Математический анализ:
3 семестр, конспект лекций

В. И. Богачев

ф-т физики ВШЭ, 2 курс, осень 2022

Оглавление

Глава 1. Интегралы, зависящие от параметра 5

§ 1.1. Непрерывность интеграла по параметру 5
§ 1.2. Равномерная сходимость несобственных интегралов 8
§ 1.3. Дифференцируемость интеграла по параметру 10
§ 1.4. Эйлеровы интегралы 12
§ 1.5. Преобразование Фурье интегрируемых функций 16
§ 1.6. Преобразование Фурье в L^2 и в $\mathcal{S}'$ 23
§ 1.7. Задачи 33

Глава 2. Функциональные последовательности и ряды 37

§ 2.1. Ортонормированные базисы 37
§ 2.2. Ряды Фурье 43
§ 2.3. Степенные ряды 46
§ 2.4. Задачи 49

Глава 3. Поверхностные интегралы и интегрирование форм 51

§ 3.1. Меры Хаусдорфа 51
§ 3.2. Интеграл по гладкой поверхности 53
§ 3.3. Примеры 59
§ 3.4. Формула Гаусса – Остроградского 63
§ 3.5. Дифференциальные формы 70
§ 3.6. Интегрирование дифференциальных форм 75
§ 3.7. Формула Стокса 82
§ 3.8. Задачи 88

Список вопросов 93
Литература 95

Глава 1

Интегралы, зависящие от параметра

В этой главе приведены условия непрерывности и дифференцируемости по параметру для обычных и несобственных интегралов. Кроме того, здесь обсуждаются так называемые Γ- и B-функции Эйлера. Речь идет о выражениях вида

$$\int f(x,\alpha)\,dx,$$

в которых функция $f(x,\alpha)$ двух переменных интегрируема (в собственном или несобственном смысле) по x, что после интегрирования дает функцию аргумента α. Возникают вопросы о ее непрерывности и дифференцируемости. Весьма важные для приложений функций такого вида возникают при использовании довольно элементарных на первый взгляд функций типа $x^\gamma e^{-x}$ или $x^\beta(1-x)^\gamma$.

§ 1.1. Непрерывность интеграла по параметру

Пусть E — измеримое множество в $\mathbb{R}^d$, A — множество в $\mathbb{R}^k$.

1.1.1. Теорема. *Пусть функция $f\colon E\times A\to\mathbb{R}$ интегрируема по первому переменному при фиксированном втором и непрерывна по второму при фиксированном первом. Тогда для непрерывности функции*

$$\alpha\mapsto\int_E f(x,\alpha)\,dx$$

достаточно существования такой интегрируемой на E функции Φ, что

$$|f(x,\alpha)|\leqslant\Phi(x)\quad\forall\,x\in E,\alpha\in A.$$

Условие подобрано так, что непосредственно применима теорема Лебега: если интегрируемые функции f_n сходятся почти во всех точках к функции f, причем для них есть общая интегрируемая мажоранта, т.е. интегрируемая функция Φ, для которой $|f_n(x)| \leqslant \Phi(x)$ для всех x и n, то f тоже интегрируема и

$$\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu.$$

Условие Лебега по своей сути ориентировано на абсолютные интегралы, поэтому оно не всегда помогает в случае несобственных интегралов, которым вообще противопоказаны оценки с модулями. Для них вводится некоторое новое техническое условие.

1.1.2. Определение. *Пусть дано семейство $f(\cdot, \alpha)$ функций на промежутке $[a, +\infty)$, интегрируемых на всяком отрезке $[a, R]$ и несобственно интегрируемых на $[a, +\infty)$. Говорят, что эти функции имеют равномерно сходящиеся несобственные интегралы, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $R > a$, что*

$$\left| \int_{R_1}^{R_2} f(x, \alpha) \, dx \right| < \varepsilon \quad \forall \, \alpha$$

при всех $R_1, R_2 \geqslant R$. Вместо непрерывности по двум переменным достаточно иметь непрерывность по второму аргументу и ограниченность на множествах $[a, R] \times A$.

Аналогично вводится равномерная сходимость несобственных интегралов в случае особенности в a, т. е. когда собственная интегрируемость дана на отрезках в $(a, +\infty)$.

Простое достаточное (но отнюдь не необходимое) условие равномерной сходимости несобственных интегралов состоит в наличии интегрируемой (несобственно) на $(0, +\infty)$ функции Φ, для которой

$$|f(x, \alpha)| \leqslant \Phi(x) \quad \forall \, x \in (0, +\infty), \ \forall \, \alpha.$$

Полезные широкие достаточные условия равномерной сходимости несобственных интегралов даны в следующем параграфе. В приводимой ниже теореме это понятие применяется в достаточном условии непрерывности по параметру несобственного интеграла. Теорема же вытекает из следующего простого факта, который уже встречался при обсуждении метрик и норм.

1.1.3. Определение. *Последовательность функций f_n называется равномерно сходящейся к функции f на множестве X, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что*

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon \quad \textit{при всех } x \in X \textit{ и } n \geqslant N.$$

Последовательность функций f_n называется равномерно фундаментальной на множестве X, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что

$$|f_k(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{при всех } x \in X \text{ и } n, k \geqslant N.$$

Так же вводится равномерная сходимость комплексных функций.

В терминах равномерной нормы

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

на пространстве ограниченных функций на X речь идет о сходимости $\|f - f_n\| \to 0$ и о фундаментальности по этой норме. Ранее уже обсуждалось, что сходящаяся по норме последовательность фундаментальна, а равномерно фундаментальная последовательность ограниченных функций сходится равномерно к некоторой ограниченной функции.

1.1.4. Теорема. *Если последовательность непрерывных функций f_n на метрическом пространстве X, например на множестве в $\mathbb{R}^d$, равномерно сходится к функции f, то f тоже непрерывна.*

Доказательство. Пусть $x_i \to x_0$ и $\varepsilon > 0$. Найдем такое N, что $\sup_x |f(x) - f_N(x)| \leqslant \varepsilon/4$. В силу непрерывности f_N найдется такое N_1, что $|f_N(x_0) - f_N(x_i)| \leqslant \varepsilon/4$ при всех $i \geqslant N_1$. Тогда

$$\begin{aligned}
&|f(x_0) - f(x_i)| = \\
&= |f(x_0) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f_N(x_i) + f_N(x_i) - f(x_i)| \leqslant \\
&\leqslant |f(x_0) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f_N(x_i)| + |f_N(x_i) - f(x_i)| \leqslant \\
&\leqslant \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4
\end{aligned}$$

при всех $i \geqslant N_1$. Итак, $f(x_i) \to f(x_0)$. □

1.1.5. Теорема. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^k$ и функция $f\colon [a, +\infty) \times A \to \mathbb{R}$ непрерывна и несобственно интегрируема по первому аргументу на промежутке $[a, +\infty)$. Тогда для непрерывности функции*

$$J\colon \alpha \mapsto \int_a^\infty f(x, \alpha)\, dx$$

достаточно равномерной сходимости несобственных интегралов от функций $f(\cdot, \alpha)$.

Аналогичное утверждение верно в случае особенности в a (тогда требуется лишь непрерывность на $(a, +\infty) \times A$).

Доказательство. Положим

$$J_n(\alpha) = \int_a^n f(x, \alpha)\, dx.$$

Из-за непрерывности f функции J_n непрерывны на A (следует из теоремы Лебега). Равномерная интегрируемость дает их равномерную сходимость к $J(\alpha)$. Значит, применима предыдущая теорема.

Случай особой точки в a аналогичен, надо лишь заменить $[a, n]$ на $[a+1/n, n]$. $\square$

Более тонкие признаки непрерывности приведены в следующем параграфе. Разумеется, не всегда интеграл от непрерывно зависящей от параметра функции будет непрерывен по параметру. Например, интеграл от функции $\alpha e^{-\alpha x}$ по $[0, +\infty)$ равен 1 при $\alpha \in (0, 1]$, но при $\alpha = 0$ интеграл обращается в нуль.

§ 1.2. Равномерная сходимость несобственных интегралов

Для сходимости неабсолютных несобственных интегралов полезным достаточным условием является условие Абеля – Дирихле. Оно предлагает представить рассматриваемую функцию на $[a, +\infty)$ в виде $f(x)g(x)$, где функция f непрерывна, функция $g \geqslant 0$ ограничена, непрерывно дифференцируема и монотонно убывает. Тогда для

$$F(x) := \int_a^x f(y)\, dy$$

мы получаем

$$\int_s^t f(x)g(x)\, dx = \int_s^t F'(x)g(x)\, dx = Fg\big|_s^t - \int_s^t F(x)g'(x)\, dx, \quad (1.2.1)$$

где

$$\left|\int_s^t F(x)g'(x)\, dx\right| \leqslant \sup_{x\in[s,t]} |F(x)| \int_s^t |g'(x)|\, dx$$
$$= \sup_{x\in[s,t]} |F(x)|\, |g(s) - g(t)|. \quad (1.2.2)$$

Это представление дает следующие достаточные условия стремления к нулю интеграла в левой части (1.2.1) при $s, t \to +\infty$:

(i) существует конечный предел $\lim\limits_{t\to\infty} F(t)$, т. е. f имеет несобственный интеграл,

ЛИБО

(ii) $\sup_x |F(x)| < \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Это же представление можно использовать для вывода условий равномерной сходимости интегралов, зависящих от параметра.

1.2.1. Теорема. *Пусть при всех $\alpha \in A$ функции $x \mapsto f(x,\alpha)$ непрерывны на $[a,+\infty)$, функции $x \mapsto g(x,\alpha)$ непрерывно дифференцируемы на $[a,+\infty)$, неотрицательны и монотонно убывают. Для равномерной сходимости несобственных интегралов*

$$\int_a^\infty f(x,\alpha)g(x,\alpha)\,dx$$

достаточно выполнения какого-либо из следующих двух условий:

(i) $\sup_{x,\alpha}|g(x,\alpha)| < \infty$ *и функции $f(x,\alpha)$ имеют равномерно сходящиеся несобственные интегралы, т. е. функции*

$$F(x,\alpha) := \int_a^x f(y,\alpha)\,dy$$

равномерно по α стремятся к соответствующим несобственным интегралам при $x \to \infty$;

(ii) $\sup_{x,\alpha}|F(x,\alpha)| < \infty$ *и функции $x \mapsto g(x,\alpha)$ равномерно сходятся к нулю при $x \to +\infty$, т. е.* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sup_{\alpha\in A}|g(x,\alpha)| = 0$.

Доказательство. В случае (i) интеграл от $f(x,\alpha)g(x,\alpha)$ по $[s,t]$ оцениваем с помощью (1.2.1) и (1.2.2) следующим образом: для данного $\varepsilon > 0$ находим $R > a$ такое, что $|F(x,\alpha)| < \varepsilon$ для всех α при $x \geqslant R$, что позволяет оценить интеграл от $f(x,\alpha)g(x,\alpha)$ по $[s,t]$ при $s,t \geqslant R$ через $4\varepsilon\sup_{x,\alpha}|g(x,\alpha)|$.

В случае (ii) находим такое $R \geqslant a$, что $|g(x,\alpha)| \leqslant \varepsilon$ для всех α при $x \geqslant R$, что с помощью (1.2.1) и (1.2.2) позволяет оценить этот же интеграл через $4\varepsilon\sup_{x,\alpha}|F(x,\alpha)|$. $\square$

На самом деле обе теоремы верны при несколько более широких условиях: вместо непрерывности функции f по x достаточно интегрируемости, а от функции g можно не требовать дифференцируемость по x (достаточно монотонного убывания). Доказательство с прежней идеей при этих условиях лишь немного усложняется, а именно надо либо доказывать формулу интегрирования по частям при указанных более широких условиях (тогда вместо производной g появятся интегралы Стилтьеса), либо использовать теорему о среднем.

1.2.2. Пример. Несобственные интегралы

$$\int_0^\infty g(x,\alpha)\sin x\,dx$$

сходятся равномерно, если функции $x \mapsto g(x,\alpha)$ убывают, причем $\lim\limits_{x\to+\infty} \sup_\alpha g(x,\alpha) = 0$. Здесь важно то, что функция $\cos x$ равномерно ограничена. Напомним, что даже для простейших функций типа $g(x,\alpha) = x^{-1}$ или $g(x,\alpha) = x^{-1/2}$ абсолютной сходимости интегралов нет, так что здесь нельзя проверить что-то с помощью мажорант. Правда, прием, использованный в признаке Абеля – Дирихле, фактически сводится к тому, что интегрирование по частям приводит к ситуации, где уже есть интегрируемые мажоранты.

Из доказанной теоремы сразу получаем соответствующее условие непрерывности интеграла по параметру α: достаточно добавить условие непрерывности обеих функций по двум переменным.

§ 1.3. Дифференцируемость интеграла по параметру

Дифференцируемость интеграла по параметру исследуется с помощью тех же соображений, что и непрерывность. Сначала рассмотрим обычные интегралы. Пусть E — измеримое множество в $\mathbb{R}^d$.

1.3.1. Теорема. *Пусть функция $f\colon E \times (c,d) \to \mathbb{R}$ интегрируема по первому аргументу при фиксированном втором и дифференцируема по второму аргументу при фиксированном первом. Для дифференцируемости интеграла от $f(x,\alpha)$ по E по параметру и равенства*

$$\frac{d}{d\alpha}\int_E f(x,\alpha)\,dx = \int_E \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx \tag{1.3.1}$$

достаточно существования интегрируемой на E функция Φ, для которой

$$\Bigl|\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\Bigr| \leqslant \Phi(x) \quad \forall\, x \in E, \forall\, \alpha \in (c,d).$$

Здесь тоже условие подогнано под теорему Лебега: отношение

$$\frac{J(\alpha+h_n) - J(\alpha)}{h_n}$$

(его полагается исследовать на сходимость) есть интеграл от функции

$$\frac{f(x,\alpha+h_n) - f(x,\alpha)}{h_n},$$

которая при $h_n \to 0$ имеет пределом как раз $\partial f(x,\alpha)/\partial\alpha$. Но еще надо проверить, что Φ есть общая мажоранта. Это следует из теоремы о среднем, по которой указанная выше функция есть $\partial f(x,\xi)/\partial\alpha$ с неизвестной точкой ξ, но она неважна, ибо частная производная всюду оценивается через Φ.

Обратимся к дифференцируемости несобственных интегралов.

1.3.2. Теорема. *Пусть функция f на $[a,+\infty)\times(c,d)$ дифференцируема по второму аргументу, функция $\partial f(x,\alpha)/\partial\alpha$ непрерывна, при некотором α_0 функция $x\mapsto f(x,\alpha_0)$ несобственно интегрируема на $[a,+\infty)$, а функции $x\mapsto \partial f(x,\alpha)/\partial\alpha$ имеют равномерно сходящиеся несобственные интегралы по $[a,+\infty)$. Тогда функции $\alpha\mapsto f(x,\alpha)$ несобственно интегрируемы при всех $\alpha\in(c,d)$, причем*

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx = \int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx.$$

Аналогичное верно в случае особенности в точке a.

Доказательство. По формуле Ньютона – Лейбница

$$f(x,\alpha)-f(x,\alpha_0)=\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{\partial f(x,\beta)}{\partial\beta}\,d\beta$$

при $\alpha>\alpha_0$ и аналогично при $\alpha<\alpha_0$. Проинтегрируем это равенство по x по $[a,R]$ и с помощью теоремы Фубини (для непрерывных функций) запишем правую часть в виде

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha}\int_a^R\frac{\partial f(x,\beta)}{\partial\beta}\,dx\,d\beta.$$

Условие теоремы говорит, что внутренние интегралы в правой части при $R\to\infty$ равномерно стремятся к несобственным интегралам по $[a,+\infty)$ от производной f по второму аргументу. По теореме о предельном переходе в обычном интеграле получаем существование несобственного интеграла от $f(x,\alpha)$ и равенство

$$\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx-\int_a^{+\infty} f(x,\alpha_0)\,dx=\int_{\alpha_0}^{\alpha}\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,\beta)}{\partial\beta}\,dx\,d\beta,$$

причем функция

$$\beta\mapsto\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,\beta)}{\partial\beta}\,dx$$

непрерывна в силу теоремы о непрерывности несобственного интеграла по параметру. Следовательно, несобственный интеграл от $f(x,\alpha)$ оказывается непрерывно дифференцируемым, причем выполнено указанное равенство. $\square$

§ 1.4. Эйлеровы интегралы

Это параграф посвящен параметрическим интегралам специального вида, так называемым Γ-функции («гамма-функция») и B-функции («бета-функция») Эйлера. Они задаются формулами

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx, \tag{1.4.1}$$

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx. \tag{1.4.2}$$

Эти почти что школьного вида специальные функции встречаются в столь многих областях математики и столь разнообразных приложениях, что давно вошли в курс высшей математики в виде самостоятельного раздела.

Несколько странные на первый взгляд выражения степеней (с минус единицами) продиктованы на самом деле заботой о более простом виде области задания этих функций. Ясно, что гамма-функция задана при $\alpha > 0$ (при $\alpha \leqslant 0$ возникает неинтегрируемая особенность в нуле), бета-функция задана при $\alpha > 0, \beta > 0$. При этом для $\alpha < 1$ даже в нуле интеграл несобственный (впрочем, если его рассматривать как лебеговский, то ничего особенного в нем нет), для бета-функции несобственные интегралы (хотя и абсолютно сходящиеся) возникают при $\alpha < 1, \beta < 1$.

С помощью теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру (или теоремы о дифференцировании лебеговского интеграла по параметру) заключаем, что функция Γ бесконечно дифференцируема и

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}(\ln x)^n e^{-x}\,dx.$$

В самом деле, ввиду равенства $x^{\alpha-1} = \exp((\alpha-1)\ln x)$ производная порядка n подынтегральной функции по α имеет вид $x^{\alpha-1}(\ln x)^n e^{-x}$. Если α лежит в отрезке в $(0,+\infty)$, то при каждом фиксированном n данное семейство функций имеет интегрируемую мажоранту вида $(x^\gamma + x^k)e^{-x}$ с некоторыми $\gamma > -1$ и $k > 1$, ибо для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $C > 0$, что $|\ln x| \leqslant Cx^\varepsilon$ при всех $x \in (0,1)$.

Заметим, что функция Γ' обращается в нуль в единственной точке $\alpha_0 > 1$, причем $\Gamma'' > 0$, откуда следует выпуклость Γ на $(0,+\infty)$, убывание на $(0,\alpha_0]$ и возрастание на $[\alpha_0,+\infty)$.

1.4.1. Предложение. *При* $\alpha > 0$ *имеет место формула понижения*

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha). \tag{1.4.3}$$

Кроме того,

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Интегрируя по частям с $e^{-x} = -(e^{-x})'$, находим

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\,dx = \alpha\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx,$$

ибо подстановка значений $x^\alpha e^{-x}$ на концах дает нуль. Далее, непосредственное вычисление дает $\Gamma(1) = 1$, откуда при $n \in \mathbb{N}$ получаем равенство $\Gamma(n+1) = n!$. □

Таким образом, функция Γ дает продолжение факториала на положительные числа. Но теперь мы можем пойти и дальше, продолжив гамму-функцию на всю ось без точек $0, -1, -2, \ldots$, а именно: положим

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}, \quad \alpha \in (-1, 0),$$

затем повторим этот прием. Можно также сразу доопределить Γ на $(-k, -k+1)$ по формуле

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k)}.$$

На самом деле функцию Γ можно продолжать и в комплексную область, но мы не будем этим заниматься.

При некоторых дробных α значения гамма-функции вычисляются. Например, заменой $x = y^2$ получаем

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} x^{-1/2}e^{-x}\,dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi},$$

где мы воспользовались известным из раздела о кратных интегралах значением для интеграла от e^{-y^2}. Теперь при всех натуральных n можно найти $\Gamma(n+1/2)$ по формуле понижения.

Приведем без обоснования такие факты:

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} n^\alpha \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)},$$

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

При $\alpha \to +\infty$ верна асимптотическая формула Стирлинга

$$\Gamma(\alpha+1) \sim \sqrt{2\pi\alpha}\Big(\frac{\alpha}{e}\Big)^{\alpha},$$

дающая при натуральных α полезную асимптотику для факториала:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^{n}.$$

Известна и более точная формула

$$\ln\Gamma(\alpha) = \ln\sqrt{2\pi} + \Big(\alpha - \frac{1}{2}\Big)\ln\alpha - \alpha + \frac{\theta(\alpha)}{12}, \quad \theta(\alpha) \in (0,1).$$

Приведем также некоторые соотношения для бета-функции.

1.4.2. Предложение. *Справедливы равенства*

$$B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha), \tag{1.4.4}$$

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}\,dy, \tag{1.4.5}$$

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha-1,\beta+1) = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}\,B(\alpha-1,\beta). \tag{1.4.6}$$

Доказательство. Формула (1.4.4) получается очевидной заменой $x = 1-y$. Формула (1.4.5) получается непосредственно из определения заменой $x = y/(y+1)$, при которой $dx = -(y+1)^{-2}dy$. Из нее можно получить (1.4.6) интегрированием по частям, если рассмотреть $(1+y)^{-\alpha-\beta} = (1-\alpha-\beta)\big((1+y)^{-\alpha-\beta+1}\big)'$. Однако возможна проверка и по исходной формуле. При $\alpha > 1$ интегрированием по частям, записав функцию $(1-x)^{\beta-1}$ как $-(\beta^{-1}(1-x)^{\beta})'$, находим

$$\begin{aligned}
B(\alpha,\beta) &= -\frac{1}{\beta}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}\big|_0^1 + \frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta}\,dx = \\
&= \frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)(1-x)^{\beta-1}\,dx = \\
&= \frac{\alpha-1}{\beta}\bigg(\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta-1}\,dx - \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx\bigg) = \\
&= \frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha-1,\beta) + \frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha,\beta),
\end{aligned}$$

что дает (1.4.6). $\square$

С помощью доказанных формул можно осуществлять продолжение B-функции аналогично Γ-функции.

Связь между бета-функцией и гамма-функцией дается следующей формулой.

1.4.3. Предложение. *Справедливо равенство*

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{1.4.7}$$

Доказательство. Будем использовать представление (1.4.5) для бета-функции. При этом заметим, что при каждом фиксированном значении $y>0$ верно равенство

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}=y^{\alpha-1}\int_0^{+\infty}x^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+y)x}\,dx,$$

получаемое заменой переменной $t=(1+y)x$. Проинтегрируем это равенство по y по $[0,+\infty)$. Слева получим $\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)$. Справа получим

$$\int_0^{+\infty}\!\!\int_0^{+\infty}y^{\alpha-1}x^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+y)x}\,dx\,dy=$$
$$=\int_0^{+\infty}\!\!\int_0^{+\infty}y^{\alpha-1}x^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+y)x}\,dy\,dx=$$
$$=\int_0^{+\infty}\left(x^{\beta-1}e^{-x}\int_0^{+\infty}(xy)^{\alpha-1}e^{-(xy)}x\,dy\right)dx=$$
$$=\int_0^{+\infty}\left(x^{\beta-1}e^{-x}\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt\right)dx=\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta),$$

где перестановки интегралов законны в силу их абсолютной сходимости. □

1.4.4. Пример. Справедливо равенство

$$\int_0^{\pi/2}(\sin x)^m(\cos x)^n\,dx=\frac{1}{2}B\Bigl(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\Bigr).$$

Обоснование состоит в замене переменной $\sin x=\sqrt{t}$.

1.4.5. Пример. Равенства

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx = \frac{1}{n}B\Big(\frac{m}{n}, 1-\frac{m}{n}\Big) = \frac{1}{n}\Gamma\Big(1-\frac{m}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{m}{n}\Big) = \\ = \frac{\pi}{n\sin(\pi m/n)}$$

при $0 < m < n$ проверяется с помощью замены $x = t^{1/n}$.

1.4.6. Пример. Обозначим через V_n объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Тогда объем шара радиуса R равен $V_n R^n$. Вычисляя V_n с помощью теоремы Фубини и замечая, что при фиксированном значении $x_n \in [-1,1]$ множество $\{(x_1,\ldots,x_{n-1})\colon\ x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2 = 1-x_n^2\}$ является $(n-1)$-мерным шаром радиуса $(1-x_n^2)^{1/2}$, получаем рекуррентное соотношение

$$V_n = V_{n-1}\int_{-1}^1 (1-x_n^2)^{(n-1)/2}\,dx_n = 2V_{n-1}\int_0^1 (1-t^2)^{(n-1)/2}\,dt = \\ = V_{n-1}\int_0^1 s^{-1/2}(1-s)^{(n-1)/2}\,ds = V_{n-1}B(1/2,(n+1)/2) = \\ = V_{n-1}\frac{\Gamma(1/2)\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(1+n/2)},$$

откуда с учетом равенства $V_2 = \pi$ находим ответ

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)},$$

который можно преобразовать с помощью формулы понижения. Надо отдельно рассмотреть случаи четного и нечетного n, что дает на первый взгляд более «явное» выражение

$$V_{2m} = \frac{\pi^m}{m!}, \quad V_{2m+1} = \frac{2(2\pi)^m}{(2m+1)!!}, \quad (2m+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m+1)$$

хотя во многих приложениях формула с гамма-функцией оказывается полезней.

