Математический анализ: 3 семестр, конспект лекций

В. И. Богачев

ф-т физики ВШЭ, 2 курс, осень 2023

Оглавление

Глава 1

Интегралы, зависящие от параметра

В этой главе приведены условия непрерывности и дифференцируемости по параметру для обычных и несобственных интегралов. Кроме того, здесь обсуждаются так называемые Γ- и B-функции Эйлера. Речь идет о выражениях вида

$$\int f(x, \alpha)\, dx,$$

в которых функция $f(x, \alpha)$ двух переменных интегрируема (в собственном или несобственном смысле) по x, что после интегрирования дает функцию аргумента α. Возникают вопросы о ее непрерывности и дифференцируемости. Весьма важные для приложений функций такого вида возникают при использовании довольно элементарных на первый взгляд функций типа $x^\gamma e^{-x}$ или $x^\beta (1-x)^\gamma$.

§ 1.1. Непрерывность интеграла по параметру

Пусть E — измеримое множество в $\mathbb{R}^d$, A — множество в $\mathbb{R}^k$.

1.1.1. Теорема. *Пусть функция* $f\colon E \times A \to \mathbb{R}$ *интегрируема по первому переменному при фиксированном втором и непрерывна по второму при фиксированном первом. Тогда для непрерывности функции*

$$\alpha \mapsto \int_E f(x, \alpha)\, dx$$

достаточно существования такой интегрируемой на E *функции* Φ*, что*

$$|f(x, \alpha)| \leqslant \Phi(x) \quad \forall\, x \in E, \alpha \in A.$$

Условие подобрано так, что непосредственно применима теорема Лебега: если интегрируемые функции f_n сходятся почти во всех точках к функции f, причем для них есть общая интегрируемая мажоранта, т.е. интегрируемая функция Φ, для которой $|f_n(x)| \leqslant \Phi(x)$ для всех x и n, то f тоже интегрируема и

$$\int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu.$$

Условие Лебега по своей сути ориентировано на абсолютные интегралы, поэтому оно не всегда помогает в случае несобственных интегралов, которым вообще противопоказаны оценки с модулями. Для них вводится некоторое новое техническое условие.

1.1.2. Определение. *Пусть дано семейство $f(\cdot,\alpha)$ функций на промежутке $[a,+\infty)$, интегрируемых на всяком отрезке $[a,R]$ и несобственно интегрируемых на $[a,+\infty)$. Говорят, что эти функции имеют равномерно сходящиеся несобственные интегралы, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $R > a$, что*

$$\left|\int_{R_1}^{R_2} f(x,\alpha)\,dx\right| < \varepsilon \quad \forall\,\alpha$$

при всех $R_1, R_2 \geqslant R$. Вместо непрерывности по двум переменным достаточно иметь непрерывность по второму аргументу и ограниченность на множествах $[a,R]\times A$.

Аналогично вводится равномерная сходимость несобственных интегралов в случае особенности в a, т. е. когда собственная интегрируемость дана на отрезках в $(a,+\infty)$.

Простое достаточное (но отнюдь не необходимое) условие равномерной сходимости несобственных интегралов состоит в наличии интегрируемой (несобственно) на $(0,+\infty)$ функции Φ, для которой

$$|f(x,\alpha)| \leqslant \Phi(x) \quad \forall\,x\in(0,+\infty),\ \forall\,\alpha.$$

Полезные широкие достаточные условия равномерной сходимости несобственных интегралов даны в следующем параграфе. В приводимой ниже теореме это понятие применяется в достаточном условии непрерывности по параметру несобственного интеграла. Теорема же вытекает из следующего простого факта, который уже встречался при обсуждении метрик и норм.

1.1.3. Определение. *Последовательность функций f_n называется равномерно сходящейся к функции f на множестве X, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что*

$$|f(x)-f_n(x)| \leqslant \varepsilon \quad \textit{при всех } x\in X \textit{ и } n\geqslant N.$$

Последовательность функций f_n *называется равномерно фундаментальной на множестве* X*, если для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* N*, что*

$$|f_k(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon \quad \textit{при всех } x \in X \textit{ и } n, k \geqslant N.$$

Так же вводится равномерная сходимость комплексных функций.

В терминах равномерной нормы

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

на пространстве ограниченных функций на X речь идет о сходимости $\|f - f_n\| \to 0$ и о фундаментальности по этой норме. Ранее уже обсуждалось, что сходящаяся по норме последовательность фундаментальна, а равномерно фундаментальная последовательность ограниченных функций сходится равномерно к некоторой ограниченной функции.

1.1.4. Теорема. *Если последовательность непрерывных функций* f_n *на метрическом пространстве* X*, например на множестве в* $\mathbb{R}^d$*, равномерно сходится к функции* f*, то* f *тоже непрерывна.*

Доказательство. Пусть $x_i \to x_0$ и $\varepsilon > 0$. Найдем такое N, что $\sup_x |f(x) - f_N(x)| \leqslant \varepsilon/4$. В силу непрерывности f_N найдется такое N_1, что $|f_N(x_0) - f_N(x_i)| \leqslant \varepsilon/4$ при всех $i \geqslant N_1$. Тогда

$$\begin{aligned}
&|f(x_0) - f(x_i)| = \\
&= |f(x_0) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f_N(x_i) + f_N(x_i) - f(x_i)| \leqslant \\
&\leqslant |f(x_0) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f_N(x_i)| + |f_N(x_i) - f(x_i)| \leqslant \\
&\leqslant \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4
\end{aligned}$$

при всех $i \geqslant N_1$. Итак, $f(x_i) \to f(x_0)$. □

1.1.5. Теорема. *Пусть* $A \subset \mathbb{R}^k$ *и функция* $f\colon [a, +\infty) \times A \to \mathbb{R}$ *непрерывна и несобственно интегрируема по первому аргументу на промежутке* $[a, +\infty)$*. Тогда для непрерывности функции*

$$J\colon \alpha \mapsto \int_a^\infty f(x, \alpha)\, dx$$

достаточно равномерной сходимости несобственных интегралов от функций $f(\cdot, \alpha)$*.*

Аналогичное утверждение верно в случае особенности в a *(тогда требуется лишь непрерывность на* $(a, +\infty) \times A$*).*

Доказательство. Положим

$$J_n(\alpha) = \int_a^n f(x,\alpha)\,dx.$$

Из-за непрерывности f функции J_n непрерывны на A (следует из теоремы Лебега). Равномерная интегрируемость дает их равномерную сходимость к $J(\alpha)$. Значит, применима предыдущая теорема.

Случай особой точки в a аналогичен, надо лишь заменить $[a,n]$ на $[a+1/n,n]$. □

Более тонкие признаки непрерывности приведены в следующем параграфе. Разумеется, не всегда интеграл от непрерывно зависящей от параметра функции будет непрерывен по параметру. Например, интеграл от функции $\alpha e^{-\alpha x}$ по $[0,+\infty)$ равен 1 при $\alpha \in (0,1]$, но при $\alpha = 0$ интеграл обращается в нуль.

§ 1.2. Равномерная сходимость несобственных интегралов

Для сходимости неабсолютных несобственных интегралов полезным достаточным условием является условие Абеля–Дирихле. Оно предлагает представить рассматриваемую функцию на $[a,+\infty)$ в виде $f(x)g(x)$, где функция f непрерывна, функция $g \geqslant 0$ ограничена, непрерывно дифференцируема и монотонно убывает. Тогда для

$$F(x) := \int_a^x f(y)\,dy$$

мы получаем

$$\int_s^t f(x)g(x)\,dx = \int_s^t F'(x)g(x)\,dx = Fg\big|_s^t - \int_s^t F(x)g'(x)\,dx, \quad (1.2.1)$$

где

$$\left|\int_s^t F(x)g'(x)\,dx\right| \leqslant \sup_{x\in[s,t]} |F(x)| \int_s^t |g'(x)|\,dx = \sup_{x\in[s,t]} |F(x)|\,|g(s)-g(t)|. \quad (1.2.2)$$

Это представление дает следующие достаточные условия стремления к нулю интеграла в левой части (1.2.1) при $s,t\to+\infty$:

(i) существует конечный предел $\lim\limits_{t\to\infty} F(t)$, т. е. f имеет несобственный интеграл,

ЛИБО

(ii) $\sup_x |F(x)| < \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Это же представление можно использовать для вывода условий равномерной сходимости интегралов, зависящих от параметра.

1.2.1. Теорема. *Пусть при всех $\alpha \in A$ функции $x \mapsto f(x,\alpha)$ непрерывны на $[a,+\infty)$, функции $x \mapsto g(x,\alpha)$ непрерывно дифференцируемы на $[a,+\infty)$, неотрицательны и монотонно убывают. Для равномерной сходимости несобственных интегралов*

$$\int_a^\infty f(x,\alpha)g(x,\alpha)\,dx$$

достаточно выполнения какого-либо из следующих двух условий:

(i) $\sup_{x,\alpha}|g(x,\alpha)| < \infty$ *и функции $f(x,\alpha)$ имеют равномерно сходящиеся несобственные интегралы, т. е. функции*

$$F(x,\alpha) := \int_a^x f(y,\alpha)\,dy$$

равномерно по α стремятся к соответствующим несобственным интегралам при $x \to \infty$;

(ii) $\sup_{x,\alpha}|F(x,\alpha)| < \infty$ *и функции $x \mapsto g(x,\alpha)$ равномерно сходятся к нулю при $x \to +\infty$, т. е.* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sup_{\alpha\in A}|g(x,\alpha)| = 0$.

