величина является суммой элементарных составляющих  $B = A_1 + A_2 + \dots + A_N$ . Нужно найти среднеквадратическое отклонение этой величины. В простейшем случае одинаковых частиц средние величины и флуктуации величин  $A$  одинаковы. Тогда:

$$\begin{aligned} \overline{B} &= N\overline{A} \\ \overline{B^2} &= \overline{A_1^2} + \overline{A_2^2} + \dots + \overline{A_N^2} + \overline{A_1 A_2} + \dots + \overline{A_1 A_N} + \overline{A_2 A_1} + \dots + \overline{A_N A_1} + \dots = \\ &= \overline{A_1^2} + \overline{A_2^2} + \dots + \overline{A_N^2} + N(N-1)\overline{A}^2 = N\overline{A^2} + N(N-1)\overline{A}^2 \\ \sqrt{\overline{B^2} - \overline{B}^2} &= \sqrt{N\overline{A^2} + N(N-1)\overline{A}^2 - N^2\overline{A}^2} = \sqrt{N(\overline{A^2} - \overline{A}^2)} \end{aligned}$$

То есть если случайная величина, связанная с одной частицей имела среднеквадратическое отклонение, а мы взяли  $N$  одинаковых частиц, для которых интересуемся суммарной величиной, то необходимо просто умножить ответ для одной частицы на  $\sqrt{N}$ . Если нас интересует не абсолютное значение флуктуации, а её относительная величина  $\delta A/\overline{A}$ , то для величины  $B$  имеем

$$\delta B/\overline{B} = \sqrt{N}\delta A/(N\overline{A}) = 1/\sqrt{N} \cdot \delta A/\overline{A}$$

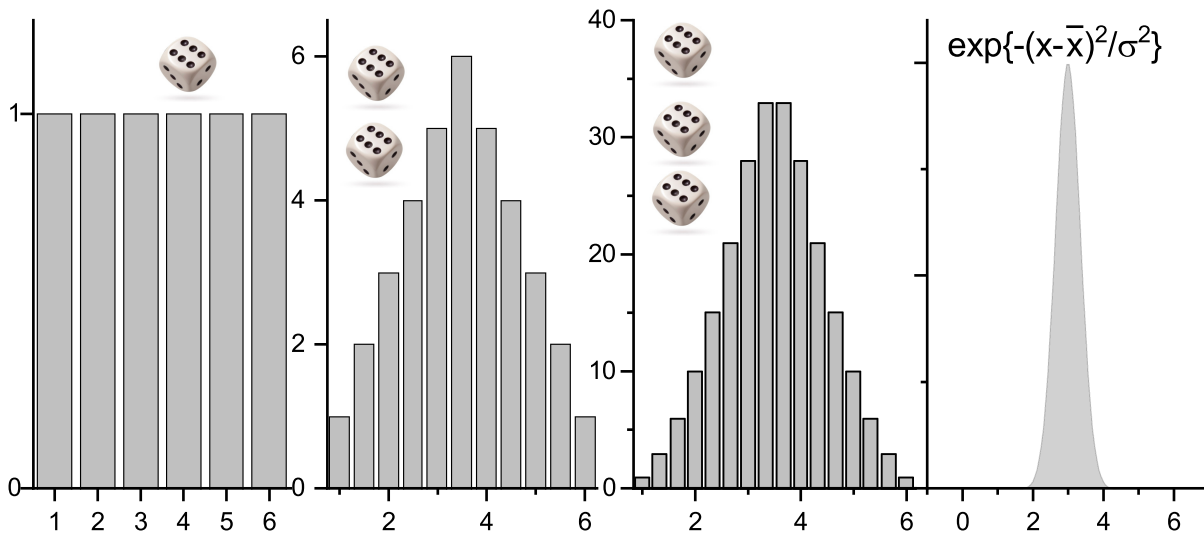
Таким образом, в большом ансамбле труднее возникнуть аномалиям.

