

1. Найдите производную по параметру:

$$(a) \int_y^{y^2} e^{-x^2} dx, \quad (b) \int_{a+y}^{b+y} \frac{\sin xy}{x} dx, \quad (c) \int_{\sin y}^{\cos y} \cos(\sqrt{xy}) dx.$$

2. Применяя метод дифференцирования по параметру, вычислить интеграл:

$$(a) \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 - \sin^2 x) dx, \quad a \geq 1, \quad (b) \int_0^\pi \frac{\ln(1 + a \cos x)}{\cos x} dx,$$

3. Применяя теорему Фубини, вычислить интеграл:

$$(a) \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \quad (b) \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx.$$

4. (Формулы Фруллани). Пусть функция  $f$  непрерывна на  $(0, +\infty)$ . (i) Пусть функция  $f(x)/x$  интегрируема на  $[\delta, +\infty)$  для всякого  $\delta > 0$  и существует предел  $f(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ .

Докажите равенство

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0+) \ln \frac{b}{a}.$$

(ii) Пусть функция  $f(x)/x$  интегрируема около нуля и существует предел  $f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

Докажите равенство

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = -f(+\infty) \ln \frac{b}{a}.$$

5. Вычислите интегралы:

$$(a) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx, \quad (b) \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} dx, \quad (c) \int_0^{+\infty} \frac{b \sin ax - a \sin bx}{x^2} dx.$$

6. Дифференцируя по параметру, вычислить интеграл  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\beta x} dx$ . Вычислить  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  (обосновать предельный переход при  $\beta \rightarrow 0$ ).

7. Вычислите интегралы:

$$(a) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx, \quad (b) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^5(ax)}{x^5} dx, \quad (c) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x \sin ax}{x} dx.$$

8. Определить область существования и выразить через гамма и бета функции следующие интегралы:

$$(a) \int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx, \quad (b) \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx, \quad (c) \int_0^\infty \frac{x^p \ln x}{1+x} dx, \quad (d) \int_a^{a+1} \ln \Gamma(x) dx.$$

9. Найти преобразование Фурье функций: (a)  $f(x) = 1$  при  $x \in [a, b]$  и  $f(x) = 0$  вне  $[a, b]$ . (b)  $f(x) = e^{-|x|}$ , (c)  $f(x) = 1/(1+x^2)$ , (d)  $f(ax+b)$ .