Листок V. Непрерывные распределения вероятности и характеристические функции

Характеристической функцией случайной величины X с функцией плотности вероятности $p_X(x)$ называется

$$\varphi_X(s) = \mathsf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}sX} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}sx} p(x)\,\mathrm{d}x.$$

Пусть X, Y — две независимых случайных величины, принимающих значения на числовой прямой, $p_X(\cdot)$ и $p_Y(\cdot)$ — их функции плотности вероятности, а $\varphi_X(s)$ и $\varphi_Y(s)$ — характеристические функции распределения. Функция плотности вероятности и характеристическая функция распределения суммы $X+Y$ имеют вид

$$p_{X+Y}(x) = \int_{\mathbb{R}} p_X(t) p_Y(x-t)\,\mathrm{d}t, \qquad \varphi_{X+Y}(s) = \varphi_X(s)\varphi_Y(s).$$

Зоопарк распределений. *Равномерное распределение* на отрезке $[\mu-\Gamma, \mu+\Gamma]$ характеризуется функцией плотности вероятности $p(x) = 1/2\Gamma$ при $|x-\mu| \leqslant \Gamma$.

Треугольное распределение на отрезке $[\mu-\Gamma, \mu+\Gamma]$ характеризуется функцией плотности $p(x) = \max(1/\Gamma - |x-\mu|/\Gamma^2, 0)$.

Экспоненциальное распределение с параметром $\mu > 0$ характеризуется функцией плотности вероятности $p(x) = \frac{1}{\mu}\mathrm{e}^{-x/\mu}$ при $x > 0$.

Распределение Коши с параметрами (μ, Γ) характеризуется функцией плотности вероятности $p(x) = \frac{\Gamma}{\pi}\frac{1}{\Gamma^2 + (x-\mu)^2}$.

Нормальное распределение с параметрами (μ, σ) характеризуется функцией плотности вероятности

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

V.1. По какому закону распределена сумма двух независимых величин X и Y, распределенных экспоненциально с параметрами λ и μ соответственно?

V.2. Найдите функцию плотности вероятности случайной величины $Y = 1/X$, если случайная величина X распределена по Коши с центром при $x = 0$.

V.3. Случайные величины X и Y независимы и одинаково распределены по нормальному закону с $\mu = 0$. Найдите функцию плотности вероятности их отношения X/Y.

V.4. Найдите характеристическую функцию, математическое ожидание и дисперсию суммы двух независимых случайных величин, распределенных равномерно на $[\mu-\Gamma, \mu+\Gamma]$.

V.5. Характеристическая функция имеет вид $\varphi(s) = \mathrm{e}^{-\Gamma|s|}$, где $\Gamma > 0$. Найдите соответствующую функцию плотности вероятности.

V.6. (а) Пусть $\varphi(s) = \max(1 - |s|/\Gamma, 0)$. Покажите, что это характеристическая функция некоторого распределения вероятности, и вычислите соответствующую функцию плотности распределения. (б) Нарисуйте график функции

$$\varphi(s) = \frac{1}{2}\max(1-|x|, 0) + \frac{1}{2}\max\left(1 - \frac{|x|}{2}, 0\right)$$

и докажите, что она является характеристической для некоторого распределения вероятности. Чему равна его плотность?

V.7. Случайное испытание совершается следующим образом: сначала разыгрывается целочисленная случайная величина N, распределенная по Пуассону с параметром λ ($p_n = \mathrm{e}^{-n}\lambda^n/n!$), а затем находят сумму N независимых одинаково распределенных случайных величин с характеристической функцией φ. Найти характеристическую функцию полученной суммы.

V.8. Что можно сказать о распределении вероятности, характеристическая функция которого периодична с периодом a?