Экзамен

16 июня 2019 г.

Оглавление

Глава 1

Определения

1.1 Произведение мер

$< X, \mathbb{A}, \mu >$, $< Y, \mathbb{B}, \nu >$ - пространства с мерой.
μ, ν - σ-конечные меры.
$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{A \times B \subset X \times Y : A \in \mathbb{A}, B \in \mathbb{B}\}$
$m_0 : \mathbb{A} \times \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{R}}$
$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$
m - называется произведением мер μ и ν, если m - мера, которая является Лебеговским продолжением m_0 с полукольца $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ на некоторую σ-алгебру $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$.
$m = \mu \times \nu$ - обозначение.
$< X \times Y, \mathbb{A} \otimes \mathbb{B}, \mu \times \nu >$ - произведение пространств с мерой.

1.2 Сферические координаты в R^3 и в R^m, их Якобианы

$x_1 = r \cdot \cos\phi_1$ $\qquad$ $1 \le i \le m-2 : \phi_i \in [0, \pi]$
$x_2 = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \cos\phi_2$ $\qquad$ $i = m-1 : \phi_i \in [0, 2\pi]$
$x_3 = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \cdot \cos\phi_3$ $\qquad$ $r \ge 0$
$\vdots$
$x_{m-2} = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \cdots \sin\phi_{m-3} \cdot \cos\phi_{m-2}$
$x_{m-1} = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \cdots \sin\phi_{m-2} \cdot \cos\phi_{m-1}$
$x_m = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \cdots \sin\phi_{m-2} \cdot \sin\phi_{m-1}$

$\mathcal{J} = r^{m-1} \cdot (\sin\phi_1)^{m-2} \cdot (\sin\phi_2)^{m-3} \cdots (\sin\phi_{m-2})^1 \cdot (\sin\phi_{m-1})^0$

Что тут происходит идейно. Сначала мы проецируем наш m-мерный вектор на нормаль к $(m-1)$-мерной гиперплоскости. Потом рассматриваем проекцию на эту гиперплоскость и в ней рекурсивно повторяем процедуру, пока не дойдём до нашего любимого $\mathbb{R}^2$. Уже в нём рассматривем обычные полярные координаты (отсюда и другие ограничения на размер угла).

1.3 Образ меры при отображении

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ — пространство с мерой, $< Y, \mathbb{B}, \_ >$ — пространство с σ-алгеброй.
$\Phi : X \to Y$, $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$ (прообраз любого множества из $\mathbb{B}$ лежит в $\mathbb{A}$).
Пусть для $\forall E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) = \mu(\Phi^{-1}(E))$.
ν является мерой на Y и называется образом меры μ при отображении Φ.

1.4 Взвешенный образ меры

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ — пространство с мерой, $< Y, \mathbb{B}, \_ >$ — пространство с σ-алгеброй.
$\Phi : X \to Y$, $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$ (прообраз любого множества из $\mathbb{B}$ лежит в $\mathbb{A}$).
$\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая.
Пусть для $E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) = \int\limits_{\Phi^{-1}(E)} \omega \, d\mu$.
ν является мерой на Y и называется взвешенным образом меры μ.
При $\omega \equiv 1$ взвешенный образ меры является обычным образом меры.

1.5 Плотность одной меры по отношению к другой

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ — пространство с мерой.
$\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая.
$\nu(E) = \int_E \omega(x) \, d\mu$. ν — мера на X.
ω называется плотностью ν относительно μ.

1.6 Заряд, множество положительности

1.6.1 Заряд

$< X, \mathbb{A}, \_ >$ — пространство с σ-алгеброй.

$\phi : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ (конечная, не обязательно неотрицательная).

ϕ счётно аддитивна.

Тогда ϕ — заряд.

1.6.2 Множество положительности

$A \subset X$ — множество положительности, если $\forall B \subset A$, B измеримо: $\phi(B) \geq 0$.

1.7 Интегральные неравенства Гельдера и Минковского

$< X, \mathbb{A}, \mu >$; $f, g : E \subset X \to \mathbb{C}$ (E - изм.) — заданы п.в, измеримы.

1.7.1 Неравенство Гельдера

$p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Тогда:* $\int\limits_E |fg| d\mu \leq \left(\int\limits_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_E |g|^q d\mu) \right)^{\frac{1}{q}}$

1.7.2 Неравенство Минковского

$1 \leq p < +\infty$. *Тогда:* $\left(\int\limits_E |f+g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\limits_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_E |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$

1.8 Интеграл комплекснозначной функции

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ - пространство с мерой. $E \in \mathbb{A}$

$f : E \to \mathbb{C}$

f измерима (суммируема), если $Im(f)$ и $Re(f)$ измеримы (суммируема)

$\int_E f = \int_E Re(f) + i \cdot \int_E Im(f)$

1.9 Пространство $L_p(E,\mu)$, $1 \le p < +\infty$

$< X, \mathbb{A}, \mu >$, $E \in \mathbb{A}$.
$L'_p(E,\mu) = \{f : \text{п.в. } E \to \mathbb{C}, \text{ изм.}, \int\limits_E |f|^p d\mu < +\infty\}$
Это линейное пространство (по нер-ву Минковского и линейности пространства измеримых функций).

У этого пространства есть дефект — если определить норму как $||f|| = \left(\int\limits_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, то будет сразу много нулей пространства (ненулевые функции, которые п.в. равны 0, будут иметь норму 0). Поэтому перейдем к фактор-множеству функций по отношению эквивалентности:
$f \sim g$, если $f = g$ п.в.
$L_p(E,\mu) := L'_p(E,\mu)/\sim$ - лин. норм. пр-во с нормой $||f|| = \left(\int\limits_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

NB1: Его элементы — классы эквивалентности обычных функций. Будем называть их тоже функциями. Они не умеют вычислять значение в точке (т.к. можно всегда подменить значение на любое другое и получить представителя все того же класса эквивалентности), но зато их можно интегрировать!

NB2: также иногда будем обозначать $||f||_p$ за норму f в пространстве L_p.

1.10 Пространство $L_\infty(E,\mu)$

$L_\infty(E,\mu) = \{f : \text{п.в. } E \to \mathbb{C}, \operatorname*{ess\,sup}\limits_E |f| < +\infty\}$
NB1: $||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}\limits_E |f|$.

NB2: Новый вид нер-ва Гельдера : $||f \cdot g||_1 \le ||f||_p \cdot ||g||_q$ (причем можно брать $p = +\infty, q = 1$ или наоборот).

1.11 Существенный супремум

$< X, \mathbb{A}, \mu >$, $E \subset X$ — изм., f : п.в. $E \to \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда: $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{x \in E} f(x) = \inf\{A \in R : f(x) \le A \text{ при п.в. } x\}$.

В этом определении A - существенная верхняя граница.
Свойства:

1. $\operatorname*{ess\,sup}_E f \leq \sup_E f$
2. $f(x) \leq \operatorname*{ess\,sup}_E f$ при п.в. $x \in E$.
3. $\int\limits_E |fg| d\mu \leq \operatorname*{ess\,sup}_E |g| \cdot \int\limits_E |f| d\mu$.

1.12 Условие L_{loc}

$f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \overline{\mathbb{R}}$
$(\mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu)$ – простр. с мерой
$\mathbb{Y}$ – метр. простр. (или метризуемое); $a \in \mathbb{Y}$
$\forall y \ f^y(x) = f(x, y)$ – сумм. на $\mathbb{X}$
f удовлетворяет L_{loc} ($f \in (L_{loc})$) если:

- $\exists g : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ – сумм.
- $\exists U(a) \ \forall y \in \dot{U}(a)$ при п. в. $x \in \mathbb{X} \ |f(x, y)| \leq g(x)$

1.13 Несобственный интеграл Лебега в R

$$\int_a^{\to b} f d\lambda_1 = \lim_{B \to b-0} \int_a^B f d\lambda_1$$

где f - локально суммируемая (т. е. $\forall [a, B] \subset [a, b)$ f — сумм. на $[a, B]$)

1.14 Фундаментальная последовательность, полное пространство

1.14.1 Фундаментальная последовательность

$\{a_n\}$ - фунд. посл. в метрическом пр-ве (X, ρ), если $\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n, k > N : \rho(a_n, a_k) < \epsilon$

1.14.2 Полное пространство

X - полное пространство, если любая фундаментальная последовательность в нём сходится.

1.15 Плотное множество

Множество A плотно во множестве B, если $\forall b \in B\ \forall \epsilon > 0$ верно, что $U_\epsilon(b) \cap A \neq \emptyset$.

1.16 Равномерная сходимость несобственного интеграла

$I(y)$- р.с. на мн-ве Y, $\int_A^B f(x,y)dx \underset{B \to b_0}{\rightrightarrows} Y(y)$ т.е

$\Leftrightarrow \sup_{Y \in y} |\int_A^B f(x,y)dx| \underset{B \to b \to 0}{\to} 0$

1.17 Нормальное топологическое пространство

$\Re^m, F_1, F_2 \subset \Re^m-$ замкнутое подмножество и не пересек,

Тогда $\exists U(F_1), U(F_2)-$ откр. мн-ва: $F_1 \subset U(F_1), F_2 \subset U(F_2), U(F_1) \cap U(F_2) = \emptyset$

1.18 Финитная функция

$\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. $\exists$ шар $B : \varphi \equiv 0$ вне B. Тогда ϕ — финитная.

Множество непрерывных финитных функций обозначаем как $C_0(\mathbb{R}^m)$.

1.19 Гильбертово пространство

$\mathbb{H}$ — линейное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, в котором задано скалярное произведение, и полное относительно соответствуйющей нормы, называется Гильбертовым.

1.20 Ортогональный ряд

$x_k \in \mathbb{H}, \sum x_k$ называется ортогональным рядом, если $\forall k, l : k \neq l : x_k \perp x_l$.

1.21 Сходящийся ряд в Гильбертовом пространстве

$x_n \in \mathbb{H}$.
$\sum x_n$ сходится к x, если
$S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, $S_n \to x$ (то есть, $|S_n - x| \to 0$ — сходимость по норме).