§ 1.5. Преобразование Фурье интегрируемых функций

Для интегрируемой по Лебегу вещественной или комплексной функции f на $\mathbb{R}^d$ преобразование Фурье (Fourier) задается формулой

$$\widehat{f}(y) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} \exp[-i(y,x)]f(x)\,dx,$$

где (x, y) — скалярное произведение. В одномерном случае

$$\widehat{f}(y) = (2\pi)^{-d/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ixy) f(x)\, dx.$$

Выбор знака минус в экспоненте — дань традиции, а выбор множителя перед интегралом объясняется желанием получить унитарный оператор в L^2 (см. ниже). Так как $|\exp(i\varphi)| = 1$ для вещественных φ, указанный интеграл (называемый интегралом Фурье) существует в смысле Лебега. При этом

$$|\widehat{f}(y)| \leqslant (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, dx. \tag{1.5.1}$$

Кроме того, из следствия теоремы Лебега о непрерывности интеграла по параметру вытекает непрерывность функции $\widehat{f}$. Несколько менее очевидно соотношение

$$\lim_{|y|\to\infty} |\widehat{f}(y)| = 0.$$

Оно проверяется так. Сначала явно вычисляем преобразование Фурье индикатора параллелепипеда $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$. Это делается с помощью теоремы Фубини и одномерного случая, в котором имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-ixy}\, dx = (-iy)^{-1}(e^{-iyb} - e^{-iya}), \tag{1.5.2}$$

что стремится к нулю при $|x| \to \infty$. Значит, так же обстоит дело для конечных линейных комбинаций индикаторов параллелепипедов. Теперь остается вспомнить, что для всякой интегрируемой функции f найдется последовательность $\{f_n\}$ линейных комбинаций индикаторов параллелепипедов, сходящаяся к ней по норме L^1, т. е.

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f - f_n|\, dx \to 0,$$

а тогда утверждение вытекает из оценки (1.5.1).

Важно отметить, что, хотя функция $\widehat{f}(y)$ имеет нулевой предел на бесконечности, она может оказаться неинтегрируемой. Так происходит уже с индикатором отрезка, как мы видели. Поэтому неверно, что преобразование Фурье отображение L^1 в это же пространство. С другой стороны, не всякая непрерывная функция, стремящаяся к нулю на бесконечности, является преобразованием Фурье интегрируемой функции. Никакого конструктивного описания множества преобразований Фурье интегрируемых функций неизвестно.

В приложениях бывает важно восстановить функцию по ее преобразованию Фурье. Этот вопрос оказывается довольно тонким, и мы сейчас обсудим основные результаты.

Предварительно отметим следующие свойства преобразования Фурье, связывающие дифференцирование и умножение на аргумент.

1.5.1. Предложение. (i) *Пусть интегрируемая функция f на прямой имеет интегрируемую производную f'. Тогда*

$$\widehat{f'}(y) = iy\widehat{f}(y).$$

Аналогично в многомерном случае: *если интегрируемая функция f имеет интегрируемую частную производную $\partial_{x_k} f$, то*

$$\widehat{\partial_{x_k} f}(y) = iy_k\widehat{f}(y).$$

(ii) *Пусть интегрируемая функция f на прямой такова, что функция $xf(x)$ также интегрируема. Тогда $\widehat{f}$ дифференцируема и*

$$\widehat{f}'(y) = \widehat{-ixf}(y).$$

Аналогично в многомерном случае: *если интегрируемая функция f такова, что $x_k f(x)$ тоже интегрируема, то*

$$\partial_{y_k}\widehat{f}(y) = \widehat{-ix_k f}(y).$$

Доказательство. По формуле интегрирования по частям (можно показать, что она применима при наших условиях)

$$\int e^{-ixy} f'(x)\,dx = iy\int e^{-ixy} f(x)\,dx,$$

в многомерном случае аналогично. Утверждение (ii) следует из теоремы о дифференцировании интеграла по параметру, так как имеет место равенство $\partial_{y_k}\exp[-i(y,x)] = -ix_k\exp[-i(y,x)]$. □

Введем теперь полезный во многих вопросах класс функций $\boldsymbol{\mathcal{S}}$:

класс $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$ состоит из всех таких (вещественных или комплексных) бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^d$, что для всех частных производных $\partial_{x_1}^{k_1}\cdots\partial_{x_d}^{k_d} f$, где $k_j \geqslant 0$, при всех $m \geqslant 0$ имеем

$$\sup_x |x|^m|\partial_{x_1}^{k_1}\cdots\partial_{x_d}^{k_d} f(x)| < \infty.$$

Иначе говоря, сама функция и все ее производные убывают на бесконечности быстрее всех обратных степеней. Тем самым $|x|^m f(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$ для всех m и так же для всех производных.

Конечно, можно сначала ввести вещественные функции класса $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, а комплексные ввести как комбинации $f+ig$, где f и g из вещественного $\boldsymbol{\mathcal{S}}$.

Замечательное свойство класса $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ состоит в том, что он отображается на себя преобразованием Фурье (в отличие от L^1). Пока получаем такой факт.

1.5.2. Следствие. *Если* $f \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$, *то* $\widehat{f} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$.

Доказательство. Для упрощения формул рассмотрим одномерный случай. Из предыдущего предложения получаем

$$\widehat{f}^{(k)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)(-ix)^k e^{-ixy}\, dx = \widehat{-ix^k f}(y).$$

Далее,

$$(iy)^m \widehat{f}^{(k)}(y) = (\widehat{-ix^k f)^{(m)}}(y),$$

где функция $(-ix^k f(x))^{(m)}$ интегрируема, поэтому ее преобразование Фурье ограничено. □

Ниже показано, что на $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ преобразование Фурье взаимно однозначно.

Введем теперь обратное преобразование Фурье интегрируемой функции:

$$\check{f}(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(y,x)} f(y)\, dy.$$

Как видно, оно отличается от прямого преобразования лишь заменой аргумента на противоположный, поэтому совершенно не кажется очевидным, что это обратное отображение. Да и в каком смысле обратное, если функция $\widehat{f}$ не всегда интегрируема?

Рассмотрим поучительный пример, в котором можно явно найти преобразование Фурье (таких случаев не так уж много).

1.5.3. Пример. Пусть $\alpha > 0$. Тогда

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp[-i(y,x)] \exp[-\alpha|x|^2]\, dx = \frac{1}{(2\alpha)^{d/2}} \exp\Bigl[-\frac{1}{4\alpha}|y|^2\Bigr].$$

Доказательство. По теореме Фубини вычисление легко сводится к одномерному случаю. Заменой переменных далее сводим к случаю $\alpha = 1/2$. В этом случае получаем интеграл

$$g(y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int \cos(xy) e^{-x^2/2}\, dx.$$

С помощью интегрирования по частям находим

$$g'(y) = -y\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int \cos(xy)e^{-x^2/2}\,dx = -yg(y).$$

Кроме того, вспоминаем, что $g(0)=1$. Поэтому $g(y)=e^{-y^2/2}$. □

Для найденной функции обратное преобразование Фурье есть исходная функция. Из этого выводится общий факт.

1.5.4. Теорема. (Формула обращения) *Если ограниченная интегрируемая функция f на $\mathbb{R}^d$ такова, что ее преобразование Фурье $\widehat{f}$ интегрируемо, то для всякой точки x, в которой f непрерывна, верно равенство*

$$f(x) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(y,x)}\widehat{f}(y)\,dy. \tag{1.5.3}$$

В частности, это верно, если $f\in\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$.

Доказательство. Для упрощения формул мы рассмотрим случай $d=1$. Тогда с помощью теоремы Фубини и примера 1.5.3 (а также замены переменных $z=x+2\varepsilon u$) получаем

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\widehat{f}(y)\,dy &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}e^{-\varepsilon^2y^2}\widehat{f}(y)\,dy = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ixy}e^{-\varepsilon^2y^2}e^{-iyz}f(z)\,dz\,dy = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{iy(x-z)}e^{-\varepsilon^2y^2}f(z)\,dy\,dz = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2}}f(z)e^{-(x-z)^2/(4\varepsilon^2)}\,dz = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{2}\,f(x+2\varepsilon u)e^{-u^2}\,du = \sqrt{2\pi}\,f(x).
\end{aligned}$$

Последнее равенство следует из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости ввиду ограниченности f и непрерывности в точке x. □

Ниже эту теорему мы усилим и проверим, что если для интегрируемой функции f известна интегрируемость $\widehat{f}$, то сама f почти всюду совпадает с ограниченной непрерывной функцией, а тогда для последней формула обращения выполнена во всех точках.

Следующие равенства относятся к числу важнейших в теории интегралов Фурье. Как и выше, все пространства — комплексные.

1.5.5. Теорема. *Для всех интегрируемых на* $\mathbb{R}^d$ *функций* φ, ψ *верны равенства*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}\psi\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\widehat{\psi}\,dx, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}\overline{\psi}\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\overline{\check{\psi}}\,dx. \tag{1.5.4}$$

Если же $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, *то справедливо* ***равенство Парсеваля***

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\overline{\psi(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}(y)\overline{\widehat{\psi}(y)}\,dy. \tag{1.5.5}$$

Доказательство. Применив теорему Фубини к равенству

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}(x)\psi(x)\,dx = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x,y)}\varphi(y)\psi(x)\,dy\,dx,$$

получим первую формулу в (1.5.4), а вторая следует из нее ввиду тождества $\overline{\check{\psi}} = \widehat{\overline{\psi}}$. Чтобы проверить (1.5.5), вспомним, что $f := \widehat{\psi}$ входит в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, и применим формулу обращения $\psi = \check{f}$. □

Взяв комплексное сопряжение во втором равенстве в (1.5.4), получим еще одну формулу:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \check{\psi}\overline{\varphi}\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \psi\overline{\widehat{\varphi}}\,dx.$$

Имеет место следующий ВАЖНЫЙ (и простой) ФАКТ теории интеграла:

две интегрируемые функции f и g равны почти всюду в точности тогда, когда

$$\int f(x)\varphi(x)\,dx = \int g(x)\varphi(x)\,dx$$

для всякой гладкой функции φ, равной нулю вне шара.

1.5.6. Следствие. *Если функция* f *интегрируема и* $\widehat{f} = 0$, *то* $f(x) = 0$ *почти всюду.*

Доказательство. Из равенства Парсеваля следует, что интеграл от $f\varphi$ равен нулю для всех гладких вещественных функций φ с ограниченным носителем, откуда по указанному свойству интеграла вытекает доказываемое. □

Близкое рассуждение позволяет усилить теорему 1.5.4.

1.5.7. Следствие. *Если функция f интегрируема и функция $\widehat{f}$ тоже интегрируема, то f почти всюду совпадает с ограниченной непрерывной функцией f_0, равной обратному преобразованию Фурье от $\widehat{f}$.*

Доказательство. Функция g ограничена и непрерывна. Как и в предыдущем следствии, достаточно доказать, что $f\varphi$ и $f_0\varphi$ имеют равные интегралы для всех гладких вещественных функций φ с ограниченным носителем. Пусть φ — обратное преобразование Фурье φ. Тогда $\varphi = \widehat{\psi}$ и

$$\int f\varphi\,dx = \int \widehat{f}\psi\,dx.$$

С другой стороны,

$$\int f_0\varphi\,dx = \int \widehat{f}\check{\varphi}dx = \int \widehat{f}\psi\,dx,$$

что дает нужное равенство. □

1.5.8. Следствие. *Преобразование Фурье отображает $\mathcal{S}$ взаимно однозначно на $\mathcal{S}$.*

Очевидная слабость доказанной выше формулы обращения состоит в условии интегрируемости преобразования Фурье f. Скажем, такая простая функция, как индикатор интервала, для которой преобразование Фурье находится самым простым образом, не подпадает под действие этой формулы. Правда, она вместе с ее преобразованием Фурье входит в L^2 и охватывается конструкцией из следующего параграфа, однако эта конструкция менее элементарна. Ниже мы кратко обсудим преобразование Фурье обобщенных функций и увидим, что там симметрия полностью восстанавливается и формула обращения верна всегда (хотя и не задается интегральной формулой). Здесь же ограничимся формулировкой классического результата, позволяющего по преобразованию Фурье находить значения исходной функции в некоторых точках, в которых она более регулярна.

1.5.9. Теорема. *Пусть f — интегрируемая функция на прямой, причем в некоторой точке x_0 она удовлетворяет следующему условию Дини: существует такое $\delta > 0$, что*

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x_0+t) - 2f(x_0) + f(x_0-t)|}{|t|}\,dt < \infty.$$

Тогда справедлива формула обращения

$$f(x_0) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{+R} e^{ix_0y} \widehat{f}(y)\,dy.$$

Отметим, что равенство гарантируется именно в той точке, где выполнено условие Дини, а таких точек может не быть вовсе. Если функция f дифференцируема в x_0, то условие Дини выполнено, так как при малых t есть оценка $|f(x_0+t)-f(x_0)| \leqslant C|t|$, так что указанное отношение просто ограничено в окрестности нуля. Но нельзя ли доказать, что и без условия Дини формула обращения имеет место во многих точках (скажем, почти всюду)? А. Н. Колмогоров построил пример, из которого вытекает существование такой интегрируемой функции f, что формула обращения не выполняется ни в одной точке.

§ 1.6. Преобразование Фурье в L^2 и в $\boldsymbol{\mathcal{S}}'$

Напомним, что комплексное пространство $L^2(\mathbb{R}^d)$ состоит из классов эквивалентности измеримых комплексных функций на $\mathbb{R}^d$, для которых функция $|f|^2$ интегрируема при каком-либо (а тогда и при всяком) выборе представителя класс эквивалентности. Норма и скалярное произведение вводятся через представителей класса эквивалентности по формулам

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\,dx, \quad (f,g)_2 = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Функция, интегрируемая с квадратом, не обязана быть интегрируемой по всему пространству (как, например, $1/(1+|x|)$ или $\sin x/x$). Однако во многих приложениях полезно преобразование Фурье таких функций. Буквально его определить интегралом нельзя (из-за возможной неинтегрируемости), но в многих отношениях преобразование Фурье на L^2 оказывается лучшим оператором, чем на L^1. Исходным пунктом служит равенство Парсеваля, которое говорит, что преобразование Фурье на $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ сохраняет скалярное произведение из L^2.

Для всякой функции f из $L^2(\mathbb{R}^d)$ есть последовательность функций f_n из $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$ (даже с ограниченными носителями), сходящаяся к f в L^2. Из равенства Парсеваля следует, что

$$\|\widehat{f_n} - \widehat{f}_k\|_2 = \|f_n - f_k\|_2.$$

Значит, последовательность функций $\widehat{f_n}$ фундаментальна в L^2. В силу полноты пространства L^2 у нее есть некоторый предел в L^2, который и берется по определению в качестве $\widehat{f}$.

1.6.1. Определение. *Пусть* $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *есть последовательность функций* $f_n \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$*, сходящейся в* L^2*. Тогда*

$$\widehat{f} = \lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}$$

в смысле сходимости в L^2*.*

Важно заметить, что предел определен однозначно: к функции f сходится в L^2 много разных последовательностей, но предел их преобразований Фурье один и тот же, ибо если $f_n \to f$ и $g_n \to f$ в L^2, то чередующаяся последовательность $f_1, g_1, f_2, g_2, \ldots$ тоже сходится к f, поэтому последовательность преобразований Фурье сходится, что дает одинаковые пределы по подпоследовательностям.

Если функция f из L^2 оказалась интегрируемой, то у нее два преобразования Фурье: одно задано интегральной формулой (как для всех интегрируемых функций), другое получено указанным выше способом как предел. К счастью, эти два преобразования Фурье совпадают.

1.6.2. Лемма. *Если* $f \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$*, то преобразование Фурье функции* f *в* $L^2(\mathbb{R}^d)$ *задается ее обычным преобразованием Фурье* $\widehat{f}$ *в* $L^1(\mathbb{R}^d)$*.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{F}f$ — преобразование Фурье функции f в $L^2(\mathbb{R}^d)$ и $\widehat{f}$ — ее преобразованием Фурье в $L^1(\mathbb{R}^d)$. Покажем, что $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ п.в. Достаточно проверить, что для всякой вещественной функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ функции $(\mathcal{F}f)\varphi$ и $\widehat{f}\varphi$ имеют равные интегралы. Пусть ψ — обратное преобразование Фурье φ. Тогда $\psi \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$ и $\widehat{\psi} = \varphi$. В силу равенства Парсеваля имеем

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{\psi(x)}\,dx.$$

С другой стороны, взяв $f_j \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$ так, что $f_j \to f$ в $L^2(\mathbb{R}^d)$, получаем $(\mathcal{F}f, \varphi)_{L^2} = \lim\limits_{j\to\infty} (\mathcal{F}f_j, \varphi)_{L^2} = \lim\limits_{j\to\infty} (f_j, \psi)_{L^2} = (f, \psi)_{L^2}$, что доказывает наше утверждение. $\square$

Непосредственным следствием определения и равенства Парсеваля оказывается такой факт.

1.6.3. Теорема. *Отображение* $\mathcal{F}\colon f \mapsto \widehat{f}$ *переводит* L^2 *взаимно однозначно на* L^2 *и является унитарным линейным оператором, т. е. сохраняет скалярное произведение.*

Доказательство. Пусть $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. По определению есть функции f_n, g_n класса $\mathcal{S}$, сходящиеся в L^2 к f и g соответственно. Тогда $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$, $\widehat{g_n} \to \widehat{g}$ в L^2. При этом $(f_n, g_n)_2 = (\widehat{f_n}, \widehat{g_n})_2$ по равенству Парсеваля. Остается заметить, что если векторы u_n в гильбертовом пространстве сходятся к вектору u, а векторы v_n сходятся к v, то скалярные произведения (u_n, v_n) сходятся к (u, v). Это видно из соотношений

$$
\begin{aligned}
&|(u,v)-(u_n,v_n)| = |(u,v)-(u_n,v)+(u_n,v)-(u_n,v_n)| = \\
&\qquad = |(u-u_n,v)+(u_n,v-v_n)| \leqslant ||u-u_n||\,\|v\| + \|u_n\|\,\|v-v_n\|,
\end{aligned}
$$

где правая часть стремится к нулю, так сходящаяся последовательность $\{u_n\}$ ограничена. Итак, $\mathcal{F}$ сохраняет скалярное произведение. Это дает взаимную однозначность. Линейность очевидна. Чтобы увидеть, что в каждый элемент $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ перешел какой-то элемент f, можно сделать следующее. Возьмем функции $g_n \in \mathcal{S}$, схоядщиеся к g в L^2. Их обратные преобразования Фурье f_n лежат в $\mathcal{S}$ и сходятся в L^2 к некоторому f в силу сохранения нормы обратным преобразованием Фурье. Тогда $\widehat{f_n} = g_n$, значит, $\widehat{f} = g$. □

Приведенное определение в настоящее время наиболее распространено, но 100 лет назад преобразование Фурье в L^2 определялось иначе путем некой имитации несобственного интеграла. Для $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ положим

$$
g_R(x) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{|y|\leqslant R} \exp\bigl(-i(x,y)\bigr) f(y)\, dy.
$$

Функции g_R определены и непрерывны, так как на шарах (но не на всем пространстве) функция f интегрируема.

Теперь легко доказать следующую теорему Планшереля, которую раньше использовали как способ задания преобразования Фурье в пространстве L^2.

1.6.4. Теорема. *Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Тогда функции g_R сходятся в $L^2(\mathbb{R}^d)$ при $R \to +\infty$ к определенному выше преобразованию Фурье функции f в $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Доказательство. Пусть $f_R(y) := f(y) I_{\{|y|\leqslant R\}}(y)$, т. е. на шаре радиуса R эта функция равна f, а вне равна нулю. Значит, $f_R \to f$ в $L^2(\mathbb{R}^d)$ при $R \to +\infty$. Поэтому $\mathcal{F} f_R \to \mathcal{F} f$ в $L^2(\mathbb{R}^d)$. В силу доказанной выше леммы $\mathcal{F} f_R = \widehat{f_R}$, ибо $f_R \in L^1$. □

В этой теореме говорится о сходимости в L^2, но не о сходимости в точках x. Так как в итоге получается измеримая функция, которая не обязана быть непрерывной, то естественно поставить вопрос о сходимости почти всюду (предельную функцию можно переопределять на множестве меры нуль, это не изменит ее как элемент L^2, поэтому говорить надо именно о сходимости почти всюду, а не в каждой точке x). Как ни странно, этот напрашивающийся вопрос, возникший, конечно, еще 100 лет назад, остается до сих пор без ответа. Не только нет ясности, будет ли всегда иметь место сходимость $g_R(x)$ почти всюду хотя бы при натуральных R, стремящихся к бесконечности, но даже и нет общепринятой правдоподобной гипотезы, верно это или нет. Правда, для случая $d = 1$ в 1966 году (т. е. через полвека после появления вопроса) выдающийся шведский аналитик Л. Карлесон дал положительный ответ, но случай $d > 1$ остается открытым. Трудность этой задачи иллюстрируется не столько тем, что и в одномерном случае 50 лет ушло на решение проблемы, но еще более тем, что ее не смог решить молодой А. Н. Колмогоров, крупнейший математик XX века, который много сил потратил на попытки решения. В многомерном случае из результата Карлесона удалось вывести такой факт: если вместо интегрирования по шарам радиуса R в определении g_R интегрировать по кубам $[-R, R]^d$, то сходимость почти всюду будет иметь иметь. Известные же доказательства для $d = 1$ столь сложны и длинны, что даже очень немногие специализированные монографии в этой области их включают.

Так как преобразование Фурье унитарно в L^2, то обратное преобразование задается точно таким же образом по обратному преобразованию Фурье на $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, для него верен и аналог теоремы Планшереля (с заменой минуса на плюс в экспоненте). Поэтому в L^2 нет указанных выше проблем с формулой обращения: формула обращения верна всегда в смысле равенства

$$f(x) = \lim_{R+\infty} \int_{|x|\leqslant R} \exp\bigl(i(y,x)\bigr)\,\widehat{f}(y)\,dy,$$

которое понимается в смысле сходимости в L^2 (а не в каких-либо точках). Поэтому получается полезный практический вывод: если удалось найти предел в правой части, то при почти всех x это и есть правильный ответ (но не утверждается, что ответ верен при всех x!).

Теорема Планшереля дает практический способ вычисления преобразования Фурье и не использует приближений. Впрочем, для явного вычисления преобразования Фурье (что возможно крайне редко) можно использовать любые приближения в L^2, лишь бы удалось вычислить их преобразования Фурье и найти предел.

1.6.5. Пример. Пусть $f(x) = \sin x/x$. Эта функция непрерывна и входит в L^2, но не входит в L^1. Поэтому нельзя считать преобразование Фурье через интеграл Лебега по прямой. Однако существуют несобственные интегралы

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx}\frac{\sin x}{x}\,dx,$$

которые можно находить разными способами, по теореме Парсеваля они и дадут искомое. Вместо этого можно проявить небольшую наблюдательность и вспомнить простое вычисление (1.5.2), которое показывает, что преобразование Фурье индикатора $I_{[-1,1]}$ отрезка $[-1,1]$ равно $(2\pi)^{-1/2}(iy)^{-1}(e^{iy}-e^{-iy}) = (2/\pi)^{1/2}\sin y/y$, т. е. с точностью до множителя как раз данной функции f. Для четных функций прямое преобразование Фурье совпадает с обратным, поэтому $\widehat{f} = (2/\pi)^{-1/2}I_{[-1,1]}$.

Равенство Парсеваля позволяет определить преобразование Фурье не только функций из L^2, но пойти еще дальше и задать преобразование Фурье обобщенных функций класса $\mathcal{S}'$.

Сначала зададим сходимость в самом пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ так: будет считать, что функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ сходятся к $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ в $\mathcal{S}$, если для всякой частной производной и всякого порядка m разности $(1+x|^{2m})(\partial^{(\alpha)}f_n - \partial^{(\alpha)}f)$ равномерно на всем пространстве сходятся к нулю. Иначе говоря, имеет место сходимость по нормам

$$p_{\alpha,m}(f) = \sup_x (1+x|^{2m})|(\partial^{(\alpha)}f(x)|.$$

1.6.6. Определение. *Обобщенной функцией* (*или распределением*) *называется линейная функция* F *на* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *с тем свойством, что* $F(f_n) \to 0$*, если* $f_n \to 0$ *в* $\mathcal{S}$. *Через* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ *обозначается пространство всех таких линейных функций.*

Если рассматривается комплексное пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, то $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ тоже считается комплексным.

Обычная функция F, интегрируемая на отрезках и оцениваемая как $|F(x)| \leqslant C_1 + C_2|x|^m$, задает обобщенную функцию по формуле

$$F(f) = \int f(x)F(x)\,dx.$$

Непрерывность этой линейной функции в смысле сходимости в $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ ясна из теоремы Лебега. Такой же формулой порождается обобщенная функция всякой функцией F из L^2.

Функция Дирака (δ-функция) задается формулой

$$\delta(f) = f(0).$$

Непрерывность здесь еще очевиднее, но в виде интеграла с какой-либо функцией F предыдущего типа эту обобщенную функцию уже нельзя задать.

Можно доказать, что общий вид элемента $F \in \boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^d)$ таков: найдется последовательность функций $F_n \in C_0^\infty$, для которой

$$F(f) = \lim_{n\to\infty} \int f(x)F_n(x)\,dx \quad \forall\, f \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d). \tag{1.6.1}$$

Обратно, если такой предел существует при всех $f \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$, то F входит в $\boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^d)$.

1.6.7. Определение. *Преобразованием Фурье обобщенной функции $F \in \boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^d)$ называется обобщенная функция $\widehat{F}$, заданная так*:

$$\widehat{F}(f) := F(\widehat{f}).$$

Определение корректно, так как мы знаем, что $\widehat{f} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$, так что F можно применить к $\widehat{f}$. Более того, можно проверить, что если $f_n \to 0$ в $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, то $\widehat{f_n} \to 0$ в $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, поэтому правая часть задает непрерывную линейную функцию на $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, т. е. именно элемент из $\boldsymbol{\mathcal{S}}'$. Определение так подобрано, что если обобщенная функция F задается обычной функцией из L^2 или L^1, то $\widehat{F}$ задается прежде определенным преобразованием Фурье для функций (это следует из равенства Парсеваля).