Доказательство. В случае (i) интеграл от $f(x,\alpha)g(x,\alpha)$ по $[s,t]$ оцениваем с помощью (1.2.1) и (1.2.2) следующим образом: для данного $\varepsilon > 0$ находим $R > a$ такое, что $|F(x,\alpha)| < \varepsilon$ для всех α при $x \geqslant R$, что позволяет оценить интеграл от $f(x,\alpha)g(x,\alpha)$ по $[s,t]$ при $s,t \geqslant R$ через $4\varepsilon \sup_{x,\alpha}|g(x,\alpha)|$.

В случае (ii) находим такое $R \geqslant a$, что $|g(x,\alpha)| \leqslant \varepsilon$ для всех α при $x \geqslant R$, что с помощью (1.2.1) и (1.2.2) позволяет оценить этот же интеграл через $4\varepsilon \sup_{x,\alpha}|F(x,\alpha)|$. □

На самом деле обе теоремы верны при несколько более широких условиях: вместо непрерывности функции f по x достаточно интегрируемости, а от функции g можно не требовать дифференцируемость по x (достаточно монотонного убывания). Доказательство с прежней идеей при этих условиях лишь немного усложняется, а именно надо либо доказывать формулу интегрирования по частям при указанных более широких условиях (тогда вместо производной g появятся интегралы Стилтьеса), либо использовать теорему о среднем.

1.2.2. Пример. Несобственные интегралы

$$\int_0^\infty g(x,\alpha)\sin x\,dx$$

сходятся равномерно, если функции $x \mapsto g(x,\alpha)$ убывают, причем $\lim\limits_{x\to+\infty} \sup_\alpha g(x,\alpha) = 0$. Здесь важно то, что функция $\cos x$ равномерно ограничена. Напомним, что даже для простейших функций типа $g(x,\alpha) = x^{-1}$ или $g(x,\alpha) = x^{-1/2}$ абсолютной сходимости интегралов нет, так что здесь нельзя проверить что-то с помощью мажорант. Правда, прием, использованный в признаке Абеля – Дирихле, фактически сводится к тому, что интегрирование по частям приводит к ситуации, где уже есть интегрируемые мажоранты.

Из доказанной теоремы сразу получаем соответствующее условие непрерывности интеграла по параметру α: достаточно добавить условие непрерывности обеих функций по двум переменным.

§ 1.3. Дифференцируемость интеграла по параметру

Дифференцируемость интеграла по параметру исследуется с помощью тех же соображений, что и непрерывность. Сначала рассмотрим обычные интегралы. Пусть E — измеримое множество в $\mathbb{R}^d$.

1.3.1. Теорема. *Пусть функция* $f\colon\ E\times(c,d)\to\mathbb{R}$ *интегрируема по первому аргументу при фиксированном втором и дифференцируема по второму аргументу при фиксированном первом. Для дифференцируемости интеграла от* $f(x,\alpha)$ *по* E *по параметру и равенства*

$$\frac{d}{d\alpha}\int_E f(x,\alpha)\,dx = \int_E \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx \qquad (1.3.1)$$

достаточно существования интегрируемой на E *функция* Φ, *для которой*

$$\Bigl|\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\Bigr| \leqslant \Phi(x) \quad \forall\, x\in E, \forall\,\alpha\in(c,d).$$

Здесь тоже условие подогнано под теорему Лебега: отношение

$$\frac{J(\alpha+h_n)-J(\alpha)}{h_n}$$

(его полагается исследовать на сходимость) есть интеграл от функции

$$\frac{f(x,\alpha+h_n)-f(x,\alpha)}{h_n},$$

которая при $h_n\to 0$ имеет пределом как раз $\partial f(x,\alpha)/\partial\alpha$. Но еще надо проверить, что Φ есть общая мажоранта. Это следует из теоремы о среднем, по которой указанная выше функция есть $\partial f(x,\xi)/\partial\alpha$ с неизвестной точкой ξ, но она неважна, ибо частная производная всюду оценивается через Φ.

Обратимся к дифференцируемости несобственных интегралов.

1.3.2. Теорема. *Пусть функция f на $[a, +\infty) \times (c, d)$ дифференцируема по второму аргументу, функция $\partial f(x, \alpha)/\partial\alpha$ непрерывна, при некотором α_0 функция $x \mapsto f(x, \alpha_0)$ несобственно интегрируема на $[a, +\infty)$, а функции $x \mapsto \partial f(x, \alpha)/\partial\alpha$ имеют равномерно сходящиеся несобственные интегралы по $[a, +\infty)$. Тогда функции $\alpha \mapsto f(x, \alpha)$ несобственно интегрируемы при всех $\alpha \in (c, d)$, причем*

$$\frac{d}{d\alpha} \int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial\alpha}\, dx.$$

Аналогичное верно в случае особенности в точке a.

Доказательство. По формуле Ньютона – Лейбница

$$f(x, \alpha) - f(x, \alpha_0) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\partial f(x, \beta)}{\partial\beta}\, d\beta$$

при $\alpha > \alpha_0$ и аналогично при $\alpha < \alpha_0$. Проинтегрируем это равенство по x по $[a, R]$ и с помощью теоремы Фубини (для непрерывных функций) запишем правую часть в виде

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \int_a^R \frac{\partial f(x, \beta)}{\partial\beta}\, dx\, d\beta.$$

Условие теоремы говорит, что внутренние интегралы в правой части при $R \to \infty$ равномерно стремятся к несобственным интегралам по $[a, +\infty)$ от производной f по второму аргументу. По теореме о предельном переходе в обычном интеграле получаем существование несобственного интеграла от $f(x, \alpha)$ и равенство

$$\int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx - \int_a^{+\infty} f(x, \alpha_0)\, dx = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, \beta)}{\partial\beta}\, dx\, d\beta,$$

причем функция

$$\beta \mapsto \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, \beta)}{\partial\beta}\, dx$$

непрерывна в силу теоремы о непрерывности несобственного интеграла по параметру. Следовательно, несобственный интеграл от $f(x, \alpha)$ оказывается непрерывно дифференцируемым, причем выполнено указанное равенство. $\square$

§ 1.4. Эйлеровы интегралы

Это параграф посвящен параметрическим интегралам специального вида, так называемым Γ-функции («гамма-функция») и B-функции («бета-функция») Эйлера. Они задаются формулами

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx, \tag{1.4.1}$$

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\, dx. \tag{1.4.2}$$

Эти почти что школьного вида специальные функции встречаются в столь многих областях математики и столь разнообразных приложениях, что давно вошли в курс высшей математики в виде самостоятельного раздела.

Несколько странные на первый взгляд выражения степеней (с минус единицами) продиктованы на самом деле заботой о более простом виде области задания этих функций. Ясно, что гамма-функция задана при $\alpha > 0$ (при $\alpha \leqslant 0$ возникает неинтегрируемая особенность в нуле), бета-функция задана при $\alpha > 0, \beta > 0$. При этом для $\alpha < 1$ даже в нуле интеграл несобственный (впрочем, если его рассматривать как лебеговский, то ничего особенного в нем нет), для бета-функции несобственные интегралы (хотя и абсолютно сходящиеся) возникают при $\alpha < 1, \beta < 1$.

С помощью теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру (или теоремы о дифференцировании лебеговского интеграла по параметру) заключаем, что функция Γ бесконечно дифференцируема и

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}(\ln x)^n e^{-x}\, dx.$$

В самом деле, ввиду равенства $x^{\alpha-1} = \exp((\alpha-1)\ln x)$ производная порядка n подынтегральной функции по α имеет вид $x^{\alpha-1}(\ln x)^n e^{-x}$. Если α лежит в отрезке в $(0, +\infty)$, то при каждом фиксированном n данное семейство функций имеет интегрируемую мажоранту вида $(x^\gamma + x^k)e^{-x}$ с некоторыми $\gamma > -1$ и $k > 1$, ибо для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $C > 0$, что $|\ln x| \leqslant Cx^\varepsilon$ при всех $x \in (0, 1)$.

Заметим, что функция Γ' обращается в нуль в единственной точке $\alpha_0 > 1$, причем $\Gamma'' > 0$, откуда следует выпуклость Γ на $(0, +\infty)$, убывание на $(0, \alpha_0]$ и возрастание на $[\alpha_0, +\infty)$.

