Домашнее задание №2

Задача 1

Рассмотрим движение частицы с постоянным 4-ускорением в ПВ из начала координат с нулевой начальной скоростью $\boldsymbol{v}_0 = 0$: пусть её мировая линия, параметризованная интервалом $s = c\tau$, задается функцией $x^\mu(s)$. Выберем СО, где ускорение направлено вдоль Ox, тогда имеем уравнение

$$\left(w^0\right)^2 - \left(w^1\right)^2 = -K^2 = \text{const}; \quad \underline{w} = \left(w^0, w^1\right) = \frac{d\underline{u}}{ds} = \frac{d^2\underline{x}}{ds^2}$$

Найдите решение на траекторию $\underline{x} = (x^0, x^1)\,(s)$. Какую кривую второго порядка оно образует в плоскости Otx? Составьте её соответствующее каноническое уравнение из $x^0(s)$, $x^1(s)$.

Указание. Для решения д/у воспользуйтесь гиперболической подстановкой для вектора 4-скорости $\underline{u}(s) = (\cosh\phi(s), \sinh\phi(s))$ и перейдите к рассмотрению $\phi(s)$.

Напоминание (см. §7-1.1): при замене координат

$$\underline{x}' = \hat{\Lambda}\underline{x} \quad \longleftrightarrow \quad x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$$

контравариантное правило преобразования у тензоров (для „индексов сверху") происходит через свертку с элементами матрицы $\hat{\Lambda}$:

$$A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}, \quad \Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}},$$

в то время как ковариантное правило преобразования (для „индексов снизу") происходит через свертку с элементами обратной к $\hat{\Lambda}$ матрицы:

$$B_{\mu} = B_{\nu} \mathit{\Delta}^{\nu}{}_{\mu}, \quad \mathit{\Delta}^{\nu}{}_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}, \text{ т.е. } \Lambda^{\mu}{}_{\nu} \mathit{\Delta}^{\nu}{}_{\lambda} = \delta^{\mu}_{\lambda} \leftrightarrow \hat{\Lambda}\hat{\mathit{\Delta}} = \hat{1}$$

Здесь и далее элементы тензора ранга 2 с любым типом индексов будем записывать явно через матрицу $(\ldots)_{\mu\nu}$, где индекс μ отвечает за строки, а ν - за столбцы.

В общем случае, тензор ранга (r, s) как совокупность элементов, описываемых комплектом из r „нижних индексов" и s „верхних индексов", при смене координат преобразуется сверткой независимо по каждому индексу по соответствующему правилу:[1]

$$T'^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_r} = \Lambda^{\alpha_1}{}_{\beta_1} \ldots \Lambda^{\alpha_s}{}_{\beta_s} \mathit{\Delta}^{\nu_1}{}_{\mu_1} \ldots \mathit{\Delta}^{\nu_r}{}_{\mu_r} T^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_r}.$$

[1] здесь, как мы обсуждали, порядок следования индексов вообще говоря важен.

Задача 2

Вам даны контравариантные вектор A^μ (тензор ранга 1) и тензор $T^{\mu\nu}$ (ранга $(0,2)$):

$$[T^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{\mu\nu} \quad , \quad A^\mu = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Найдите:

а) векторы A_μ, $B^\mu = T^{\mu\nu}A_\nu$, и тензоры $T^\mu_{\ \nu} = g_{\nu\lambda}T^{\mu\lambda}$, $T_\mu^{\ \nu} = g_{\mu\lambda}T^{\lambda\nu}$, $T_{\mu\nu} = g_{\lambda\mu}T^\lambda_{\ \nu} = g_{\lambda\mu}g_{\sigma\nu}T^{\lambda\sigma}$ (выпишите элементы в виде соответствующих матриц, где μ нумерует строки, а ν - столбцы);

б) свертки $A^\mu A_\mu$, $T^\mu_{\ \mu}$, $T^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$.

Задача 3

а) Покажите инвариантность (т.е. что после такого преобразования координат мы перейдем к тензору с такими же элементами) четырехмерного символа Кронекера $\delta^\mu_\nu = \left(\hat{1}\right)_{\mu\nu}$ относительно произвольного преобразования Лоренца $\underline{x}' = \hat{\Lambda}\underline{x}$ (например, буст или поворот).

б) Вычислите свертку $\delta^\alpha_\beta \delta^\beta_\gamma \delta^\gamma_\alpha$.

Задача 4

Покажите инвариантность тензоров ниже относительно буста Лоренца вдоль оси Ox, задаваемого матрицей преобразования координат $\hat{\Lambda}$:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu}x^\nu, \quad [\Lambda^\mu_{\ \nu}] = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\mu\nu}.$$

б) метрический тензор $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1)_{\mu\nu}$;

в) скалярное произведение 4-векторов $(\underline{a}\cdot\underline{b}) = a^\mu b_\mu$.