Вычислим преобразования Фурье обобщенных функций, которые не задаются интегрируемыми функциями.

1.6.8. Пример. (i) Преобразование Фурье дельта-функции Дирака:

$$\widehat{\delta}(f) = \delta(\widehat{f}) = \widehat{f}(0) = (2\pi)^{-1/2} \int e^{-i0x} f(x)\,dx = (2\pi)^{-1/2} \int f(x)\,dx.$$

Это означает, что $\widehat{\delta}(f)$ задается простейшей обычной функцией — постоянной $(2\pi)^{-1/2}$ — в виде интеграла. Эта простейшая обычная функция, тем не менее, неинтегрируема, поэтому ее преобразование Фурье тоже не вычисляется интегралом, но опять по определению имеем

$$\widehat{1}(f) = 1(\widehat{f}) = \int \widehat{f}(y)\,dy =$$
$$= (2\pi)^{1/2}(2\pi)^{-1/2}\int e^{i0y}\widehat{f}(y)\,dy = (2\pi)^{1/2}f(0) = (2\pi)^{1/2}\delta(f),$$

где последнее равенство — формула обращения. Итак, преобразование Фурье от 1 есть $(2\pi)^{1/2}\delta$. Впрочем, это можно было бы сразу заметить, используя четность 1.

(ii) Аналогично вводится функция Дирака в точке a: $\delta_a(f) = f(a)$. Как и выше, легко находим $\widehat{\delta_a} = (2\pi)^{-1/2}e^{-iax}$.

(iii) Функция $\sin x$ тоже не интегрируема, но задает элемент $\boldsymbol{\mathcal{S}}'$, для которого

$$\widehat{\sin x}(f) = (\sin x)(\widehat{f}) = \int \widehat{f}(x)\sin x\,dx =$$
$$= \frac{1}{2i}\int \widehat{f}(x)(e^{ix} - e^{-ix})\,dx = i^{-1}(\pi/2)^{1/2}[f(1) - f(-1)] =$$
$$= i^{-1}(\pi/2)^{1/2}[\delta_1(f) - \delta_{-1}(f)],$$

т. е. $\widehat{\sin x}$ есть линейная комбинация функций Дирака в 1 и -1.

Как и в случае L^2, из определения следует, что преобразование Фурье взаимно-однозначно отображает $\boldsymbol{\mathcal{S}}'$ на $\boldsymbol{\mathcal{S}}'$. Обратное преобразование задается аналогичной формулой

$$\check{F}(\varphi) = F(\check{\varphi}).$$

Как и в L^2, это приводит к справедливости «формулы обращения» для всех функций, но только теперь она не имеет интегрального вида. Впрочем, если обобщенные функции F класса $\boldsymbol{\mathcal{S}}'$ вводить как пределы обычных функций F_n класса $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, сходящихся в смысле (1.6.1), то $\widehat{F}$ есть предел обычных же функций $\widehat{F_n}$ в том же смысле. Разумеется, тогда и «формула обращения» выполнена просто из-за того, что она верна в $\boldsymbol{\mathcal{S}}$.

Аналогично преобразованию Фурье на обобщенные функции переносятся и некоторые другие операции для обычных функций. Например, обобщенная функция F может быть умножена на гладкую функцию G с поизводными не более чем полиномиального роста так:

$$(G \cdot F)(f) = F(G \cdot f).$$

Правая часть имеет смысл, так как $G \cdot f$ входит в $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ для всех $f \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$. При этом $G \cdot f_n \to 0$ в $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, если $f_n \to 0$ в $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, что очевидно из определения сходимости в $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Таким образом, правая часть задает непрерывный линейный функционал по f, который и берется в качестве $G \cdot F$. Обычным образом F нельзя умножать на G, так как F не является функцией на прямой. Однако если F задается обычной функцией F посредством интеграла, то функционал $G \cdot F$ тоже задается обычным произведением $G(x)F(x)$ через интеграл.

1.6.9. Пример. Верно равенство

$$x \cdot \delta = 0,$$

ибо $x \cdot \delta(f) = \delta(xf) = (xf)(0) = 0$.

1.6.10. Определение. *Производная F' обобщенной функции F из $\boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R})$ задается формулой*

$$F'(f) = -F(f').$$

Частная производная $\partial_{x_i} F$ обобщенной функции $F \in \boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^d)$ задается формулой

$$\partial_{x_i} F(f) = -F(\partial_{x_i} f).$$

Здесь та же идея: правая часть есть непрерывный функционал по f (так специально устроено определение сходимости в $\boldsymbol{\mathcal{S}}$), левая часть есть просто символ, определяемый осмысленной правой частью. Однако это определение согласовано с обычным: если функционал F задан в виде

$$F(f) = \int f(x)F(x)\,dx$$

обычной гладкой функцией $F(x)$ не более чем полиномиального роста (с производными), то функционал F' имет вид

$$F'(f) = -F(f') = -\int f'(x)F(x)\,dx = \int f(x)F'(x)\,dx,$$

т. е. задается интегралом с обычной производной F (внеинтегрального члена нет, ибо $f(x)F(x)$ стремится к нулю на бесконечности из-за условия на F и определения $\boldsymbol{\mathcal{S}}$).

1.6.11. Пример. Функция Хевисайда ξ равна 1 при $x \geqslant 0$ и 0 при $x < 0$. Ее обычная производная равна нулю вне нуля, т. е. всюду, где существует, но в смысле обобщенных функций

$$\xi' = \delta,$$

ибо

$$\xi'(f) = -\xi(f') = -\int_0^\infty f'(x)\,dx = f(0).$$

Для обычных функций мы видели, что преобразование Фурье f' есть $ix\widehat{f}(x)$. Это свойство переносится и на обобщенные функции:

$$\widehat{F'} = ix\widehat{F},$$

где справа стоит результат умножения обобщенной функции $\widehat{F}$ на гладкую функцию ix. Аналогично на $\mathbb{R}^d$

$$\widehat{\partial_{x_j} F} = ix_j\widehat{F}.$$

В самом деле, для всех $f \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$ имеем по определениям указанных операций:

$$\widehat{F'}(f) = F'(\widehat{f}) = -F(\widehat{f}\,') = -F(\widehat{-ixf}) = -\widehat{F}(-ixf) = (ix\widehat{F})(f).$$

Для старших производных получаем

$$\widehat{F^{(k)}} = (ix)^k\widehat{F},$$

$$\widehat{\partial_{x_{j_1}} \cdots \partial_{x_{j_k}} F} = (ix_{j_1})\cdots(ix_{j_k})\widehat{F}.$$

На этом равенстве основан метод решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом Фурье: если дано уравнение

$$c_n F^{(n)} + c_{n-1}F^{(n-1)} + \cdots + c_1 F' + c_0 F = G$$

с постоянными коэффициентами c_j и правой частью из $\boldsymbol{\mathcal{S}}'$, решаемое также в $\boldsymbol{\mathcal{S}}'$, то после взятия преобразования Фурье находим

$$c_n(ix)^n\widehat{F} + \cdots + c_0\widehat{F} = \widehat{G},$$

иначе говоря,

$$\mathcal{P}(x)\widehat{F} = \widehat{G},$$

где $\mathcal{P}(x)$ — многочлен, полученный заменой дифференцирований умножениями на ix (в многомерном случае каждое дифференцирование ∂_{x_j} заменяется умножением на ix_j). В итоге для нахождения F надо найти $\widehat{G}$, поделить на $\mathcal{P}$ и взять обратное преобразование Фурье. Например, если

$$\Delta = \partial^2_{x_1} + \cdots + \partial^2_{x_d}$$

есть оператор Лапласа, то уравнение

$$\Delta F - \lambda F = G$$

сводится к уравнению $(-|x|^2-\lambda)\widehat{F}=\widehat{G}$. Скажем, для $\lambda=1$ при $d=1$ из этого равенства F можно выразить как свертку G с функцией вида $ce^{-|x|}$.

Фундаментальную роль в этой области играет установленный выдающимся аналитиком Л. Хёрмандером факт, что для всякого многочлена $\mathcal{P}$ на $\mathbb{R}^d$, не равного тождественно нулю, для всякой правой части Ψ из $\boldsymbol{\mathcal{S}}'$ уравнение $\mathcal{P}\cdot\Phi=\Psi$ имеет решения в $\boldsymbol{\mathcal{S}}'$. Значит, в $\boldsymbol{\mathcal{S}}'$ разрешимы все линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, среди которых не все нулевые. Эти объясняется выбор пространства $\boldsymbol{\mathcal{S}}'$ обобщенных функций: в классах обычных функций такой разрешимости нет. Например, банальное уравнение $x\cdot F=1$ не имеет гладких решений. В $\boldsymbol{\mathcal{S}}'$ ему удовлетворяет обобщенная функция $\mathrm{V.P.}\frac{1}{x}$, которая из функции $1/x$ с неинтегрируемой особенностью в нуле строится с помощью так называемой регуляризации:

$$\mathrm{V.P.}\frac{1}{x}(f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,dx.$$

Можно проверить существование предела для всех $f\in\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Например, можно показать, что

$$\mathrm{V.P.}\frac{1}{x}(f)=\int_{|x|>1}\frac{f(x)}{x}\,dx+\int_{|x|\leqslant 1}\frac{f(x)-f(0)}{x}\,dx,$$

где второй интеграл существует, ибо функция $|f(x)-f(0)|/x$ ограничена на $[-1,1]$ по теореме о среднем. При этом $x\mathrm{V.P.}\frac{1}{x}(f)=\mathrm{V.P.}\frac{1}{x}(xf)$ есть интеграл от f по прямой. Это и означает, что $x\mathrm{V.P.}\frac{1}{x}=1$ в смысле обобщенных функций.

Уравнение

$$xF'=0$$

среди гладких функций имеет лишь постоянные решения, но среди обобщенных его решением является также функция Хевисайда ξ, для которой $F'=\delta$. Такого рода решения с особенностями, не допускаемые классической теорией, нередко представляют основной интерес в прикладных задачах, в частности при исследовании взрывных и ударных явлений.

Еще один полезный объект, связанный с обобщенными производными, — пространства Соболева.

Пусть f — функция на области Ω в $\mathbb{R}^d$, интегрируемая на шарах в этой области (такая функция называется локально интегрируемой). Говорят, что f имеет соболевскую производную g_i по переменной x_i, если g_i — такая локально интегрируемая в Ω функция, что

$$\int_\Omega f\partial_{x_i}\varphi\,dx = -\int_\Omega g_i\varphi\,dx$$

для всякой гладкой функции φ, равной нулю вне компакта в Ω. Тогда полагаем $\partial_{x_i}f := g_i$.

Это определение аналогично определению обобщенных функций, важное отличие в том, что обобщенная производная здесь должна задаваться функцией, а не просто быть функционалом. Например, здесь не годится дельта-функция в качестве производной.

Через $W^{1,1}(\Omega)$ обозначается класс интегрируемых в Ω функций, для которых имеются соболевские производные по всем переменным, также интегрируемые на всей области.

По индукции можно ввести соболевские производные второго порядка $\partial_{x_i}\partial_{x_j}f$, а также всякого конечного порядка k. Через $W^{2,k}(\Omega)$ обозначается класс квадратично интегрируемых в Ω функций, для которых имеются соболевские производные до порядка k, также квадратчино интегрируемые на всей области.

Справедливо следующее описание.

1.6.12. Теорема. *Класс Соболева $W^{2,2}(\mathbb{R}^d)$ состоит из таких функций $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, что функция $|x|^2\widehat{f}(x)$ входит в $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Классы Соболева полезны при решении уравнений с частными производными. Например, уравнение

$$\Delta f - f = g$$

однозначно разрешимо в классе Соболева $W^{2,2}(\mathbb{R}^d)$ при любой правой части $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. С помощью преобразования Фурье это уравнение приводится к виду

$$-(|x|^2+1)\widehat{f}(x) = \widehat{g}(x),$$

т. е. f есть обратное преобразование Фурье функции $-\widehat{g}(x)/(|x|^2+1)$, которая очевидным образом входит в $L^2(\mathbb{R}^d)$, ибо туда входит $\widehat{g}$.

§ 1.7. Задачи

1.7.1. Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,e^{-\alpha x}\,dx, \quad \alpha \in [0,\infty)$$

и выяснить, непрерывен ли он по α.

1.7.2. Доказать, что интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\,dx$$

сходится равномерно на каждом отрезке в $(0,+\infty)$, но равномерной сходимости нет на $[0,1]$.

1.7.3. Исследовать интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^\alpha}\,dx, \quad \alpha \in (2,+\infty)$$

на равномерную сходимость и выяснить, непрерывен ли он по α.

1.7.4. Исследовать равномерную сходимость интеграла

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(x^2)}{1+x^p}\,dx,\ p \geqslant 0,$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^t}\sin\frac{1}{x}\,dx,\ t\in(0,2).$

1.7.5. Вычислить интеграл

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2-a^2/x^2}\,dx,$ (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-\cos(\beta x)}{x^2}\,dx,\ \alpha\geqslant 0.$

1.7.6. Пусть F — непрерывная функция на $\mathbb{R}^2$, f и g — непрерывные функции на $[0,1]$. Доказать непрерывность по $\alpha\in[0,1]$ интеграла

$$\int_{g(\alpha)}^{f(\alpha)} F(x,\alpha)\,dx$$

1.7.7. Пусть f — непрерывно дифференцируемая функция на плоскости. Найти производную функции

$$F(\alpha)=\int_0^{\alpha} f(x+\alpha, x-\alpha)\,dx, \quad \alpha\in(0,1).$$

1.7.8. Найдите производную по параметру

(a) $\displaystyle\int_y^{y^2} e^{-x^2}\,dx,$ (b) $\displaystyle\int_{a+y}^{b+y} \frac{\sin xy}{x}\,dx,$ (c) $\displaystyle\int_{\sin y}^{\cos y} \cos(\sqrt{x}y)\,dx.$

1.7.9. Применяя метод дифференцирования по параметру, вычислить интеграл

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(a^2-\sin^2 x)\,dx,\ a\geqslant 1,$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx,$

1.7.10. Применяя теорему Фубини, вычислить интеграл

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx,$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \sin\Big(\ln\frac{1}{x}\Big)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx.$

1.7.11. (Формулы Фруллани). Пусть f непрерывна на $(0,+\infty)$. (i) Пусть функция $f(x)/x$ интегрируема на $[\delta,+\infty)$ для всякого $\delta>0$ и существует предел $f(0+)=\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$. Докажите равенство

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0+)\ln\frac{b}{a}.$$

(ii) Пусть функция $f(x)/x$ интегрируема около нуля и существует предел $f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Докажите равенство

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = -f(+\infty)\ln\frac{b}{a}.$$

1.7.12. Вычислите интегралы

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{b\sin ax - a\sin bx}{x^2}\,dx$.

1.7.13. Дифференцируя по параметру, вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\beta x}\,dx.$$

Вычислить $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$, обосновав предельный переход при $\beta\to 0$.

1.7.14. Вычислите интегралы

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^5(ax)}{x^5}\,dx$, (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x \sin ax}{x}\,dx$.

1.7.15. Определить область существования и выразить через гамма и бета функции следующие интегралы:

$$(a)\ \int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx, \quad (b)\ \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\,dx, \ (c)\ \int_0^{\infty} \frac{x^p \ln x}{1+x}\,dx,$$

$$(d)\ \int_a^{a+1} \ln\Gamma(x)\,dx.$$

1.7.16. Вычислить интегралы

$$\text{(i)}\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}\,dx, \quad \text{(ii)}\ \int_0^{+\infty} \Big(\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\Big)^2\,dx, \quad a,b>0.$$

Указание: использовать теорему Фруллани, а в (ii) также дифференцирование по α.

1.7.17. Выразить через гамма-функцию

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{3-\cos\theta}}\,.$$

1.7.18. Доказать, что гамма-функция логарифмически выпукла на множестве $(0,+\infty)$, т. е. выпукла функция $\ln\Gamma$, более того, $(\ln\Gamma)''>0$.

Указание: записав $(\ln\Gamma)''$ как $\Gamma^{-2}(\Gamma''\Gamma-(\Gamma')^2)$, оценить

$$(\Gamma'(\alpha))^2=\left(\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\ln x\,dx\right)^2$$

через $\Gamma(\alpha)\Gamma''(\alpha)$ с помощью неравенства Коши – Буняковского, представив функцию $e^{-x}x^{\alpha-1}\ln x$ в виде произведения двух подходящих функций.

1.7.19. Найти преобразование Фурье функций: (a) $f(x)=x$ при $x\in[a,b]$ и $f(x)=0$ вне $[a,b]$, (b) $f(x)=x^2e^{-|x|}$, (c) $f(x)=x/(1+x^2)$, (d) $f(x)=\sin x/(1+x^2)$.

1.7.20. Найти преобразование Фурье обобщенных функций:
(a) $\sin x$, (b) $(\sin x)^2$, (c) $\sin(x^2)$, (d) $|x|$, (e) $x\sin x$.

1.7.21. Доказать, что существует следующая обобщенная функция и найти ее преобразование Фурье:

$$(a)\, V.P.\frac{1}{x}:=\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{x}I_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]};$$

$$(b)\,\frac{1}{x+i0}:=\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{x+i\varepsilon}.$$

Выяснить, равны ли эти обобщенные функции.

1.7.22. Выяснить, при каких p функция $f(x)=|x|^p$ на единичном шаре в $\mathbb{R}^n$ входит в пространство Соболева $W^{1,1}$.

Глава 2

Функциональные последовательности и ряды

В этой главе кратко обсуждаются два важных вида сходимости функциональных последовательностей и рядов: равномерная и в среднем квадратическом, т. е. по двум классическим нормам: sup-норме и интегральной норме из L^2. Типичные ситуации, в которых возникают виды сходимости, связаны со степенными рядами и рядами Фурье, что также обсуждается в этой главе.

§ 2.1. Ортонормированные базисы

Ранее мы уже обсуждали сходимость, задаваемую нормой на линейном пространстве. Простейшая норма задается формулой $\|f\| = \sup_t |f(t)|$ на пространстве ограниченных функций. Другой важный пример дается нормой, равной корню из интеграла от $|f|^2$. Мы начнем со второго случая, абстрактной версией которого является норма гильбертова пространства H, задаваемого скалярным произведением в H по формуле

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

В комплексном гильбертовом пространстве $L^2[a, b]$ скалярное произведение имеет вид

$$(f, g) = \int f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

Так как L^2 состоит из классов эквивалентности, а не из индивидуальных функций, то, конечно, в интеграле фигурируют представители классов эквивалентности. Впрочем, в приложениях этот нюанс можно игнорировать.

Если дана локально интегрируемая неотрицательная функция ϱ (ее нередко называют весом), то появляется весовое пространство $L^2(\varrho)$, состоящее из классов эквивалентности измеримых функций f, для которых интегрируема функция $|f(t)|\varrho(t)$. В нем скалярное произведение имеет вид

$$(f,g) = \int f(t)\overline{g(t)}\,\varrho(t)\,dt.$$

Напомним, что система векторов в пространстве со скалярным произведением называется ортонормированной, если эти векторы имеют норму 1 и попарно ортогональны. Если векторы $e_1, \ldots, e_n$ единичной длины попарно ортогональны, то

$$\|c_1e_1 + \cdots + c_ne_n\|^2 = (c_1e_1 + \cdots + c_ne_n, c_1e_1 + \cdots + c_ne_n) = \\ = |c_1|^2 + \ldots + |c_n|^2.$$

2.1.1. Определение. *Ортонормированная система векторов $\{e_n\}$ называется ортонормированным базисом гильбертова пространства H, если всякий вектор $x \in H$ может быть записан как сумма ряда*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$$

с числовыми коэффициентами c_n, где ряд сходится по норме, т. е. $\left\|x - \sum_{n=1}^{N} c_n e_n\right\| \to 0$ при $N \to \infty$.

Например, в пространстве последовательностей l^2 базис образуют векторы $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, где 1 стоит на месте n.

Если векторы v_N гильбертова пространства сходятся к v, то для всякого вектора u имеет место сходимость скалярных произведений

$$(v_N, u) \to (v, u).$$

Это видно из неравенства Коши – Буняковского

$$|(v - v_n, u)| \leqslant \|v - v_n\|\,\|u\|.$$

Значит, при $N \to \infty$ имеем

$$c_k\Bigl(\sum_{n=1}^{N} c_n e_n, e_k\Bigr) \to (x, e_k)$$

для всякого k, поэтому

$$c_k = (x, e_k).$$

Аналогично проверяется, что $(v_N, v_N) \to (v, v)$. Значит,

$$\sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 = \Big(\sum_{n=1}^{N} c_n e_n, \sum_{n=1}^{N} c_n e_n\Big) \to |x|^2 = (x, x).$$

Итак, верно РАВЕНСТВО ПАРСЕВАЛЯ для ортонормированных базисов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = |x|^2.$$

Для всякого ортонормированного конечного набора $e_1, \dots, e_N$ частичные суммы $\sum_{n=1}^{N}(x, e_n)e_n$ обладают следующим экстремальным свойством: вектор $\sum_{n=1}^{N}(x, e_n)e_n$ — ближайший к x элемент из линейного подпространства, порожденного $e_1, \dots, e_N$. Иначе говоря,

$$\Big\|x - \sum_{n=1}^{N}(x, e_n)e_n\Big\| \leqslant \Big\|x - \sum_{n=1}^{N} a_n e_n\Big\|$$

для всех наборов коэффициентов $a_1, \dots, a_N$. В самом деле:

$$\Big\|x - \sum_{n=1}^{N} a_n e_n\Big\|^2 = \Big\|x - \sum_{n=1}^{N}(x, e_n)e_n + \sum_{n=1}^{N}[a_n - (x, e_n)]e_n\Big\|^2.$$

Вектор $x - \sum_{n=1}^{N}(x, e_n)e_n$ ортогонален каждому вектору e_k при $k \leqslant N$, ибо e_n взаимно ортогональны. Значит, он ортогонален и сумме $\sum_{n=1}^{N}[a_n - (x, e_n)]e_n$. Если $u \perp v$, то $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. Поэтому

$$\Big\|x - \sum_{n=1}^{N} a_n e_n\Big\|^2 = \Big\|x - \sum_{n=1}^{N}(x, e_n)e_n\|^2 + \Big\|\sum_{n=1}^{N}[a_n - (x, e_n)]e_n\Big\|^2.$$

Второе слагаемое в правой части положительно, кроме случая, когда $a_n = (x, e_n)$.

Отметим еще, что из этих рассуждений следует оценка

$$\sum_{n=1}^{N} |(x, e_n)|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Если $\{e_n\}$ — ортонормированная последовательность, то эта оценка верна для всех N, что дает важное НЕРАВЕНСТВО БЕССЕЛЯ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Из неравенства Бесселя следует, что если $\{e_n\}$ — произвольная ортонормированная последовательность в гильбертовом пространстве H, то для всякого $x \in H$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$, сходится в H, хотя не всегда к x. В самом деле, его частичные суммы образуют фундаментальную последовательность:

$$\Bigl\| \sum_{n=1}^{N+m} (x, e_n)e_n - \sum_{n=1}^{N}(x, e_n)e_n \Bigr\|^2 = \sum_{n=N+1}^{N+m} |(x, e_n)|^2 \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |(x, e_n)|^2,$$

а правая часть стремится к нулю при $N \to \infty$ в силу неравенства Бесселя. Конечно, здесь важно, что H полно, иначе нельзя гарантировать, что частичные суммы имеют предел.

Напомним, что метрическое пространство называется сепарабельным, если в нем есть счетное всюду плотное множество, т. е. всякая точка есть предел последовательности из этого счетного множества. Если $\{e_n\}$ — ортонормированный базис гильбертова пространства H, то конечные линейные комбинации векторов e_n с рациональными коэффициентами дают счетное всюду плотное множество (всякий элемент x по определению базиса приближается векторами вида $c_1e_1 + \cdots + c_ne_n$, а такие уже можно приближать векторами с рациональными коэффициентами). Из установленного выше экстремального свойства проекций легко извлечь, что во всяком ненулевом сепарабельном гильбертовом пространстве есть конечный или счетный ортонормированный базис. Для этого берется какая-нибудь всюду плотная последовательность $\{v_n\}$ и из нее изготавливается ортонормированная последовательность $\{e_n\}$ обычной процедурой ортогонализации. А именно берем первый ненулевой элемент v_{n_1} и полагаем $e_1 = v_{n_1}/\|v_{n_1}\|$. Затем берем первый элемент v_{n_2}, линейно независимый с v_{n_1} и в качестве e_2 берем единичный вектор, ортогональный e_1 в плоскости, порожденной v_{n_1} и v_{n_2}. Продолжая по индукции, получаем ортонормированную последовательность $\{e_n\}$ с тем свойством, что всякий вектор исходной последовательности линейно выражается через конечное число векторов e_n.

2.1.2. Теорема. *Последовательность $\{e_n\}$, полученная ортогонализацией всюду плотной последовательности $\{v_k\}$, является базисом.*

Доказательство. Покажем, что $\left\|x - \sum_{n=1}^{N}(x, e_n)e_n\right\| \to 0$ для всех $x \in H$. Пусть $\varepsilon > 0$. По условию есть v_k с $\|x - v_k\| < \varepsilon$. Найдется такое m, что v_k линейно выражается через $e_1 < \ldots, e_m$. Тогда в силу свойства экстремальности $\left\|x - \sum_{n=1}^{N}(x, e_n)e_n\right\| \leqslant \|x - v\| < \varepsilon$ при всех номерах $N \geqslant m$. $\square$

Чтобы проверить, что данная ортонормированная последовательность $\{\varphi_n\}$ есть базис гильбертова пространства H, нет необходимости устанавливать, что она всюду плотна. Иногда гораздо проще убедиться, что нет ненулевых векторов, ортогональных всем φ_n. В самом деле, если бы нашелся вектор x, не равный ряду из $(x, e_n)e_n$, то мы бы взяли вектор $y = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$. Этот ряд сходится, как отмечено выше. Теперь получаем, что $(x - y, e_n) = 0$ при всех n, противоречие.