1.4.1. Предложение. *При $\alpha > 0$ имеет место формула понижения*

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha). \tag{1.4.3}$$

Кроме того,

$$\Gamma(n + 1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Интегрируя по частям с $e^{-x} = -(e^{-x})'$, находим

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\,dx = \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx,$$

ибо подстановка значений $x^\alpha e^{-x}$ на концах дает нуль. Далее, непосредственное вычисление дает $\Gamma(1) = 1$, откуда при $n \in \mathbb{N}$ получаем равенство $\Gamma(n + 1) = n!$. □

Таким образом, функция Γ дает продолжение факториала на положительные числа. Но теперь мы можем пойти и дальше, продолжив гамму-функцию на всю ось без точек $0, -1, -2, \ldots$, а именно: положим

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha}, \quad \alpha \in (-1, 0),$$

затем повторим этот прием. Можно также сразу доопределить Γ на $(-k, -k + 1)$ по формуле

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\alpha(\alpha + 1)\cdots(\alpha + k)}.$$

На самом деле функцию Γ можно продолжать и в комплексную область, но мы не будем этим заниматься.

При некоторых дробных α значения гамма-функции вычисляются. Например, заменой $x = y^2$ получаем

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} x^{-1/2}e^{-x}\,dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi},$$

где мы воспользовались известным из раздела о кратных интегралах значением для интеграла от e^{-y^2}. Теперь при всех натуральных n можно найти $\Gamma(n + 1/2)$ по формуле понижения.

Приведем без обоснования такие факты:

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} n^\alpha \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha + 1)\cdots(\alpha + n - 1)},$$

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

При $\alpha \to +\infty$ верна асимптотическая формула Стирлинга

$$\Gamma(\alpha+1) \sim \sqrt{2\pi\alpha}\Big(\frac{\alpha}{e}\Big)^{\alpha},$$

дающая при натуральных α полезную асимптотику для факториала:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^{n}.$$

Известна и более точная формула

$$\ln\Gamma(\alpha) = \ln\sqrt{2\pi} + \Big(\alpha - \frac{1}{2}\Big)\ln\alpha - \alpha + \frac{\theta(\alpha)}{12}, \quad \theta(\alpha)\in(0,1).$$

Приведем также некоторые соотношения для бета-функции.

1.4.2. Предложение. *Справедливы равенства*

$$B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha), \tag{1.4.4}$$

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}\,dy, \tag{1.4.5}$$

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha-1,\beta+1) = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}\,B(\alpha-1,\beta). \tag{1.4.6}$$

Доказательство. Формула (1.4.4) получается очевидной заменой $x = 1-y$. Формула (1.4.5) получается непосредственно из определения заменой $x = y/(y+1)$, при которой $dx = -(y+1)^{-2}dy$. Из нее можно получить (1.4.6) интегрированием по частям, если рассмотреть $(1+y)^{-\alpha-\beta} = (1-\alpha-\beta)\big((1+y)^{-\alpha-\beta+1}\big)'$. Однако возможна проверка и по исходной формуле. При $\alpha > 1$ интегрированием по частям, записав функцию $(1-x)^{\beta-1}$ как $-(\beta^{-1}(1-x)^{\beta})'$, находим

$$\begin{aligned}
B(\alpha,\beta) &= -\frac{1}{\beta}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}\big|_0^1 + \frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta}\,dx = \\
&= \frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)(1-x)^{\beta-1}\,dx = \\
&= \frac{\alpha-1}{\beta}\bigg(\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta-1}\,dx - \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx\bigg) = \\
&= \frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha-1,\beta) + \frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha,\beta),
\end{aligned}$$

что дает (1.4.6). □

С помощью доказанных формул можно осуществлять продолжение B-функции аналогично Γ-функции.

Связь между бета-функцией и гамма-функцией дается следующей формулой.

1.4.3. Предложение. *Справедливо равенство*

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{1.4.7}$$

Доказательство. Будем использовать представление (1.4.5) для бета-функции. При этом заметим, что при каждом фиксированном значении $y>0$ верно равенство

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}=y^{\alpha-1}\int_0^{+\infty}x^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+y)x}\,dx,$$

получаемое заменой переменной $t=(1+y)x$. Проинтегрируем это равенство по y по $[0,+\infty)$. Слева получим $\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)$. Справа получим

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\!\!\int_0^{+\infty}y^{\alpha-1}x^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+y)x}\,dx\,dy&=\\ =\int_0^{+\infty}\!\!\int_0^{+\infty}y^{\alpha-1}x^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+y)x}\,dy\,dx&=\\ =\int_0^{+\infty}\left(x^{\beta-1}e^{-x}\int_0^{+\infty}(xy)^{\alpha-1}e^{-(xy)}x\,dy\right)dx&=\\ =\int_0^{+\infty}\left(x^{\beta-1}e^{-x}\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt\right)dx&=\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta),\end{aligned}$$

где перестановки интегралов законны в силу их абсолютной сходимости. □

1.4.4. Пример. Справедливо равенство

$$\int_0^{\pi/2}(\sin x)^m(\cos x)^n\,dx=\frac{1}{2}B\Bigl(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\Bigr).$$

Обоснование состоит в замене переменной $\sin x=\sqrt{t}$.

1.4.5. Пример. Равенства

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx = \frac{1}{n}B\Big(\frac{m}{n}, 1-\frac{m}{n}\Big) = \frac{1}{n}\Gamma\Big(1-\frac{m}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{m}{n}\Big) = \\ = \frac{\pi}{n\sin(\pi m/n)}$$

при $0 < m < n$ проверяется с помощью замены $x = t^{1/n}$.

1.4.6. Пример. Обозначим через V_n объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Тогда объем шара радиуса R равен $V_n R^n$. Вычисляя V_n с помощью теоремы Фубини и замечая, что при фиксированном значении $x_n \in [-1,1]$ множество $\{(x_1,\ldots,x_{n-1})\colon\ x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2 = 1-x_n^2\}$ является $(n-1)$-мерным шаром радиуса $(1-x_n^2)^{1/2}$, получаем рекуррентное соотношение

$$V_n = V_{n-1}\int_{-1}^1 (1-x_n^2)^{(n-1)/2}\,dx_n = 2V_{n-1}\int_0^1 (1-t^2)^{(n-1)/2}\,dt = \\ = V_{n-1}\int_0^1 s^{-1/2}(1-s)^{(n-1)/2}\,ds = V_{n-1}B(1/2,(n+1)/2) = \\ = V_{n-1}\frac{\Gamma(1/2)\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(1+n/2)},$$

откуда с учетом равенства $V_2 = \pi$ находим ответ

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)},$$

который можно преобразовать с помощью формулы понижения. Надо отдельно рассмотреть случаи четного и нечетного n, что дает на первый взгляд более «явное» выражение

$$V_{2m} = \frac{\pi^m}{m!}, \quad V_{2m+1} = \frac{2(2\pi)^m}{(2m+1)!!}, \quad (2m+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m+1)$$

хотя во многих приложениях формула с гамма-функцией оказывается полезней.

§ 1.5. Преобразование Фурье интегрируемых функций

Для интегрируемой по Лебегу вещественной или комплексной функции f на $\mathbb{R}^d$ преобразование Фурье (Fourier) задается формулой

$$\widehat{f}(y) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} \exp[-i(y,x)]f(x)\,dx,$$

где (x, y) — скалярное произведение. В одномерном случае

$$\widehat{f}(y) = (2\pi)^{-d/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ixy) f(x)\, dx.$$

Выбор знака минус в экспоненте — дань традиции, а выбор множителя перед интегралом объясняется желанием получить унитарный оператор в L^2 (см. ниже). Так как $|\exp(i\varphi)| = 1$ для вещественных φ, указанный интеграл (называемый интегралом Фурье) существует в смысле Лебега. При этом

$$|\widehat{f}(y)| \leqslant (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, dx. \tag{1.5.1}$$

Кроме того, из следствия теоремы Лебега о непрерывности интеграла по параметру вытекает непрерывность функции $\widehat{f}$. Несколько менее очевидно соотношение

$$\lim_{|y|\to\infty} |\widehat{f}(y)| = 0.$$

Оно проверяется так. Сначала явно вычисляем преобразование Фурье индикатора параллелепипеда $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$. Это делается с помощью теоремы Фубини и одномерного случая, в котором имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-ixy}\, dx = (-iy)^{-1}(e^{-iyb} - e^{-iya}), \tag{1.5.2}$$

что стремится к нулю при $|x| \to \infty$. Значит, так же обстоит дело для конечных линейных комбинаций индикаторов параллелепипедов. Теперь остается вспомнить, что для всякой интегрируемой функции f найдется последовательность $\{f_n\}$ линейных комбинаций индикаторов параллелепипедов, сходящаяся к ней по норме L^1, т. е.

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f - f_n|\, dx \to 0,$$

а тогда утверждение вытекает из оценки (1.5.1).

Важно отметить, что, хотя функция $\widehat{f}(y)$ имеет нулевой предел на бесконечности, она может оказаться неинтегрируемой. Так происходит уже с индикатором отрезка, как мы видели. Поэтому неверно, что преобразование Фурье отображение L^1 в это же пространство. С другой стороны, не всякая непрерывная функция, стремящаяся к нулю на бесконечности, является преобразованием Фурье интегрируемой функции. Никакого конструктивного описания множества преобразований Фурье интегрируемых функций неизвестно.