Теперь посчитаем среднеквадратическую флуктуацию числа частиц в идеальном газе. Пусть у нас есть большой объём, скажем комната. Выберем в нём маленький объёмчик  $V$ . Вероятность найти каждую частицу в нём равна  $p = \frac{V}{V_{all}}$ . Среднее количество частиц очевидно и равно  $\overline{N} = N_{all}p$ . Средний квадрат одной частицы:  $\overline{n^2} = p \cdot 1^2 + (1-p) \cdot 0^2$ ;  $\overline{n^2} - \overline{n}^2 = p - p^2$ . Тогда по только что выведенной формуле:  $\overline{N^2} - \overline{N}^2 = N(p - p^2)$ . Но поскольку взятый объём был очень маленьким, можно пренебречь  $p^2$ . Тогда среднеквадратическое отклонение равно  $\sqrt{Np}$ , то есть корню из среднего числа частиц в объёме.

### 3.3. Центральная предельная теорема

Методы теории вероятностей позволяют сделать математически более сильное утверждение, чем то, что среднеквадратичное отклонение пропорционально корню из числа частиц. Речь идет о распределении величины, являющейся суммой большого количества независимых одинаково распределённых случайных величин подобно рассмотренным выше примерам, т.н. центральная предельная теорема.

Разберем на примере игрального кубика (см. рисунок выше). Бросим кубик один раз. Имеется шесть возможных равновероятных исходов (левая картинка) - от 1 до 6. Среднее значение



будет, очевидно 3.5. Среднее квадратичное отклонение по определению  $\sqrt{2(0.5^2 + 1.5^2 + 2.5^2)/6}$ , что составляет  $\sqrt{35/12} \approx 1.71$ . Теперь бросим кубик два раза и посмотрим на распределение суммы (на второй картинке сумма по оси абсцисс уже поделена на число бросаний, то есть 2). Есть события (выпадение двух единичек или двух шестерок, средними суммами 1 и 6, соответственно), которые реализуются единственным способом. Чем ближе сумма на кубиках к 7, тем больше способов. Наиболее вероятный вариант реализуется 6 способами ( $1 + 6, 2 + 5, 3 + 4, 4 + 3, 5 + 2, 6 + 1$ ). Нетрудно проверить, что среднее значение не изменилось, а среднее квадратичное отклонение уменьшилось в  $\sqrt{2}$  раз.

льше обсуждает распределение вокруг среднего значения.

В пределе многих бросаний кубика, как утверждает центральная предельная теорема, распределение устремится к Гауссову. При этом среднее значение равно среднему значению за одно бросание, а дисперсия равна среднему квадратичному отклонению, деленному на  $\sqrt{N}$ .

Важно, что центральная предельная теорема не зависит от деталей распределения. Например, если на той грани кубика, где была одна точка, мы нарисуем вторую, изменятся среднее значение и дисперсия, но предельное поведение сохранится.

### 3.4. Флуктуации макровеличин, связанные с тепловым движением

Помимо флуктуаций, обусловленных числом частиц и рассмотренных выше существуют флуктуации макровеличин достаточно малых объектов, обусловленные тепловым движением напрямую. Например, может тепловым образом дрожать нанопроволока, маленькая пружинка или струна баллистического гальванометра. Для оценки амплитуд таких колебаний нужно пользоваться теоремой распределения по степеням свободы:  $\overline{E} = \dots \overline{\alpha x^2} \dots$ , где  $\overline{\alpha x^2} = \frac{kT}{2}$ .

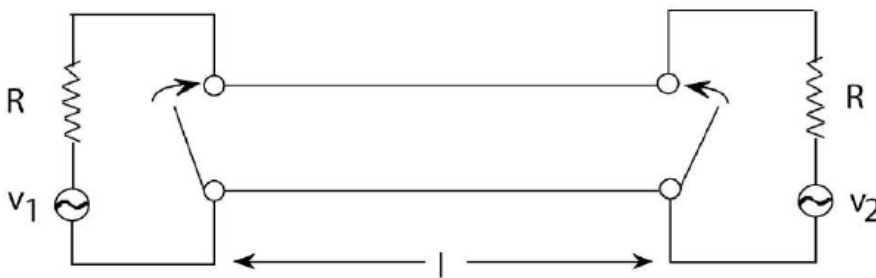
Благодаря тепловому шуму невозможно сделать сверхчувствительные механические приборы, так как маленькое дребезжание стрелки не позволяет измерять малые величины.