Ортогонализируя конкретные всюду плотные последовательности, получаем разные базисы.

2.1.3. Пример. (i) Многочлены всюду плотны в $L^2[a, b]$, а также в весовом пространстве $L^2(\varrho)$, где ϱ — неотрицательная интегрируемая функция на $[a, b]$. Поэтому здесь достаточно применить ортогонализацию к степеням $1, t, t^2, \ldots$, что даст базис из многочленов p_n степени n единичной нормы в $L^2(\varrho)$ и попарно ортогональных:

$$\int_a^b p_n(t)p_k(t)\,\varrho(t)\,dt = 0,\ n \neq k.$$

Этот универсальный способ был придуман П. Л. Чебышёвым, но чтобы не называть все такие ортогональные многочлены многочленами Чебышёва, для различных конкретных весов ϱ их называют именами других математиков.

(ii) Пусть $\varrho(t) = (2\pi)^{1/2}e^{-t^2/2}$ — стандартная гауссовская вероятностная плотность. Применив ортогонализацию к степеням $1, t, t^2, \ldots$ в пространстве $L^2(\varrho)$ функций на всей прямой получим многочлены Чебышёва–Эрмита, по указанной выше причине называемой часто просто многочленами Эрмита. Можно проверить, что они задаются формулой

$$H_n(t) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}}e^{t^2/2}\frac{d^n}{dt^n}e^{-t^2/2}, \quad H_0(t) = 1.$$

Базисность $\{H_n\}$ проверяется так: если есть функция $f \in L^2(\varrho)$, ортогональная всем степеням, т. е.

$$\int t^n f(t)\varrho(t)\,dt = 0,\ n = 0, 1, \ldots,$$

то для функции

$$F(\lambda) = \int e^{i\lambda t} f(t)\varrho(t)\,dt$$

все производные в нуле равны нулю: $F^{(n)}(0) = 0$. Эта функция определена при всех комплексных λ и дифференцируема на комплексной плоскости. Поэтому она тождественно равна нулю. Значит, функция $f(t)\varrho(t)$ имеет нулевое преобразование Фурье. Итак, $f(t) = 0$ почти всюду.

Отметим, что нередко ортогональность системы векторов $\{\varphi_n\}$ в гильбертовом пространстве H проверяется не явным вычислением (иногда не столь коротким, как в примерах выше), а из такого соображения. Пусть H_0 — некоторое линейное подпространство в H и

$$A\colon H_0 \to H_0$$

есть линейный оператор, который симметричен:

$$(Ax, y) = (x, Ay), \quad x, y \in H_0.$$

Пусть $\varphi_n \in H_0$ являются собственными векторами с разными собственными числами. Тогда они попарно ортогональны. Действительно, пусть a и b — собственные векторы с разными собственными числами α и β. Сначала заметим, что если H комплексно, то все равно собственные числа вещественны:

$$\alpha(a, a) = (Aa, a) = (a, Aa) = (a, \alpha a) = \overline{\alpha}(a, a),$$

откуда $\alpha = \overline{\alpha}$. Далее,

$$\alpha(a, b) = (Aa, b) = (a, Ab) = (a, \beta b) = \beta(a, b),$$

откуда $(a, b) = 0$. Например, простая проверка ортогональности $\varphi_n(t) = e^{int}$ в $L^2[-\pi, \pi]$ может быть заменена наблюдением, что $D\varphi_n = -n\varphi_n$, где $D\varphi = i\varphi'$ на линейной оболочке φ_n, причем оператор D симметричен (он симметричен и на большей области гладких 2π-периодических функций, что легко проверяется интегрированием по частям). Многочлены Чебышёва–Эрмита H_n являются собственными функциями оператора Орнштейна–Уленбека (называемого также оператором Эрмита)

$$Lf(x) = f''(x) - xf'(x),$$

симметричного на подпространстве многочленов в $L^2(\gamma)$; для него $LH_n = -nH_n$.

§ 2.2. Ряды Фурье

Здесь мы рассмотрим специальную ортонормированную последовательность функций

$$e_n(t) = (2\pi)^{-1/2} e^{int}, \ n \in \mathbb{Z},$$

в комплексном пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ или $L^2[0, 2\pi]$ (разницы нет из-за 2π-периодичности). В вещественном случае рассматривают функции $(\pi)^{-1/2}\sin(nt)$ и $(2\pi)^{-1/2}, (\pi)^{-1/2}\cos(nt)$. Ортонормированность очевидна, но почему это базис? Нам надо проверить, что конечные линейные комбинации e_n всюду плотны в $L^2[-\pi, \pi]$. Так как в $L^2[-\pi, \pi]$ всюду плотно множество гладких функций, причем даже равных нулю в концах отрезка, то достаточно уметь приближать такие функции.

2.2.1. Лемма. *Пусть f — 2π-периодическая гладкая функция. Тогда для*

$$S_N(x) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}, \quad N \geqslant 1,$$

где

$$c_k = (f, e_k) = (2\pi)^{-1/2} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt,$$

при некотором C имеем

$$\max_t |f(t) - S_N(t)| \leqslant C N^{-1}.$$

Доказательство. Заметим, что верно равенство

$$S_N(x) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{k=-N}^{N} e^{-ikt} e^{ikx}\, dt =$$
$$= (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{e^{i(N+1)(x-t)} - e^{-iN(x-t)}}{e^{i(x-t)} - 1}\, dt,$$

где было использовано выражение для суммы степеней e^{iz}:

$$e^{-iNz} + \cdots + e^{iNz} = \frac{e^{i(N+1)z} - e^{-iNz}}{e^{iz} - 1}$$

(напомним, что $1+q+\cdots+q^N=(q^{N+1}-1)/(q-1)$). Заметим, что если $f=1$, то $S_N(x)=1$. Поэтому

$$f(x)-S_N(x)=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}[f(x)-f(t)]\frac{e^{i(N+1)(x-t)}-e^{-iN(x-t)}}{e^{i(x-t)}-1}\,dt.$$

Сделав замену $u=t-x$ и используя, что интеграл от T-периодической функции по отрезку длины T равен интегралу по $[0,T]$, получаем

$$f(x)-S_N(x)=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}[f(x)-f(x+u)]\frac{e^{-i(N+1)u}-e^{iNu}}{e^{-iu}-1}\,du.$$

Покажем, что $N[f(x)-S_N(x)]$ оценивается константой. Для этого заметим, что по формуле интегрирования по частям с учетом периодичности получаем

$$\int_0^{2\pi} iN[f(x)-f(x+u)]\frac{e^{iNu}}{e^{-iu}-1}\,du=\int_0^{2\pi}\frac{d}{du}\Bigl(\frac{f(x+u)-f(x)}{e^{-iu}-1}\Bigr)e^{iNu}\,du.$$

Здесь

$$\frac{d}{du}\Bigl(\frac{f(x+u)-f(x)}{e^{-iu}-1}\Bigr)=\frac{f'(x+u)(e^{-iu}-1)+i[f(x+u)-f(x)]e^{-iu}}{(e^{-iu}-1)^2}.$$

Это выражение по модулю оценивается числом, не зависящим от x,u, так как $|e^{-iu}-1|\geqslant c|u|$ при $|u|\leqslant\pi/4$, а по формуле Тейлора имеем $f(x+u)-f(x)=-f'(x+u)u+f''(\xi)u^2/2$, так что числитель оценивается через $\mathrm{const}\,u^2$. То же самое верно для слагаемого с $e^{-i(N+1)u}$. $\square$

Из леммы вытекает сходимость $S_N\to f$ в $L^2[-\pi,\pi]$, что завершает обоснование базисности $\{e_n\}$.

Возможно иное обоснование с применением преобразования Фурье и теории функций комплексного переменного: как и выше, если есть функция $h\in L^2[-\pi,\pi]$, ортогональная всем e^{int}, то рассмотрим функцию

$$F(\lambda)=\int_{-\pi}^{\pi}h(t)e^{-i\lambda t}\,dt.$$

Она дифференцируема в $\mathbb{C}$, причем $F(k)=0$ при всех $k\in\mathbb{Z}$. Ее сужение на $\mathbb{R}$ входит в $L^2(\mathbb{R})$ из-за изометричности преобразования Фурье, причем $|F(\lambda)|\leqslant Ce^{|\pi\lambda|}$. Известно, что из этих условий следует равенство $F=0$, откуда $h=0$ в $L^2[-\pi,\pi]$.

Напомним, что функции f_n на множестве X сходятся равномерно к f, если

$$\sup_x|f(x)-f_n(x)|\to 0.$$

Это сходимость по равномерной норме, а у нас здесь речь шла о сходимости по норме из L^2. Равномерной сходимости рядов Фурье может не быть даже для непрерывной функции. Конечно, для разрывной или непериодической заведомо нет равномерной сходимости, ибо частичные суммы ряда Фурье непрерывны и 2π-периодичны. Скажем, для функции $f(x) = x$ сходимость в L^2 есть, а равномерной нет. Простое достаточное условие равномерной сходимости ряда Фурье 2π-периодической функции f таково: $|f''|$ ограничена. В самом деле, интегрируя по частям два раза находим

$$\int_0^{2\pi} f''(t)e^{-int}\,dt = -n^2\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt,$$

где внеинтегральных членов нет из-за периодичности. Поэтому имеем оценку $|c_n(f)| \leqslant cn^{-2}$ для коэффициентов Фурье f. Это дает равномерную сходимость ряда из $c_n(f)e^{inx}$.

Несколько более тонкий анализ показывает, что равномерная сходимость $S_N(x) \to f(x)$ имеет место и для 2π-периодической функции, для которой лишь первая производная ограничена. Однако одной лишь непрерывности f для этого уже мало. Тем не менее равномерные приближения тригонометрическими многочленами, т. е. конечными линейными комбинациями функций e^{int}, имеются для всех 2π-периодических непрерывных функций, ибо мы знаем, что такие функции равномерно приближаются бесконечно дифференцируемыми (это делалось с помощью сверток). Таким образом, приходим к теореме Вейерштрасса для тригонометрических многочленов.

2.2.2. Теорема. *Если 2π-периодическая вещественная или комплексная функция f непрерывна, то найдется равномерно сходящаяся к ней последовательность тригонометрических многочленов.*

В вещественном случае можно записать $e^{int} = \cos(nt) + i\sin(nt)$ и иметь дело с разложениям по косинусам и синусам.

Еще раз отметим, что базисность экспонент означает, что ряды по ним сходятся в L^2. Естественно возникает вопрос о сходимости почти всюду. Бывают ортонормированные базисы в $L^2[a,b]$, по которым разложения некоторых функций из $L^2[a,b]$ не сходятся почти всюду. Однако именно для тригонометрического базиса такой неприятности не может случиться, что было доказано Л. Карлесоном в 1966 году (но перед этим вопрос оставался открытым полвека, причем на него не смог ответить даже Колмогоров).

Упомянутый результат Карлесона не говорит о сходимости в какой-либо заданной точке. Для такой сходимости имеет место следующий результат.

2.2.3. Теорема. *Пусть 2π-периодическая функция f интегрируема на $[0, 2\pi]$ и $x \in [0, 2\pi]$. Достаточным условием сходимости ряда Фурье для f в точке x к $f(x)$ является оценка $|f(x+h) - f(x)| \leqslant C|h|^\alpha$ с какими-нибудь числами $C, \alpha > 0$ при всех достаточно малых h.*

Доказательство основано на анализе полученного выше выражения для частичных сумм ряда Фурье.

ВЫВОД: всякая функция $f \in L^2[0, 2\pi]$ разлагается в ряд Фурье по тригонометрической системе, сходящийся к ней по интегральной норме в $L^2[0, 2\pi]$. Даже если f непрерывна и $f(0) = f(2\pi)$ такой ряд может не сходиться в каких-то точках, тем более он не обязан сходиться равномерно. Однако если при этом f еще имеет и ограниченную производную, то ее ряд Фурье сходится и равномерно.

Важно помнить, что для иных отрезков (не длины 2π) базис надо брать из растянутых функций, например, из $e^{i2\pi nx}$ для $[0, 1]$. В $L^2[0, \pi]$ отдельно $\sin nx$ или $\cos nx$ после нормировки дают базис, хотя в $L^2[0, 2\pi]$ они попарно ортогональны и базис не дают. В самом деле, если функция $h \in L^2[0, \pi]$ ортогональна всем $\sin nx$, то положим $h(x) = -h(-x)$ при $x \in [-\pi, 0)$. Это дает нечетную функцию из всего $L^2[-\pi, \pi]$, поэтому она ортогональна всем $\cos nx$, но она осталась ортогональной и $\sin nx$, поэтому есть нулевой элемент из $L^2[-\pi, \pi]$.

§ 2.3. Степенные ряды

Здесь мы кратко обсудим степенные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Такое рассмотрение правильнее вести сразу для рядов с комплексным переменным x, тогда обычно пишут

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

но при желании можно считать x вещественным. Разумеется, можно рассматривать ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

для заданной точки $a \in \mathbb{C}$. Мы будем делать это для $z = 0$ лишь для упрощения формул.

Основные вопросы про степенные ряды таковы: 1) область сходимости ряда, 2) свойства заданной рядом функции, 3) представление степенным рядом данной функции.

Полезно сразу иметь резюме по этим вопросам. Ответы таковы.

1) Полностью описать множество точек сходимости степенного ряда обычно невозможно, но оно всегда имеет вид открытого круга комплексной плоскости с добавлением некоторого подмножества граничной окружности. В большинстве случаев важно знать лишь этот открытый круг, а его радиус R вычисляется по коэффициентам c_n по формуле

$$R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}. \tag{2.3.1}$$

Если эта величина бесконечна, то ряд сходится лишь при $x = 0$. На прямой круг сходимости высекает интервал, в его граничных точках ряд может сходиться или не сходиться.

2) Основные свойства заданной рядом функции состоят в том, что она бесконечно дифференцируема в круге сходимости, причем во всякой внутренней точке a этого круга она разлагается в ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, но круг сходимости этого нового разложения может быть больше расстояния от a до границы исходного круга (но не будет меньше). Более того, в круге сходимости производные разлагаются в ряды, полученные почленным дифференцированием данного ряда. Например, первая производная имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1}.$$

Здесь следует пояснить, что производная функции f комплексного аргумента z определяется аналогично вещественному случаю как предел $\lim\limits_{h\to 0}(f(z+h)-f(z))/h$. Верно также и обратное: если функция f дифференцируема в круге с центром в точке a, то в этом круге она равна $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)(z-a)/n!$. Однако здесь ключевую роль играет комплексная дифференцируемость в круге. Даже из бесконечной дифференцируемости на интервале не следует представимость степенным рядом. Кроме того, комплексную дифференцируемость нельзя заменить даже бесконечной дифференцируемостью в смысле дифференцируемости функций двух вещественных переменных. Например, если $f(z) = x$, где $z = x + iy$, то такая функция не является комплексно дифференцируемой: например, если брать z чисто вещественным, то $f(z+h)-f(z)=h$, что после деления на h дает предел 1. Если же h чисто мнимо, то $f(z+h)-f(z)=0$, так что общего предела нет. Условием комплексной дифференцируемости функции $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$, где u — вещественная часть f, v — мнимая часть, которая дифференцируема в вещественном смысле как функция от (x,y), является выполнение условий Коши – Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Другие полезные свойства обсуждаются в теории аналитических функций.

3) Если функция f представлена в круге с центром в нуле степенным рядом, то коэффициенты c_n однозначно определяются по формуле

$$c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Поэтому для всякой бесконечно дифференцируемой функции f в интервале вещественной оси с центром в нуле появляется возможность выписать степенной ряд с такими коэффициентами. Однако может случиться, что такой степенной ряд сходится лишь в нуле и не представляет данную функцию вне нуля. Кроме того, может случиться, что ряд сходится в меньшем или большем интервале. Выяснить представимость функции ее рядом Тейлора можно с помощью анализа остаточного члена ряда Тейлора. Например, если остаточный член записан в виде $f^{(n+1)}(\xi)x^n/n!$, то, имея оценку

$$|f^{(n+1)}(x)|\leqslant n!M^n$$

на интервале $(-\varepsilon,\varepsilon)$, можно заключить, что $f^{(n+1)}(\xi)x^n/n!\to 0$ при $|x|<\min(\varepsilon,1/M)$, что дает совпадение $f(x)$ с суммой ряда Тейлора при таких x.

Наконец, по данному ряду невозможно восстановить саму функцию f, если заранее не знать, что этот ряд к ней сходился. Например, функция, равная нулю на $(-\infty,0]$ и равная e^{-1/x^2} на $(0,+\infty)$, не задается рядом в окрестности нуля, а ряд, полученный по ее производным в нуле, тождественно нулевой (все ее производные в нуле равны нулю).

2.3.1. Теорема. (i) *Ряд $\sum_{n=0}^\infty c_n z^n$ сходится в открытом круге радиуса R, заданного формулой* (2.3.1)*, причем на каждом строго внутреннем замкнутом круге он сходится равномерно. Вне замкнутого круга радиуса R нет точек сходимости этого ряда.*

(ii) *В открытом круге сходимости сумма ряда бесконечно дифференцируема, ее производная дается рядом* $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}$ *и аналогично для следующих производных.*

Доказательство. (i) Пусть $|z| < R$. Найдется r с $|z| < r < R$. Пусть $\varepsilon = 2^{-1}(r^{-1} - R^{-1})$. По условию $|c_n|^{1/n} < R^{-1} + \varepsilon$ для всех номером, начиная с некоторого n_1. Тогда $|c_n|\,|z|^n \leqslant r^n(R^{-1}+\varepsilon)^n = q^n$, где $q = r(R^{-1} + \varepsilon) < 1$. Значит, ряд из $|c_n|\,|z|^n$ сходится, что влечет сходимость и ряда из $c_n z^n$ аналогично случаю вещественных чисел. Если же ряд сходится при некотором $z_1 \neq 0$, то $c_n z_1^n \to 0$. Значит, последовательность $|c_n|\,|z_1|^n$ ограничена, т. е. $|c_n| \leqslant C|z_1|^{-n}$ при некотором $C > 0$, откуда $|c_n|^{1/n} \leqslant C^{1/n}|z_1|^{-1}$. Тем самым $R^{-1} \leqslant |z_1|^{-1}$, откуда $|z_1| \leqslant R$. Итак, вне замкнутого круга радиуса R нет точек сходимости. Из наших оценок следует и равномерная сходимость ряда на внутренних кругах.

(ii) Пусть $|z| < r < R$ и h таково, что $|z| + |h| < r < R$. Возьмем те же ε и n_1, что и выше. Обозначим через $f(z)$ сумму ряда и покажем, что предел $(f(z+h) - f(z))/h$ равен сумме ряда из $nc_n z^{n-1}$. Сначала заметим, что радиус сходимости последнего ряда тоже R, ибо $n^{1/n} \to 1$. Нетрудно проверить, что $|(z + h)^n - z^n| \leqslant nr^n|h|$. При $n \geqslant n_1$ получаем $|c_n|\,|(z + h)^n - z^n|/|h| \leqslant nq^n$, где ряд из правых частей сходится. При этом $c_n((z + h)^n - z^n)/h \to nc_n z^{n-1}$ при $h \to 0$ при фиксированном n. Остается воспользоваться таким несложно проверяемым утверждением: если члены ряда $a_n(h)$ зависят от параметра h, стремятся при $h \to 0$ к числам b_n, причем оцениваются числами $\alpha_n > 0$, ряд из которых сходится, то сумма ряда $\sum a_n(h)$ стремится к $\sum_n b_n$ при $h \to 0$. □

На границе круга сходимости может быть разное: ряд $\sum_{n\geqslant 1} z^n$ не может сходиться при $|z| = 1$, ряд $\sum_{n\geqslant 1} n^{-2}z^n$ с тем же единичным кругом сходимости сходится на окружности, а ряд $\sum_{n\geqslant 1} n^{-1}z^n$ где-то сходится, где-то нет.

§ 2.4. Задачи

2.4.1. Разложить функцию на заданном отрезке в тригонометрический ряд Фурье: (a) $f(x) = \cos^4 x$ на $[-\pi, \pi]$, (b) $f(x) = x$ на $[-1, 1]$, (c) $f(x) = (\pi - x)/2$ на $[0, 2\pi]$, (d) $f(x) = \ln|2\sin(x/2)|$ на $[-\pi, \pi]$, (e) $x \sin x$ на $[0, \pi]$.

2.4.2. (i) Вычислить суммы рядов $\sum_n \frac{1}{n^2}$, $\sum_n \frac{1}{(2n-1)^2}$, $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^2}$, пользуясь разложением функции $f(x) = x^2$ по косинусам на $[-\pi, \pi]$ и по синусам на $[0, \pi]$. (ii) Раскладывая функцию $f(x) = 1$ при $|x| \leqslant \alpha$ и $f(x) = 0$ при $|x| > \alpha$ в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$, $0 < \alpha < \pi$, вычислить суммы $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n\alpha)}{n^2}$.

2.4.3. Пользуясь разложением функций $f(x) = x$ и $f(x) = x^2$ по косинусам на $[0, \pi]$, вывести равенство

$$\frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

2.4.4. Исследовать равномерную сходимость последовательностей на промежутках $(0, +\infty)$ и $[a, b]$, где $0 < a < b < \infty$:

$$(a)\; f_n(x) = \frac{2n^2 x}{1 + n^p x^2},\; (b)\; f_n(x) = n\big(\sqrt{x^2 + 1/n} - x\big),\; (c)\; \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n.$$

2.4.5. Исследовать равномерную сходимость рядов на $(0, +\infty)$ и $[a, b]$, где $0 < a < b < \infty$:

$$(a) \sum_n x^p e^{-nx},\; (b) \sum_n \frac{e^{-nx^2}}{n + x},\; (c) \sum_n \frac{\cos nx}{1 + n^{16} x^4},\; (d) \sum_n \frac{\sin x \cos nx}{n + x^2}.$$

Указание: (a) на $[a, b]$ ряд оценивается через $b^p \sum_n e^{-na}$; на $(0, +\infty)$ остаток $x^p e^{-Nx}(1 - e^{-x})^{-1}$ при $p \leqslant 1$ не стремится равномерно к нулю, скажем, при $p = 1$ и $x = 1/N$ стремится к e^{-1}; при $p > 1$ и $x < N^{-1/2}$ остаток оценивается через $N^{-(p-1)/2}$ с постоянной, при $N^{-1/2} \leqslant x \leqslant 1$ через $e^{-N^{1/2}}$ с постоянной, при $x > 1$ через $2x^p e^{-Nx}$, что равномерно стремится к нулю.

2.4.6. Найти множество точек сходимости степенного ряда:

$$(a) \sum_n (-1)^n \Big(\frac{n+1}{2n+1}\Big)^n (x-1)^{3n},\; (b) \sum_n \frac{(4n)!}{(n!)^4} (x-3)^{2n}.$$

2.4.7. Разложить функцию в степенной ряд с центром в нуле:

$$(a)\; \frac{1+x}{\sqrt[3]{1+3x}},\; (b)\; \frac{x+1}{x^2 + 5x + 6},\; (d) \int_0^x \frac{\ln(1+s)}{s}\, ds.$$

2.4.8. Используя разложение в степенной ряд, решите уравнение

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Глава 3

Поверхностные интегралы и интегрирование форм

§ 3.1. Меры Хаусдорфа

Здесь кратко обсуждаются поверхностные интегралы, но сначала сделано замечание о мерах Хаусдорфа, единообразно охватывающих меры на множествах разных размерностей в $\mathbb{R}^n$ без какого-либо явного описания этих множеств. Это обобщение дает ожидаемые значения мер для множеств, для которых есть априорные представления об их мерах (например ломаных или окружностях). Напомним, что внешняя мера Лебега λ_n^* на множествах в $\mathbb{R}^n$ задана формулой

$$\lambda_n^*(E) = \inf\Bigl\{\sum_{j=1}^{\infty} r_j^n\colon\ E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j(r_j)\Bigr\},$$

где inf берется по всем конечным или счетным покрытиям E кубами $K_j(r_j)$ с длинами ребер r_j, с ребрами, параллельными осям координат. Множество E в кубе K с единичным ребром называется измеримым по Лебегу, если $\lambda_n^*(E) + \lambda_n^*(K\backslash E) = 1$, а в общем случае множество считается измеримым, если таковы его пересечения со всеми единичными кубами.