В приложениях бывает важно восстановить функцию по ее преобразованию Фурье. Этот вопрос оказывается довольно тонким, и мы сейчас обсудим основные результаты.

Предварительно отметим следующие свойства преобразования Фурье, связывающие дифференцирование и умножение на аргумент.

1.5.1. Предложение. (i) *Пусть интегрируемая функция f на прямой имеет интегрируемую производную f'. Тогда*

$$\widehat{f'}(y) = iy\widehat{f}(y).$$

Аналогично в многомерном случае: *если интегрируемая функция f имеет интегрируемую частную производную $\partial_{x_k} f$, то*

$$\widehat{\partial_{x_k} f}(y) = iy_k\widehat{f}(y).$$

(ii) *Пусть интегрируемая функция f на прямой такова, что функция $xf(x)$ также интегрируема. Тогда $\widehat{f}$ дифференцируема и*

$$\widehat{f}'(y) = \widehat{-ixf}(y).$$

Аналогично в многомерном случае: *если интегрируемая функция f такова, что $x_k f(x)$ тоже интегрируема, то*

$$\partial_{y_k}\widehat{f}(y) = \widehat{-ix_k f}(y).$$

Доказательство. По формуле интегрирования по частям (можно показать, что она применима при наших условиях)

$$\int e^{-ixy} f'(x)\,dx = iy\int e^{-ixy} f(x)\,dx,$$

в многомерном случае аналогично. Утверждение (ii) следует из теоремы о дифференцировании интеграла по параметру, так как имеет место равенство $\partial_{y_k}\exp[-i(y,x)] = -ix_k\exp[-i(y,x)]$. □

Введем теперь полезный во многих вопросах класс функций $\boldsymbol{\mathcal{S}}$:

класс $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$ состоит из всех таких (вещественных или комплексных) бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^d$, что для всех частных производных $\partial_{x_1}^{k_1}\cdots\partial_{x_d}^{k_d} f$, где $k_j \geqslant 0$, при всех $m \geqslant 0$ имеем

$$\sup_x |x|^m |\partial_{x_1}^{k_1}\cdots\partial_{x_d}^{k_d} f(x)| < \infty.$$

Иначе говоря, сама функция и все ее производные убывают на бесконечности быстрее всех обратных степеней. Тем самым $|x|^m f(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$ для всех m и так же для всех производных.

Конечно, можно сначала ввести вещественные функции класса $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, а комплексные ввести как комбинации $f + ig$, где f и g из вещественного $\boldsymbol{\mathcal{S}}$.

Замечательное свойство класса $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ состоит в том, что он отображается на себя преобразованием Фурье (в отличие от L^1). Пока получаем такой факт.

1.5.2. Следствие. *Если* $f \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$, *то* $\widehat{f} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$.

Доказательство. Для упрощения формул рассмотрим одномерный случай. Из предыдущего предложения получаем

$$\widehat{f}^{(k)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)(-ix)^k e^{-ixy}\, dx = \widehat{-ix^k f}(y).$$

Далее,

$$(iy)^m \widehat{f}^{(k)}(y) = (\widehat{-ix^k f)^{(m)}}(y),$$

где функция $(-ix^k f(x))^{(m)}$ интегрируема, поэтому ее преобразование Фурье ограничено. □

Ниже показано, что на $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ преобразование Фурье взаимно однозначно.

Введем теперь обратное преобразование Фурье интегрируемой функции:

$$\check{f}(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(y,x)} f(y)\, dy.$$

Как видно, оно отличается от прямого преобразования лишь заменой аргумента на противоположный, поэтому совершенно не кажется очевидным, что это обратное отображение. Да и в каком смысле обратное, если функция $\widehat{f}$ не всегда интегрируема?

Рассмотрим поучительный пример, в котором можно явно найти преобразование Фурье (таких случаев не так уж много).

1.5.3. Пример. Пусть $\alpha > 0$. Тогда

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp[-i(y,x)] \exp[-\alpha|x|^2]\, dx = \frac{1}{(2\alpha)^{d/2}} \exp\Bigl[-\frac{1}{4\alpha}|y|^2\Bigr].$$

Доказательство. По теореме Фубини вычисление легко сводится к одномерному случаю. Заменой переменных далее сводим к случаю $\alpha = 1/2$. В этом случае получаем интеграл

$$g(y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int \cos(xy) e^{-x^2/2}\, dx.$$

С помощью интегрирования по частям находим

$$g'(y) = -y\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int \cos(xy)e^{-x^2/2}\,dx = -yg(y).$$

Кроме того, вспоминаем, что $g(0) = 1$. Поэтому $g(y) = e^{-y^2/2}$. □

Для найденной функции обратное преобразование Фурье есть исходная функция. Из этого выводится общий факт.

1.5.4. Теорема. (Формула обращения) *Если ограниченная интегрируемая функция f на $\mathbb{R}^d$ такова, что ее преобразование Фурье $\widehat{f}$ интегрируемо, то для всякой точки x, в которой f непрерывна, верно равенство*

$$f(x) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(y,x)}\widehat{f}(y)\,dy. \qquad (1.5.3)$$

В частности, это верно, если $f \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$.

Доказательство. Для упрощения формул мы рассмотрим случай $d = 1$. Тогда с помощью теоремы Фубини и примера 1.5.3 (а также замены переменных $z = x + 2\varepsilon u$) получаем

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\widehat{f}(y)\,dy &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}e^{-\varepsilon^2 y^2}\widehat{f}(y)\,dy = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ixy}e^{-\varepsilon^2y^2}e^{-iyz}f(z)\,dz\,dy = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{iy(x-z)}e^{-\varepsilon^2y^2}f(z)\,dy\,dz = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2}}\,f(z)e^{-(x-z)^2/(4\varepsilon^2)}\,dz = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{2}\,f(x+2\varepsilon u)e^{-u^2}\,du = \sqrt{2\pi}\,f(x).
\end{aligned}$$

Последнее равенство следует из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости ввиду ограниченности f и непрерывности в точке x. □

Ниже эту теорему мы усилим и проверим, что если для интегрируемой функции f известна интегрируемость $\widehat{f}$, то сама f почти всюду совпадает с ограниченной непрерывной функцией, а тогда для последней формула обращения выполнена во всех точках.

Следующие равенства относятся к числу важнейших в теории интегралов Фурье. Как и выше, все пространства — комплексные.

1.5.5. Теорема. *Для всех интегрируемых на* $\mathbb{R}^d$ *функций* φ, ψ *верны равенства*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}\psi \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\widehat{\psi} \, dx, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}\overline{\psi} \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\overline{\check{\psi}} \, dx. \tag{1.5.4}$$

Если же $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, *то справедливо* ***равенство Парсеваля***

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\overline{\psi(x)} \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}(y)\overline{\widehat{\psi}(y)} \, dy. \tag{1.5.5}$$

Доказательство. Применив теорему Фубини к равенству

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}(x)\psi(x) \, dx = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x,y)} \varphi(y)\psi(x) \, dy \, dx,$$

получим первую формулу в (1.5.4), а вторая следует из нее ввиду тождества $\overline{\check{\psi}} = \widehat{\overline{\psi}}$. Чтобы проверить (1.5.5), вспомним, что $f := \widehat{\psi}$ входит в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, и применим формулу обращения $\psi = \check{f}$. □

Взяв комплексное сопряжение во втором равенстве в (1.5.4), получим еще одну формулу:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \check{\psi}\overline{\varphi} \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \psi\overline{\widehat{\varphi}} \, dx.$$

Имеет место следующий ВАЖНЫЙ (и простой) ФАКТ теории интеграла:

две интегрируемые функции f и g равны почти всюду в точности тогда, когда

$$\int f(x)\varphi(x) \, dx = \int g(x)\varphi(x) \, dx$$

для всякой гладкой функции φ, равной нулю вне шара.

1.5.6. Следствие. *Если функция* f *интегрируема и* $\widehat{f} = 0$, *то* $f(x) = 0$ *почти всюду.*

Доказательство. Из равенства Парсеваля следует, что интеграл от $f\varphi$ равен нулю для всех гладких вещественных функций φ с ограниченным носителем, откуда по указанному свойству интеграла вытекает доказываемое. □

Близкое рассуждение позволяет усилить теорему 1.5.4.