1.22 Ортогональная система (семейство) векторов

$\{e_k\} \in \mathbb{H}$ - ортогональное семейство векторов, если $\forall k \neq l\ e_k \perp e_l$, $\forall k\ e_k \neq 0$.

1.23 Ортонормированная система

$\{e_k\} \in \mathbb{H}$ - ортонормированное семейство векторов, если e_k — ортогональное семейство векторов, и $\forall k\ |e_k| = 1$.

1.24 Коффициенты Фурье

$\{e_k\}$ - ортогональное семейство векторов в $\mathbb{H}, x \in \mathbb{H}$.
$c_k(x) = \dfrac{\langle x, e_k \rangle}{|e_k|^2}$ называются коэффициентами Фурье вектора x по ортогональной системе $\{e_k\}$.

1.25 Ряд Фурье в Гильбертовом пространстве

$\sum c_k(x) \cdot e_k$ называется рядом Фурье вектора x по ортогональной системе $\{e_k\}$.

1.26 Базис, полная, замкнутая ОС

$\{e_k\}$ — ортогональная система в $\mathbb{H}$.

1. $\{e_k\}$ — **базис**, если $\forall x \in \mathbb{H}\ \exists c_k$, что $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k \cdot e_k$
2. $\{e_k\}$ — **полная** О.С., если $(\forall k\ z \perp e_k) \Rightarrow z = 0$.
3. $\{e_k\}$ — **замкнутая** О.С., если $\forall x \in \mathbb{H}\ \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |c_k(x)|^2 \cdot ||e_k||^2 = ||x||^2$.

1.27 Измеримое множество на элементарной двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$

$M \subset R^3$ – простое 2-мерное многообразие, C^1 гладкости.
$\phi : \underset{\text{откр. обл.}}{O} \subset R^2 \to R^3$, $\phi \in C^1$ – гомеофорфизм, $\phi(O) = M$
$E \subset M$ – изм. по Лебегу, если $\phi^{-1}(E)$ – изм. по Лебегу в R^2

1.28 Мера Лебега на простой двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$

$S(E) := \iint\limits_{\phi^{-1}(E)} |\phi'_u \times \phi'_v| dudv$ – взвеш. образ меры Лебега отн. ϕ. Значит это мера на $\mathbb{A}_M$

1.29 Поверхностный интеграл первого рода

M – простое, гл, 2-мерное в R^3, ϕ – параметризация
f – изм. отн. S (см. выше), $f > 0$ (или f – суммируем. по S)
Тогда: $\int_M f dS$ – называет инт. первого рода функ. f по поверхности M

1.30 Кусочно-гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$

$M \subset \mathbb{R}^3$ называется кусочно-гладкой, если M представляет собой объединение:

- конечного числа простых гладких поверхностей
- конечного числа простых гладких дуг
- конечного числа точек

1.31 Тригонометрический ряд

- $$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

  (где a_i, b_i – коэффициенты ряда).

- Другая форма:
$$\sum_{k=\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$
Тогда $S_n := \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$.

1.32 Коэффициенты Фурье функции

- $$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \ dx$$
- $$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \ dx$$
- $$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \ dx$$

1.33 Класс Липшица с константой M и показателем альфа

$E \in < a, b > Lip_M \alpha(E) = \{f : \forall x, y \in E : F(x) - F(y) \leq M|x-y|^{\alpha}\}$

1.34 Сторона поверхности

Сторона (простой) гладкой двумерной поверхности — непрерывное поле единичных нормалей. Поверхность, для которой существует сторона, называется двусторонней. Если же стороны не существует, она называется односторонней.

1.35 Задание стороны поверхности с помощью касательных реперов

F_1, F_2 – два касательных векторных поля к поверхности M.
$\forall p \in M \quad F_1(p), F_2(p)$ – Л.Н.З. касательные векторы.
Тогда поле нормалей стороны определяется, как $n := F_1 \times F_2$

Репе́р - пара векторов из $F_1 \times F_2$.

1.36 Интеграл II рода

M — простая гладкая двусторонняя двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$.
n_0 — фиксированная сторона (одна из двух).
$F : M \to \mathbb{R}^3$ – векторное поле.

Тогда интегралом II рода назовем $\int\limits_M \langle F, n_0 \rangle ds$

Замечания

1. Смена стороны эквивалентна смене знака.
2. Не зависит от параметризации.
3. $F = (P, Q, R)$.

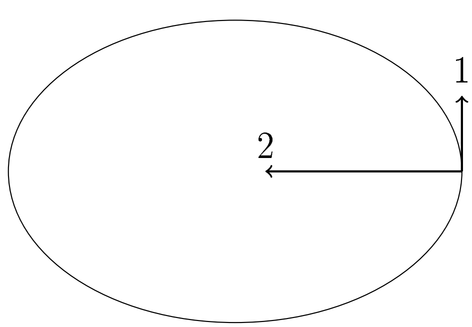
   Тогда интеграл имеет вид $\iint Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$.

   NB: $Qdxdz = -Qdzdx$.

1.37 Ориентация контура, согласованная со стороной поверхности

Ориентация контура согласована со стороной поверхности, если она задает эту сторону.

Пояснение: Рассмотрим некоторый контур (замкнутую петлю) и точку на нем. Построим два касательных вектора к контуру в этой точке: первый — снаружи от контура (задает направление «движения» по петле), второй — внутри контура. Тогда будем называть такую ориентацию согласованной со стороной, если направление векторного произведения первого и второго векторов в точке совпадает с направлением нормали к поверхности.



1.38 Ядро Дирихле, ядро Фейера

1.38.1 Ядро Дирихле

$$D_n(t) = \frac{1}{\pi}(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt)$$

1.38.2 Ядро Фейера

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(t)$$

1.39 Свертка

$f, K \in L_1[-\pi, \pi]$ – пеорид.

$$(f * K)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt$$

1.40 Аппроксимативная единица. (а. е.)

Пояснения: нужна 1-ца по свертке, но это не совсем функция, поэтому зададим её как предел последовательности.

$D \subset R, h_0$ – предельная точка D в $\overline{R}$, тогда $\{K_h\}_{h \in D}$ – а. е. если:

AE1: $\forall h \in D \;\; K_h \in L_1[-\pi, \pi] \; \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_h = 1$

AE2: $\exists M \; \forall h \; \int\limits_{-\pi}^{\pi} |K_h| \le M$

AE3: $\forall \delta \in (0, \pi) \; \int\limits_{E_\delta} |K_h| \underset{h \to h_0}{\to} 0$, где $E_\delta = [-\pi, \pi] \setminus [h_0 - \delta, h_0 + \delta]$

1.41 Усиленная аппроксимативная единица.

Изменяем свойство AE3, на AE3':

$\forall h \; K_h \in L_\infty[-\pi, \pi]; \; \forall \delta \in (0, \pi) \;\; \operatorname*{ess\,sup}_{t \in E_\delta} |K_h(t)| \underset{h \to h_0}{\to} 0$

1.42 Метод суммирования средними арифметическими

$\sum a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} \cdot \sum\limits_{k=0}^{n} S_k$

1.43 Суммы Фейера.

$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} S_k(f(x)) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\Phi_n(t)dt$

1.44 Ротор, дивергенция векторного поля

$F = (P, Q, R)$ — векторное поле в $\mathbb{R}^3$.
$rot\ F = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y)$ – ротор, вихрь
$div\ F = P'_x + Q'_y + R'_z$. Многомерный случай определяется аналогично.

1.45 Соленоидальное векторное поле

Векторное поле A — соленоидальное, если $\exists$ векторное поле $B : rot\ B = A$. Тогда B называется векторным потенциалом поля A.

1.46 Бескоординатное определение ротора и дивергенции

$rot\ F$ — это такое векторное поле, что $\forall a\ \forall n_0 (rotF(a))_{n_0} = \lim\limits_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{\partial B_r} F_l dl$
где B_r – круговой контур, n_0 – нормаль контура, F_l – проекция на касательное направление контура.
Пояснение: $\frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{\partial B_r} F_l dl = \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{B_r} \langle rot\ F, n_0\rangle dS \underset{r\approx 0}{\approx} rotF(a)$
$divF(a) = \lim\limits_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_3(B(a,r))} \iiint\limits_{B(a,r)} divF\, dx\, dy\, dz = \lim\limits_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_3(B(a,r))} \iint\limits_{\partial B(a,r)} \langle F, n_0\rangle dS$

1.47 Преобразование Фурье

$f \in L_1(R^m); y \in R^m$

$\hat{f}(y) := \int\limits_{R^m} f(x)e^{-2\pi i\langle y,x\rangle}d\lambda_m(x)$

1.48 Свертка в $L^1(\mathbb{R}^m)$

$f, g \in L_1(R^m)$

$$f * g\ (x) = \int_{R^m} f(x-t)g(t)d\lambda_m(t)$$

1.49 Интеграл Фурье, частичный интеграл Фурье

$f(x) = v.p. \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} \hat{f}(x)e^{2\pi ixy}dy$
Частичный - только от $-\pi$ до π

1.50 Обратное преобразование Фурье

$f(x) = \int\limits_{R} \widehat{f}(y)e^{2\pi i<x,y>}dy-$ Формула обращения
$I_A(f,x) = \int\limits_{-A}^{A} \widehat{f}(y)e^{2\pi i<x,y>}dy$

Глава 2

Теоремы

2.1 Теорема Леви

$(X, \mathbb{A}, \mu)$, $f_n \geqslant 0$ - изм.
$f_1(x) \leqslant ... \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant ...$ при почти всех x
$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ при почти всех x (считаем, что при остальных $x : f \equiv 0$)

Тогда: $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x) d\mu = \int\limits_X f(x) d\mu$
Доказательство:
$N.B. \int\limits_X f_n \leqslant \int\limits_X f_{n+1} \Rightarrow \exists \lim$
f - измерима как предел последовательности измеримых функций

1. $\leqslant$

   Очевидно: $f_n \leqslant f$ при п.в $x \Rightarrow \int\limits_X f_n \leqslant \int\limits_X f$. Делаем предельный переход по n.