Конструкция Хаусдорфа такова. Зафиксируем число $\alpha \in (0, n]$, которое будет ответственно за «размерность» меры (хотя может быть и нецелым). Для множества B в $\mathbb{R}^n$ его внешняя α-мера Хаусдорфа $H^\alpha(B)$ задается так. Сначала при фиксированном $\delta > 0$ положим

$$H_\delta^\alpha(B) = C(\alpha)\inf\Bigl\{\sum_{k=1}^{\infty} |\mathrm{diam}\, Q_k|^\alpha,\ B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k,\ \mathrm{diam}\, Q_k \leqslant \delta\},$$

$$C(\alpha) = \frac{\pi^{\alpha/2} 2^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha/2+1)},$$

где inf берется по всем счетным покрытиям B замкнутыми множествами Q_k диаметра не более δ. Ясно, что $H^\alpha_{\delta_1}(B) \leqslant H^\alpha_{\delta_2}(B)$ при $\delta_1 \geqslant \delta_2$, ибо с уменьшением δ покрытий становится меньше (а инфимум больше). Поэтому существует (возможно, бесконечный) предел

$$H^\alpha(B) := \lim_{\delta\to 0} H^\alpha_\delta(B) = \sup_{\delta>0} H^\alpha_\delta(B).$$

Как и в случае обычной меры Лебега, полученная функция множества (определенная на всех множествах) не обязана быть аддитивной (точнее говоря, при допуске аксиомы выбора она точно не будет аддитивной, хотя при запрете аксиомы выбора вопрос остается темным, т. е. зависящим от привлечения дополнительных аксиом). Однако, как и для меры Лебега, имеется способ сузить область определения внешней меры H^α так, что на ней она окажется даже счетно-аддитивной. А именно: в качестве области определения можно взять класс $\mathcal{H}_\alpha$ всех множеств $B \subset \mathbb{R}^n$, для которых равенство

$$H^\alpha(E) = H^\alpha(E \cap B) + H^\alpha(E \backslash B)$$

верно для всякого множества $E \subset \mathbb{R}^n$. Иначе говоря, всякое множество должно разбиваться множеством B на две части с условием аддитивности внешней меры. Тогда на $\mathcal{H}_\alpha$ внешняя мера H^α оказывается счетно-аддитивной (со значениями в $[0, +\infty]$), а сам класс $\mathcal{H}_\alpha$ оказывается σ-алгеброй. Кроме того, все «разумные» множества попадают в класс $\mathcal{H}_\alpha$ (хотя и могут получить бесконечные меры). В частности, в этот класс попадают все открытые и замкнутые множества, а тогда и все, что можно получить из них счетными операциями объединения, пересечения и дополнения. Наконец, для целых значений α получаются те поверхностные меры, которые и ожидаются (именно для этого выбирается множитель $C(\alpha)$). Скажем, при $\alpha = n$ получается мера Лебега (см. Бураго, Бураго, Иванов [1], Эванс, Гариепи [11]). Теперь, построив меру, можно интегрировать по ней функции методом Лебега. Описанная конструкция замечательна своей простотой и тем, что не требует от измеряемых множеств просто ничего. Однако у этих достоинств есть и своя цена: обычно довольно трудно вычислять меры явно заданных множеств по указанным формулам. Поэтому далее мы будем обсуждать гораздо менее общую конструкцию, существовавшую задолго до появления мер Лебега и Хаусдорфа.

Поверхностные меры Хаусдорфа могут быть использованы для представления объемного интеграла посредством нелинейного аналога теоремы Фубини, в котором интегрирование ведется по множествам уровня $\{f = y\}$ заданной достаточно регулярной функции f, а затем по y. Точное утверждение состоит в следующем (см. обоснование в Эванс, Гариепи [11]).

3.1.1. Теорема. *Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — липшицево отображение, $n \geqslant m$. Тогда для всякой интегрируемой функции φ на $\mathbb{R}^n$ ее сужение на $f^{-1}(y)$ оказывается интегрируемым по мере Хаусдорфа H^{n-m} для почти всякого $y \in \mathbb{R}^m$ и верно равенство*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) Jf(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{f^{-1}(y)} \varphi\, dH^{n-m}\, dy,$$

где интегралы понимаются в смысле Лебега и

$$Jf = \sqrt{G_f} = \sqrt{\det((Df)^* Df)}.$$

В частности, для всякой липшицевой функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ верна формула Кронрода – Федерера

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} H^{n-1}(\{f = t\})\, dt.$$

Если же $|\nabla f(x)| \geqslant c > 0$, то для всякой интегрируемой функции φ на $\mathbb{R}^n$ верно равенство

$$\int_{\{f>t\}} \varphi(x)\, dx = \int_t^{+\infty} \int_{\{f=s\}} \frac{\varphi}{|\nabla f|}\, dH^{n-1}\, ds.$$

§ 3.2. Интеграл по гладкой поверхности

Классическая конструкция развивает интуитивно понятные концепции длины кривой на плоскости и площади поверхности в пространстве для графиков гладких функций. Скажем, если кривая γ задана как график

$$\gamma = \Gamma_\varphi = \{(t, \varphi(t)),\ t \in [0, 1]\}$$

гладкой функции φ на $[0, 1]$, то понятно, что естественный кандидат на роль ее длины есть интеграл

$$\int_0^1 \sqrt{1 + |\varphi'(t)|^2}\, dt,$$

поскольку при делении отрезка $[0,1]$ точками $t_1,\ldots,t_n$ и замены графика ломаной с вершинами в точками $(t_i,\varphi(t_i))$ мы получаем сумму

$$\sum_i \sqrt{|t_{i+1}-t_i|^2+|\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)|^2}=$$
$$=\sum_i \sqrt{1+|\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)|^2/|t_{i+1}-t_i|^2}\,|t_{i+1}-t_i|,$$

представляющую собой римановскую сумму для указанного интеграла, ибо по теореме о среднем $|\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)|/|t_{i+1}-t_i|=\varphi'(\xi_i)$ для некоторого $\xi_i\in[t_i,t_{i+1}]$. Похожие соображения приводят к выражению

$$\int_{[0,1]^2}\sqrt{1+|\partial\varphi/\partial x|^2+|\partial\varphi/\partial y|^2}\,dx\,dy$$

для графика гладкой функции $z=\varphi(x,y)$ на квадрате. Именно такого рода интегралами и будут ниже заданы локальные поверхностные меры.

Частную производную функции f на $\mathbb{R}^n$ по переменной x_i будем обозначать символами $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ или $\partial_{x_i}f$. Если f имеет полную производную Df (представляемую градиентом ∇f), то

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=\partial_{x_i}f(x)=Df(x)(e_i)=\langle\nabla f(x),e_i\rangle,$$

где $\langle u,v\rangle=u_1v_1+\cdots+u_nv_n$ — скалярное произведение векторов $u=(u_1,\ldots,u_n)$ и $v=(v_1,\ldots,v_n)$, $e_1,\ldots,e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. При использовании векторов с индексами бывает удобно ставить индексы их координат сверху, например, $v_j=(v_j^1,\ldots,v_j^n)$. Положим также $|v|:=\|v\|:=\sqrt{\langle v,v\rangle}$.

Сначала введем некоторые элементарные множества, по которым будем задавать интегралы.

3.2.1. Определение. *Пусть $k\in\{1,\ldots,n\}$. Будем называть элементарной k-ячейкой в $\mathbb{R}^n$ образ открытого куба $U=\{0,1\}^k$ при непрерывно дифференцируемом отображении $\varphi\colon U\to\mathbb{R}^n$, обладающем таким свойством: в окрестности $W\supset\varphi(U)$ имеется непрерывно дифференцируемое отображение $\psi\colon W\to\mathbb{R}^k$, обратное к φ на $\varphi(U)$. Такое отображение φ будем называть диффеоморфным вложением.*

3.2.2. Определение. *Множество M в $\mathbb{R}^n$ называется k-мерным многообразием в $\mathbb{R}^n$, если всякая его точка обладает окрестностью в относительной топологии, являющейся элементарной k-ячейкой.*

Множество $\varphi(U)$ называют *картой*, открытый куб U называют *координатной окрестностью*, а отображение φ — *параметризацией*. Если две карты $\varphi(U)$ и $\psi(U)$ пересекаются, то возникает *функция перехода* $\eta_{\varphi,\psi} = \psi^{-1} \circ \varphi\colon , \varphi^{-1}(V) \to \psi^{-1}(V)$, $V = \varphi(U) \cap \psi(U)$.

Класс гладкости многообразия определяется классом гладкости локальных параметризаций. В приведенном выше определении речь идет о C^1-многообразиях, но во многих случаях принято рассматривать гладкие многообразия, т. е. многообразия класса C^∞.

Локально k-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$ задается как множество решений системы

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_{n-k}(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

где функции f_j на $\mathbb{R}^n$ имеют определенный класс гладкости (бесконечно дифференцируемы в случае гладкого многообразия), причем их градиенты линейно независимы в каждой точке. Например, гиперповерхность (многообразие размерности $n-1$) локально выглядит как множество нулей гладкой функции с ненулевым градиентом. Связь такого описания с определенным выше параметрическим вытекает из теоремы о неявной функции. Подчеркнем, что это представление имеет место лишь локально. Некоторые хорошие поверхности (скажем, сфера) допускают простое глобальное задание.

3.2.3. Определение. *Интеграл непрерывной функции f с компактным носителем в элементарной k-ячейке $K = \varphi(U)$ по k-мерной мере λ_k зададим формулой*

$$\int_K f\, d\lambda_k := \int_U f(\varphi(u)) \sqrt{G_\varphi(u)}\, du,$$

где

$$G_\varphi := \det\Bigl(\Bigl\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u_i}, \frac{\partial\varphi}{\partial u_j} \Bigr\rangle\Bigr)_{i,j\leqslant k}.$$

Точно так же определяется интеграл от функции f, для которой функция $f \circ \varphi \sqrt{G_\varphi}$ интегрируема по Риману или по Лебегу.

Это определение оказывается разумным по следующим причинам:

1) оно инвариантно относительно выбора параметризации (это проверяется ниже),

2) оно дает ожидаемое значение интеграла в тех случаях, когда есть априорно естественные иные способы задать такой интеграл (примеры приведены ниже),

3) применительно к индикаторам множеств это определение приводит с точностью до постоянного множителя к k-мерной мере Хаусдорфа (доказательство этого довольно трудно и здесь не будет приводиться).

Сначала рассмотрим случай линейного отображения. Если куб U из $\mathbb{R}^k$ отображается в $\mathbb{R}^n$ линейным оператором A, то его образ оказывается k-мерным параллелепипедом в k-мерном подпространстве в $\mathbb{R}^n$, поэтому для него понятие объема уже есть, и было бы естественно ожидать такое же значения для введенной меры. Это ожидание оправдывается. Напомним, что объем параллелепипеда в $\mathbb{R}^n$, натянутого на векторы $v_1, \ldots, v_n$, равен квадратному корню из матрицы Грама этих векторов, т. е. матрицы с элементами $\langle v_i, v_j \rangle$. В самом деле, объем указанного параллелепипеда равен модулю определителя оператора A, для которого $Ae_i = v_i$, что совпадает с $\sqrt{\det(A^*A)}$. При этом A^*A и есть матрица Грама для Ae_i.

3.2.4. Пример. Объем $A(U)$ в k-мерном подпространстве $\operatorname{Ran} A$, где $\operatorname{Ran} A = A(\mathbb{R}^k)$, равен $\lambda_k(A(U))$, причем верно равенство

$$\lambda_k(A(U)) = |\det A^*A|^{1/2} = |\det G|^{1/2},$$

где G — матрица Грама векторов Ae_i с элементами $\langle Ae_i, Ae_j \rangle$, где $e_1, \ldots, e_k$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^k$.

Если $k = n-1$, $Ae_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, \alpha_i)$, где 1 на стоит на i-м месте и α_i — некоторые числа, то

$$\lambda_{n-1}(A(U)) = \sqrt{1 + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_{n-1}^2}.$$

Доказательство. В самом деле, $G = A^*A$. Поэтому для доказательства первого утверждения надо воспользоваться тем, что $DA(x) = Ax$, а также упомянутой формулой для объема параллелограмма, натянутого на векторы $v_1, \ldots, v_k$ в $\mathbb{R}^k$. Для доказательства второго утверждения можно заметить, что получаемая в ней матрица Грама совпадает с матрицей квадратичной формы в $\mathbb{R}^{n-1}$, заданной формулой

$$Q(x) = \langle x, x \rangle + \langle \alpha, x \rangle^2, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}).$$

Если $\alpha = 0$, то получаем единичную матрицу. Пусть $\alpha \neq 0$. Сделаем ортогональную замену координат в $\mathbb{R}^{n-1}$, при которой вектор $\alpha/|\alpha|$

станет первым базисным вектором. В новой системе координат наша квадратичная форма будет иметь вид

$$\langle y, y\rangle + |\alpha|^2 y_1^2 = (1+|\alpha|^2)y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2,$$

ибо форма $\langle x, x\rangle$ не меняется при ортогональных заменах. Определитель диагональной матрицы полученной формы легко находится, но интересующий нас определитель с ним совпадает из-за ортогональности матрицы перехода. В задаче 3.8.5 имеется обобщение доказанного равенства. □

3.2.5. Лемма. *Пусть $\varphi_1\colon U \to \mathbb{R}^n$ и $\varphi_2\colon U \to \mathbb{R}^n$ — две параметризации элементарной k-ячейки $K \subset \mathbb{R}^n$. Тогда для всякой непрерывной ограниченной f с компактным носителем в K верно равенство*

$$\int_U f(\varphi_1(u))\sqrt{G_{\varphi_1}(u)}\,du = \int_U f(\varphi_2(u))\sqrt{G_{\varphi_2}(u)}\,du.$$

Это же верно для функций f, для которых обе функции $f\circ\varphi_1\sqrt{G_{\varphi_1}}$ и $f\circ\varphi_2\sqrt{G_{\varphi_2}}$ интегрируемы по Риману или Лебегу.

Доказательство. Из определения параметризации следует, что существует непрерывно дифференцируемое отображение $F\colon U \to U$ с непрерывно дифференцируемым обратным, для которого $\varphi_2 = \varphi_1\circ F$. Поскольку

$$\partial_{u_i}\varphi_2(u) = D\varphi_1(F(u))DF(u)e_i,$$

где e_i — стандартный i-й базисный вектор в $\mathbb{R}^k$, то

$$\langle \partial_{u_i}\varphi_2(u), \partial_{u_j}\varphi_2(u)\rangle = \langle D\varphi_1(F(u))DF(u)e_i, D\varphi_1(F(u))DF(u)e_j\rangle.$$

Как мы знаем (см. пример 3.2.4), определитель матрицы с такими элементами равен квадрату объема V параллелепипеда, порожденного векторами $D\varphi_1(F(u))DF(u)e_i$. Этот объем, в свою очередь, равен объему параллелепипеда, порожденного векторами $DF(u)e_i$, умноженному на модуль определителя оператора T в $\mathbb{R}^k$, полученного из оператора $D\varphi_1(F(u))\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ отождествлением его k-мерного образа L с $\mathbb{R}^k$ (иначе говоря, T есть композиция $D\varphi_1(F(u))$ и изометрии $L \to \mathbb{R}^k$ (выбор изометрии не влияет на модуль определителя). Наконец, объем параллелепипеда, порожденного векторами $DF(u)e_i$, равен модулю определителя матрицы $DF(u)$, так что V в итоге совпадает с произведением модулей определителей операторов T и $DF(u)$. С другой стороны, модуль определителя T есть как раз $G_{\varphi_1}(F(u))^{1/2}$, поэтому

$$G_{\varphi_2}(u) = G_{\varphi_1}(F(u))\,|\det DF(u)|^2.$$

Таким образом,

$$\int_U f(\varphi_2(u))G_{\varphi_2}(u)^{\frac{1}{2}}\,du = \int_U f(\varphi_1(F(u)))G_{\varphi_1}(F(u))^{\frac{1}{2}}|\det DF(u)|\,du,$$

что совпадает с

$$\int_U f(\varphi_1(u))G_{\varphi_1}(u)^{\frac{1}{2}}\,du$$

по формуле замены переменных. □

Из сказанного видно, что приближенно поверхностная мера множества $\varphi(U)$ задается как сумма k-мерных объемов параллелепипедов $Q_i = D\varphi(c_i)(U_i)$, равных образам при линейных отображениях $D\varphi(c_i)$ одинаковых маленьких кубиков U_i с центрами в точках c_i, на которые разбивается куб U. Сдвинутый параллелепипед $Q_i+\varphi(a_i)$ с точностью до малых порядка квадрата его ребер приближает образ кубика U_i при параметризации φ. Можно представлять себе набор параллелепипедов $Q_i+\varphi(a_i)$ как черепичное покрытие плоскими участками нелинейной поверхности $\varphi(U)$. Коэффициент искажения объема кубика U_i производной $D\varphi(c_i)$ как раз равен $G_\varphi(c_i)^{1/2}$. Таким образом, сумма объемов $Q_i+\varphi(a_i)$ есть римановская сумма для функции $G_\varphi^{1/2}$, построенная по делению куба U на кубики U_i и точкам c_i — их центрам.

Для переноса локального определения интеграла на общие многообразия воспользуемся гладким разбиением единицы. Нам нужен такой факт: для всякого k-мерного многообразия M в $\mathbb{R}^n$ найдется последовательность функций $\theta_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ со следующими свойствами:

(i) каждая функция θ_j равна нулю вне некоторого компакта S_j содержащегося в элементарной k-ячейке K_j из M,

(ii) $0 \leqslant \theta_j \leqslant 1$, причем каждая точка из $\mathbb{R}^n$ обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом компактов S_j и

$$\sum_{j=1}^{\infty}\theta_j(x) = 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Ясно, что в силу условия (ii) всякий компакт в $\mathbb{R}^n$ пересекается лишь с конечным числом множеств K_j, так что указанный выше ряд на самом деле на каждом компакте представляет собой конечную сумму.

3.2.6. Определение. *Интеграл от функции f, непрерывной на M и равной нулю вне некоторого компакта, зададим формулой*

$$\int_M f\,d\lambda_k := \sum_{j=1}^{\infty}\int_{K_j}\theta_j f\,d\lambda_k.$$

Этой же формулой зададим интеграл от функции f на M с компактным носителем, интегрируемой по всем k-ячейкам в M (в смысле, известном читателю: по Риману или Лебегу). Наконец, функция f общего вида считается интегрируемой, если интегрируемы все функции $\theta_j f^+$ и $\theta_j f^-$, где $f^+ = \max(f,0)$, $f^- = -\min(f,0)$, причем сходятся ряды из их интегралов. Тогда полагаем

$$\int_M f\,d\lambda_k := \sum_{j=1}^{\infty}\int_{K_j}\theta_j f^+\,d\lambda_k - \sum_{j=1}^{\infty}\int_{K_j}\theta_j f^-\,d\lambda_k.$$

Ниже будут рассматриваться только функции с компактными носителями, общее определение приведено лишь для полноты картины. Для практических целей достаточно иметь дело с многообразиями, которые разбиваются на конечное число клеток. В частности, для $k = n-1$ типичны поверхности, состоящие из конечного числа кусков, представляющих собой графики гладких функций на подпространствах размерности $n-1$.

Данное определение не зависит от каких-либо параметризаций, но использует фиксированное разбиение единицы. Однако можно проверить, что интеграл не зависит от выбора разбиения единицы (для общих функций от этого выбора не зависит и существование интеграла). Это видно из аддитивности полученного интеграла, вытекающей из аддитивности интеграла Римана или Лебега.

§ 3.3. Примеры

Мы рассмотрим три примера поверхностных мер, причем в первых двух это будет просто конкретизацией определения, а в последнем, где речь идет о мерах на графиках, понадобятся некоторые вычисления.

3.3.1. Пример. Пусть $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_n)\colon\ (0,1)\to\mathbb{R}^n$ — инъективное непрерывно дифференцируемое отображение с производной φ', отличной от нуля. Тогда интеграл по мере λ_1 на кривой $\gamma := \varphi(0,1)$ вычисляется по формуле

$$\int_\gamma f(x)\,\lambda_1(dx) = \int_0^1 f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,dt,$$

где $|\varphi'(t)| = \sqrt{\varphi_1'(t)^2+\cdots+\varphi_n'(t)^2}$. Длина компактной части γ_a^b этой кривой, являющейся образом отрезка $[a,b]\subset(0,1)$, равна

$$\lambda_1(\gamma_a^b) := \int_a^b |\varphi'(t)|\,dt.$$

В данном случае каждая точка $\varphi(t)$ обладает окрестностью в γ, являющейся образом интервала J в $(0,1)$ с замыканием в $(0,1)$, При этом имеется только один элемент $\langle\varphi'(t),\varphi'(t)\rangle = |\varphi'(t)|^2$. Зачем нужно требование инъективности? Ведь и без этого требования образ интервала может быть многообразием размерности 1. Действительно, многообразием образ может и быть, однако считать интеграл по указанной формуле уже нельзя: по определению полагается покрыть компактный носитель рассматриваемой функции конечным числом образов интервалов, на которых есть инъективность, затем перейти к дизъюнктному набору множеству и уже тогда применять указанную формулу. Например, если мы имеем дело с многократно проходимой единичной окружностью, полученной как образ интервала при отображении $\varphi(t) = (\cos(2\pi Nt), \sin(2\pi Nt))$, $t \in (0,1)$, где N велико, то при интегрировании единицы (что должно бы дать длину окружности 2π), мы будем получать сколь угодно большие $2\pi N$.

Итак, этот пример показывает, что даже если многообразие явным образом задано как образ куба, локальную формулу из определения интеграла нельзя применять в общем случае, так что и здесь нужно разбиение единицы.

3.3.2. Пример. Пусть двумерное многообразие M в $\mathbb{R}^3$ задано как образ $U = (0,1)^2$ при инъективном непрерывно дифференцируемом отображении $\varphi\colon\ u \mapsto (x(u), y(u), z(u))$, для которого матрица производной $D\varphi$ имеет ранг 2 в каждой точке. Тогда интеграл по M по мере λ_2 вычисляется по формуле

$$\int_M f\,d\lambda_2 = \int_U f(\varphi(u))\sqrt{E(u)G(u) - F(u)^2}\,du,$$

где

$$E(u) = (\partial_{u_1}x)^2+(\partial_{u_1}y)^2+(\partial_{u_1}z)^2,\ G(u) = (\partial_{u_2}x)^2+(\partial_{u_2}y)^2+(\partial_{u_2}z)^2,$$

$$F(u) = \partial_{u_1}x\partial_{u_2}x + \partial_{u_1}y\partial_{u_2}y + \partial_{u_1}z\partial_{u_2}z.$$

Действительно, в этом случае возникает двумерная матрица Грама с элементами

$$(\partial_{u_1}x)^2 + (\partial_{u_1}y)^2 + (\partial_{u_1}z)^2, \quad (\partial_{u_2}x)^2 + (\partial_{u_2}y)^2 + (\partial_{u_2}z)^2$$

по главной диагонали и числом $\partial_{u_1}x\partial_{u_2}x + \partial_{u_1}y\partial_{u_2}y + \partial_{u_1}z\partial_{u_2}z$ на двух остальных местах. Отметим еще, что

$$EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2,$$

где
$$A = \frac{D(y,z)}{D(u_1,u_2)}, \quad B = \frac{D(z,x)}{D(u_1,u_2)}, \quad C = \frac{D(x,y)}{D(u_1,u_2)},$$
$$\frac{D(x,y)}{D(u_1,u_2)} := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2}. \end{pmatrix}$$

3.3.3. Пример. Пусть g — непрерывно дифференцируемая функция на $U = (0,1)^n$ с ограниченным градиентом. Тогда ее график
$$\Gamma_g = \{(u, g(u))\colon\ x \in U\}$$
является n-мерным многообразием в $\mathbb{R}^{n+1}$, причем интеграл от непрерывной ограниченной функции f по мере λ_n на нем вычисляется по формуле
$$\int_{\Gamma_g} f\, d\lambda_n =$$
$$= \int_U f(u_1,\ldots,u_n,g(u_1,\ldots,u_n))\sqrt{1+|\nabla g(u_1,\ldots,u_n)|^2}\, du_1\cdots du_n.$$
Для обоснования заметим, что график есть образ U при отображении
$$\varphi\colon\ u_1,\ldots,u_n \mapsto (u_1,\ldots,u_n,g(u_1,\ldots,u_n)),$$
которое очевидным образом непрерывно дифференцируемо. Ясно, что образ φ является элементарной n-ячейкой в $\mathbb{R}^{n+1}$. При этом
$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_i} = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0,\partial_{u_i} g(u_1,\ldots,u_n)),$$
где 1 стоит на i-м месте. Следовательно, определитель соответствующей матрицы Грама равен $1 + |\nabla g(u)|^2$ (см. пример 3.2.4). Отметим, что указанная формула остается в силе и без предположения об ограниченности градиента g, если функция $|\nabla g|$ интегрируема по U (в несобственном смысле по Риману).

Отметим еще, что если через $\mathrm{n}(u)$ обозначить внешнюю нормаль к графику функции g в точке $(, g(u))$, а через ν угол между $\mathrm{n}(u)$ и e_{n+1}, т.е. $\cos\nu = \langle(\mathrm{n}(u), e_{n+1}\rangle$, то
$$\sqrt{1+|\nabla g(u_1,\ldots,u_n)|^2} = \frac{1}{|\cos\nu|}.$$
В самом деле, вектор $v = (-\nabla g(u), 1)$ ортогонален всем касательным векторам к поверхности в данной точке, ибо ортогонален образам векторов $e_1,\ldots,e_n$ при производной отображения $u \mapsto (u, g(u))$ из $\mathbb{R}^n$

в $\mathbb{R}^{n+1}$, переводящем U в нашу поверхность. Эта производная переводит e_1 в $(1, 0, \cdots, 0, \partial_{u_1} g(u))$ и аналогично для остальных e_i. При этом длина v есть выписанный выше квадратный корень.

3.3.4. Замечание. Стоит отметить, что посредством доказанной формулы можно было бы определять поверхностную меру на графике. Таким способом можно задать поверхностную меру на графике липшицевой функции g, если применить известную теорему Радемахера, согласно которой градиент липшицевой функции g существует почти всюду по мере Лебега (разумеется, в этом случае надо пользоваться интегралом Лебега). При этом получится мера, пропорциональная мере Хаусдорфа H_{n-1} (или даже равная, если последняя сразу вводится с надлежащим множителем).