1.5.7. Следствие. *Если функция f интегрируема и функция $\widehat{f}$ тоже интегрируема, то f почти всюду совпадает с ограниченной непрерывной функцией f_0, равной обратному преобразованию Фурье от $\widehat{f}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция g ограничена и непрерывна. Как и в предыдущем следствии, достаточно доказать, что $f\varphi$ и $f_0\varphi$ имеют равные интегралы для всех гладких вещественных функций φ с ограниченным носителем. Пусть φ — обратное преобразование Фурье φ. Тогда $\varphi = \widehat{\psi}$ и

$$\int f\varphi\, dx = \int \widehat{f}\psi\, dx.$$

С другой стороны,

$$\int f_0\varphi\, dx = \int \widehat{f}\check{\varphi} dx = \int \widehat{f}\psi\, dx,$$

что дает нужное равенство. □

1.5.8. Следствие. *Преобразование Фурье отображает $\mathcal{S}$ взаимно однозначно на $\mathcal{S}$.*

Очевидная слабость доказанной выше формулы обращения состоит в условии интегрируемости преобразования Фурье f. Скажем, такая простая функция, как индикатор интервала, для которой преобразование Фурье находится самым простым образом, не подпадает под действие этой формулы. Правда, она вместе с ее преобразованием Фурье входит в L^2 и охватывается конструкцией из следующего параграфа, однако эта конструкция менее элементарна. Ниже мы кратко обсудим преобразование Фурье обобщенных функций и увидим, что там симметрия полностью восстанавливается и формула обращения верна всегда (хотя и не задается интегральной формулой). Здесь же ограничимся формулировкой классического результата, позволяющего по преобразованию Фурье находить значения исходной функции в некоторых точках, в которых она более регулярна.

1.5.9. Теорема. *Пусть f — интегрируемая функция на прямой, причем в некоторой точке x_0 она удовлетворяет следующему условию Дини: существует такое $\delta > 0$, что*

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x_0+t) - 2f(x_0) + f(x_0-t)|}{|t|}\, dt < \infty.$$

Тогда справедлива формула обращения

$$f(x_0) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{+R} e^{ix_0 y} \widehat{f}(y)\, dy.$$

Отметим, что равенство гарантируется именно в той точке, где выполнено условие Дини, а таких точек может не быть вовсе. Если функция f дифференцируема в x_0, то условие Дини выполнено, так как при малых t есть оценка $|f(x_0+t) - f(x_0)| \leqslant C|t|$, так что указанное отношение просто ограничено в окрестности нуля. Но нельзя ли доказать, что и без условия Дини формула обращения имеет место во многих точках (скажем, почти всюду)? А. Н. Колмогоров построил пример, из которого вытекает существование такой интегрируемой функции f, что формула обращения не выполняется ни в одной точке.

§ 1.6. Преобразование Фурье в L^2 и в $\boldsymbol{\mathcal{S}}'$

Напомним, что комплексное пространство $L^2(\mathbb{R}^d)$ состоит из классов эквивалентности измеримых комплексных функций на $\mathbb{R}^d$, для которых функция $|f|^2$ интегрируема при каком-либо (а тогда и при всяком) выборе представителя класс эквивалентности. Норма и скалярное произведение вводятся через представителей класса эквивалентности по формулам

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\, dx, \quad (f,g)_2 = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

Функция, интегрируемая с квадратом, не обязана быть интегрируемой по всему пространству (как, например, $1/(1+|x|)$ или $\sin x/x$). Однако во многих приложениях полезно преобразование Фурье таких функций. Буквально его определить интегралом нельзя (из-за возможной неинтегрируемости), но в многих отношениях преобразование Фурье на L^2 оказывается лучшим оператором, чем на L^1. Исходным пунктом служит равенство Парсеваля, которое говорит, что преобразование Фурье на $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ сохраняет скалярное произведение из L^2.

Для всякой функции f из $L^2(\mathbb{R}^d)$ есть последовательность функций f_n из $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$ (даже с ограниченными носителями), сходящаяся к f в L^2. Из равенства Парсеваля следует, что

$$\|\widehat{f_n} - \widehat{f_k}\|_2 = \|f_n - f_k\|_2.$$

Значит, последовательность функций $\widehat{f_n}$ фундаментальна в L^2. В силу полноты пространства L^2 у нее есть некоторый предел в L^2, который и берется по определению в качестве $\widehat{f}$.

1.6.1. Определение. *Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ есть последовательность функций $f_n \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$, сходящейся в L^2. Тогда*

$$\widehat{f} = \lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}$$

в смысле сходимости в L^2.

Важно заметить, что предел определен однозначно: к функции f сходится в L^2 много разных последовательностей, но предел их преобразований Фурье один и тот же, ибо если $f_n \to f$ и $g_n \to f$ в L^2, то чередующаяся последовательность $f_1, g_1, f_2, g_2, \ldots$ тоже сходится к f, поэтому последовательность преобразований Фурье сходится, что дает одинаковые пределы по подпоследовательностям.

Если функция f из L^2 оказалась интегрируемой, то у нее два преобразования Фурье: одно задано интегральной формулой (как для всех интегрируемых функций), другое получено указанным выше способом как предел. К счастью, эти два преобразования Фурье совпадают.

1.6.2. Лемма. *Если $f \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$, то преобразование Фурье функции f в $L^2(\mathbb{R}^d)$ задается ее обычным преобразованием Фурье $\widehat{f}$ в $L^1(\mathbb{R}^d)$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}f$ — преобразование Фурье функции f в $L^2(\mathbb{R}^d)$ и $\widehat{f}$ — ее преобразованием Фурье в $L^1(\mathbb{R}^d)$. Покажем, что $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ п.в. Достаточно проверить, что для всякой вещественной функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ функции $(\mathcal{F}f)\varphi$ и $\widehat{f}\varphi$ имеют равные интегралы. Пусть ψ — обратное преобразование Фурье φ. Тогда $\psi \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$ и $\widehat{\psi} = \varphi$. В силу равенства Парсеваля имеем

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{\psi(x)}\,dx.$$

С другой стороны, взяв $f_j \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$ так, что $f_j \to f$ в $L^2(\mathbb{R}^d)$, получаем $(\mathcal{F}f, \varphi)_{L^2} = \lim\limits_{j\to\infty} (\mathcal{F}f_j, \varphi)_{L^2} = \lim\limits_{j\to\infty} (f_j, \psi)_{L^2} = (f, \psi)_{L^2}$, что доказывает наше утверждение. $\square$

Непосредственным следствием определения и равенства Парсеваля оказывается такой факт.

1.6.3. Теорема. *Отображение $\mathcal{F}\colon f \mapsto \widehat{f}$ переводит L^2 взаимно однозначно на L^2 и является унитарным линейным оператором, т. е. сохраняет скалярное произведение.*

Доказательство. Пусть $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. По определению есть функции f_n, g_n класса $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, сходящиеся в L^2 к f и g соответственно. Тогда $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$, $\widehat{g_n} \to \widehat{g}$ в L^2. При этом $(f_n, g_n)_2 = (\widehat{f_n}, \widehat{g_n})_2$ по равенству Парсеваля. Остается заметить, что если векторы u_n в гильбертовом пространстве сходятся к вектору u, а векторы v_n сходятся к v, то скалярные произведения (u_n, v_n) сходятся к (u, v). Это видно из соотношений

$$\begin{aligned}|(u,v)-(u_n,v_n)| &= |(u,v)-(u_n,v)+(u_n,v)-(u_n,v_n)| = \\ &= |(u-u_n,v)+(u_n,v-v_n)| \leqslant ||u-u_n||\,\|v\|+\|u_n\|\,\|v-v_n\|,\end{aligned}$$

где правая часть стремится к нулю, так сходящаяся последовательность $\{u_n\}$ ограничена. Итак, $\mathcal{F}$ сохраняет скалярное произведение. Это дает взаимную однозначность. Линейность очевидна. Чтобы увидеть, что в каждый элемент $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ перешел какой-то элемент f, можно сделать следующее. Возьмем функции $g_n \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$, схоядщиеся к g в L^2. Их обратные преобразования Фурье f_n лежат в $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ и сходятся в L^2 к некоторому f в силу сохранения нормы обратным преобразованием Фурье. Тогда $\widehat{f_n} = g_n$, значит, $\widehat{f} = g$. $\square$

Приведенное определение в настоящее время наиболее распространено, но 100 лет назад преобразование Фурье в L^2 определялось иначе путем некой имитации несобственного интеграла. Для $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ положим

$$g_R(x) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{|y|\leqslant R} \exp\bigl(-i(x,y)\bigr) f(y)\, dy.$$

Функции g_R определены и непрерывны, так как на шарах (но не на всем пространстве) функция f интегрируема.

Теперь легко доказать следующую теорему Планшереля, которую раньше использовали как способ задания преобразования Фурье в пространстве L^2.