2. $\geqslant$

   (a) Логичная редукция: хочется доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x) \geqslant \int\limits_X g$, где $0 \leqslant g \leqslant f$, g ступенчатая.

   (b) Наглая редукция: докажем, что $\forall c \in (0, 1) : \lim \int\limits_X f_n(x) \geqslant c \cdot \int\limits_X g$

      i. $E_n = \{x \mid f_n(x) \geqslant c \cdot g\}$. Очевидно $E_1 \subset ... \subset E_n \subset E_{n+1} \subset ...$

      ii. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = X$ т.к. $c < 1$

      iii. $\int\limits_X f_n \geqslant \int\limits_{E_n} f_n \geqslant \int\limits_{E_n} c \cdot g$ (по определению E_n)
      $\Rightarrow \lim \int\limits_X f_n \geqslant c \cdot \lim \int\limits_{E_n} g = c \cdot \int\limits_X g$

iv. Последний знак равно обусловлен тем, что интеграл неотрицательной и измеримой функции по множеству - мера (см. следствие 3 предыдущей теоремы), и мы используем неперрывность меры снизу

v. Устремляем c к 1.

2.2 Линейность интеграла Лебега

f, g измеримые, Тогда $\int\limits_{\mathbb{E}}(f+g) = \int\limits_{\mathbb{E}} f + \int\limits_{\mathbb{E}} g$

Доказательство:

1. Пусть f, g - ступенчатые, тогда у них имеется общее разбиение

   $f = \sum\limits_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$

   $g = \sum\limits_k (\alpha_k \cdot \chi_{E_k})$

   $\int\limits_{\mathbb{E}}(f+g) = \sum\limits_k (\lambda_k + \alpha_k) \cdot \mu E_k = \sum\limits_k \lambda_k \cdot \mu E_k + \sum\limits_k \alpha_k \cdot \mu E_k = \int\limits_{\mathbb{E}} f + \int\limits_{\mathbb{E}} g$, что и требовалось доказать

2. $f, g \geqslant 0$, измеримые

   Тогда $\exists h_n : 0 \leqslant h_n \leqslant h_{n+1} \leqslant f$, h_n ступенчатые

   $\exists \widetilde{h_n} : 0 \leqslant \widetilde{h_n} \leqslant \widetilde{h_{n+1}} \leqslant g$, $\widetilde{h_n}$ ступенчатые

   $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n = f$

   $\lim\limits_{n \to +\infty} \widetilde{h_n} = g$

   $\int\limits_{\mathbb{E}}(h_n + \widetilde{h_n}) = \int\limits_{\mathbb{E}} h_n + \int\limits_{\mathbb{E}} \widetilde{h_n}$

   $\int\limits_{\mathbb{E}}(h_n + \widetilde{h_n}) \to \int\limits_{\mathbb{E}}(f+g)$

   $\int\limits_{\mathbb{E}} h_n \to \int\limits_{\mathbb{E}} f$

   $\int\limits_{\mathbb{E}} \widetilde{h_n} \to \int\limits_{\mathbb{E}} g$

   Тогда $\int\limits_{\mathbb{E}}(f+g) = \int\limits_{\mathbb{E}} f + \int\limits_{\mathbb{E}} g$, что и требовалось доказать

3. Если f, g - любые измеримые, распишем обе через срезки и докажем для них

2.3 Теорема об интегрировании положительных рядов

$u_n(x) \geq 0$ *почти всюду* на $\mathbb{E}$, тогда $\int\limits_{\mathbb{E}} (\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)) d\mu(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu(x)$

Доказательство:

$S_N(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} u_n(x)$; $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

1. S_N - возрастает к S при почти всех x $\xRightarrow{\text{Т. Леви}} \int\limits_{\mathbb{E}} S_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} \int\limits_{\mathbb{E}} S = \int\limits_{\mathbb{E}} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$
2. С другой стороны $\int\limits_{\mathbb{E}} S_N = \int\limits_{\mathbb{E}} \sum\limits_{n=1}^{N} u_n = \sum\limits_{n=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu \xrightarrow[N \to +\infty]{} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu$
3. Найденные пределы совпадают в силу единственности предела последовательности, что и требовалось доказать.

2.4 Абсолютная непрерывность интеграла

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ - пространство с мерой

$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ - суммируема

Тогда $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall E -$ измеримое $\mu E < \delta \ |\int\limits_{E} f d\mu| < \epsilon$

Доказательство:

$X_n := X(|f| \geq n)$

$X_n \supset X_{n+1} \supset ...$

$\mu(\cap X_n) = 0$, т.к. f — суммируема и потому почти везде конечна.

1. Мера : $(A \mapsto \int\limits_{A} |f|)$ также равна 0 на $\cap X_n$. По непрерывности сверху: $\forall \epsilon > 0 \ \exists \ n_\epsilon \ \int\limits_{X_{n_\epsilon}} |f| < \epsilon/2$
2. Зафиксируем ϵ в доказываемом утверждении, возьмем $\delta := \frac{\epsilon/2}{n_\epsilon}$
3. $|\int\limits_{E} f d\mu| \leq \int\limits_{E} |f| = \int\limits_{E \cap X_{n_\epsilon}} |f| + \int\limits_{E \cap X_{n_\epsilon}^c} |f| \overset{*}{\leq} \int\limits_{X_{n_\epsilon}} |f| + n_\epsilon \cdot \mu(E \cap X_{n_\epsilon}^c) \overset{**}{<} \epsilon/2 + n_\epsilon \cdot \mu E < \epsilon/2 + n_\epsilon \cdot \frac{\epsilon/2}{n_\epsilon} < \epsilon$

* - В первом слагаемом увеличили множество, во втором посмотрели на определние X_n, взяли дополнение, воспользовались 6-м простейшим свойством интеграла
** - Воспользовались непрерывностью сверху

2.4.1 Следствие

f — суммируема
e_n— измеримые множества

Тогда если $\mu e_n \to 0$, то $\int\limits_{e_n} f \to 0$

2.5 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере.

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ – пространство с мерой,
f_n, f – измеримы,
$f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$ (сходится по мере),
$\exists g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что:

- $\forall n$, для «почти всех» $x \quad |f_n(x)| \leq g(x)$ (g называется мажорантой)
- g - суммируемая

Тогда:

- f_n, f – суммируемы
- $\int\limits_X |f_n - f| d\mu \to 0$
- $\int\limits_X f_n \to \int\limits_X f$ («уж тем более»)

Доказательство:

1. f_n – суммируема, так как существует мажоранта g:

   (a) $|f_n| \leq g$, поэтому $\int\limits_X |f_n| \leq \int\limits_X g$.

(b) g суммируема и положительна $\Rightarrow \int\limits_X g < +\infty \Rightarrow \int\limits_X |f_n| < +\infty \Rightarrow f_n$ суммируема.

2. f – суммируема по теореме Рисса ($f_{n_k} \to f$ почти везде, $|f_{n_k}| \leq g$, тогда $|f| \leq g$ почти везде)

3. «уж тем более»:

   $|\int\limits_{\mathbb{X}} f_n - \int\limits_{\mathbb{X}} f| \leq \int\limits_{\mathbb{X}} |f_n - f|$

   Допустим, что $\int\limits_X |f_n - f| d\mu \to 0$ уже доказано.

   Тогда «уж тем более» очевидно.

4. Докажем основное утверждение:

   Разберем два случая:

   (a) $\mu X < \infty$ Фиксируем $\epsilon \geq 0 \quad X_n := X(|f_n - f| \geq \epsilon)$

   $\mu X_n \to 0$ (так как $f_n \Rightarrow f$)

   $\int\limits_X |f_n - f| = \int\limits_{X_n} |f_n - f| + \int\limits_{X_n^c} |f_n - f| \leq \int\limits_{X_n} 2g + \int\limits_{X_n^c} \epsilon < \epsilon + \epsilon\mu X$ (прим. $\int\limits_{X_n} 2g \to 0$ по след. к т. об абс. сходимости)

   (b) $\mu X = \infty$

   Докажем «Антиабсолютную непрерывность» для g:

   $\forall \epsilon\ \exists A \subset X : \mu A$ — конечно, $\int\limits_{X \setminus A} g < \epsilon$

   доказательство:

   $\int\limits_X g = \sup\{\int\limits_X g_k \mid 0 \leq g_k \leq g\}$ (g_k – ступен.)

   $\exists g_n : \int\limits_X g - \int\limits_X g_n < \epsilon$

   $A := supp\ g_n$ ($supp\ f := \{x \mid f(x) \neq 0\}$)

   $A = \bigcup\limits_{k \mid \alpha_k \neq 0} E_k$ (где $g_n = \sum\limits_{\text{конечная}} \alpha_k \chi_{E_k}$)

   $\int\limits_X g_n = \sum \alpha_k \mu E_k < +\infty$ (μA - конеч.)

   $\int\limits_{X \setminus A} g = \int\limits_{X \setminus A} (g - g_n) \leq \int\limits_X (g - g_n) < \epsilon$

   Теперь докажем основное утверждение:

   $\int\limits_X |f_n - f| = \int\limits_A |f_n - f| + \int\limits_{X \setminus A} |f_n - f| \leq \int\limits_A |f_n - f| + 2\epsilon < 3\epsilon$ ($\int\limits_A |f_n - f| \to 0$ по п. (a))

2.6 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде.