3.3.5. Пример. Пусть в $\mathbb{R}^n$ даны две гиперплоскости H_1 и H_2, угол между которыми равен θ, т. е. $\cos\theta = |\langle \mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2\rangle|$, где $\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2$ — единичные нормали к H_1 и H_2. Тогда мера ортогональной проекции на H_2 множества $E \subset H_1$ равна $\cos\theta\lambda_{n-1}(E)$ (это верно для множеств, измеримых по Жордану или Лебегу). В частности, мера проекции $(n-1)$-мерного единичного куба из H_1 равна $\cos\theta$.

В самом деле, считая, что $H_2 = \{x\colon\ x_n = 0\}$ и $0 < \cos\theta < 1$ (иначе $H_1 \perp H_2$ или $H_1 = H_2$ и утверждение очевидно), получаем, что речь идет о множестве на гиперплоскости $\{x\colon\ \langle \mathrm{n}_1, x\rangle = 0\}$. Последняя является графиком линейной функции $g(x) = \eta_n^{-1}(\eta_1 x_1 + \cdots + \eta_{n-1}x_{n-1})$, $\mathrm{n}_1 = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, на H_2. Заметим, что $|\eta_n| = \cos\theta$ и

$$1+|\nabla g|^2 = 1+\frac{1}{\eta_n^2}(\eta_1^2+\cdots+\eta_{n-1}^2) = \frac{1}{\eta_n^2}(\eta_1^2+\cdots+\eta_n^2) = \frac{1}{\eta_n^2} = \frac{1}{|\cos\theta|^2}.$$

Поэтому если множество $U \subset H_2$ является проекцией $E \subset H_1$, то $\lambda_{n-1}(E) = (\cos\theta)^{-1}\lambda_{n-1}(U)$.

3.3.6. Пример. Найдем площадь поверхности сферы S_{n-1} радиуса 1 в $\mathbb{R}^n$. Она состоит из двух полусфер, достаточно найти площадь поверхности верхней полусферы, имеющей вид графика функции $f(x) = (1 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2)^{1/2}$ на единичном шаре U_{n-1} в $\mathbb{R}^{n-1}$. Строго говоря, такая функция f не вполне подходит под рассмотренный выше пример 3.3.3, поскольку имеет неограниченный градиент, но охватывается более общим случаем, указанным в конце примера. Таким образом,

$$\lambda_{n-1}(S_{n-1})/2 = \int_{U_{n-1}} (1 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2)^{-1/2}\, dx.$$

Объемный $(n-1)$-мерный интеграл в правой части может быть вычислен более явно. При $n = 2$ получаем π непосредственным вычислением. При $n = 3$ получаем 2π переходом к полярным координатам (что приводит к вычислению интеграла от $r(1-r^2)^{-1/2}$ по r из $[0,1]$ и умножению его на 2π). В многомерном случае также можно использовать сферические координаты, но можно и заметить, что из-за сферической инвариантности подынтегральной функции мы получаем

$$(n-1)V_{n-1}\int_0^1 (1-r^2)^{-1/2}r^{n-1}\,dr,$$

где V_{n-1} — объем U_{n-1}. Окончательный ответ получается вычислением последнего интеграла по индукции и подстановкой известного выражения для V_{n-1}. Ответ такой: если n четно, то

$$\lambda_{n-1}(S_{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{((n-2)/2)!},$$

для нечетного n имеем

$$\lambda_{n-1}(S_{n-1}) = \frac{2^{(n+1)/2}\pi^{(n-1)/2}}{(n-2)!!},$$

где $(n-2)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-2)$. Иной способ вывода выражения для $\lambda_{n-1}(S_{n-1})$ основан на задаче 3.8.11: эту величину можно получить как предел отношения объема поверхностного слоя между сферами радиуса 1 и $1-h$ к h при $h\to 0$, т. е. предел $h^{-1}V_n(1-(1-h)^n)$, равный nV_n. Разумеется, этот способ хорош, если считать известным объем шара. Появление множителя n в этом ответе объясняется формулой Гаусса – Остроградского (пример 3.4.2).

§ 3.4. Формула Гаусса – Остроградского

В анализе центральной является формула Ньютона – Лейбница, выражающая интеграл от производной функции по отрезку через значения функции в концах этого отрезка. Эта формула имеет важные многомерные аналоги. Простейший многомерный вариант формулы Ньютона – Лейбница возникает, если взять непрерывно дифференцируемую функцию f на квадрате $U = (0,1)^2$ и проинтегрировать по квадрату ее частную производную по x_1 с использованием формулы Ньютона – Лейбница для горизонтальных отрезков:

$$\int_U \partial_{x_1} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int_0^1 [f(1,x_2)-f(0,x_2)]\,dx_2.$$

Чтобы продвинуться дальше, надо догадаться, что увеличение размерности делает естественным рассмотрение еще одной функции g, для которой такая же процедура делается по второй переменной. Это дает

$$\int_U \partial_{x_2} g(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \int_0^1 [g(x_1, 1) - g(x_1, 0)]\, dx_1.$$

Если полученные формулы сложить, то слева мы получим интеграл по U от функции $\partial_{x_1} f + \partial_{x_2} g$, представляющей собой дивергенцию векторного поля $w = (f, g)$. В правой части получится интеграл по границе квадрата от некой функции, которая равна f или g (со знаками) на различных отрезках границе. Если ввести еще внешнюю единичную нормаль $\mathrm{n}_{\partial U}$ к границе квадрата (она равна $(1, 0)$ на правом вертикальном отрезке γ_1, $-(1, 0)$ на левом вертикальном отрезке γ_0, $(0, 1)$ на верхнем горизонтальном отрезке γ_2 и $-(0, 1)$ на нижнем горизонтальном отрезке γ_3), то окажется, что в правой части стоит интеграл от $\langle w, \mathrm{n}_{\partial U}\rangle$ по границе, поскольку $\langle w, \mathrm{n}_{\partial U}\rangle = f$ на γ_1, $\langle w, \mathrm{n}_{\partial U}\rangle = -f$ на γ_0, $\langle w, \mathrm{n}_{\partial U}\rangle = g$ на γ_2, $\langle w, \mathrm{n}_{\partial U}\rangle = -g$ на γ_3. В итоге получается замечательная формула

$$\int_U \operatorname{div} w\, d\lambda_2 = \int_{\partial U} \langle w, \mathrm{n}_{\partial U}\rangle\, d\lambda_1.$$

Единственная неприятность состоит в том, что множество ∂U, состоящее из четырех отрезков, не подпадает под данное выше определение одномерного многообразия. Правда, если исключить четыре угловых точки и брать объединение интервалов, то все будет в порядке.

Приведем без доказательства (которое весьма сложно, несмотря на кажущуюся простоту формулировки) формулу Гаусса – Остроградского в весьма общем виде. Напомним, что в замечании 3.3.4 был указан способ задания поверхностной меры на графике липшицевой функции.

Будем говорить, что открытое множество U имеет локально липшицеву границу ∂U, если для каждой точки $a \in \partial U$ можно сдвигом и ортогональным преобразованием перейти к координатам, в которых при некотором $r > 0$ пересечение куба $Q(a, r) = \{x\colon\ |x_i - a_i| < r\}$ с множеством U имеет вид $\{x \in Q(a, r)\colon\ x_n < g(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$ с некоторой функцией g, удовлетворяющей условию Липшица. В этом случае пересечение ∂U с указанным кубом есть график функции g. В случае ограниченной области с локально липшицевой границей эта граница покрывается конечным числом кубом с указанным свойством.

3.4.1. Теорема. *Пусть U — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ с локально липшицевой границей ∂U. Тогда почти всюду относительно меры λ_{n-1} на ∂U задана внешняя нормаль $\mathrm{n}_{\partial U}$ и для всякого*

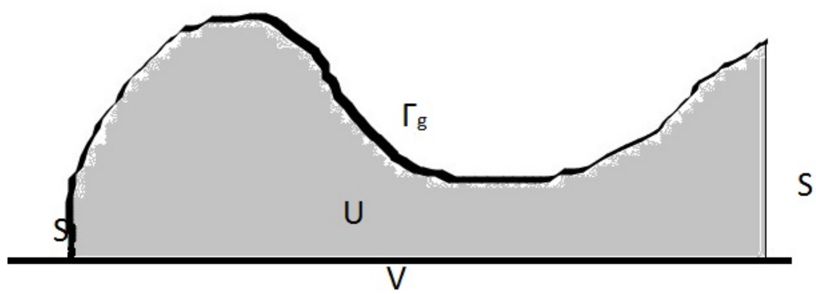

Рис. 1. Подграфик

векторного поля $v \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *верно равенство*

$$\int_U \operatorname{div} v\, dx = \int_{\partial U} \langle v, \mathrm{n}_{\partial U} \rangle \, d\lambda_{n-1}.$$

Более того,это же равенство верно для всякого липшицева векторного поля v.

Мы обсудим доказательство этой формулы в специальном случае, когда U имеет следующий вид:

$$U = \{x \colon \ (x_1, \ldots, x_{n_1}) \in V, \ 0 < x_n < g(x_1, \ldots, x_{n_1})\},$$

где $g \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$, $g > 0$, V — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^{n-1}$ с границей класса C^1. Типичный вид U изображен на рис. 1.

В этом случае граница U состоит из дна (замыкание V), крыши (график g) и боковой поверхности S:

$$\partial U = \overline{V} \bigcup \Gamma_g \bigcup S,$$

$$S = \{x \colon \ (x_1, \ldots, x_{n_1}) \in \partial V, \ 0 \leqslant x_n \leqslant g(x_1, \ldots, x_{n_1})\}.$$

Интеграл по U от $\partial_{x_n} v_n$ по теореме Фубини и формуле Ньютона – Лейбница, применяемой при интегрировании по x_n, равен интегралу от $v_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_1, \ldots, x_{n-1})) - v_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ по V.

С другой стороны, на боковой поверхности нормаль ортогональна e_n, поэтому интеграл от $\langle v_n e_n, \mathrm{n}_{\partial U} \rangle$ по S равен нулю. На донной части границы внешняя нормаль есть просто $-e_n$, что при интегрировании $\langle v_n e_n, \mathrm{n}_{\partial U} \rangle$ как раз дает интеграл от $-v_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ по V. На графике функции g нормаль пропорциональна вектору $(-\nabla g, 1)$

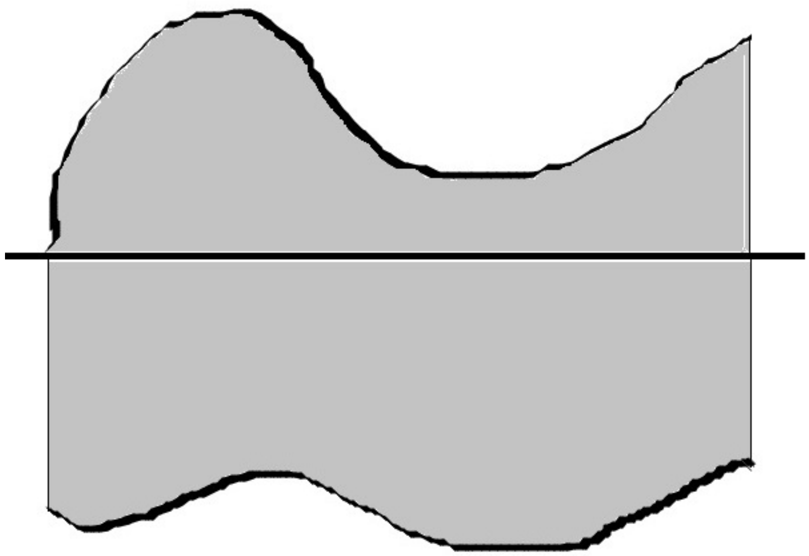

Рис. 2. Фигура между двумя графиками

длины $(1+|\nabla g|^2)^{1/2}$. Поэтому при интегрировании $\langle v_n e_n, \mathrm{n}_{\partial U}\rangle$ по крыше фигурирующий при вычислении поверхностного интеграла множитель $(1+|\nabla g|^2)^{1/2}$ сокращается с таким же множителем отрицательной степени, равным длине проекции нормали на e_n. В результате этот поверхностный интеграл по графику оказывается интегралом от $v_n(x_1,\ldots,x_{n-1},g(x_1,\ldots,x_{n-1}))$ по V.

Если бы не было компонент $v_1,\ldots,v_{n-1}$, то доказательство было бы закончено. Более того, мы бы охватили область вида

$$U=\{x\colon\ (x_1,\ldots,x_{n_1})\in V,\\ g_0(x_1,\ldots,x_{n_1})<x_n<g(x_1,\ldots,x_{n_1})\},\quad (3.4.2)$$

где $g_0, g\in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$, $g>g_0$, V — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^{n-1}$ с границей класса C^1. Типичный вид такой области изображен на рис. 2.

Но что делать, если другие компоненты есть? Естественно было бы считать, что для размерности $n-1$ нужная формула уже доказана, а затем рассуждать по индукции, вычисляя интеграл от выражения $\partial_{x_1}v_1 + \cdots + \partial_{x_{n-1}}v_{n-1}$ по U по теореме Фубини. Здесь возникают сразу две трудности. Первая состоит в том, что сечение

$$U_{x_n} := \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : \ (y, x_n) \in U\}$$

при фиксированном x_n уже не обязано быть областью, к которой применимо предположение индукции, даже если функция g бесконечно дифференцируема. Правда, согласно известной теореме Сарда об образе множества критических точек (см. Львовский [**?**]), множество точек x_n, для которых такая неприятность возникает, имеет меру нуль. Допустим, однако, что мы включим отсутствие такой неприятности в условие. Тогда мы получим равенство

$$\int_{U_{x_n}} [\partial_{x_1}v_1 + \cdots + \partial_{x_{n-1}}v_{n-1}]\, dx_1 \cdots dx_{n-1} = \\ = \int_{\partial U_{x_n}} \langle v^1 + \cdots + v^{n-1}, \mathrm{n}_{\partial U}\rangle\, d\lambda_{n-2},$$

где мы учли, что нормаль к сечению боковой поверхности совпадает с нормалью к самой боковой поверхности. После интегрирования по x_n получаем в левой части объемный интеграл, но возникает еще дополнительная задача: показать, что интеграл по x_n от поверхностного интеграла по мере λ_{n-2} равен поверхностному интегралу по боковой поверхности по мере λ_{n-1} (ведь доказанная ранее теорема Фубини дает такое равенство только для плоских мер). Эту трудность тоже можно преодолеть, но все вместе оказывается слишком трудоемким, поэтому обычно используется гораздо более простой рецепт: вводится *дополнительное предположение*, что область U устроена указанным в (3.4.2) образом по отношению к каждой переменной (см. рис. 3)! Разумеется, это еще более сужает класс допустимых областей, но жульничеством не является: дело в том, что такой весьма частный случай позволяет на самом деле охватить значительно более общую ситуацию, когда рассматриваемая область может быть разбита в объединение конечного числа частей описанного вида (выглядящих как множества между графиками функций на областях в гиперподпространствах по каждой из координат, но при этом можно делать ортогональные замены координат), не имеющих общих внутренних точек (см. рис. 4). Действительно, в этой ситуации при наличии общих участков границ в результирующей формуле не будет производиться интегрирование по этим общим участкам, поскольку нормали к граничащим областям на них

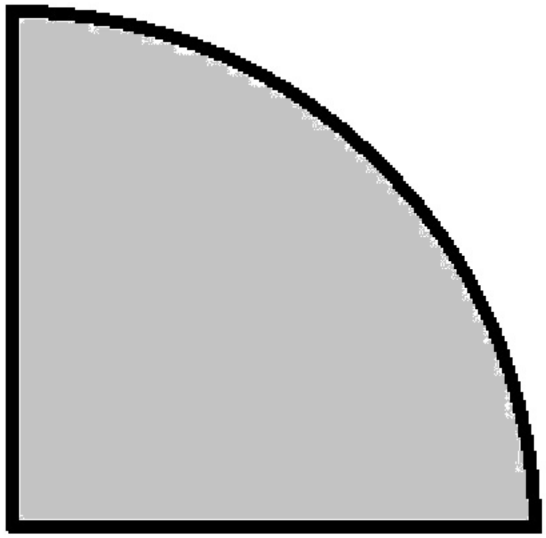

Рис. 3. Фигура, хорошая по обеим координатам

противоположны, так что интегралы по таким участкам сокращаются.

3.4.2. Пример. Пусть U — единичный шар с центром в нуле. Тогда

$$\int_U \operatorname{div} v(x)\,dx = \int_{\partial U} \langle v(s), s\rangle\, \lambda_{n-1}(ds).$$

Если применить эту формулу к полю $v(x) = x$, дивергенция которого равна $\partial_{x_1} x_1 + \cdots + \partial_{x_n} x_n = n$, то в силу равенства $\langle v(s), s\rangle = 1$ на единичной сфере получаем формулу $n\lambda_n(U) = \lambda_{n-1}(\partial U)$, уже полученную ранее иным способом.

Более общим образом, это же соображение показывает, что для ограниченной области Ω с гладкой границей имеет место равенство

$$\lambda_n(\Omega) = n^{-1} \int_{\partial\Omega} \langle s, \mathrm{n}_{\partial\Omega}(s)\rangle\, \lambda_{n-1}(ds).$$

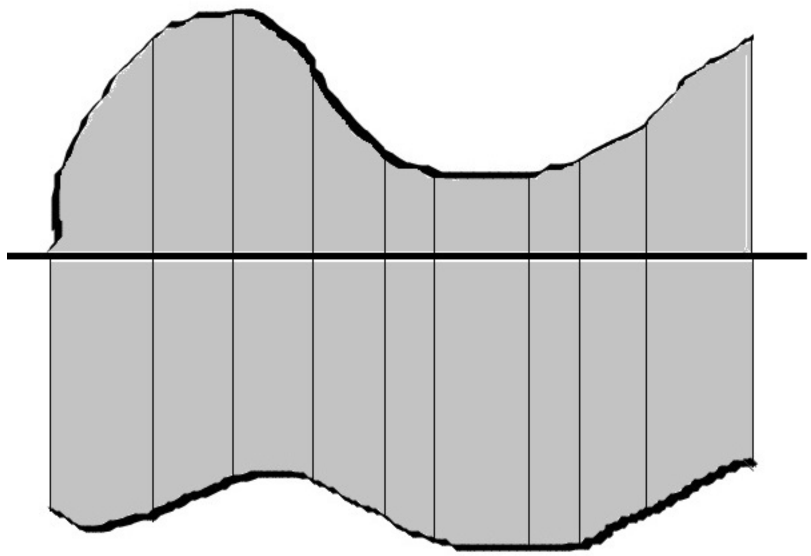

Рис. 4. Составная фигура

3.4.3. Пример. Пусть функция u класса C^2 на $\mathbb{R}^3$ является гармонической в области Ω, т. е.

$$\Delta u(x) := \partial_{x_1}^2 u(x) + \partial_{x_2}^2 u(x) + \partial_{x_3}^2 u(x) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Заметим, что

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u).$$

Поэтому для всякой области U с гладкой границей, лежащей с замыканием в Ω, верно равенство

$$0 = \int_U \Delta u(x)\, dx = \int_{\partial U} \langle \nabla u, \mathrm{n}_{\partial U} \rangle \, d\lambda_2,$$

где λ_2 — поверхностная мера на ∂U. Таким образом, производная u по нормали имеет нулевое среднее по границе. Из этого следует, в частности, что эта производная обязана где-то обращаться в нуль на границе.

3.4.4. Пример. Пусть Ω — ограниченная область с гладкой границей. Тогда оператор Лапласа Δ на области определения $C_0^\infty(\Omega)$, состоящей из бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω, симметричен, т. е.

$$\int_\Omega f\Delta g\,dx = \int_\Omega g\Delta f\,dx, \quad f,g\in C_0^\infty(\Omega).$$

Для доказательства заметим, что

$$\int_\Omega \operatorname{div}(f\nabla g)\,dx = \int_{\partial\Omega}\langle f\nabla g, \mathrm{n}_{\partial\Omega}\rangle\,d\sigma = 0,$$

где σ — поверхностная мера, ибо $f=0$ на границе. При этом

$$\operatorname{div}(f\nabla g) = f\Delta g + \langle\nabla f, \nabla g\rangle,$$

что легко проверяется непосредственно с учетом равенства

$$\partial_{x_i}(f\partial_{x_i}g) = \partial_{x_i}f\partial_{x_i}g + f\partial_{x_i}^2 g.$$

Следовательно,

$$\int_\Omega f\Delta g\,dx = -\int_\Omega\langle\nabla f, \nabla g\rangle\,dx,$$

что симметрично по f, g (попутно получена полезная формула Грина, выраженная предыдущим равенством).

§ 3.5. Дифференциальные формы

Лектору по математическому анализу бывает выгодно объявить, что студенты уже откуда-то знают, что такое дифференциальная форма. На самом деле обычно мало кто это помнит (настоящий раздел анализа — еще один повод все-таки разобраться с этим понятием). Поэтому представляется уместным кое-что напомнить.

Пусть V — линейное пространство и k — натуральное число. Функция $\psi\colon\ V^k\to\mathbb{R}$ называется k-линейной, если она линейна по каждому аргументу при фиксированных остальных. Например, 2-линейна функция $(x_1+x_2)(y_1+y_2)$ аргументов $x=(x_1,x_2)$ и $y=(y_1,y_2)$, т. е. функция на квадрате плоскости.

Кососимметрической называется k-линейная функция V, меняющая знак при перестановке двух соседних аргументов (тогда и при перестановке любой пары аргументов). Разумеется, аргументы можно переставлять только в том случае, когда их более одного. Поэтому при $k=1$ линейные функции считаются по определению кососимметрическими. Для большего единообразия действия с индексами постоянные бывает удобно объявить 0-линейными кососимметрическими функциями. Предыдущая функция $(x_1+x_2)(y_1+y_2)$ не является кососимметрической, а вот функция $x_1y_2-x_2y_1$ является. Эта функция есть частный случай k-линейной кососимметрической функции $V_k(v_1,\ldots,v_k)$ на $\mathbb{R}^k$, представляющей собой определитель $\det(v_1,\ldots,v_k)$ матрицы, в которой по столбцам записаны векторы $v_1,\ldots,v_k$, т. е. объем параллелепипеда, порожденного векторами $v_1,\ldots,v_k$, но взятый с некоторым знаком (такой определитель называют ориентированным объемом указанного параллелепипеда).

Всякая k-линейная форма V на $\mathbb{R}^n$ однозначно задается своими значениями на всевозможных наборах из k векторов из базиса $e_1,\ldots,e_n$ в $\mathbb{R}^n$. Конечно, не всякий способ задания значений $V(e_{i_i},\ldots,e_{i_k})$ приводит к кососимметрической форме. Пространство кососимметрических k-линейных форм на $\mathbb{R}^n$ конечномерно и в качестве базиса в нем можно взять следующие специальные формы:

$$dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}(v_1,\ldots,v_k)=\det(\pi_{i_1,\ldots,i_k}v_1,\ldots,\pi_{i_1,\ldots,i_k}v_k),$$

где вектор $\pi_{i_1,\ldots,i_k}(h^1,\ldots,h^n)=(h^{i_1},\ldots,h^{i_k})$ есть проекция вектора $(h^1,\ldots,h^n)$ на k-мерное подпространство с координатами с номерами $i_1,\ldots,i_k$, т. е. берется определитель матрицы, составленный из проекций векторов $v_1,\ldots,v_k$ на подпространство переменных с индексами $i_1,\ldots,i_k$ (ориентированный k-мерный объем порожденного этими проекциями параллелепипеда).

Например,

$$(dx_1\wedge dx_2)(u,v)=u^1v^2-u^2v^1,\quad u=(u^1,\ldots,u^n),\ v=(v^1,\ldots,v^n).$$

В частности, всякая кососимметрическая n-линейная форма на $\mathbb{R}^n$ пропорциональна ориентированному объему $\det(v_1,\ldots,v_n)$. Конечно, последнее видно также из того, что кососимметрическая форма равна нулю в случае наличия пары равных аргументов, а ее значения на $e_1,\ldots,e_n$ полностью определяют значения на перестановках этих векторов. Из определения следует, что $dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}=0$, если среди индексов i_j есть хоть одна пара равных.

Пока что левую часть приведенного выше равенства надо воспринимать как некий цельный символ, определенный посредством правой части. Однако ниже мы увидим, что этот символ можно трактовать и как составной, если отдельно определить координатные 1-формы dx_i, а также внешнее произведение форм $w_1\wedge w_2$. В свою очередь, цельный символ dx_i ниже окажется дифференциалом координатной функции x_i.

Но до поры 1-форма dx_i задается как линейный функционал, переводящий вектор $v = (v^1, \dots, v^n)$ в координату v^i. Общий вид 1-линейной функции таков: $c_1 dx_1 + \dots + c_n dx_n$, где c_i — числа.

При подстановке в k-форму ω на $\mathbb{R}^k$ вместо аргументов $h_1, \dots, h_k$ векторов $Sh_1, \dots, Sh_k$, где S — линейный оператор, возникает новая k-форма, причем

$$\omega(Sh_1, \dots, Sh_k) = \omega(h_1, \dots, h_k) \det S.$$

В самом деле, это верно для формы $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$, а тогда и для пропорциональных форм.