### 3.5. Тепловой(найквистовский) шум резистора

Примером теплового шума является шум напряжения в резисторе в силу случайного блуждания в нем электронов. Конденсаторы и индуктивности (бездиссипативные приборы) не шумят. Чтобы посчитать этот шум нужно вспомнить длинные линии и повторить рассуждения Найквиста.

По длинной линии может распространяться электромагнитный сигнал со скоростью света. Существует понятие волнового сопротивления, размерность которого  $\sqrt{\frac{L}{C}}$ . То есть можно представить себе длинную линию как множество соединённых конденсаторов и катушек. Волна по линии идет бесконечно, подчиняясь волновому уравнению с учетом граничных условий на краях. Если на конце сопротивление, равное волновому, то волна уйдёт в него без отражения.

Шум резистора можно представить эквивалентной схемой, как шумовую ЭДС, включенную последовательно с нешумящим резистором. Этот шум зависит только от величины сопротивления. Мысленно подключим к резистору длинную линию, волновое сопротивление которой согласовано с резистором. Тогда весь шумовой сигнал без отражения будет уходить в длинную линию. Если бы линия была бесконечно длинной и идеальной, она бы высасывала из резистора энергию и он бы стал остывать. Но если линия конечной длины, то от противоположного конца начнется отражение, и тепловая энергия вернется в резистор, частично потратившись на возбуждение электромагнитных колебаний в длинной линии. Теперь "заткнем" длинную линию с другого конца точно таким же согласованным резистором при той же температуре. Получается полное согласование. Сигнал идет с одного источника, приходит на резистор с другой стороны и рассеивается там в виде тепла. Навстречу идет такой же шумовой сигнал, который рассеивается в первом источнике. В соответствии с правилами Кирхгофа, половина шумового ЭДС падает на первом резисторе, половина на втором.



Количество энергии, которое приходит в единицу времени в длинную линию от первого резистора равно  $\frac{V_{noise}^2}{4R}$ , такое же - от второго, где  $V_{noise}$  - ЭДС шума. Одновременно в длинной линии оказывается локализовано  $\frac{V_{noise}^2}{2R} \times l/c$  энергии в виде двух встречно бегущих шумовых волн. Здесь  $l$  - длина линии,  $c$  - скорость света, она же скорость сигнала, соответственно  $l/c$  - время пролета сигнала по линии. При этом все элементы, и резисторы и линия находятся в равновесии при температуре  $T$ . Теперь мгновенно отсоединим одинаковые резисторы от идеальной длинной линии. В линии осталась запасенная электромагнитная энергия.

Электромагнитное поле внутри линии может быть разложено на волны, бегущие с разными частотами. Но поскольку линия стала замкнутой, она, подобно гитарной струне для звука, становится резонатором для этих волн. Граничные условия на оборванных концах зануляют ток (создают узлы тока и магнитного поля), а для напряжения, наоборот - создают пучности. Запасенная энергия разложится по волнам:  $U = U_i \cos(\pi x/l + \omega_i t)$ . Электромагнитная энергия, как известно, пропорциональна квадрату поля. А значит на каждую собственную волну в среднем приходится по теореме о равномерном распределении  $kT$  - по  $kT/2$  на электрическую и магнитную энергию. Условие резонанса с целым числом полуволн  $\omega_i = \frac{\pi i c}{l}$ . Расстояние по частоте между собственными волнами  $\pi c/l$ .

Приравняем шум в полосе частот  $\Delta\omega$ , приходящийся на одну моду резонатора и  $kT$ . То есть чем больше полоса частот, тем больше шумового сигнала в нее войдет:

$$\frac{l V_{noise}^2}{2 R c} \frac{\pi c / l}{\Delta \omega} = k T.$$

Удивительным образом все свойства резонатора, а именно скорость света и длина, сокращаются.  $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$  - по определению. Переходим от  $\omega$  к  $f$  потому что последняя величина является экспериментально измеряемой. В итоге получаем:

$$V_{noise}^2 = 4kTR\Delta f$$

### 3.6. Задачи для решения на семинаре

- 1) *Подсчёт флуктуации потока вылетающих частиц из отверстия (в физтеховском задачнике есть задачи про 2 концентрических отверстия)*

**9.18** Атомный пучок Не вылетает в высокий вакуум из камеры с давлением  $P = 10^{-4}$  Тор и  $T = 300$  К через систему из двух коаксиальных круглых отверстий с  $d = 0.2$  мм разделенных расстоянием  $l = 1$  см. Оценить интенсивность пучка  $j$  (число частиц, прошедших через второе отверстие в секунду). Какова будет относительная флуктуация числа частиц в импульсах с продолжительностью  $\tau = 10^{-3}$  с?