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ – пространство с мерой,
f_n, f – измеримы,
$f_n \to f$ **почти везде**,
$\exists g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что:

- $\forall n$, для «почти всех» x $|f_n(x)| \leq g(x)$ (g называется мажорантой)
- g - суммируемая

Тогда:

- f_n, f — суммируемы
- $\int\limits_X |f_n - f| d\mu \to 0$
- $\int\limits_X f_n \to \int\limits_X f$ («уж тем более»)

Доказательство:

1. Суммируемость и «уж тем более» см. пред. теорему.
2. Докажем основное утверждение:

   $h_n(x) := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, \dots)$

   Заметим, что при фикс. x выпол. $0 \leq h_n \leq 2g$ почти везде

   $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n = \overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} |f_n - f| = 0$ почти везде

   $2g - h_n \uparrow,\ 2g - h_n \to 2g$ почти везде

   $\int\limits_X (2g - h_n) d\mu \to \int\limits_X 2g$ (по т. Леви)

   $\int\limits_X 2g - \int\limits_X h \to \int\limits_X 2g$, значит, $\int\limits_X h_n \to 0$

   $\int\limits_X |f_n - f| \leq \int\limits_X h_n \to 0$

2.7 Теорема Фату

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ – пространство с мерой
f_n, f – измеримы,
$f_n \geq 0$
$f_n \to f$ «почти везде»
$\exists C > 0\ \forall n\ \int\limits_X f_n d\mu \leq C$
Тогда: $\int\limits_X f \leq C$
Доказательство:
$g_n := \inf(f_n, f_{n+1}, \dots) \quad (g_n \leq g_{n+1} \leq \dots)$
$\lim g_n = \underline{\lim}(f_n) \overset{\textit{почти везде}}{=} \lim f_n = f$ ($g_n \to f$ почти везде)
$\int\limits_X g_n \leq \int\limits_{\mathbb{X}} f_n \leq C$
$\int\limits_X f = \textit{по т. Леви} = \lim \int\limits_X g_n \leq C$

2.8 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры

2.8.1 Лемма

Пусть у нас есть $< X, \mathbb{A}, \mu >$ и $< Y, \mathbb{B}, \_ >$ и $\Phi : X \to Y$
Пусть $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$
Пусть для $E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) := \mu(\Phi^{-1}(E))$
Тогда:
ν — мера на $(Y, \mathbb{B})$, $\nu(E) = \int\limits_{\Phi^{-1}(E)} 1 \cdot d\mu$

2.8.2 Следствие

Из этого следует, что если f — измеримая функция в Y (относительно ν), то $f \circ \Phi$ измерима относительно μ.

2.8.3 Теорема

Есть пространства $< X, \mathbb{A}, \mu >$ и $< Y, \mathbb{B}, \nu >$.
$\Phi : X \to Y$ $w \geq 0$ — измеримая, ν — взвешенный образ μ (w — плотность)

Тогда:
Для $\forall f \geq 0$ — измерима на Y, $f \circ \Phi$ - измерима (относительно μ)
$\int_Y f d\nu = \int_X f(\Phi(x)) * \omega(x) d\mu(x)$
Замечание: То же верно, если f суммируема.
Доказательство:

- $f \circ \Phi$ - измерима (из леммы)

- Возьмем $f = \chi_E, E \in \mathbb{B}$
  $(f \circ \Phi)(x) = \chi_{\Phi^{-1}(E)}$ — определение взвешенного образа меры
  $\nu(E) = \int\limits_{\Phi^{-1}(E)} \omega d\mu$ — доказали первый пункт

- – f — ступенчатая $\Rightarrow f = \sum \alpha_k * \chi_{E_k}$
  – $\int\limits_Y \sum \alpha_k * \chi_{E_k} d\nu = \sum \int\limits_Y \alpha_k \chi_{E_k} d\nu \overset{\text{первый случай}}{=} \sum \alpha_k \int\limits_X \chi_{E_k}(\Phi(x)) * \omega(x) dx = \int\limits_X \sum \alpha_k \chi_{E_k}(\Phi(x)) * \omega(x) d\mu(x) = \int f \circ \Phi * \omega d\mu$

- Если f - произвольная неотрицательная, то будем строить возрастающую последовательность ступенчатых, поточечно сходящихся к f. Тогда $\int_Y f_n d\nu = \int_X f_n(\Phi(x)) * \omega(x) d\mu(x)$. По теореме Леви делаем переход под знаком интеграла и всё доказываем.

2.9 Критерий плотности

Есть пространство $< X, \mathbb{A}, \mu >$
ν — еще одна мера.
$\omega \geq 0$ — измерима на X.
Тогда:
ω — плотность ν относительно $\mu \iff$ Для любого $A \in \mathbb{A} : \mu A \cdot \inf_A(\omega) \leq \nu(A) \leq \mu A \cdot \sup_A(\omega)$
Доказательство:

- $\Rightarrow$: очевидно из стандартного свойства интеграла

- $\Leftarrow$

  Докажем, что $\nu A = \int_A w \cdot d\mu$

  Пусть $w = 0$ на A. Тогда $0 \cdot \mu A \leqslant \nu A \leqslant 0 \cdot \mu A \Rightarrow \nu A = 0$

$\int_A w = \int_A 0 = 0$

Пусть $w > 0$ на A (иначе выделим ту часть, где 0, для неё верно, докажем для остального). Зафиксируем произвольное $q \in (0; 1)$

Рассмотрим множества $A_j = \{x \in A : q^j \leqslant w(x) \leqslant q^{j-1}\}$

Из двусторонней оценки следует, что $q^j \cdot \mu A_j \leqslant \nu A_j \leqslant q^{j-1} \cdot \mu A_j$

Интегрируя по μ неравенство в определении A_j, получаем
$q^j \cdot \mu A_j \leqslant \int_{A_j} w d\mu \leqslant q^{j-1} \cdot \mu A_j$

Суммируя по j, получаем

$q \cdot \int_A w d\mu \leqslant \sum\limits_j q^j \nu A_j \leqslant \nu A \leqslant \dfrac{1}{q} \sum\limits_j q^j \nu A_j \leqslant \dfrac{1}{q} \int_A w d\mu$

Отсюда $q \cdot \int_A w d\mu \leqslant \nu A \leqslant \dfrac{1}{q} \int_A w d\mu$ для любого $q \in (0; 1)$. Переходим к пределу при $q \to 1$, получаем что нужно

2.10 Единственность плотности

$f, g \in L(x)$.
Пусть $\forall A$ — измеримо: $\int\limits_A f = \int\limits_A g$.
Тогда:
$f = g$ почти везде
Следствие:
Плостность ν относительно μ определена однозначно с точностью до μ-почти везде.
Доказательство:

- Вместо двух функций давайте рассмотрим одну $h = f - g$ и $\forall \int\limits_A h = 0$. Пусть $A_+ = X(h \geq 0)$ и $A_- = X(h < 0)$
- $\int\limits_{A_+} |h| = \int\limits_{A_+} h = 0$

  $\int\limits_{A_-} |h| = -\int\limits_{A_-} h = 0$
- $X = A_+ \sqcup A_-$. Тогда $\int\limits_X |h| = \int\limits_{A_+} |h| + \int\limits_{A_-} |h| = 0 \Rightarrow h = 0$ почти везде.

  Почему? Ну потому что $\forall \epsilon > 0 : h > 0$ на X_ϵ меры 0 (иначе интеграл не 0)

  То есть $|h| > \frac{1}{k}$ на X_k меры 0. Используем непрерывность сверху ($X_1 \subset X_2 \subset \ldots$), поэтому $|h| > 0$ на X_0 меры 0, поэтому $h = 0$ пв

2.11 Лемма о множестве положительности

Пусть есть пространство $< X, \mathbb{A} >$ и ϕ — заряд.
Тогда:
$\forall A \in \mathbb{A}\ \exists B \subset A : \phi(B) \geq \phi(A)$ и B — множество положительности

Доказательство:

- Если $\phi(A) \leq 0$, возьмём $B = \emptyset$. Далее $\phi(A) > 0$.
- E — множество ϵ-положительности (МϵП), если $\forall C \subset E$, C измеримо: $\phi(C) \geq -\epsilon$
- **Утверждение:** $\forall \epsilon > 0$ A содержит МϵП C, такое что $\phi(C) \geq \phi(A)$.
  1. Если А — МϵП, то $C = A$
  2. Пусть А — не МϵП. Тогда существеут $C_1 \subset A : \phi(C_1) < -\epsilon$.
     Пусть $A_1 = A \setminus C$. $\phi(A_1) > \phi(A)$
  3. Если A_1 — МϵП, то это и есть искомое C. Иначе продолжим строить так $A_2, A_3, \ldots$ и $C_2, \ldots$.
  4. Процесс конечен, так как все C_i дизьюнктны, $\phi(C_i) < -\epsilon$, но $\phi(\bigsqcup C_i)$ конечно по определению заряда.
- Построим B: C_1 - множество 1-положительности в A. C_2 — множество $\frac{1}{2}$-положительност в C_1, и т. д. Тогда $B = \bigcap C_i$ — МϵП для любого ϵ, значит, это МП.
- $\phi(B) = \lim\limits_{i \to \infty} \phi(C_i) \geq \phi(A)$ Это какая-то пародия на непрерывность меры, только для зарядов?

2.12 Теорема Радона-Никодима

Пусть есть пространство $(X, \mathbb{A}, \mu)$.
ν — мера на $\mathbb{A}$.
Обе меры конечные и $\nu \prec \mu$ (абсолютная непрерывность меры: если $\mu E = 0$, то $\nu E = 0$).
Тогда:
$\exists! f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (с точностью до почти везде), которая является плотностью ν относительно μ и при этом f суммируема по μ.