1.6.4. Теорема. *Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Тогда функции g_R сходятся в $L^2(\mathbb{R}^d)$ при $R \to +\infty$ к определенному выше преобразованию Фурье функции f в $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Доказательство. Пусть $f_R(y) := f(y) I_{\{|y|\leqslant R\}}(y)$, т.е. на шаре радиуса R эта функция равна f, а вне равна нулю. Значит, $f_R \to f$ в $L^2(\mathbb{R}^d)$ при $R \to +\infty$. Поэтому $\mathcal{F} f_R \to \mathcal{F} f$ в $L^2(\mathbb{R}^d)$. В силу доказанной выше леммы $\mathcal{F} f_R = \widehat{f_R}$, ибо $f_R \in L^1$. $\square$

В этой теореме говорится о сходимости в L^2, но не о сходимости в точках x. Так как в итоге получается измеримая функция, которая не обязана быть непрерывной, то естественно поставить вопрос о сходимости почти всюду (предельную функцию можно переопределять на множестве меры нуль, это не изменит ее как элемент L^2, поэтому говорить надо именно о сходимости почти всюду, а не в каждой точке x). Как ни странно, этот напрашивающийся вопрос, возникший, конечно, еще 100 лет назад, остается до сих пор без ответа. Не только нет ясности, будет ли всегда иметь место сходимость $g_R(x)$ почти всюду хотя бы при натуральных R, стремящихся к бесконечности, но даже и нет общепринятой правдоподобной гипотезы, верно это или нет. Правда, для случая $d = 1$ в 1966 году (т. е. через полвека после появления вопроса) выдающийся шведский аналитик Л. Карлесон дал положительный ответ, но случай $d > 1$ остается открытым. Трудность этой задачи иллюстрируется не столько тем, что и в одномерном случае 50 лет ушло на решение проблемы, но еще более тем, что ее не смог решить молодой А. Н. Колмогоров, крупнейший математик XX века, который много сил потратил на попытки решения. В многомерном случае из результата Карлесона удалось вывести такой факт: если вместо интегрирования по шарам радиуса R в определении g_R интегрировать по кубам $[-R, R]^d$, то сходимость почти всюду будет иметь иметь. Известные же доказательства для $d = 1$ столь сложны и длинны, что даже очень немногие специализированные монографии в этой области их включают.

Так как преобразование Фурье унитарно в L^2, то обратное преобразование задается точно таким же образом по обратному преобразованию Фурье на $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, для него верен и аналог теоремы Планшереля (с заменой минуса на плюс в экспоненте). Поэтому в L^2 нет указанных выше проблем с формулой обращения: формула обращения верна всегда в смысле равенства

$$f(x) = \lim_{R+\infty} \int_{|x|\leqslant R} \exp\bigl(i(y,x)\bigr)\widehat{f}(y)\,dy,$$

которое понимается в смысле сходимости в L^2 (а не в каких-либо точках). Поэтому получается полезный практический вывод: если удалось найти предел в правой части, то при почти всех x это и есть правильный ответ (но не утверждается, что ответ верен при всех x!).

Теорема Планшереля дает практический способ вычисления преобразования Фурье и не использует приближений. Впрочем, для явного вычисления преобразования Фурье (что возможно крайне редко) можно использовать любые приближения в L^2, лишь бы удалось вычислить их преобразования Фурье и найти предел.

1.6.5. Пример. Пусть $f(x) = \sin x/x$. Эта функция непрерывна и входит в L^2, но не входит в L^1. Поэтому нельзя считать преобразование Фурье через интеграл Лебега по прямой. Однако существуют несобственные интегралы

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx}\frac{\sin x}{x}\,dx,$$

которые можно находить разными способами, по теореме Парсеваля они и дадут искомое. Вместо этого можно проявить небольшую наблюдательность и вспомнить простое вычисление (1.5.2), которое показывает, что преобразование Фурье индикатора $I_{[-1,1]}$ отрезка $[-1,1]$ равно $(2\pi)^{-1/2}(iy)^{-1}(e^{iy}-e^{-iy}) = (2/\pi)^{1/2}\sin y/y$, т. е. с точностью до множителя как раз данной функции f. Для четных функций прямое преобразование Фурье совпадает с обратным, поэтому $\widehat{f} = (2/\pi)^{-1/2}I_{[-1,1]}$.

Равенство Парсеваля позволяет определить преобразование Фурье не только функций из L^2, но пойти еще дальше и задать преобразование Фурье обобщенных функций класса $\boldsymbol{\mathcal{S}}'$.

Сначала зададим сходимость в самом пространстве $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$ так: будет считать, что функции $f \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$ сходятся к $f \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$ в $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, если для всякой частной производной и всякого порядка m разности $(1+x|^{2m})(\partial^{(\alpha)}f_n - \partial^{(\alpha)}f)$ равномерно на всем пространстве сходятся к нулю. Иначе говоря, имеет место сходимость по нормам

$$p_{\alpha,m}(f) = \sup_x (1+x|^{2m})|(\partial^{(\alpha)}f(x)|.$$

1.6.6. Определение. *Обобщенной функцией* (*или распределением*) *называется линейная функция F на $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$ с тем свойством, что $F(f_n)\to 0$, если $f_n \to 0$ в $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Через $\boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^d)$ обозначается пространство всех таких линейных функций.*

Если рассматривается комплексное пространство $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$, то $\boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^d)$ тоже считается комплексным.

Обычная функция F, интегрируемая на отрезках и оцениваемая как $|F(x)| \leqslant C_1 + C_2|x|^m$, задает обобщенную функцию по формуле

$$F(f) = \int f(x)F(x)\,dx.$$

Непрерывность этой линейной функции в смысле сходимости в $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ ясна из теоремы Лебега. Такой же формулой порождается обобщенная функция всякой функцией F из L^2.

Функция Дирака (δ-функция) задается формулой

$$\delta(f) = f(0).$$

Непрерывность здесь еще очевиднее, но в виде интеграла с какой-либо функцией F предыдущего типа эту обобщенную функцию уже нельзя задать.

Можно доказать, что общий вид элемента $F \in \boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^d)$ таков: найдется последовательность функций $F_n \in C_0^\infty$, для которой

$$F(f) = \lim_{n\to\infty} \int f(x)F_n(x)\,dx \quad \forall\, f \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d). \tag{1.6.1}$$

Обратно, если такой предел существует при всех $f \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$, то F входит в $\boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^d)$.

1.6.7. Определение. *Преобразованием Фурье обобщенной функции* $F \in \boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^d)$ *называется обобщенная функция* $\widehat{F}$, *заданная так*:

$$\widehat{F}(f) := F(\widehat{f}).$$

Определение корректно, так как мы знаем, что $\widehat{f} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$, так что F можно применить к $\widehat{f}$. Более того, можно проверить, что если $f_n \to 0$ в $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, то $\widehat{f_n} \to 0$ в $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, поэтому правая часть задает непрерывную линейную функцию на $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, т. е. именно элемент из $\boldsymbol{\mathcal{S}}'$. Определение так подобрано, что если обобщенная функция F задается обычной функцией из L^2 или L^1, то $\widehat{F}$ задается прежде определенным преобразованием Фурье для функций (это следует из равенства Парсеваля).

Вычислим преобразования Фурье обобщенных функций, которые не задаются интегрируемыми функциями.

1.6.8. Пример. (i) Преобразование Фурье дельта-функции Дирака:

$$\widehat{\delta}(f) = \delta(\widehat{f}) = \widehat{f}(0) = (2\pi)^{-1/2} \int e^{-i0x} f(x)\,dx = (2\pi)^{-1/2} \int f(x)\,dx.$$

Это означает, что $\widehat{\delta}(f)$ задается простейшей обычной функцией — постоянной $(2\pi)^{-1/2}$ — в виде интеграла. Эта простейшая обычная функция, тем не менее, неинтегрируема, поэтому ее преобразование Фурье тоже не вычисляется интегралом, но опять по определению имеем

$$\widehat{1}(f) = 1(\widehat{f}) = \int \widehat{f}(y)\,dy =$$
$$= (2\pi)^{1/2}(2\pi)^{-1/2}\int e^{i0y}\widehat{f}(y)\,dy = (2\pi)^{1/2}f(0) = (2\pi)^{1/2}\delta(f),$$

где последнее равенство — формула обращения. Итак, преобразование Фурье от 1 есть $(2\pi)^{1/2}\delta$. Впрочем, это можно было бы сразу заметить, используя четность 1.

(ii) Аналогично вводится функция Дирака в точке a: $\delta_a(f) = f(a)$. Как и выше, легко находим $\widehat{\delta_a} = (2\pi)^{-1/2}e^{-iax}$.

(iii) Функция $\sin x$ тоже не интегрируема, но задает элемент $\boldsymbol{\mathcal{S}}'$, для которого

$$\widehat{\sin x}(f) = (\sin x)(\widehat{f}) = \int \widehat{f}(x)\sin x\,dx =$$
$$= \frac{1}{2i}\int \widehat{f}(x)(e^{ix} - e^{-ix})\,dx = i^{-1}(\pi/2)^{1/2}[f(1) - f(-1)] =$$
$$= i^{-1}(\pi/2)^{1/2}[\delta_1(f) - \delta_{-1}(f)],$$

т. е. $\widehat{\sin x}$ есть линейная комбинация функций Дирака в 1 и -1.

Как и в случае L^2, из определения следует, что преобразование Фурье взаимно-однозначно отображает $\boldsymbol{\mathcal{S}}'$ на $\boldsymbol{\mathcal{S}}'$. Обратное преобразование задается аналогичной формулой

$$\check{F}(\varphi) = F(\check{\varphi}).$$

Как и в L^2, это приводит к справедливости «формулы обращения» для всех функций, но только теперь она не имеет интегрального вида. Впрочем, если обобщенные функции F класса $\boldsymbol{\mathcal{S}}'$ вводить как пределы обычных функций F_n класса $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, сходящихся в смысле (1.6.1), то $\widehat{F}$ есть предел обычных же функций $\widehat{F_n}$ в том же смысле. Разумеется, тогда и «формула обращения» выполнена просто из-за того, что она верна в $\boldsymbol{\mathcal{S}}$.

