Листок IV. Непрерывные распределения вероятности

Зоопарк распределений. *Равномерное распределение* на отрезке $[\mu-\Gamma,\mu+\Gamma]$ характеризуется функцией плотности вероятности $p(x)=1/2\Gamma$ при $|x-\mu|\leqslant\Gamma$.

Треугольное распределение на отрезке $[\mu-\Gamma,\mu+\Gamma]$ характеризуется функцией плотности $p(x)=\max(1/\Gamma-|x-\mu|/\Gamma^2,0)$.

Экспоненциальное распределение с параметром $\mu>0$ характеризуется функцией плотности вероятности $p(x)=\frac{1}{\mu}\mathrm{e}^{-x/\mu}$ при $x>0$.

Распределение Коши с параметрами (μ,Γ) характеризуется функцией плотности вероятности

$$p(x)=\frac{\Gamma}{\pi}\frac{1}{\Gamma^2+(x-\mu)^2}.$$

Нормальное распределение с параметрами (μ,σ) характеризуется функцией плотности вероятности

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Совместное распределение пары случайных величин. Совместное распределение пары случайных величин X, Y характеризуется совместной плотностью вероятности $p_{X,Y}(x,y)$ на $\mathbb{R}^2$. Если случайные величины X, Y независимы, то их совместная плотность распадается в произведение плотностей: $p_{X,Y}(x,y)=p_X(x)\cdot p_Y(y)$.

При взаимно однозначном преобразовании случайных величин $X,Y\mapsto U,V$, задаваемом функциями $U=f(X,Y)$, $V=g(X,Y)$, плотность вероятности преобразуется по формулам замены переменной

$$\mathrm{d}\,\mathsf{P}=p_{U,V}(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\underbrace{p_{U,V}(f(x,y),g(x,y))\left|\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\right|}_{p_{X,Y}(x,y)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=p_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Если преобразование не является взаимно однозначным, может потребоваться суммирование значений плотности по разным прообразам (x_i,y_ui) точки (u,v). Аналогично выполняется замена переменной и в одномерном случае.

IV.1. Найдите математическое ожидание, дисперсию и характеристическую функцию распределения случайной величины, равномерно распределенной на $[\mu-\Gamma,\mu+\Gamma]$.

IV.2. (а) Случайная величина X равномерно распределена на $[0,1]$, а $Y=-\ln X$. Найдите функцию плотности вероятности случайной величины Y. (б) Тот же вопрос для случайной величины, распределенной по нормальному закону $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}$, если $Y=X^2$.

IV.3. Найдите плотность совместного распределения компонент вектора (X,Y), где $X=R\cos\Phi$, $Y=R\sin\Phi$, если случайные величины R и Φ независимы, причем R распределена на $[0,1]$ с плотностью $p(r)=2r$, а Φ равномерно распределена на $[0,2\pi]$.

IV.4. Найдите плотность совместного распределения компонент вектора (X,Y), где $X=R\cos\Phi$, $Y=R\sin\Phi$, если случайные величины R и Φ независимы, причем $R=\sqrt{-2\ln Z}$, Z равномерно распределена на $[0,1]$, а Φ по-прежнему равномерно распределена на $[0,2\pi]$.

IV.5. Найдите функцию плотности вероятности суммы двух случайных величин X, Y, обладающих заданной совместной плотностью распределения $p_{X,Y}(x,y)$. Рассмотрите частный случай совместного распределения двух случайных величин, распределенных по Коши с параметрами $(0,\Gamma)$.

IV.6. Найдите функцию плотности вероятности, математическое ожидание, дисперсию и характеристическую функцию распределения суммы двух независимых случайных величин, распределенных равномерно на $[\mu-\Gamma,\mu+\Gamma]$.

IV.7. По какому закону распределена сумма двух независимых величин X и Y, распределенных экспоненциально с параметрами λ и μ соответственно?

IV.8. Случайные величины X и Y независимы, а их функции плотности вероятности суть $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$. Выведите аналоги формулы свертки для функций плотности вероятности (а) произведения XY; (б) частного X/Y.