Доказательство:

- единственность — из леммы
- строим кандидата на роль f. $P = \{p(x) | p \geq 0, \text{изм.}, \ \forall E \in \mathbb{A} : \int\limits_E p \cdot d\mu \leq \nu(E)\}$

1. $P \neq \emptyset$ и $0 \in P$
2. $p_1, p_2 \in P \Rightarrow h = max(p_1, p_2) \in P$
   $\forall E \int\limits_E hd\mu = \int\limits_{E(p_1 \geq p_2)} hd\mu + \int\limits_{E(p_1 < p_2)} hd\mu = \int\limits_{E(p_1 \geq p_2)} p_1 + \int\limits_{E(p_1 < p_2)} p_2 \leq \nu(E(p_1 \geq p_2)) + \nu(E(p_1 < p_2)) = \nu E$
   По индукции $max(p_1 ... p_n) \in P$
3. $I = \sup\limits_{p \in P} \int\limits_X pd\mu$
   $\exists$ последовательность $f_1 \leq f_2 \leq \dots \in P : \int\limits_X f_n d\mu \to I$ докажем, что она существует
4. Рассмотрим $p_1, p_2, \dots : \int\limits_X p_n \to I$ (потому что супремум), а также $f_n = max(p_1 \dots p_n) \in P$
5. $f := \lim f_n$. Тогда $\int\limits_E f d\mu \overset{\text{т. Леви}}{=} \lim \int\limits_E f_n d\mu \leq \nu E$, а следовательно $\int\limits_X f = lim \int\limits_X f_n = I \leq \nu(X)$ Почему вообще $\int\limits_X f_n d\mu \to I$?
6. Отлично, проверим, что f — плотность ν относительно μ.
   (a) Предположим, что это не так: $\exists E_0 : \nu E_0 > \int\limits_{E_0} f d\mu$
   (b) $\mu E_0 > 0$ (иначе интеграл равено нулю и мера ν равна нулю из абсолютной непрерывности)
   (c) Возьмем $a > 0 : \nu E_0 - \int\limits_{E_0} f d\mu > a \cdot \mu E_0$
   (d) Рассмотрим заряд $\phi(E) = \nu E - \int\limits_E f d\mu - a \cdot \mu E$ (это законно, потому что меры конечные)
   (e) $\phi(E_0) > 0$ (пункт **c**). Возьмем МП $B \subset E_0 : \phi(B) \geq \phi(E_0) > 0$. Тогда $\nu(B) = \phi(B) + \int\limits_B f \cdot d\mu + a \cdot \mu B \geq \phi(B) > 0$
   (f) Проверим, что $f + a \cdot \chi_B \in P$. По определению: $\int\limits_E (f + a \cdot \chi_B) d\mu = \int\limits_{E \setminus B} f \cdot d\mu + \int\limits_{E \cap B} f \cdot d\mu + a \cdot \mu(B \cap E) = \int\limits_{E \setminus B} f + \nu(E \cap B) - \phi(E \cap B) \overset{f \in P}{\leq} \nu(E \setminus B) + \nu(E \cap B) - \phi(E \cap B) = \nu E - \phi(E \cap B) \overset{\phi \geq 0}{\leq} \nu E$

(g) $\int_X f + a \cdot \chi_B = I + a \cdot \mu B > I$, что противоречит определению I.

2.13 Лемма об образах малых кубических ячеек при диффеоморфизме

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
$a \in O, \Phi \in C^1(O)$
Возьмём $c > |\det \Phi'(a)| \neq 0$
тогда $\exists \delta > 0 : \forall$ кубической ячейки $Q, Q \subset B(a, \delta), a \in Q$ выполняется
$\lambda\Phi(Q) < c \cdot \lambda Q$
Доказательство
$\Phi(Q)$ измеримо, так как образ измеримого множества при гладком отображении измерим
$L := \Phi'(a), L$ обратимо, так как $|\det L| \neq 0$.
$\Phi(x) = \Phi(a) + L(x-a) + o(x-a)$
$a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a)) = x + o(x-a)$
Можем писать о малое, так как растяжение произошло не более чем в $|\det L^{-1}|$ раз, а $|\det L| \neq 0$
Пусть $\Psi(x) := a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a))$
$\forall \epsilon > 0\ \exists B(a, \delta)$, такой, что при $x \in B(a, \delta)$ $|\Psi(x) - x| < \dfrac{\epsilon}{\sqrt{m}}|x - a|$ (так как $\Psi(x)$ это почти x, только плюс $o(x-a)$)
$a \in Q \subset B(a, \delta)$, где Q — куб со стороной h
$x \in Q$, тогда $|a - x| < \sqrt{m} \cdot h$ (так как диагональ m-мерного куба со стороной h равна $\sqrt{m} \cdot h$)
Тогда $|\Psi(x) - x| < \epsilon h$
При $x, y \in Q$, $i \in \{1...m\}$
$|\Psi(x)_i - \Psi(y)_i| \leqslant |\Psi(x)_i - x_i| + |\Psi(y)_i - y_i| + |x_i - y_i| \leqslant |\Psi(x) - x| + |\Psi(y) - y| + h < (1+2\epsilon)h$
$\Psi(Q) \subset$ кубу со стороной $(1+2\epsilon)h$
$\lambda(\Psi(Q)) < (1+2\epsilon)^m \lambda Q$
Φ выражается через Ψ через сдвиги и линейные преобразования. Тогда
$\lambda(\Phi(Q)) = |\det L| \cdot \lambda\Psi(Q) \leqslant |\det L| \cdot (1+2\epsilon)^m \cdot \lambda Q$
Возьмём ϵ так, чтобы $|\det L| \cdot (1+2\epsilon)^m$ было меньше c. Тогда при таком ϵ
$\lambda(\Phi(Q)) < c \cdot \lambda Q$

2.14 Лемма о вариациях на тему регулярности меры Лебега

$f : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — непрерывна.
$A \subset O$, A — измеримо.
$A \subset Q$(кубическая ячейка) $\subset \overline{Q} \subset O$, то есть граница A не лежит на границе O.
Тогда

$$\inf_{A \subset G \subset O, G-open\ set} (\lambda G \cdot \sup_G(f)) = \lambda A \cdot \sup_A f$$

Доказательство
Докажем, что левая часть $\geqslant$ и $\leqslant$ правой
$\geqslant$ очевидно, так как правая часть - нижняя граница для всего, встречающегося под inf
Докажем $\leqslant$

1. $\lambda A = 0$. Тогда правая часть $= 0$.

   $A \subset \overline{Q} \Rightarrow \sup_A f < +\infty$

   $\overline{Q}$ - компакт, $\alpha := dist(\overline{Q}, \partial O) > 0$

   Для множества $G : A \subset G \subset \dfrac{\alpha}{2}-$окрестности ячейки Q

   Назовём Q_1 кубическую ячейку, которая больше Q и у которой каждая сторона отстоит на $\dfrac{\alpha}{2\sqrt{m}}$ от соответствующей стороны Q.

   $A \subset G \subset Int(Q_1)$

   $\sup_G f \leqslant \sup_{\overline{Q_1}} f < +\infty$

   При этом λG может быть выбрана сколь угодно близко к $\lambda A = 0$ по регулярности меры Лебега.

2. $\lambda A > 0, \sup_A f < c$

   Возьмём c_1:

   $\sup_A f < c_1 < c$

   Выберем ϵ так чтобы

   $\epsilon \cdot c_1 < \lambda A \cdot (c - c_1) \quad$ **(*)**

   G_ϵ - такое множество, что $A \subset G_\epsilon, G_\epsilon-$открытое, $\lambda(G_\epsilon \setminus A) < \epsilon$

   $G_1 := f^{-1}((-\infty; c_1)) \cap G_\epsilon-$ открытое

$\lambda(G_1 \setminus A) < \epsilon$

$\lambda G_1 \cdot \sup_{G_1} f \leqslant (\lambda A + \epsilon) \cdot c_1 < \lambda A \cdot c$ (из (*))

(так как $G \subset f^{-1}(-\infty; c_1)$, то есть f на G_1 не больше c_1)

$\inf(\lambda G \cdot \sup_G f) < \lambda A \cdot c$

Переходя к inf по c, получаем что требовалось

2.15 Теорема об образе меры Лебега при диффеоморфизме

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - Диффеоморфизм, $\forall A \in \mathbb{M}^m, A \subset O$
$\lambda(\Phi(A)) = \int_A |\det \Phi'(x)| d\lambda(x)$
Доказательство:
Пусть $\nu A = \lambda(\Phi(A))$, проверим, что $|\det \Phi'(x)|$ - плотность ν относительно λ.
Обозначим $J(x) = |\det \Phi'(x)|$
Проверим $\forall A : \inf_{x \in A} J(x) \cdot \lambda A \leqslant \nu A \leqslant \sup_{x \in A} J(x) \cdot \lambda A$
Достаточно проверить только правую, так как левая эквивалентна $\lambda A \leqslant (\inf_{x \in A} J_\Phi(x))^{-1} \nu A$,
а $(\inf_{x \in A} J_\Phi(x))^{-1} = \sup_{x \in A} (J_\Phi(x))^{-1} = \sup_{y \in A'} J_{\Phi^{-1}}(y)$ (где $A' = \Phi(A), A = \Phi^{-1}(A')$)
Тогда $\lambda(\Phi^{-1}(A')) \leqslant \sup_{y \in A'} J_{\Phi^{-1}}(y) \cdot \lambda A'$ экваивалентно правому неравенству, но для Φ^{-1}
Докажем правую часть

1. A - кубическая ячейка, $A \subset \overline{A} \subset O$

   Пусть это неверно, тогда $\exists Q : \sup_{x \in Q} J(x) \cdot \lambda Q < \nu Q$. Возьмём $c : \sup_{x \in Q} J(x) < c$, тогда $c \cdot \lambda Q < \nu Q$. Разобьём Q на 2^m кубических ячеек, сторона каждой из которых в 2 раза меньше стороны исходной, тогда $\exists Q_1 : c \cdot \lambda Q_1 < \nu Q_1$. Аналогично делим Q_1, по индукции строим вложенную последовательсность таких ячеек. $\forall n : c \cdot \lambda Q_n < \nu Q_n (*)$

   Рассмотрим $a = \bigcap Q_n$, при этом $J(a) = |def \Phi'(a)| < c$. Тогда по лемме $\exists B(a, \delta) :$ при $Q_n \subset B(a, \delta) : \lambda \Phi(Q_n) < c \cdot \lambda Q_n$ - противоречие с (*).