В линейной алгебре вводится внешнее умножение кососимметрических форм. Заметим, что обычное поточечное умножение приводит не к кососимметрическим формам: скажем, поточечное произведение $dx_1 \cdot dx_2$, определено на векторах, а не парах векторов, а если его задавать на парах векторов (u, v) формулой $u^1 v^2$, то при перестановке аргументов получим совсем не изменение знака. Для целей интегрирования и дифференцирования форм нам достаточно задать внешние произведения $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ просто указанной выше формулой, а затем определить произведение двух форм, разложенных по базисным, путем формального раскрытия скобок и учета знаков при перестановках, вызванных упорядочиванием произведений базисных форм. Основное правило:

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i.$$

Например, если $w_1 = dx_1 + dx_2$, $w_2 = dx_1 + dx_3$, то

$$\begin{aligned} w_1 \wedge w_2 &= dx_1 \wedge dx_1 + dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_1 + dx_2 \wedge dx_3 = \\ &= -dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_3, \end{aligned}$$

где учтено, что $dx_i \wedge dx_i = 0$. Разумеется, внешне умножать можно формы разных размерностей k_1 и k_2 (результатом будет $(k_1 + k_2)$-форма). При этом $w_1 \wedge w_2 = (-1)^{k_1 k_2} w_2 \wedge w_1$.

На плоскости обычно имеют дело с 2-формой $dx_1 \wedge dx_2$ и 1-формами dx_1 и dx_2, в $\mathbb{R}^3$ помимо очевидных координатных 1-форм и 3-формы $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ есть три базисные 2-формы $dx_1 \wedge dx_2$, $dx_1 \wedge dx_3$, $dx_2 \wedge dx_2$.

В геометрических и физических приложениях оказывается полезным рассматривать кососимметрические формы фиксированной степени k, зависящие от точки пространства. Для формы порядка n это сводится к умножению базисной формы $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ на число $\omega(x)$ в каждой точке x.

3.5.1. Определение. *Дифференциальной формой степени $k \geqslant 1$ на $\mathbb{R}^n$ называют зависящую от точки кососимметрическую форму степени k. Формами степени 0 считают скалярные функции.*

Из сказанного выше следует, что такая форма имеет вид

$$\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} \omega_{i_1,\ldots,i_k}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}. \tag{3.5.3}$$

Аналогично вводятся дифференциальные формы и на многообразиях, но для этого надо сначала определить касательное пространство многообразия M в точке $x \in M$. После этого останется лишь назвать дифференциальной формой такой объект: для каждой точки $x \in M$ в ее касательном пространстве задана кососимметрическая форма $\omega(x)$ степени k. Касательным пространством T_xM в точке x назовем образ $\mathbb{R}^k$ при производной $D\varphi(x)$ параметризующего отображения φ. Тем самым T_xM оказывается k-мерным подпространством в $\mathbb{R}^n$. Часто бывает удобно и наглядно считать его «приложенным» в точке x, т. е. отождествить его с аффинным подпространством $x + D\varphi(x)(\mathbb{R}^k)$.

В случае $\mathbb{R}^n$ можно просто считать, что в каждой точке x задано одно и то же касательное пространство $\mathbb{R}^n$, что и делает k-форму зависящей от точки. Поэтому случай многообразия M в некотором смысле идейно даже проще: задание дифференциальной k-формы есть задание в касательном пространстве T_xM к каждой точке x кососимметрической формы степени k, так что здесь, вообще говоря, даже и нельзя «сравнивать» формы в разных касательных пространствах.

Касательным расслоением многообразия M называют множество пар вида (x, v), где $x \in M$, $v \in T_xv$. Можно проверить, что для многообразия класса C^∞ касательное расслоения также оказывается многообразием класса C^∞ размерности $2n$. Переход к касательному расслоению полезен во многих задачах механики, физики, алгебры и геометрии, например, при рассмотрении динамики точки полезно учитывать не только ее координаты, но и скорость. В результаты многие важные уравнения (типа Лагранжа или Гамильтона) записываются в касательных расслоениях.

В локальных координатах на многообразии, параметризующих элементарную k-ячейку, дифференциальная форма порядка k задается выражением вида (3.5.3).

Как только появляется объект, зависящий от точки, то его можно дифференцировать или интегрировать. Не минуют этой участи и дифференциальные формы, причем замечательным образом оказывается, что для интегрирования дифференциальных форм не нужны меры: они сами себе уже меры (впрочем, у нас все же интегрирование форм будет сведено к интегрированию функций по уже знакомым поверхностным мерам).

Сначала введем определение дифференциала дифференциальной формы. Интегралу посвящен следующий параграф. Пусть ω — дифференциальная k-форма в $\mathbb{R}^n$, записанная в виде

$$\omega(x) = \sum \omega_{i_1,\dots,i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

где $\omega_{i_1,\dots,i_k}$ — функции класса C^r.

Ее дифференциалом называют $(k+1)$-форму

$$d\omega(x) := \sum d\omega_{i_1,\dots,i_k}(x) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

где

$$d\omega_{i_1,\dots,i_k}(x) := \partial_{x_1}\omega_{i_1,\dots,i_k}(x)dx_1 + \dots + \partial_{x_n}\omega_{i_1,\dots,i_k}(x)dx_n.$$

Полученная форма также запишется через базисные формы с коэффициентами, имеющими вид частных производных первого порядка от исходных коэффициентов. Например, для

$$P(x)dx_1 \wedge dx_2 + Q(x)dx_2 \wedge dx_3 + R(x)dx_1 \wedge dx_3$$

дифференциал равен

$$(\partial_{x_3}P(x) + \partial_{x_1}Q(x) - \partial_{x_2}R(x))dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Дифференциал n-формы равен нулю, поскольку появление в форме двух одинаковых базисных dx_i делает ее нулевой.

Для единообразия дифференциалом гладкой 0-формы f, т. е. числовой функции f на $\mathbb{R}^n$, объявляют 1-форму df, заданную формулой

$$df(x)(h) = f'(x)(h) = \langle \nabla f(x), h \rangle,$$

т. е. как раз в соответствии с выражением для $d\omega_{i_1,\dots,i_k}$ имеем

$$df(x) = \partial_{x_1}f(x)dx_1 + \dots + \partial_{x_n}f(x)dx_n.$$

Тогда оказывается, что дифференциал координатной функции x_i и будет введенной выше 1-формой dx_i, так что прежний цельный символ теперь может трактоваться и как действие d на x_i.

Отметим, что

$$d(d\omega) = 0$$

для всякой формы класса C^2. Действительно, достаточно проверить это для форм вида $\omega(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$. Для такой формы дифференциал имеет вид (из-за равенств $dx_i \wedge dx_i = 0$)

$$\partial_{x_{k+1}}\omega(x)dx_{k+1} \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k + \dots + \partial_{x_n}\omega(x)dx_n \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k.$$

Вычисляя дифференциал еще раз, замечаем, что будут получены комбинации форм вида $dx_i \wedge dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ с несовпадающими $i, j > k$, причем коэффициентами служат $\partial_{x_i}\partial_{x_j}\omega(x)$. Однако все эти слагаемые сокращаются из-за того, что $\partial_{x_i}\partial_{x_j}\omega(x) = \partial_{x_j}\partial_{x_i}\omega(x)$, но $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$.

Форма с нулевым дифференциалом называется замкнутой, а форма, являющаяся дифференциалом какой-либо формы, называется точной. Согласно теореме Пуанкаре, всякая замкнутая форма на $\mathbb{R}^n$ точна. Для других многообразий это не всегда так, в связи с чем вводится полезный объект (пространство k-когомологий): фактор-пространство $\mathcal{H}_k$ пространства замкнутых форм класса C^∞ по точным формам.

§ 3.6. Интегрирование дифференциальных форм

Здесь вводится интегрирование дифференциальных k-форм по k-мерным поверхностям (k-мерным многообразиям), но для этого приходится вводить понятие ориентации многообразия (что вполне естественно, ибо интегрирование дифференциальных форм есть «ориентированное интегрирование».

В пространстве $\mathbb{R}^k$ положительная ориентация задается стандартным базисом. Ориентация иного базиса считается положительной или отрицательной в зависимости от знака определителя матрицы перехода к нему от стандартного базиса.

3.6.1. Определение. *Будем называть k-мерное многообразие M в $\mathbb{R}^n$ ориентируемым, если координатные окрестности точек можно выбрать так, что для пересекающихся карт переходные функции координатных окрестностей имеют положительные определители матриц производных.*

В этом случае в каждом касательном пространстве T_xM можно выбрать ортогональный базис $e_1(x), \dots, e_k(x)$ так, что в локальных координатах переход от одного базиса к другому будет ортогональным оператором с определителем 1. Такой базис задает положительную ориентацию в касательном пространстве.

Следует иметь в виду, что выбор такого репера отнюдь не всегда можно сделать так, чтобы получить непрерывную зависимость от x. Например, можно показать, что на двумерной сфере в $\mathbb{R}^3$ нет даже одного непрерывного касательного векторного поля из ненулевых векторов, тем более нет непрерывно зависящего от точки касательного репера.

Например, элементарная k-ячейка ориентируема, а лист Мёбиуса нет (доказательство можно найти в Решетняк [8, с. 376 – 380]).

Если на гиперповерхности (многообразии размерности $n-1$) имеется непрерывное поле нормалей n, то с помощью него можно задать ориентацию касательных пространств так: в касательном пространстве T_xM брать ортогональный базис $e_1(x), \ldots, e_{n-1}(x)$ так, чтобы репер $\mathrm{n}(x), e_1(x), \ldots, e_{n-1}(x)$ был положительно ориентирован. Из этого видно, например, что сфера — ориентируемое многообразие.

Можно проверить, что гладкое k-мерное многообразие ориентируемо в точности тогда, когда на нем есть гладкая дифференциальная k-форма, всюду отличная от нуля (см. Решетняк [8]). Для целей интегрирования удобнее пользоваться такой (несколько технической) характеризацией ориентируемости.

Не всегда легко явно указать такую невырожденную ориентирующую форму. Скажем, это легко сделать для окружности в плоскости (впрочем, ориентируемость одномерного многообразия сразу ясна из определения), взяв форму $-ydx + xdy$, но не форму $dx + dy$, которая равна нулю на касательном пространстве (прямой) в точке $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, где касательный вектор пропорционален $(-1, 1)$.

Из определения следует, что на ориентируемом k-мерном многообразии можно задать непрерывную так называемую *единичную* форму ω_e, которая равна 1 на положительных ортогональных реперах из определения ориентации. Всякая иная дифференциальная k-форма ω на M имеет вид

$$\omega(x) = \varrho(x)\omega_e(x),$$

где ϱ — числовая функция.

3.6.2. Определение. *Положим*

$$\int_M \omega := \int_M \varrho(x)\, \lambda_k(dx).$$

3.6.3. Пример. Предположим, что $M \subset \mathbb{R}^n$ является образом открытого куба $U \subset \mathbb{R}^k$ при инъективном линейном отображении φ, а k-форма ω не зависит от точки. В линейном пространстве $L = \varphi(\mathbb{R}^k)$ размерности k выберем ортонормированный базис $\psi_1, \ldots, \psi_k$. Тогда на L имеется единственная k-форма ω_e, для которой $\omega_e(\psi_1, \ldots, \psi_k) = 1$. Без потери общности можно считать, что L есть $\mathbb{R}^k$ со стандартным базисом $\psi_1, \ldots, \psi_k$. Тогда $\omega_e = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$. Форма ω на $M = \varphi(U)$ имеет вид $\varrho\omega_e$, где ϱ — число. По нашему определению интеграл от ω по M равен $\varrho \cdot \lambda_k(M) = \varrho|\det\varphi|$. Число ϱ находится из равенства $\omega(\psi_1, \ldots, \psi_k) = \varrho\omega_e(\psi_1, \ldots, \psi_k) = \varrho$. Однако его можно вычислить и через равенство

$$\omega(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)) = \varrho\omega_e(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)) = \varrho|\det\varphi|.$$

Тем самым интеграл от ω по M оказывается равным интегралу по параметрическому кубу U от новой k-формы $\varphi^*\omega$, заданной формулой

$$\varphi^*\omega(h_1, \ldots, h_k) := \omega(D\varphi(h_1), \ldots, D\varphi(h_k)), \quad h_i \in \mathbb{R}^k.$$

Это обстоятельство имеет общий характер, как мы увидим в примере 3.6.6.

3.6.4. Пример. Рассмотрим одномерное многообразие M в $\mathbb{R}^2$, заданное как график гладкой функции g, определенной на интервале $U = (0, 1)$. Пусть на M дана 1-форма

$$v_1 dx_1 + v_2 dx_2$$

с гладкими коэффициентами. Выразим интеграл от ω по M через интеграл по поверхностной мере λ_1 на M. По нашему определению для этого полагается взять на M единичную 1-форму ω_e, записать ω как $\omega(x) = k(x)\omega_e(x)$ и проинтегрировать k по M мере λ_1. Форма ω_e также имеет вид $u_1 dx_1 + u_2 dx_2$ и равна 1 на единичном касательном векторном поле, равном $(1 + |g'(t)|^2)^{-1/2}(1, g'(t))$ в точке $(t, g(t))$ для каждого t. Значит, в качестве (u_1, u_2) и надо брать это касательное векторное поле, а тогда коэффициент пропорциональности k равен скалярному произведению $\langle v, u\rangle$. Итак,

$$\int_M \omega = \int_M \langle v, u\rangle \, d\lambda_1 = \int_0^1 [v_1(t, g(t)) + v_2(t, g(t))g'(t)] \, dt,$$

где мы воспользовались еще и формулой для интеграла по графику по мере λ_1 (что привело к сокращению множителя $(1 + |g'(t)|^2)^{-1/2}$).

3.6.5. Пример. Рассмотрим несколько более общий случай, когда одномерное многообразие M в $\mathbb{R}^n$ задано параметрически как образ гладкого инъективного отображения $\varphi\colon U = (0, 1) \to \mathbb{R}^n$. Пусть на M дана 1-форма

$$v_1 dx_1 + \cdots + v_n dx_n$$

с гладкими коэффициентами. Снова в качестве единичной 1-формы ω_e берем форму, порожденную единичным касательным векторным полем u к кривой. Аналогично получаем равенство

$$\int_M \omega = \int_M \langle v, u\rangle \, d\lambda_1 = \int_0^1 [v_1(\varphi(t))\varphi_1'(t) + \cdots + v_n(\varphi(t))\varphi_n'(t)] \, dt.$$

В следующем примере используется новое понятие: *обратный образ* дифференциальной формы при отображении. Если дана параметризация $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ стандартной k-ячейки, то для всякой дифференциальной m-формы ω на $\mathbb{R}^n$ возникает дифференциальная m-форма

$\varphi^*\omega$ на $\mathbb{R}^k$, заданная на векторах $h_1, \ldots, h_m \in \mathbb{R}^k$ формулой

$$\varphi^*\omega(x)(h_1, \ldots, h_m) := \omega(\varphi(x))(D\varphi(x)(h_1), \ldots, D\varphi(x)(h_m)).$$

В частности,

$$\varphi^*\omega(x)(e_1, \ldots, e_m) := \omega(\varphi(x))(\partial_{x_1}\varphi(x), \ldots, \partial_{x_m}\varphi(x))$$

для стандартного базиса $e_1, \ldots, e_m$. Тем самым имеем

$$\varphi^*\omega(x) = \omega(\varphi(x))(\partial_{x_1}\varphi(x), \ldots, \partial_{x_m}\varphi(x))dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m.$$

Этой же формулой можно задать обратный образ дифференциальной формы при дифференцируемом отображении абстрактных многообразий (необязательно вложенных в $\mathbb{R}^n$).

3.6.6. Пример. Если $m = k$, то в описанной выше ситуации выполнено равенство

$$\int_M \omega = \int_U \varphi^*\omega = \int_U \widetilde{\omega}(x)\, dx,$$

где $\varphi^*\omega(u) = \widetilde{\omega}(u)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$,

$$\widetilde{\omega}(u) = \omega(\varphi(u))(D\varphi(u)(e_1), \ldots, D\varphi(u)(e_k)).$$

Таким образом, если $\omega(x) = \omega(x)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, то

$$\int_M \omega = \int_U \omega(\varphi(u)) \det\Bigl[\Bigl(\pi_{i_1,\ldots,i_k} D\varphi(u)(e_i)\Bigr)_{i=1,\ldots,k}\Bigr]\, du,$$

где берется определитель матрицы размера $k \times k$, в столбцах которой стоят проекции векторов $D\varphi(u)(e_1), \ldots, D\varphi(u)(e_k)$ на k-мерное подпространство координат $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$. Обратим внимание, что определитель здесь появился без модуля (в отличие от интеграла по поверхностной мере). Этим и отличается интеграл формы от интеграла по поверхностной мере λ_k.

Доказательство. В касательном пространстве к многообразию M в точке $x = \varphi(u)$, т. е. в линейной оболочке векторов

$$\psi_1(x) = D\varphi(u)(e_1), \ldots, \psi_k(x) = D\varphi(u)(e_k),$$

возьмем ортогональный базис вида

$$S(\varphi(u))D\varphi(u)(e_1), \ldots, S(\varphi(u))D\varphi(u)(e_k),$$

где $S(\varphi(u))$ — линейный оператор с положительным определителем (в базисе из указанных выше векторов ψ_i). Заметим, что

$$\sqrt{G_\varphi(u)} \det S(\varphi(u)) = 1,$$

поскольку $\sqrt{G_\varphi(u)}$ — объем параллелепипеда, натянутого на векторы $\psi_1(\varphi(u)), \ldots, \psi_k(\psi(u))$. Поэтому интеграл от ω, равный по определению интегралу от функции $\omega(S(x)\psi_1(x), \ldots, S(x)\psi_k(x))$ по поверхностной мере λ_k, оказывается равным интегралу по параметрическому кубу U от функции

$$\omega(S(\varphi(u))\psi_1(\varphi(u)), \ldots, S(\varphi(u))\psi_k(\varphi(u)))\sqrt{G_\varphi(u)} =$$
$$= \omega(\psi_1(\varphi(u)), \ldots, \psi_k(\varphi(u))) \det S(\varphi(u))\sqrt{G_\varphi(u)} =$$
$$= \omega(\psi_1(\varphi(u)), \ldots, \psi_k(\varphi(u))),$$

что и требовалось доказать. □

3.6.7. Замечание. Можно взять полученное выше выражение интеграла формы в параметрическом представлении в качестве определения (распространив его на более общие ориентируемые многообразия с помощью гладкого разбиения единицы). Отметим один нюанс: при таком подходе инвариантность интеграла относительно выбора параметризации имеет место только в случае замен с положительным определителем матрицы производной (в отличие от интегрирования по поверхностным мерам). Эта чувствительность к выбору ориентации объясняет также требование ориентируемости многообразия. Локальное определение в карте нечувствительно к ориентируемости, но для корректного глобального определения она нужна.

3.6.8. Пример. В свете предыдущего примера вернемся к интегрированию 1-формы $\omega = \omega_1 dx_1 + \cdots + \omega_n dx_n$ по кривой γ, заданной параметрически инъективным гладким отображением с невырожденной производной

$$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}^n.$$

Получаем, что интеграл от формы ω по кривой γ равен интегралу по $[0,1]$ от $\omega_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \cdots + \omega_n(\gamma(t))\gamma_n'(t)$, что, разумеется, совпадает с приведенным ранее ответом. Таким образом, вычисление состоит просто в формальной замене dx_i выражением $\gamma_i'(t)dt$ и постановке $\gamma(t)$ в ω с последующим интегрированием по t.

Аналогично при интегрировании 2-формы $f(x,y,z)dx \wedge dy$ по двумерной поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$, заданной параметрически отображением $\varphi\colon\ (u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $U \to \mathbb{R}^3$, делаем следующее: заменяем dx на $\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv$, а dy на $\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv$, по известным нам правилам раскрываем скобки в полученном выражении для $dx \wedge dy$,

что дает
$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}du\wedge dv+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}dv\wedge du=\Bigl(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\Bigr)du\wedge dv,$$
наконец, не забываем умножить это на $f(x(u),y(u),z(u))$ и проинтегрировать по множеству U. Общая 2-форма на $\mathbb{R}^3$ отличается еще слагаемыми $gdy\wedge dz$ и $hdx\wedge dz$, которые рассматриваются совершенно аналогично. Случай 2-форм в многомерных пространствах не отличается принципиально, а при интегрировании таким способом 3-форм в многомерных пространствах отличие состоит лишь в появлении гораздо более громоздких выражений. Если поверхность имеет более сложный вид и не параметризуется единым отображением, она разбивается на куски, к которым применимы описанные вычисления.

Один из основных случаев в физических задачах таков.

3.6.9. Пример. В случае гладкой двумерной поверхности S с гладкой единичной внешней нормалью n в $\mathbb{R}^3$ в качестве определения интеграла от формы $w_1dx_2\wedge dx_3+w_2dx_3\wedge dx_1+w_3dx_1\wedge dx_2$ можно положить
$$\int_S w_1dx_2\wedge dx_3+w_2dx_3\wedge dx_1+w_3dx_1\wedge dx_2=\int_S\langle w,\mathrm{n}\rangle\,dS,$$
где $w=(w_1,w_2,w_3)$ и справа стоит поверхностный интеграл по двумерной мере на S. Можно далее распространить это определение на конечное дизъюнктное объединение нескольких таких поверхностей. В этом трехмерном случае часто пишут
$$w=(P,Q,R),$$
$$\int_S P\ dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=\int_S\langle F,\mathrm{n}\rangle\,dS.$$

Если поверхность S задана параметрически гладким отображением $u\mapsto\varphi(u)=(x(u),y(u),z(u))$ на области D на плоскости, $u(u_1,u_2)$, то интеграл справа запишется как интеграл по D, причем интегрируемая функция еще умножится на введенное выше выражение $\sqrt{EG-F^2}$, где, как и выше в примере 3.3.2,
$$E(u)=(\partial_{u_1}x)^2+(\partial_{u_1}y)^2+(\partial_{u_1}z)^2,\ G(u)=(\partial_{u_2}x)^2+(\partial_{u_2}y)^2+(\partial_{u_2}z)^2,$$
$$F(u)=\partial_{u_1}x\partial_{u_2}x+\partial_{u_1}y\partial_{u_2}y+\partial_{u_1}z\partial_{u_2}z.$$
С использованием обозначений
$$A=\frac{D(y,z)}{D(u_1,u_2)},\quad B=\frac{D(z,x)}{D(u_1,u_2)},\quad C=\frac{D(x,y)}{D(u_1,u_2)},$$

$$\frac{D(x,y)}{D(u_1,u_2)} := \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

из того же примера можно записать наш интеграл в виде

$$\int_D \bigl(P(\varphi)A + Q(\varphi)B + R(\varphi)C\bigr)\, du\, dv.$$

Если $S = \Phi(D)$, где $\Phi(x,y) = (x, y, z(x,y))$, $(x,y) \in D$, то

$$\int_S P\ dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy$$
$$= \int_D \Bigl(-P(x,y,z(x,y))\frac{\partial z}{\partial x} - Q(x,y,z(x,y))\frac{\partial z}{\partial y} + R(x,y,z(x,y))\Bigr)\, dx\, dy.$$

Отметим, что по поверхностной мере мы интегрировали числовые функции, а не формы, при интегрировании формы функции нет, поэтому в принципе не должно возникать путаницы. Все же имеются два случая, когда некоторая путаница возможна.

Первый случай — интегрирование функции 1 по поверхностной мере (что дает положительное число), которое не следует смешивать с интегралом от формы, что тоже выглядит как интеграл от 1, но может быть любым числом. Это усугубляется тем, что интегрирование функции f по области в $\mathbb{R}^n$ и есть интегрирование формы $f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Более того, в общем случае функцию f можно интегрировать «по форме» ω путем интегрирования новой формы $f \cdot \omega$ (естественно, и здесь для положительной функции f может получиться отрицательный интеграл).

Второй случай — интегрирование функции f комплексного переменного по кривой γ в комплексной плоскости. Обычно в комплексном анализе соответствующий интеграл есть именно интеграл от 1-формы $f(z)dz$, а вовсе не интеграл от f по одномерной мере λ_1. Скажем, интеграл от 1 по единичной окружности оказывается нулевым, а не ее длиной, как было бы при интегрировании по линейной мере λ_1. На уровне параметризации $\varphi\colon\ [0,1) \to \mathbb{C}$ разница вот в чем: первый интеграл есть интеграл от $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ по $[0,1)$, а второй интеграл есть интеграл от $f(\varphi(t))|\varphi'(t)|$. В многомерном случае аналогичная разница. На уровне римановских сумм разница такова: в первом случае берутся суммы вида $\sum f(z_i)(z_{i+1} - z_i)$ по точкам z_i деления кривой, а во втором случае суммы $\sum f(z_i)|z_{i+1} - z_i|$.

Развитие интегрирования дифференциальных форм по кривым и поверхностям в значительной степени мотивировалось задачами механики, электродинамики, гидромеханики и другими приложениями, о чем можно прочитать в Зорич [3]. Один из базовых примеров: вычисление работы векторного поля $F = (F^i)$ на плоскости или в пространстве при перемещении материальной частицы единичной массы по кривой γ. Предполагая, что работа по перемещению на вектор ξ в случае постоянного поля равна $\langle F, \xi\rangle$, получаем, что в случае непрерывного переменного поля искомая работа равна приближенно $\sum\langle F(x_i), x_{i+1} - x_i\rangle$ при достаточно мелком делении кривой точками x_i. В свою очередь, последняя сумма приближенно равна

$$\sum\langle F(x(t_i)), x'(t_i)(t_{i+1} - t_i)\rangle,$$

если $x_i = x(t_i)$, $x(\cdot)$ — параметризация данной кривой. Таким образом, получили суммы Римана для интеграла от функции $\langle F(x(t)), x'(t)\rangle$ по отрезку параметризации, т. е. для интеграла от формы $\sum F^i\, dx_i$ по кривой. Другой пример: закон Фарадея утверждает, что электродвижущая сила, возникающая в замкнутом проводнике γ в переменном магнитном поле B, пропорциональна скорости изменения потока магнитного поля через ограниченную проводником поверхность S. В терминах интегралов от дифференциальных форм этот закон записывается как следующее соотношение для вектора напряженности $E = (E^1, E^2, E^3)$ электрического поля:

$$\int_\gamma E^1 dx + E^2 dy + E^3 dz = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \langle B, \mathrm{n}_S\rangle\, d\lambda_2.$$

Именно для таких задач и выводились классиками различные формулы, связывающие объемные и поверхностные интегралы.