- 2) *Подсчет флуктуации заряда (в физтеховском задачнике задача про фотоэлемент).*

**9.26** Вакуумный фотоэлемент имеет в режиме насыщения чувствительность к свету  $K = 0.12$  А/Вт. Какова относительная флуктуация числа электронов выбиваемых при падении на фотоэлемент светового потока мощностью  $\Phi = 1.3 \cdot 10^{-11}$  Вт? Время регистрации  $\tau = 10^{-3}$  с.

- 3) *Подсчёт флуктуации радиуса фуллерена (задачи из физтеховского задачника)*

**9.42** Упругие свойства молекулы  $C_{60}$  описываются моделью, в которой она представляет собой тонкостенную сферу из вещества с модулем Юнга алмаза  $E = 10^{12}$  Па. Определить относительную среднеквадратичную флуктуацию радиуса Фуллерена, если ее равновесное значение  $r = 0.36$  нм, а толщина стенки  $\Delta = 0.1$  нм. Температура  $T = 300$  К, форма фуллерена при флуктуациях не меняется.

- 4) Какой шум от резистора  $r$  в полосе частот  $\Delta f$  будет измерять вольтметр с входным сопротивлением  $R$ , соответствующим его шумовому сопротивлению.

### 3.7. Задачи на дом

Срок сдачи для групп:

БФЗ221: вторник 26 сентября 14:39;

БФЗ222: пятница 29 сентября 14:39;

БФЗ223: пятница 29 сентября 16:19;

БФЗ224: вторник 26 сентября 16:19;

- 1) Спин  $1/2$  локализованного электрона в магнитном поле с индукцией  $B$  аналогичен двухуровневой системе с энергиями состояний  $+\mu_B B$  и  $-\mu_B B$  ( $\mu_B$  — магнетон Бора), а соответствующие им проекции спина на направление магнитного поля равны  $-1/2$  и  $+1/2$  соответственно. Найти зависимость среднеквадратичной флуктуации проекции спина на направление магнитного поля от индукции магнитного поля  $B$  и нарисовать график этой зависимости. Найти асимптотики в пределах больших и малых полей.

- 2) В чистой комнате лаборатории содержится 3000 микрочастиц на один кубометр. Датчик частиц фирмы Dylos (США) <http://www.dylosproducts.com/ornodecproair.html> при помощи лазера сканирует пространство объемом 0.01 кубический фут, периодически обновляя воздух в нём при помощи вентилятора. Какова относительная флуктуация числа частиц пыли, показываемая датчиком, если они распределены по комнате равномерно?
- 3) Железная ( $\rho = 7.9 \text{ г/см}^3$ ) иголка массой  $m = 0.02 \text{ г}$  может плавать на поверхности воды. Магнитную восприимчивость иголки для оценки можно принять равной  $\mu = 50$ . Из-за наличия у Земли магнитного поля горизонтальной составляющей  $B = 0.5 \text{ Гаусс}$  иголка в спокойной воде разворачивается по полю и представляет собой компас. Найти среднеквадратичную тепловую флуктуацию угла ориентации иголки.
- 4) Найти относительную флуктуацию количества молекул воздуха в объеме комнаты ( $50 \text{ м}^3$ ), которые имеют скорость больше  $5\sqrt{2kT/m}$  при нормальных условиях ( $P = 1 \text{ атм}$ ,  $T = 300 \text{ К}$ ).
- 5) Наноамперметр имеет входное сопротивление  $100 \text{ Ом}$  и находится при комнатной температуре, к нему подключен резистор сопротивлением  $50 \text{ Ом}$ , находящийся при температуре жидкого азота ( $77 \text{ К}$ ). Каков будет среднеквадратический шум тока, измеряемый данным прибором в полосе частот шириной  $10 \text{ Гц}$ ?