2. A - открытое множество. Тогда $A = \bigsqcup A_i$. (кубические ячейки). Способ разбиения был в прошлом семе.

   Тогда $\nu A = \sum \nu A_i \leqslant \sum \sup_{A_i} J \cdot \lambda A_i \leqslant \sum \sup_A J \cdot \lambda A_i = \sup_A J \cdot \sum \lambda A_i = \sup_A J \cdot \lambda A$

3. A - произвольное измеримое.

   $\nu A \leqslant \nu G$ ($A \subset G, G$ - открытое), тогда $\nu A \leqslant \sup_G J \cdot \lambda G \Rightarrow \nu A \leqslant \inf_{A \subset G-openset}(\sup_G J \cdot \lambda G) \Rightarrow \nu A \leqslant \sup_A J \cdot \lambda A$ (из леммы)

2.16 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - диффеоморфизм
$O' = \Phi(O)$ — открытое
f задана на $O', f \geqslant 0$, измерима по Лебегу, тогда
$\int_{O'} f(y) \cdot d\lambda(y) = \int_O f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| \cdot d\lambda(x)$
Доказательство:
Изи.
$\nu(A) = \lambda\Phi(A), \nu$ имеет плотность $J\Phi$ относительно λ.
Применить теорему об интеграле по взвешенному образу меры.

2.17 Принцип Кавальери

(X, α, μ) и (Y, β, ν) — пространства с мерами, причем μ, ν — σ-конечные и полные $m = \mu \times \nu$, $C \in \alpha \otimes \beta$, тогда:

1. При п.в. x C_x измеримо (ν-измеримо), т.е. $C_x \in \beta$

2. Функция $x \to \nu C_x$ — измеримая (в широком смысле) на X

   NB: ϕ — измерима в широком смысле, если она задана при п.в. x, и $\exists f : X \to R'$ — измеримая и $\phi = f$ п.в. При этом $\int_X \phi = \int_X f$ (по опр.)

3. $mC = \int_X \nu(C_x) \cdot d\mu(x)$

Доказательство: Рассмотрим D — совокупность все множеств C, для которых утверждение теоремы верно.
$\rho = \alpha \times \beta$ — полукольцо измеримых «прямоугольников».

1. $\rho \subset D$

   $C = A \times B$. то есть $\forall x\ C_x = \begin{cases} \emptyset, x \notin A; \\ B, x \in A \end{cases}$

   $x \to \nu(C_x)$, функция $\nu(B) \cdot \chi_A(x)$ — изм.

   $\int_X \nu(C_x) d\mu = \nu B \int_X \chi_A(x) d\mu(x) = \nu B \cdot \mu A = mC$

2. $E_i \in D$, E_i дизъюнктны $\Rightarrow E := \bigsqcup E_i \in D$

   при п.в. x $(E_i)_x$ — измеримы

   при п.в. x все $(E_i)_x$ — измеримы, $E_x = \bigsqcup (E_i)_x$ — измеримо.

   $\nu E_x = \sum \nu(E_i)_x$ ($\nu(E_i)_x$ — изм. как функция от x) $\Rightarrow$ функция $x \to \nu E_x$ — измерима

   $\int_X \nu E_x d\mu(x) = \sum_i \int \nu(E_i)_x d\mu(x) = \sum_i mE_i = mE$

3. $E_i \in D$, $E_1 \supset E_2 \supset \dots; mE_i < +\infty$. Тогда $E := \bigcap E_i \in D$

   $\int_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty$ $(*)$

   функция $x \to \nu(E_i)_x$ — суммируема $\Rightarrow$ п.в. конечна.

   при всех x $(E_i)_x \downarrow E_x$, т.е. $(E_1)_x \supset (E_2)_x \supset \dots$ и $\bigcap (E_i)_x = E_x$

   при п.в. x $\nu(E_i)_X$ — конечны (для таких x).

   Тогда E_x — измерима и $\lim \nu(E_i)_x = \nu E_x$ по непр-ти меры ν сверху.

   (Th. Лебега) $|\nu(E_i)_x| \leq \nu(E_1)_x$ — сумм. $\Rightarrow$ функция $x \to \nu E_x$ — изм.

   $\int_X \nu E_x d\mu = \lim \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \lim mE_i = mE$ (нерп. сверху меры m). Этот предельный переход корректен как раз по теореме Лебега ($f_n \to f$ п.в. $g : |f_n| \leq g$ — сумм. Тогда $\int f_n \to \int f$).

   NB: мы доказали про пересечения и про объединения (пусть пересечения убывающие, а объединения — дизъюнктные, но это лечится). Поэтому $\cap_j (\cup_i A_{i,j}) \in D$, если $A_{i,j} \in \rho$ ($\rho \subset D$).

4. $mE = 0 \Rightarrow E \in D$

   $\exists H \in D, H$ имеет вид $\cap(\cup A_{i,j})$, где все $A_{i,j} \in \rho$

   (из п.5 т. о продолжении, чем бы это ни было) Найдется такое H такого вида, что $E \subset H, mH = 0$ $0 = mH = \int_X \nu H_x d\mu(x) \Rightarrow \nu H_x$ 0 ($= 0$ при п.в. x).

   $E_x \subset H_x \Rightarrow E_x$ — ν-изм. (из полноты ν) и $\nu E_x = 0$ п.в. x

   $\int_X \nu E_x d\mu = 0 = mE$

5. C — измеримо, $mC < +\infty$. Тогда $C \in D$.

   $C = H \setminus e$, где $me = 0$, H — вида $\cap(\cup A_{i,j})$. (так можно представить, потому что любое измеримое мн-во сколь угодно близко (с точностью до меры-0) прибли-

жается множеством полученым из прямоугольников)
$C_x = H_x \setminus e_x$ — изм. при п.в. x
$\nu e_x = 0$ п.в.x (проверено в п.4)
$\nu C_x = \nu H_x = \nu e_x$ — изм. п.в.x
$\int_X \nu C_x = \int_X \nu H_x - \int_X \nu e_x = \int \nu H_x = mH = mC.$

6. C — m-изм. произвольное
$X = \sqcup X_k, Y = \sqcup Y_n$ (μX_k — кон, νY_n — кон.).
$C = \sqcup_{k,n}(C \cap (X_k \times Y_n)) \in D$ (по п.2) (т.к. $C \cap (X_k \times Y_n) \in D$ по п.5)

2.18 Сферические координаты в R^m

$$x_1 = r \cdot \cos\phi_1 \qquad 1 \le i \le m-2 : \phi_i \in [0, \pi]$$
$$x_2 = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \cos\phi_2 \qquad i = m-1 : \phi_i \in [0, 2\pi]$$
$$x_3 = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \cdot \cos\phi_3 \qquad r \ge 0$$
$$\vdots$$
$$x_{m-2} = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \cdots \sin\phi_{m-3} \cdot \cos\phi_{m-2}$$
$$x_{m-1} = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \cdots \sin\phi_{m-2} \cdot \cos\phi_{m-1}$$
$$x_m = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \cdots \sin\phi_{m-2} \cdot \sin\phi_{m-1}$$

$\mathcal{J} = r^{m-1} \cdot (\sin\phi_1)^{m-2} \cdot (\sin\phi_2)^{m-3} \cdots (\sin\phi_{m-2})^1 \cdot (\sin\phi_{m-1})^0$
Что тут происходит идейно. Сначала мы проецируем наш m-мерный вектор на нормаль к $(m-1)$-мерной гиперплоскости. Потом рассматриваем проекцию на эту гиперплоскость и в ней рекурсивно повторяем процедуру, пока не дойдём до нашего любимого $\mathbb{R}^2$. Уже в нём рассматривем обычные полярные координаты (отсюда и другие ограничения на размер угла).

2.19 Совпадение определенного интеграла и интеграла Лебега

Ты проиграл

2.20 Теорема Тонелли

$<\mathbb{X}, \alpha, \mu>$, $<\mathbb{Y}, \beta, \nu>$ - пространства с мерой

μ, ν - σ-конечны, полные

$m = \mu \times \nu$

$f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \overline{R}$, $f \geq 0$, f - измерима относительно m

Тогда:

1. при *почти всех* $x \in X$ f_x - измерима на $\mathbb{Y}$,
   где $f_x : \mathbb{Y} \to \overline{R}$, $f_x(y) = f(x, y)$
   (симметричное утверждение верно для y)

2. Функция $x \mapsto \phi(x) = \int\limits_{\mathbb{Y}} f_x d\nu = \int\limits_{\mathbb{Y}} f(x, y) d\nu(y)$ - измерима* на $\mathbb{X}$
   (симметричное утверждение верно для y)

3. $\int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} f(x, y) dm = \int\limits_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu = \int\limits_{\mathbb{X}} (\int\limits_{\mathbb{Y}} f(x, y) d\nu(y)) d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{Y}} (\int\limits_{\mathbb{X}} f(x, y) d\mu(x)) d\nu(y)$

Доказательство:

Докажем в 3 пункта, постепенно ослабляя ограничения на функцию f

1. Пусть $C \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ - измеримо относительно m, $f = \chi_C$
   (a) $f_x(y) = \chi_{C_x}(y)$, где C_x - сечение по x
   C_x - измеримо при *почти всех* x, так как это одномерное сечение, таким образом f_x - измеримо, при *почти всех* x.
   (b) $\phi(x) = \int\limits_{\mathbb{Y}} f_x d\nu = \nu C_x$ - по принципу Кавальери это измеримая* функция.
   (c) $\int\limits_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu = \int\limits_{\mathbb{X}} \nu C_x d\mu \overset{\text{Кавальери}}{=} mc \overset{\text{опр.инт}}{=} \int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} \chi_C dm = \int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} f(x, y) dm$

2. Пусть f - ступенчатая, $f \geq 0$, $f = \sum\limits_{\text{кон}} a_k \chi_{C_k}$
   (a) $f_x = \sum a_k \chi_{(C_k)_x}$ - измерима при почти всех x
   (b) $\phi(x) = \sum a_k \nu(C_k)_x$ - измерима* как конечная сумма измеримых
   (c) $\int\limits_{\mathbb{X}} \phi(x) = \int\limits_{\mathbb{X}} \sum\limits_{\text{кон}} a_k \nu(C_k)_x d\mu = \sum\limits_{\text{кон}} \int\limits_{\mathbb{X}} a_k \nu(C_k)_x d\mu = \sum a_k m C_k = \int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} f dm$

3. Пусть f - измеримая, $f \geq 0$

   $f = \lim\limits_{n \to +\infty} g_n$, где $g_n \geq 0$ - ступенчатая, g_n - монотонно возрастает к f (из Теоремы об апроксимации измеримой функции ступенчатыми)

   (a) $f_x = \lim\limits_{n \to +\infty} (g_n)_x \Rightarrow f_x$ - измерима при *почти всех* x.