Аналогично преобразованию Фурье на обобщенные функции переносятся и некоторые другие операции для обычных функций. Например, обобщенная функция F может быть умножена на гладкую функцию G с поизводными не более чем полиномиального роста так:

$$(G \cdot F)(f) = F(G \cdot f).$$

Правая часть имеет смысл, так как $G \cdot f$ входит в $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ для всех $f \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$. При этом $G \cdot f_n \to 0$ в $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, если $f_n \to 0$ в $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, что очевидно из определения сходимости в $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Таким образом, правая часть задает непрерывный линейный функционал по f, который и берется в качестве $G \cdot F$. Обычным образом F нельзя умножать на G, так как F не является функцией на прямой. Однако если F задается обычной функцией F посредством интеграла, то функционал $G \cdot F$ тоже задается обычным произведением $G(x)F(x)$ через интеграл.

1.6.9. Пример. Верно равенство

$$x \cdot \delta = 0,$$

ибо $x \cdot \delta(f) = \delta(xf) = (xf)(0) = 0$.

1.6.10. Определение. *Производная F' обобщенной функции F из $\boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R})$ задается формулой*

$$F'(f) = -F(f').$$

Частная производная $\partial_{x_i} F$ обобщенной функции $F \in \boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^d)$ задается формулой

$$\partial_{x_i} F(f) = -F(\partial_{x_i} f).$$

Здесь та же идея: правая часть есть непрерывный функционал по f (так специально устроено определение сходимости в $\boldsymbol{\mathcal{S}}$), левая часть есть просто символ, определяемый осмысленной правой частью. Однако это определение согласовано с обычным: если функционал F задан в виде

$$F(f) = \int f(x)F(x)\,dx$$

обычной гладкой функцией $F(x)$ не более чем полиномиального роста (с производными), то функционал F' имет вид

$$F'(f) = -F(f') = -\int f'(x)F(x)\,dx = \int f(x)F'(x)\,dx,$$

т. е. задается интегралом с обычной производной F (внеинтегрального члена нет, ибо $f(x)F(x)$ стремится к нулю на бесконечности из-за условия на F и определения $\boldsymbol{\mathcal{S}}$).

1.6.11. Пример. Функция Хевисайда ξ равна 1 при $x \geqslant 0$ и 0 при $x < 0$. Ее обычная производная равна нулю вне нуля, т. е. всюду, где существует, но в смысле обобщенных функций

$$\xi' = \delta,$$

ибо

$$\xi'(f) = -\xi(f') = -\int_0^\infty f'(x)\,dx = f(0).$$

Для обычных функций мы видели, что преобразование Фурье f' есть $ix\widehat{f}(x)$. Это свойство переносится и на обобщенные функции:

$$\widehat{F'} = ix\widehat{F},$$

где справа стоит результат умножения обобщенной функции $\widehat{F}$ на гладкую функцию ix. Аналогично на $\mathbb{R}^d$

$$\widehat{\partial_{x_j} F} = ix_j\widehat{F}.$$

В самом деле, для всех $f \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$ имеем по определениям указанных операций:

$$\widehat{F'}(f) = F'(\widehat{f}) = -F(\widehat{f}\,') = -F(\widehat{-ixf}) = -\widehat{F}(-ixf) = (ix\widehat{F})(f).$$

Для старших производных получаем

$$\widehat{F^{(k)}} = (ix)^k\widehat{F},$$

$$\partial_{x_{j_1}}\widehat{\cdots\partial_{x_{j_k}}} F = (ix_{j_1})\cdots(ix_{j_k})\widehat{F}.$$

На этом равенстве основан метод решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом Фурье: если дано уравнение

$$c_n F^{(n)} + c_{n-1}F^{(n-1)} + \cdots + c_1 F' + c_0 F = G$$

с постоянными коэффициентами c_j и правой частью из $\boldsymbol{\mathcal{S}}'$, решаемое также в $\boldsymbol{\mathcal{S}}'$, то после взятия преобразования Фурье находим

$$c_n(ix)^n\widehat{F} + \cdots + c_0\widehat{F} = \widehat{G},$$

иначе говоря,

$$\mathcal{P}(x)\widehat{F} = \widehat{G},$$

где $\mathcal{P}(x)$ — многочлен, полученный заменой дифференцирований умножениями на ix (в многомерном случае каждое дифференцирование ∂_{x_j} заменяется умножением на ix_j). В итоге для нахождения F надо найти $\widehat{G}$, поделить на $\mathcal{P}$ и взять обратное преобразование Фурье. Например, если

$$\Delta = \partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_d}^2$$

есть оператор Лапласа, то уравнение

$$\Delta F - \lambda F = G$$

сводится к уравнению $(-|x|^2-\lambda)\widehat{F}=\widehat{G}$. Скажем, для $\lambda=1$ при $d=1$ из этого равенства F можно выразить как свертку G с функцией вида $ce^{-|x|}$.

Фундаментальную роль в этой области играет установленный выдающимся аналитиком Л. Хёрмандером факт, что для всякого многочлена $\mathcal{P}$ на $\mathbb{R}^d$, не равного тождественно нулю, для всякой правой части Ψ из $\mathcal{S}'$ уравнение $\mathcal{P}\cdot\Phi=\Psi$ имеет решения в $\mathcal{S}'$. Значит, в $\mathcal{S}'$ разрешимы все линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, среди которых не все нулевые. Эти объясняется выбор пространства $\mathcal{S}'$ обобщенных функций: в классах обычных функций такой разрешимости нет. Например, банальное уравнение $x\cdot F=1$ не имеет гладких решений. В $\mathcal{S}'$ ему удовлетворяет обобщенная функция $\mathrm{V.P.}\frac{1}{x}$, которая из функции $1/x$ с неинтегрируемой особенностью в нуле строится с помощью так называемой регуляризации:

$$\mathrm{V.P.}\frac{1}{x}(f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,dx.$$

Можно проверить существование предела для всех $f\in\mathcal{S}$. Например, можно показать, что

$$\mathrm{V.P.}\frac{1}{x}(f)=\int_{|x|>1}\frac{f(x)}{x}\,dx+\int_{|x|\leqslant 1}\frac{f(x)-f(0)}{x}\,dx,$$

где второй интеграл существует, ибо функция $|f(x)-f(0)|/x$ ограничена на $[-1,1]$ по теореме о среднем. При этом $x\mathrm{V.P.}\frac{1}{x}(f)=\mathrm{V.P.}\frac{1}{x}(xf)$ есть интеграл от f по прямой. Это и означает, что $x\mathrm{V.P.}\frac{1}{x}=1$ в смысле обобщенных функций.

Уравнение

$$xF'=0$$

среди гладких функций имеет лишь постоянные решения, но среди обобщенных его решением является также функция Хевисайда ξ, для которой $F'=\delta$. Такого рода решения с особенностями, не допускаемые классической теорией, нередко представляют основной интерес в прикладных задачах, в частности при исследовании взрывных и ударных явлений.

Еще один полезный объект, связанный с обобщенными производными, — пространства Соболева.

Пусть f — функция на области Ω в $\mathbb{R}^d$, интегрируемая на шарах в этой области (такая функция называется локально интегрируемой). Говорят, что f имеет соболевскую производную g_i по переменной x_i, если g_i — такая локально интегрируемая в Ω функция, что

$$\int_\Omega f\partial_{x_i}\varphi\,dx = -\int_\Omega g_i\varphi\,dx$$

для всякой гладкой функции φ, равной нулю вне компакта в Ω. Тогда полагаем $\partial_{x_i}f := g_i$.

Это определение аналогично определению обобщенных функций, важное отличие в том, что обобщенная производная здесь должна задаваться функцией, а не просто быть функционалом. Например, здесь не годится дельта-функция в качестве производной.

Через $W^{1,1}(\Omega)$ обозначается класс интегрируемых в Ω функций, для которых имеются соболевские производные по всем переменным, также интегрируемые на всей области.

По индукции можно ввести соболевские производные второго порядка $\partial_{x_i}\partial_{x_j}f$, а также всякого конечного порядка k. Через $W^{2,k}(\Omega)$ обозначается класс квадратично интегрируемых в Ω функций, для которых имеются соболевские производные до порядка k, также квадратчино интегрируемые на всей области.

Справедливо следующее описание.

1.6.12. Теорема. *Класс Соболева $W^{2,2}(\mathbb{R}^d)$ состоит из таких функций $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, что функция $|x|^2\widehat{f}(x)$ входит в $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Классы Соболева полезны при решении уравнений с частными производными. Например, уравнение

$$\Delta f - f = g$$

однозначно разрешимо в классе Соболева $W^{2,2}(\mathbb{R}^d)$ при любой правой части $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. С помощью преобразования Фурье это уравнение приводится к виду

$$-(|x|^2 + 1)\widehat{f}(x) = \widehat{g}(x),$$

т. е. f есть обратное преобразование Фурье функции $-\widehat{g}(x)/(|x|^2 + 1)$, которая очевидным образом входит в $L^2(\mathbb{R}^d)$, ибо туда входит $\widehat{g}$.