§ 3.7. Формула Стокса

Формула Гаусса – Остроградского может быть получена как частный случай общей формулы Стокса, представленной ниже.

Для формулировки формулы Стокса (а также для некоторых других целей) полезно ввести понятие края многообразия, в некотором смысле обобщающее понятие границы гиперповерхности, но применимое уже не только к поверхностям коразмерности один. Например, краем мыльной пленки, натянутой на контур в трехмерном пространстве, будет служить этот контур, хотя топологически границей будет не только контур, но и вся пленка. Для этого будем рассматривать более общие k-мерные многообразия в $\mathbb{R}^n$ («многообразия с краем»), в определение которых вводится следующее изменение: в качестве окрестностей точки a многообразия M разрешаются как множества, диффеоморфные открытому кубу в $\mathbb{R}^k$, так и множества, диффеоморфные (в прежнем смысле) «полуоткрытому» кубу P вида $(0,1]\times(0,1)\times\cdots\times(0,1)$. *Краем* P будем называть подмножество $\partial P \subset P$ всех точек с $x_1 = 1$. Обратим внимание на неравноправие координат: по остальным координатам перемножаются открытые интервалы. Например, на плоскости мы получаем открытый квадрат, с присоединенным правым вертикальным отрезком без угловых точек. Его краем считается открытый вертикальный интервал (причем последний уже не имеет края, а оказывается одномерным многообразием без края).

Краем многообразия M называют множество ∂M его точек, имеющих окрестности, в которых они соответствуют в координатном виде точкам из края полуоткрытого куба P. Из теоремы об обратной функции явствует, что принадлежность к краю определена инвариантно: при диффеоморфизме куба внутренние точки переходят во внутренние.

Из определения следует, что ∂M является $(k-1)$-мерным многообразием без края.

Даже для n-мерных многообразий в $\mathbb{R}^n$ край может не совпадать с топологической границей. Например, открытый квадрат на плоскости является многообразием без края. К нему можно присоединить один, два, три или четыре открытых интервала его топологической границы (без угловых точек), это будут разные многообразия с разными краями (угловые точки при нашем подходе нельзя присоединить, но можно, если ввести более общие липшицевы многообразия). Лучше дело обстоит с кругом: открытый круг — многообразие без края, замкнутый круг — многообразие с краем (являющимся окружностью). Аналогично будет и с шаром. К открытому кругу можно добавить не всюду окружность, а лишь открытую дугу (без концов), что также даст многообразие с краем. Таким образом, край не определяется однозначно по замыканию множества, а должен быть отдельно указан. При обсуждении интегрирования мы в основном будем иметь дело с компактными многообразиями с краем (типа шара), но по упомянутым выше причинам иногда приходится иметь дело с несколько искусственной ситуацией типа квадрата с исключенными вершина, чтобы оставаться в рамках гладких многообразий.

Для интегрирования дифференциальных форм важен тот факт, что край ∂M ориентируемого многообразия M оказывается ориентируемым многообразием. Это нетрудно вывести из определений (см., например, Решетняк [8]). Заметим также, что в k-мерном касательном пространстве T_xM в точке $x \in \partial M$ имеется $(k-1)$-мерное линейное подпространство $T_x\partial M$, касательное к краю. Это ясно из описания края в локальных координатах. Следовательно, есть ровно два единичных вектора в T_xM, ортогональных $T_x\partial M$. Опять же из определения краевой точки в локальных координатах следует, что лишь один из этих двух векторов, называемый внешней нормалью к краю и обозначаемый через $\mathrm{n}_{\partial M}(x)$, удовлетворяет условию $x + t\mathrm{n}_{\partial M}(x) \notin M$ при достаточно малых $t > 0$. Можно проверить (в локальных координатах), что вектор $\mathrm{n}_{\partial M}(x)$ непрерывно зависит от x. Для бесконечно дифференцируемых многообразий зависимость оказывается гладкой. Теперь ориентирующий ортогональный репер $e_1(x), \ldots, e_{k-1}(x)$ края зададим так: будем требовать, чтобы расширенный репер

$$\mathrm{n}_{\partial M}(x), e_1(x), \ldots, e_{k-1}(x)$$

имел ту же ориентацию, что заранее данный ориентирующий ортогональный репер (существующий по условию). Эти соображения можно использовать и для задания ориентации края. В терминах ненулевых дифференциальных форм (более созвучных нашему определению) проверка сводится к рассмотрению формы

$$(h_1, \ldots, h_{k-1}) \mapsto \omega_e(x)(\mathrm{n}_{\partial M}(x), h_1, \ldots, h_{k-1}),$$

которая отлична от нуля на $T_x\partial M$. В самом деле, если бы оказалась нулевой, то она была бы равна нулю и на репере $e_1(x), \ldots, e_{k-1}(x)$, но тогда форма $\omega_e(x)$ была бы нулевой на T_xM, поскольку k векторов $\mathrm{n}_{\partial M}(x), e_1(x), \ldots, e_{k-1}(x)$ образуют базис в T_xM.

Основной пример: для полуоткрытого куба

$$P = (0, 1] \times (0, 1) \times \cdots \times (0, 1)$$

его край ∂P (грань $x_1 = 1$) имеет обычную ориентацию с точки зрения координатного пространства $x_2, \ldots, x_k$. Скажем, на плоскости ($k = 2$) это соответствует тому, что при движении вверх по правому ребру квадрат оказывается слева. Отсюда общее правило для плоской области: при обходе границы против часовой стрелки область остается слева. Здесь мы не будем обсуждать, почему обход надо делать именно против часовой стрелки (можно считать, что потому, что так ходят часы в столовой НМУ).

3.7.1. Теорема. (Формула Стокса) *Пусть M — компактное ориентируемое многообразие размерности $k+1$ с краем. Тогда для всякой k-дифференциальной формы ω класса C^1 на M верно равенство*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \tag{3.7.4}$$

Доказательство. По определению интеграла от формы, использующего гладкие разбиения единицы, обоснование достаточно провести для формы с компактным носителем, лежащим в стандартной $(k+1)$-ячейке $\varphi(U)$. Таким образом, можно считать, что мы имеем дело с формой вида $\omega(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ в полуоткрытом кубе $P = (0,1] \times (0,1) \times \cdots \times (0,1)$ или с формой $\omega(x)dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{k+1}$, причем носитель функции ω лежит в этом кубе. В первом случае дифференциал формы имеет вид

$$(-1)^k \partial_{x_{k+1}} \omega(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{k+1},$$

что при интегрировании по P дает нуль, так как при этом интегрировании мы можем сначала интегрировать по x_{k+1}, что даст значения функции ω на тех гранях куба P, где она равна нулю в силу нашего предположения о ее носителе (это предположение допускает ненулевые значения ω лишь на грани с $x_1 = 1$).

Во втором случае дифференциал формы имеет вид

$$\partial_{x_1} \omega(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{k+1},$$

что при интегрировании по P дает (сразу после интегрирования по x_1 на основании теоремы Фубини) интеграл от ω по ∂P, поскольку грани с $x_1 = 0$ функция ω равна нулю в силу нашего предположения о ее носителе. В этом вычислении становится важной согласованность ориентации края и всего многообразия, ведь иначе мы бы получили интеграл по грани со знаком минус. Скажем, в одномерном случае ($M = (0,1]$) интеграл от ω' по $(0,1]$ равен именно $\omega(1)$, а не $-\omega(1)$. Это объясняет выбор в качестве края множества $x_1 = 1$, а не $x_1 = 0$: тогда бы пришлось ставить знак минус перед интегралом по краю (или иначе его ориентировать). □

Легко заметить сходство обоснований формул Стокса и Гаусса – Остроградского (при наших упрощающих предположениях, конечно): обе фактически являются следствиями формулы Ньютона – Лейбница и теоремы Фубини после локализации.

Формула Гаусса – Остроградского получается из формулы Стокса так: берется $(n-1)$-форма

$$\omega = v_1 dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n + (-1) v_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_n + \cdots + \\ + (-1)^{n+1} v_n dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}.$$

Дифференциал этой формы равен $(\operatorname{div} v) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Интеграл от нее по ∂U есть как раз интеграл от функции $\langle v, \mathrm{n}_{\partial U} \rangle$ по поверхностной мере λ_{n-1}. В самом деле, по определению интеграл формы есть интеграл от функции ϱ, которая находится из равенства

$$\varrho(x) = \omega(x)(\psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)),$$

где $\psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)$ — какой-либо ортогональный репер в касательном пространстве в x, для которого репер $\mathrm{n}_{\partial U}(x), \psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)$ имеет положительную ориентацию. Из-за аддитивности интеграла следует, что достаточно рассмотреть случай, когда лишь одна компонента v_i отлична от нуля. Скажем, пусть это v_1. Тогда

$$dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n(\psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x))$$

есть площадь проекции куба, порожденного $\psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)$, на плоскость $x_1 = 0$. Ввиду примера 3.3.5 это равно $\langle e_1, \mathrm{n}_{\partial U}(x)\rangle$ с учетом знаков. Итак, $\varrho(x)$ совпадает с $\langle v(x), \mathrm{n}_{\partial U}(x)\rangle$. Для v_2 знак минус дает положительную ориентацию репера.

Однако из общей формулы Стокса можно извлечь и другие полезные формулы. Мы сделаем это для области на плоскости, ограниченной кривой, и в трехмерном пространстве для двумерной поверхности с одномерным краем. Кроме того, мы приведем векторный вариант формулы Стокса.

3.7.2. Пример. (Формула Грина) Пусть D — ограниченная область на плоскости с гладкой границей, функции P и Q непрерывно дифференцируемы в окрестности замыкания D. Тогда верна формула Грина

$$\int_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\, dx\, dy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy.$$

В самом деле, мы имеем $d(Pdx) = \partial_y P dy \wedge dx = -\partial_y P dx \wedge dy$, $d(Qdy) = \partial_x Q dx \wedge dy$.

3.7.3. Пример. Пусть S — компактная ориентированная гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$ с краем ∂S, функции P, Q и R непрерывно дифференцируемы в окрестности замыкания S. Тогда верна формула Стокса

$$\int_S \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\, dy \wedge dz + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)\, dz \wedge dx + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\, dx \wedge dy = \\ = \int_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Обратим внимание, что если вместо $dz \wedge dx$ написать $dx \wedge dz$, как мы обычно делаем, то в функциональном множителе надо сменить знак. Проверка опять сводится к дифференцированию 1-формы: например, $d(Pdx) = -\partial_y P dx \wedge dy + \partial_z P dz \wedge dx$.

Для векторного поля $A := (P, Q, R)$ векторное поле с компонентами

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

называется *ротором* и обозначается символом $\mathrm{rot}\, A$. Ротор может быть получен как формальный определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{pmatrix}$$

с выделением коэффициентов при e_1, e_2, e_3.

Приведенные выше формулы можно записать в векторном виде, если с помощью поверхностных мер задать векторные меры. А именно: на кривой γ зададим единичное поле касательных векторов $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)$ и с его помощью зададим векторную меру $\mathbf{l}$ так: для скалярной функции f ее интеграл по мере $\mathbf{l}$ есть вектор, компоненты которого вычисляются как интегралы от fv^i по одномерной мере на кривой. Интеграл от векторной функции $\mathbf{w}$ по векторной мере $\mathbf{l}$ есть интеграл от скалярной функции $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

Аналогично поверхностная мера на двумерной поверхности S позволяет задать векторную меру $\mathbf{s}$ с помощью внешней единичной нормали n_S к поверхности. Тогда интеграл от векторной функции $\mathbf{A}$ по векторной мере $\mathbf{s}$ считается как интеграл от $\langle \mathbf{A}, \mathrm{n}_S \rangle$ по S. Следовательно, указанные выше формулы могут быть записаны в виде

$$\int_S \mathrm{rot}\, \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l},$$

$$\int_U \mathrm{div}\, \mathbf{A}\, dx = \int_{\partial U} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}.$$

Можно выписать также следующее более общее правило. Пусть φ — линейное отображение из $\mathbb{R}^3$ в пространство функций или в пространство векторных полей. Положим

$$\varphi(\nabla) := \partial_{x_1}\varphi(e_1) + \partial_{x_2}\varphi(e_2) + \partial_{x_3}\varphi(e_3).$$

Например, если f — фиксированная функция и $\varphi(x) = f \cdot x$, то получаем $\varphi(\nabla) = \nabla f$. Если для фиксированного поля v взять $\varphi(x) = \langle x, v \rangle$, то $\varphi(\nabla) = \mathrm{div}\, v$, а если $\varphi(x) = [x, v]$, то $\varphi(x) = \mathrm{rot}\, v$. При этих соглашениях верна формула

$$\int_D \varphi(\nabla)\, dx = \int_{\partial D} \varphi(\mathrm{n})\, d\lambda_2.$$

При указанных выше опциях получаем уже известные формулы.

Операторы типа $\Delta, \nabla, \mathrm{div}\,, \mathrm{rot}$ — важнейшие средства математической физики, почти все фундаментальные уравнения физики описываются в терминах таких операторов. Скажем, в знаменитые уравнения Максвелла входят уравнения вида $\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\varrho$, $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{j}$.

§ 3.8. Задачи

3.8.1. Найти интеграл от формы $\omega = xdy\wedge dz + ydz\wedge dx + zdx\wedge dy$ по единичной сфере.

Решение: здесь $F(x, y, z) = (x, y, z)$ совпадает с единичной нормалью, т.е. $\langle F, \mathrm{n}\rangle = 1$, поэтому искомый интеграл равен интегралу от 1 по поверхностной мере — площади сферы (4π); другой способ: по формуле Стокса искомый интеграл формы по границе шара равен интегралу дифференциалу $d\omega$ этой формы по шару, где

$$d\omega = dx \wedge dy \wedge dz + dy \wedge dz \wedge dx + dz \wedge dx \wedge dy = 3dx \wedge dy \wedge dz.$$

Это дает утроенный объем шара.

3.8.2. Найти интеграл от формы $\omega = (y - z)\, dy \wedge\, dz + (z - x)\, dz \wedge dx + (x - y)\, dx \wedge\, dy$ по единичной сфере и по внешней боковой стороне S конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

Решение: здесь $d\omega = 0$, поэтому нулевым будет интеграл по шару (что даст нулевой интеграл от формы по его границе), а также по S вместе с верхней крышкой $z = 1, x^2 + y^2 = 1$. На крышке $dz = 0$, поэтому первые два слагаемые равны нулю, а третье слагаемое тоже лает нулевой интеграл, ибо функция $x-y$ на единичном круге нечетна. Можно также считать непосредственно: внешняя единичная нормаль имеет вид $\mathrm{n} = (-x, -y, z)(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$, поэтому получаем равенство $\langle F, \mathrm{n}\rangle = 2(x - y)(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$, что дает нулевой интеграл из-за нечетности и симметричности S по x, y.

3.8.3. Найти интеграл от формы

$$\omega = (xy^2 + z^2)dy \wedge dz + (yz^2 + x^2)dz \wedge dx + (zx^2 + y^2)dx \wedge dy$$

по внешней стороне верхней половины единичной сферы.

Решение: $d\omega = (y^2 + z^2 + x^2)dx \wedge dy \wedge dz$, по формуле Стокса интеграл от ω по исходной поверхности с донной частью равен половине интеграла от $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ по всему шару, который вычисляется в сферических координатах (получаем $4\pi/5$). На донной части $z = 0$ (с нормалью вниз) форма равна $y^2dx \wedge dy$, ее интеграл равен интегралу от $-y^2$ по кругу, т.е. половине интеграла от $-r^2$ по кругу, который в полярных координатах есть интеграл по отрезку $[0,1]$ от $-2\pi r^3$, т.е. $-\pi/2$.

3.8.4. Найти длину эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Решение: возьмем параметризацию $x = a\cos t, y = b\sin t,\ t \in [0, 2\pi)$. Тогда $x'(t) = -a\sin t, y'(t) = b\cos t,\ (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t$, т.е. длина равна

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt,$$

что в общем случае не выражается через элементарные функции (сводится к эллиптическим интегралам).

3.8.5. Доказать, что определитель матрицы Грама $(\langle v_i, v_j\rangle)_{i,j\leqslant k}$ набора из k векторов $v_i = (v_i^1, \ldots, v_i^n)$ в $\mathbb{R}^n$ равен сумме

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} |\det V_{i_1,\ldots,i_k}|^2,$$

где $V_{i_1,\ldots,i_k}$ — матрица размера $k\times k$, строками которой служат векторы $(v_1^{i_1}, \ldots, v_1^{i_k})$, …, $(v_k^{i_1}, \ldots, v_k^{i_k})$, полученные проектированием исходных векторов на k-мерное пространство координат $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$.

3.8.6. Доказать, что мера Хаусдорфа H^α не меняется при сдвигах и ортогональных преобразованиях.

3.8.7. Пусть отображение $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ липшицево с постоянной L. Доказать, что

$$H^\alpha(f(A)) \leqslant L^\alpha H^\alpha(A).$$

3.8.8. Доказать, что длина гладкой кривой на плоскости совпадает с ее внешней мерой Хаусдорфа порядка 1.

Указание: при оценке длины через одномерную меру Хаусдорфа воспользоваться тем, что для всякого $q > 1$ можно разбить гладкую кривую на участки, длины которых будут не более чем в q раз больше расстояний между концевыми точками.

3.8.9. Доказать, что поверхностная мера на сфере с центром в нуле инвариантна относительно ортогональных преобразований.

3.8.10. Доказать, что для всякой непрерывной функции f на $\mathbb{R}^n$ верно равенство

$$\int_{\|x\|\leqslant R} f(x)\, dx = \int_0^R \int_{\|x\|=r} f(x)\, \lambda_{n-1}(dx)\, dr,$$

где λ_{n-1} — поверхностная мера на сфере.

3.8.11. Доказать, что интеграл от непрерывной функции f на $\mathbb{R}^n$ по поверхностной мере на единичной сфере равен пределу при $\varepsilon \to 0$ объемных интегралов от $\varepsilon^{-1} f$ по множествам

$$\{x\colon\ 1 \leqslant \|x\| \leqslant 1+\varepsilon\}.$$

3.8.12. Пусть гладкая функция f на $\mathbb{R}^3$ гармонична, т. е.

$$\Delta f := \partial^2_{x_1} f + \partial^2_{x_2} f + \partial^2_{x_3} f = 0.$$

Выразив объемный интеграл от f по $\{x\colon\ r \leqslant \|x\| \leqslant R\}$ через поверхностный, доказать, что для всякого x и всякой сферы $S(x,R)$ радиуса R с центром в x верно равенство

$$f(x) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S(x,R)} f(y)\,\lambda_2(dy),$$

где λ_2 — поверхностная мера на сфере.

Указание: использовать пример 3.4.3, в котором надо заметить, что в случае шара радиуса $r \leqslant R$ с центром в нуле внешняя нормаль к границе имеет вид $\mathrm{n}(x) = x/r$, поэтому $\langle \nabla u(x), \mathrm{n}(x)\rangle = r^{-1}\langle \nabla u(x), x\rangle$; записав x как $x = rs$, где s — единичный вектор, вычислить интеграл от $\langle \nabla u(rs), s\rangle$ по r по отрезку $[0,R]$ и записать интеграл от u по шару в сферических координатах.

3.8.13. Пусть f — непрерывная функция на $\mathbb{R}$. Доказать формулу Пуассона

$$\int_{\|x\|=1} f(ax_1 + bx_2 + cx_3)\,d\sigma_2 = 2\pi \int_{-1}^{1} f\bigl(t\sqrt{a^2+b^2+c^2}\bigr)\,dt,$$

где σ_2 — поверхностная мера.

3.8.14. Пусть поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ задана уравнением $F(x,y,z)=0$, где функция F непрерывно дифференцируема, причем S взаимно однозначно проектируется на область D в плоскости переменных (x,y), измеримую по Жордану. Доказать, что

$$\lambda_2(S) = \int_U \frac{|\nabla F(x,y,z(x,y))|}{|\partial_z F(x,y,z(x,y))|}\,dx\,dy,$$

где $z(x,y)$ задается тождеством $F(x,y,z(x,y)) = 0$ в D.

3.8.15. Для гладких форм ω_1 и ω_2 доказать тождество

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{\deg \omega_1} omega_1 \wedge d\omega_2.$$

3.8.16. Вычислить площадь поверхности в $\mathbb{R}^3$, заданной условиями $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $z = xy$.

3.8.17. Вычислить $df_1 \wedge df_2 \wedge df_3$, где f_1, f_2, f_3 — гладкие функции на $\mathbb{R}^3$.

3.8.18. Найти интеграл от дифференциала дифференциальной 1-формы

$$x_2 x_3 dx_1 + x_1 dx_2 + dx_3$$

по единичной сфере с центром в нуле в $\mathbb{R}^3$.

3.8.19. Вычислить интеграл

$$\int_\gamma (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$$

по кривой $\gamma = \{(x, y)\colon\ y = x^2,\ x \in [-1, 1]\}$ (ориентированной в соответствии с возрастанием x).

3.8.20. Найти интеграл от 2-формы $xdydz + ydzdx + zdxdy$ по единичной сфере с центром в нуле.

3.8.21. Найти интеграл от 2-формы $x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$ по единичной сфере с центром в нуле.

3.8.22. Найти интеграл от 1-формы $ydx + zdy + xdz$ по окружности, полученной в пересечении единичной сферы с центром в нуле и плоскости $x + y + z = 0$ (используя естественную ориентацию этой окружности как границы круга).

3.8.23. Для гладкой функции f и гладкого векторного поля F на $\mathbb{R}^n$ доказать формулу

$$\operatorname{rot}(fF) = f \operatorname{rot} F + [\nabla f, F],$$

где $[u, v]$ обозначает векторное произведение.

3.8.24. Пусть F — непрерывно дифференцируемое векторное поле в $\mathbb{R}^3$. Доказать, что его ротор вычисляется по формуле

$$\operatorname{rot} F(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{|x-y|=\varepsilon} [F(y), \mathrm{n}(y)]\, \lambda_2(dy),$$

где $[u, v]$ — векторное произведение, $\mathrm{n}(y)$ — единичная внешняя нормаль в y к сфере радиуса ε с центром в x.

3.8.25. Найти интеграл
$$\int_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$
где γ — замкнутая ломаная без самопересечений, причем начало координат лежит внутри ограниченного этой ломаной многоугольника.

3.8.26. Выяснить, является ли 2-форма
$$x_3 dx_1 \wedge dx_2 - x_2 dx_1 \wedge dx_3 + x_1 dx_2 \wedge dx_3$$
ненулевой формой на единичной сфере в $\mathbb{R}^3$. Рассмотреть аналогичную форму в $\mathbb{R}^n$.

Список вопросов (коллоквиум — первые 10)

1. Равномерная сходимость функций и $\sup$-норма. Непрерывность равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.

2. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Непрерывность и дифференцируемость несобственных интегралов по параметру.

3. Бета и гамма функции Эйлера и связь между ними. Формулы понижения. Формула Стирлинга.

4. Преобразование Фурье интегрируемых функций и его основные свойства. Формула обращения. Класс $\mathcal{S}$ и его сохранение преобразованием Фурье.

5. Равенство Парсеваля. Преобразование Фурье в L^2. Обобщенные функции класса $\mathcal{S}'$ и их преобразование Фурье.

6. Обобщенные производные Соболева и классы Соболева. Решение уравнений с дифференциальными операторами в классах Соболева и в обобщенных функциях.

7. Ортонормированные системы и базисы. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля.

8. Ортогонализация. Существование ортонормированного базиса в гильбертовом пространстве.

9. Тригонометрическая система и многочлены Чебышёва – Эрмита. Равномерное приближение тригонометрическими многочленами.

10. Степенной ряд и его круг сходимости. Дифференцирование степенных рядов.

11. Поверхностные меры и интегралы (определение меры Хаусдорфа и явная формула в случае поверхности, заданной параметрически).

12. Связь поверхностных и объемных интегралов: формула Гаусса – Остроградского (формулировка).

13. Дифференциальные формы. Интегрирование дифференциальных форм (явные формулы в случае кривых и поверхностей, заданных параметрически).

14. Формулы Стокса и Грина (формулировки в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$).

Литература

[1] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. Курс метрической геометрии. ИКИ, Москва – Ижевск, 2004; 496 с.

[2] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 13-е изд., испр. Изд-во Моск. ун-та ЧеРо, М., 1997; 624 с.

[3] Зорич В.А. Математический анализ: В 2 т. Наука, М., 1981, 1984; 544 с., 640 с.

[4] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1 – 3. Дрофа, М., 2003, 2004, 2006; 704 с., 720 с., 351 с.

[5] Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Математический анализ: кратные и криволинейные интеграла. Справочное пособие по высшей математике (АнтиДемидович). Т. 3. Едиториал УРСС, М., 2001; 224 с.

[6] Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. 1, 2. 3-е изд. Наука, М., 1983; 468 с., 451 с.

[7] Никольский С.М. Курс математического анализа. 6-е изд., ФИЗМАТЛИТ, М., 2001; 592 с.

[8] Решетняк Ю.Г. Курс математического анализа. Ч. II. Кн. 2. Ин-т математики, Новосибирск, 2001; 444 с.

[9] Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. 3-е изд. Физматлит, М., 2001; 672 с.

[10] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1, 2, 3. 7-е изд. Наука, М., 1970.

[11] Эванс Л.К., Гариепи Р.Ф. Теория меры и тонкие свойства функций. Науч. книга, Новосибирск, 2002; 206 с.