   (b) $\phi(x) = \int\limits_{\mathbb{Y}} f_x d\nu \overset{\text{т.Леви}}{=} \lim \int\limits_{\mathbb{Y}} (g_n)_x d\nu$

   $\phi_n(x) := \int\limits_{\mathbb{Y}} (g_n)_x d\nu$ - измерима по пункту 1

   $0 \leq (g_n)_x -$возрастает, тогда $\phi(x)$ - измерима, $\phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x) \leq ...$ и $\phi_n(x) \to \phi(x)$

   (c) $\int\limits_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu \overset{\text{т.Леви}}{=} \lim\limits_{n \to +\infty} \int \phi_n(x) d\mu \overset{\text{п.2}}{=} \lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} g_n dm \overset{\text{т.Леви}}{=} \int f dm$

2.21 Объем шара в $\mathbb{R}^m$

$B(0, R) \subset \mathbb{R}^m$

$\lambda_m(B(0, R)) = \int\limits_{B(0,R)} 1 d\lambda_m = \int \mathcal{J} =$

$= \int\limits_0^R dr \int\limits_0^\pi d\phi_1 \cdots \int\limits_0^\pi d\phi_{m-2} \int\limits_0^{2\pi} d\phi_{m-1} \cdot r^{m-1} (\sin \phi_1)^{m-2} \ldots (\sin \phi_{m-2}) =\longrightarrow$

$\int\limits_0^\pi (\sin \phi_k)^{m-2-(k+1)} = B(\frac{m-k}{2}; \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{m-k}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m-k}{2} + \frac{1}{2})}$

$\rightarrow= \frac{R^m}{m} \frac{\Gamma(\frac{m-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{\Gamma(\frac{m-2}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m-1}{2})} \cdots \frac{\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} 2\pi =$

$= \frac{\pi R^m}{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^{m-2}}{\Gamma(\frac{m}{2})} = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)} R^m$

Или просто:

$B(0, r) \subset \mathbb{R}^m$

$\lambda_m(B(0, r)) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)} r^m$

2.22 Теорема Фубини

$< \mathbb{X}, \alpha, \mu >$, $< \mathbb{Y}, \beta, \nu >$ - пространства с мерой

μ, ν - σ-конечны, полные

$m = \mu \times \nu$

$f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \overline{R}$, $f \geq 0$, f - суммируема относительно m

Тогда:

1. при *почти всех* $x \in X$ f_x - суммируема на $\mathbb{Y}$,
   где $f_x : \mathbb{Y} \to \overline{R}$, $f_x(y) = f(x, y)$
   (симметричное утверждение верно для y)

2. Функция $x \mapsto \phi(x) = \int\limits_{\mathbb{Y}} f_x d\nu = \int\limits_{\mathbb{Y}} f(x, y) d\nu(y)$ - суммируема* на $\mathbb{X}$
   (симметричное утверждение верно для y)

3. $\int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} f(x, y)dm = \int\limits_{\mathbb{X}} \phi(x)d\mu = \int\limits_{\mathbb{X}} (\int\limits_{\mathbb{Y}} f(x, y)d\nu(y))d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{Y}} (\int\limits_{\mathbb{X}} f(x, y)d\mu(x))d\nu(y)$

2.23 Формула для Бета-функции

$B(s, t) = \int\limits_0^1 x^{s-1}(1 - x)^{t-1}$, где s и t $>$ 0 - Бета-функция

$\Gamma(s) = \int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$, где s $>$ 0, тогда $B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$

Доказательство:

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}(\int\limits_0^{+\infty} y^{t-1}e^{-y}dy)dx = \begin{bmatrix} y \to u \\ y = u - x \end{bmatrix} = \int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}(\int\limits_x^{+\infty} (u-x)^{t-1}e^{-u}du)dx =$$

$$= \int\limits_{\substack{x \geq 0 \\ u \geq x}} ... = \text{меняем порядок интегрирования}$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} du \int\limits_0^{u} dx(x^{s-1}(u-x)^{t-1}e^{-u}) = \begin{bmatrix} x \to v \\ x = uv \end{bmatrix} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-u}(\int\limits_0^1 u^{s-1}v^{s-t}u^{t-1}(1-v)^{t-1}udv)du =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} u^{s+t-1}e^{-u}(\int\limits_0^1 v^{s-1}(1 - v)^{t-1}dv)du = B(s, t)\Gamma(s + t), \text{ чтд.}$$

2.24 Предельный переход под знаком интеграла при наличии равномерной сходимости

$f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \overline{\mathbb{R}}$
$(\mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu)$ – простр. с мерой
$\mathbb{Y}$ – метр. простр. (или метризуемое)
$\forall y$ $f^y(x) = f(x, y)$ – сумм. на $\mathbb{X}$

$\mu X < +\infty$; $f(x, y) \underset{y \to a}{\rightrightarrows} \phi(x)$

Тогда:

- ϕ – сумм.
- $\int\limits_X f(x,y)d\mu(x) \underset{y\to a}{\longrightarrow} \int\limits_X \phi(x)d\mu(x)$

Доказательство: По Гейне: $y_n \to a$
При больших n $\forall x\ |f(x,y_n) - \phi(x)| < 1$
$\Rightarrow |\phi(x)| \leq |f(x,y_n)| + 1 \Rightarrow \int\limits_X |\phi(x)| \leq \int\limits_X |f| + \mu X$
Из этого следует, что ϕ – суммир.

$$|\int\limits_X f(x,y_n)d\mu(x) - \int\limits_X \phi| \leq \int\limits_X |f(x,y_n) - \phi(x)|d\mu \leq \sup_{x\in X}|f(x,y_n) - \phi(x)|\mu X$$

$$\sup_{x\in X}|f(x,y_n) - \phi(x)|\mu X \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

2.24.1 При L_{loc}

Определение L_{loc}
$f : \mathbb{X}\times\mathbb{Y} \to \overline{\mathbb{R}}$
$(\mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu)$ – простр. с мерой
$\mathbb{Y}$ – метр. простр. (или метризуемое); $a \in \mathbb{Y}$
$\forall y\ f^y(x) = f(x,y)$ – сумм. на $\mathbb{X}$
f удовлетворяет L_{loc} ($f \in (L_{loc})$) если:

- $\exists g : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ – сумм.
- $\exists U(a)\ \forall y \in \dot{U}(a)$ при п. в. $x \in \mathbb{X}\ |f(x,y)| \leq g(x)$

Формулировка в контексте опредления:
$\phi := \lim\limits_{y\to a} f(x,y)$ – задана при п. в. x
$f(x,y)$ удовлетворяет условию L_{loc} в точке a и мажорантой g
Тогда:

- ϕ – сумм.
- $\int\limits_X f(x,y)d\mu(x) \underset{y\to a}{\longrightarrow} \int\limits_X \phi(x)d\mu(x)$

Доказательство: На самом деле это переформулировка Теоремы Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде. (см теор. № 13)

2.25 Теорема Лебега о непрерывности интеграла по параметру

$f(x, y)$ при почти всех x непрерывно по y в точке а $a \in Y$ т.е. $f(x, y) \underset{y \to a}{\to} f(x, a)$
f удовлетворяет L_{loc} в точке a
Тогда: $J(y) = \int\limits_X f(x, y) d\mu -$ непрерывно в точке a
Доказательство:
надо $\int\limits_X f(x, y) d\mu \underset{y \to a}{\to} \int \varphi d\mu$ (это в теореме выше, ??? Лебега по параметру)

2.26 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру

$f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \overline{\mathbb{R}}$
$(\mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu)$ – простр. с мерой
$\mathbb{Y}$ – метр. простр. (или метризуемое)
$\forall y \ f^y(x) = f(x, y)$ – сумм. на $\mathbb{X}$

$\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}$ – промежуток
при п. в. $x \quad \forall y \ \exists f'_y(x, y)$
f'_y удовлетворяет усл. L_{loc} в точке $a \in \mathbb{Y}$
Тогда:

- $I(y) = \int\limits_X f(x, y) d\mu(x)$ – дифф. в точке a
- $I'(a) = \int\limits_X f'_y(x, a) d\mu(x)$

Доказательство:
$F(x, h) = \frac{f(x, a+h) - f(x, a)}{h} \to f'_y(x, a)$
$\frac{I(a+h) - I(a)}{h} = \int\limits_X F(x, h) d\mu(x) \underset{?}{\to} \int\limits_X f'_y(x, a) d\mu$
чтобы использовать предельный переход нужно проверить $F(x, h) \in L_{loc}$ в точке $h = 0$, т. е. найти локальную мажоранту. (см. теор. о пред. переход. под интегралом)
$|F(x, h)| \underset{\text{т. Лагранжа}}{=} |f'_y(x, a + \theta h)| \underset{f'_y \in L_{loc} \ in \ a}{\leq} g(x)$

2.27 Перестановка двух предельных переходов. Предельный переход в несобственном интеграле.