§ 1.7. Задачи

1.7.1. Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-\alpha x}\,dx, \quad \alpha \in [0, \infty)$$

и выяснить, непрерывен ли он по α.

1.7.2. Доказать, что интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\,dx$$

сходится равномерно на каждом отрезке в $(0,+\infty)$, но равномерной сходимости нет на $[0,1]$.

1.7.3. Исследовать интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^\alpha}\,dx, \quad \alpha\in(2,+\infty)$$

на равномерную сходимость и выяснить, непрерывен ли он по α.

1.7.4. Исследовать равномерную сходимость интеграла

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(x^2)}{1+x^p}\,dx,\ p\geqslant 0,$ (b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^t}\sin\frac{1}{x}\,dx,\ t\in(0,2).$

1.7.5. Вычислить интеграл

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2-a^2/x^2}\,dx,$ (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-\cos(\beta x)}{x^2}\,dx,\ \alpha\geqslant 0.$

1.7.6. Пусть F — непрерывная функция на $\mathbb{R}^2$, f и g — непрерывные функции на $[0,1]$. Доказать непрерывность по $\alpha\in[0,1]$ интеграла

$$\int_{g(\alpha)}^{f(\alpha)} F(x,\alpha)\,dx$$

1.7.7. Пусть f — непрерывно дифференцируемая функция на плоскости. Найти производную функции

$$F(\alpha)=\int_0^{\alpha} f(x+\alpha,x-\alpha)\,dx, \quad \alpha\in(0,1).$$

1.7.8. Найдите производную по параметру

(a) $\displaystyle\int_y^{y^2} e^{-x^2}\,dx,$ (b) $\displaystyle\int_{a+y}^{b+y} \frac{\sin xy}{x}\,dx,$ (c) $\displaystyle\int_{\sin y}^{\cos y} \cos(\sqrt{x}y)\,dx.$

1.7.9. Применяя метод дифференцирования по параметру, вычислить интеграл

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(a^2-\sin^2 x)\,dx,\ a\geqslant 1,$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx,$

1.7.10. Применяя теорему Фубини, вычислить интеграл

(a) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx,$ (b) $\displaystyle\int_0^{1} \sin\Bigl(\ln\frac{1}{x}\Bigr)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx.$

1.7.11. (Формулы Фруллани). Пусть f непрерывна на $(0,+\infty)$. (i) Пусть функция $f(x)/x$ интегрируема на $[\delta,+\infty)$ для всякого $\delta>0$ и существует предел $f(0+)=\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$. Докажите равенство

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0+)\ln\frac{b}{a}.$$

(ii) Пусть функция $f(x)/x$ интегрируема около нуля и существует предел $f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Докажите равенство

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = -f(+\infty)\ln\frac{b}{a}.$$

1.7.12. Вычислите интегралы
(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax-\operatorname{arctg} bx}{x}\,dx$,
(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{b\sin ax-a\sin bx}{x^2}\,dx$.

1.7.13. Дифференцируя по параметру, вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\beta x}\,dx.$$

Вычислить $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$, обосновав предельный переход при $\beta\to 0$.

1.7.14. Вычислите интегралы
(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^5(ax)}{x^5}\,dx$, (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x\sin ax}{x}\,dx$.

1.7.15. Определить область существования и выразить через гамма и бета функции следующие интегралы:

$$(a)\ \int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx, \quad (b)\ \int_0^{\pi/2} \sin^m x\cos^n x\,dx,\ (c)\ \int_0^{\infty} \frac{x^p\ln x}{1+x}\,dx,$$

$$(d)\ \int_a^{a+1} \ln\Gamma(x)\,dx.$$

1.7.16. Вычислить интегралы

$$\text{(i)}\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}\,dx, \quad \text{(ii)}\ \int_0^{+\infty} \Big(\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\Big)^2\,dx, \quad a,b>0.$$

Указание: использовать теорему Фруллани, а в (ii) также дифференцирование по α.

1.7.17. Выразить через гамма-функцию

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{3-\cos\theta}}\,.$$

1.7.18. Доказать, что гамма-функция логарифмически выпукла на множестве $(0,+\infty)$, т. е. выпукла функция $\ln\Gamma$, более того, $(\ln\Gamma)''>0$.

Указание: записав $(\ln\Gamma)''$ как $\Gamma^{-2}(\Gamma''\Gamma-(\Gamma')^2)$, оценить

$$(\Gamma'(\alpha))^2=\left(\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\ln x\,dx\right)^2$$

через $\Gamma(\alpha)\Gamma''(\alpha)$ с помощью неравенства Коши – Буняковского, представив функцию $e^{-x}x^{\alpha-1}\ln x$ в виде произведения двух подходящих функций.

1.7.19. Найти преобразование Фурье функций: (a) $f(x)=x$ при $x\in[a,b]$ и $f(x)=0$ вне $[a,b]$, (b) $f(x)=x^2e^{-|x|}$, (c) $f(x)=x/(1+x^2)$, (d) $f(x)=\sin x/(1+x^2)$.

1.7.20. Найти преобразование Фурье обобщенных функций:
(a) $\sin x$, (b) $(\sin x)^2$, (c) $\sin(x^2)$, (d) $|x|$, (e) $x\sin x$.

1.7.21. Доказать, что существует следующая обобщенная функция и найти ее преобразование Фурье:

$$(a)\,V.P.\frac{1}{x}:=\lim_{\varepsilon\to0+}\frac{1}{x}I_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]};$$

$$(b)\,\frac{1}{x+i0}:=\lim_{\varepsilon\to0+}\frac{1}{x+i\varepsilon}.$$

Выяснить, равны ли эти обобщенные функции.

1.7.22. Выяснить, при каких p функция $f(x)=|x|^p$ на единичном шаре в $\mathbb{R}^n$ входит в пространство Соболева $W^{1,1}$.

Список вопросов (коллоквиум — первые 10)

1. Равномерная сходимость функций и $\sup$-норма. Непрерывность равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.

2. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Непрерывность и дифференцируемость несобственных интегралов по параметру.

3. Бета и гамма функции Эйлера и связь между ними. Формулы понижения. Формула Стирлинга.

4. Преобразование Фурье интегрируемых функций и его основные свойства. Формула обращения. Класс $\mathcal{S}$ и его сохранение преобразованием Фурье.

5. Равенство Парсеваля. Преобразование Фурье в L^2. Обобщенные функции класса $\mathcal{S}'$ и их преобразование Фурье.

6. Обобщенные производные Соболева и классы Соболева. Решение уравнений с дифференциальными операторами в классах Соболева и в обобщенных функциях.

7. Ортонормированные системы и базисы. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля.

8. Ортогонализация. Существование ортонормированного базиса в гильбертовом пространстве.

9. Тригонометрическая система и многочлены Чебышёва – Эрмита. Равномерное приближение тригонометрическими многочленами.

10. Степенной ряд и его круг сходимости. Дифференцирование степенных рядов.

11. Поверхностные меры и интегралы (определение меры Хаусдорфа и явная формула в случае поверхности, заданной параметрически).

12. Связь поверхностных и объемных интегралов: формула Гаусса – Остроградского (формулировка).

13. Дифференциальные формы. Интегрирование дифференциальных форм (явные формулы в случае кривых и поверхностей, заданных параметрически).

14. Формулы Стокса и Грина (формулировки в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$).

Литература

[1] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. Курс метрической геометрии. ИКИ, Москва – Ижевск, 2004; 496 с.

[2] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 13-е изд., испр. Изд-во Моск. ун-та ЧеРо, М., 1997; 624 с.

[3] Зорич В.А. Математический анализ: В 2 т. Наука, М., 1981, 1984; 544 с., 640 с.

[4] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1 – 3. Дрофа, М., 2003, 2004, 2006; 704 с., 720 с., 351 с.

[5] Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Математический анализ: кратные и криволинейные интеграла. Справочное пособие по высшей математике (АнтиДемидович). Т. 3. Едиториал УРСС, М., 2001; 224 с.

[6] Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. 1, 2. 3-е изд. Наука, М., 1983; 468 с., 451 с.

[7] Никольский С.М. Курс математического анализа. 6-е изд., ФИЗМАТЛИТ, М., 2001; 592 с.

[8] Решетняк Ю.Г. Курс математического анализа. Ч. II. Кн. 2. Ин-т математики, Новосибирск, 2001; 444 с.

[9] Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. 3-е изд. Физматлит, М., 2001; 672 с.

[10] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1, 2, 3. 7-е изд. Наука, М., 1970.

[11] Эванс Л.К., Гариепи Р.Ф. Теория меры и тонкие свойства функций. Науч. книга, Новосибирск, 2002; 206 с.