$f : Y \subset \widetilde{Y},\ X * Y \to \overline{R},\ y_0-$ предельная точка для $Y,\ y_0 \in \widetilde{Y}$

1. при п.в. $x\ \exists f_0(x) = \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y)$

2. f_0- сумм на всех пр-ах вида $< 0, t >,\ t < b$ и верно : $\int\limits_a^t f(x,y) \underset{y \to y_0}{\to} \int\limits_a^t f_0(x)dx$

3. несобств инт $I(y) = \int\limits_a^{\to b} f(x,y)dx-$ равномерное сходится при $y \in Y$

Тогда Несобственный интеграл $\int\limits_a^{\to b} f_0(x)dx-$ существует и $I(y) \underset{y \to y_0}{\to} \int\limits_a^{\to b} f_0(x)dx$

2.28 Вычисление интеграла Дирихле

Ты проиграл

2.29 Теорема об интегрировании несобственного интеграла по параметру

$f : (a,b) * Y \to \overline{R},\ f-$ сумм по мере $\lambda_1 * \mu$ на мн-вах $(a,t) * Y,\ a < t < b$
$J(y) = \int\limits_a^{\to b} f(x,y)d\lambda_1(x)-$ равн сх на Y
$I(x) = \int\limits_Y f(x,y)\mu(y)$

Тогда $J-$ сумм на Y и $\int\limits_a^{\to b} I(x)d\lambda_1(x)-$ сх

$\int\limits_Y J(y)d\mu = \int\limits_a^{\to b} I(x)d\lambda_!(x)$

2.30 Правило Лейбница для несобственных интегралов

$f : [a,b] * < c,d > \to R-$ непр $\forall y \in < c,d >$:
$J(y) = \int\limits_a^{\to b} f(x,y)dx-$ известно, что сх-ся
$\forall x,\ \forall y\ \exists f'_y(x,y)-$ непр на $[a.b] * < c,d >$
$I(y) = \int\limits_a^{\to b} f'_y(x,y)dx-$ равн сх-ся по $y \in < c,d >$
Тогда $J \in C^1 < c,d >$ и $J'(y) = I(y)$ т.е.
$(\int\limits_a^{\to b} f(x,y)dx)'_y = \int\limits_a^{\to b} f'_y(x,y)dx$

2.31 Теорема о вычислении интеграла по мере Бореля—Стилтьеса (с леммой)

2.31.1 Лемма

$h : X \to \overline{R}-$ изм, п.в. конечна, $H(t)-$ функция распределения
Тогда μ_H- мера Бореля-Стилтьеса на (R,B) совпадает с мерой $h(\mu)$ $(\nu(A) = \mu(h^{-1}(A))$

2.31.2 Теорема

$f : R \to R,\ f \geq 0$, изм по Борелю
$h : x \to \overset{R}{,}$ изм п.в., кон $H(t)-$ ф-я распределения, μ_H- мера Бореля-Ститьеса
Тогда $\int\limits_X f(h(x))d\mu(x) = \int\limits_R f(t)d\mu_H(t)$

2.32 Теорема о вложении пространств L^p

$\mu E < +\infty$, $1 \leq s < r \leq +\infty$
Тогда:

1. $L_r(E,\mu) \subset Ł_s(E,\mu)$
2. $\forall f$ — измеримая : $||f||_s \leq \mu E^{1/s-1/r}||f||_r$

Доказательство:

- $2 \Rightarrow 1$ (Это очевидно: достаточно рассмотреть неравенство из пункта 2. Из него следует, что $||f||_s \leq const \cdot ||f||_r$. см. опред. L_p)
- Рассмотрим два случая:
  1. $r = +\infty$ (очев.)
  $$||f||_s = (\int |f|^s \cdot 1)^{1/s} \leq ((esssup|f|)^s \int 1 d\mu)^{1/s} = ||f||_\infty \cdot \mu E^{1/s}$$
  (последнее по определению $esssup$)
  2. $r < +\infty$
  $$(||f||_s)^s = \int |f|^s \cdot 1 d\mu \leq (\int |f|^r)^{\frac{s}{r}} \cdot (\int 1^{\frac{r}{r-s}})^{\frac{r-s}{r}} = (||f||_r)^s \cdot \mu E^{1-\frac{s}{r}}$$
  (существенный шаг: применить неравество Гельдера)

2.33 Теорема о сходимости в L_p и по мере

$1 \leq p < +\infty$
$f_n \in L_p(\mathbb{X}, \mu)$

1. - $f \in L_p$
   - $f_n \to f$ в L_p

   Тогда: $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$ (по мере)
2. - $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$ (либо если $f_n \to f$ почти везде)
   - $|f_n| \leq g$ почти везде при всех n; $g \in L_p$

   Тогда: $f_n \to f$ в L_p

Доказательство:

1. $$X_n(\epsilon) := X(|f_n - f| \geq \epsilon)$$

$$\mu X_n(\epsilon) \overset{\text{т.к. } \frac{|f_n - f|}{\epsilon} \geq 1}{\leqslant} \int\limits_{X_n} (\frac{|f_n - f|}{\epsilon})^p = \frac{1}{\epsilon^p} \int\limits_{X_n} |f_n - f|^p \leq \frac{1}{\epsilon^p} \int\limits_{X} |f_n - f|^p =$$

$$= \frac{1}{\epsilon^p}(||f_n - f||_p)^p \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

2. $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$ Тогда $\exists n_k \mid f_{n_k} \to f$ почти везде.

   Тогда $|f| \leq g$ п. в.

   $|f_n - f|^p \leq (2g)^p$ – сумм. функции т. к. $g \in L_p$

   $(||f_n - f||_p)^p = \int\limits_X |f_n - f|^p d\mu \overset{n\to\infty}{\to} 0$ (по теореме Лебега)

2.34 Полнота L^p

$L_p(E, \mu)$ $1 \leq p < \infty$ – полное
То есть любая фундаментальная последовательность сходиться по норме $||f||_p$.

$$(\forall \epsilon > 0\ \exists N\ \forall n, k\ ||f_n - f_k||_p < \epsilon) \Rightarrow (\exists f : ||f_n - f||_p \to 0)$$

Доказательство:

1. Построим f.

   Рассмотрим фундаментальную последовательность f_n.

   $\exists N_1$ при $n_1, k > N_1$ $||f_{n_1} - f_k|| < \frac{1}{2}$

   $\exists N_2$ при $n_2, k > N_2, N_1$ $||f_{n_2} - f_k|| < \frac{1}{4}$

   $\ldots$

   Тогда: $\sum_{k=1}^{\infty} ||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|| < 1$

   $f = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}$

   Докажем, это функция f корректно задана:

   - $S_N(x) := \sum_{k=1}^{N} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$
     $||S_N||_p \leq \sum_{k=1}^{N} ||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|| < 1$

     Тогда по Теореме Фату: $||S||_p \leq 1$

     Тогда $|S|^p$ – суммируема

     Тогда $S(x)$ конечна при п. в. x и ряд $\sum f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ абс. сходитс, а значит и просто сходится при п. в. x

     $f := f_{n_1} + \sum f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ т. е. $f =$ п. в. $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}$

2. Проверим, что $f_n \to f$ в L_p

   Т. к. f_n – фунд., то $\forall \epsilon > 0\ \exists N\ \forall n, n_k > N\quad ||f_n - f_{n_k}|| < \epsilon \Rightarrow ||f_n - f_{n_k}||^p = \int\limits_E |f_n - f_{n_k}|^p d\mu < \epsilon^p$

   Тогда по теореме Фату: $\int\limits_E |f - f_n|^p \leq \epsilon^p$

   Тогда $\forall \epsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ ||f - f_n||_p < \epsilon$

Замечание: L_∞ – полное (упражнение)

2.35 Плотность в L^p множества ступенчатых функций

Множество ступ функкций плотно в $L_p(X, \mu)$ ($\phi-$ ступ ф-я, $\phi \in L_p \Rightarrow \mu X(\phi \neq 0) < +\infty$)

2.36 Лемма Урысона

X — нормальное топологическое пространство, то есть:

1. Все одноточечные множества замкнуты.

2. Любые два непересекающихся замкнутых множества отделимы окрестностями: A, B — замкнуты, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \exists A_1, B_1$ — открыты, $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, $A \subset A_1$, $B \subset B_1$.

F_0, F_1 — замкнуты, $F_0 \cap F_1 = \emptyset$.
Тогда: $\exists f : X \to [0, 1]$, непрерывная (в смысле топологического определения непрерывности), равная 0 на F_0 и равная 1 на F_1.
Доказательство:

1. Раскроем определение плотности: $\forall f \in L_p(E, \mu)\ \forall \epsilon > 0\ \exists \varphi \in C_0(\mathbb{R}^m) : ||f - \varphi|_E||_p < \epsilon$. Таким образом достаточно научиться приближать f и φ ступенчатыми функциями f_n: $||f - f_n||_p < \epsilon/2$ и $||\varphi - f_n||_p < \epsilon/2$

2. TODO!

2.37 Плотность в L^p множества финитных непрерывных функций

$(\mathbb{R}^m, \mathbb{A}, \lambda_m)$

$E \subset \mathbb{R}^m -$ изм. Тогда множество финитных непрерывных функций плотно в $L_p(E, \lambda_m), p \in [1; +\infty]$

2.38 Теорема о непрерывности сдвига

Обозначения:
$f_h := f(x+h)$
$[0, T] \subset \mathbb{R}$. Будем считать, что $L_p[0, T]$ состоит из T-периодических функций $\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$.
Отсюда $\int_0^T f = \int_a^{a+T} f$.
$\widetilde{C}[0, T] = f \in C[0, T] : f(0) = f(T).||f|| = max_{x \in [0,T]}|f(x)|$
NB: $f \in \widetilde{C}[0, T] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна (по т. Кантора).
Формулировка:

1. $f-$ рвнм. непр. на $\mathbb{R}^m$. Тогда $||f - f_h||_\infty \to 0$ при $h \to 0$.
2. $1 \le p < +\infty$ $f \in L_p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$. Тогда $||f - f_h||_p \to 0$.
3. $f \in \widetilde{C}[0, T]$. Тогда $||f - f_h||_\infty \to 0$.
4. $1 \le p < +\infty$ $f \in L_p[0; T]$. Тогда $||f - f_h||_p \to 0$.

Доказательство:

1. 1 и 3 свойства следуют из определения рвнм. непр-ти: $\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in \mathbb{R}^m\, \forall h :$ $|h| < \delta$ верно, что $|f(x) - f(x+h)| < \epsilon$, то есть $||f - f_h||_\infty < \epsilon$ (это для св-ва 1, во втором случае x из $[0, T]$).
2. 4 пункт: Подберем непрерывную функцию g, которая хорошо приближает f. $||f - g||_p < \frac{\epsilon}{3}$. Тогда $||f_h - g_h|| < \frac{\epsilon}{3}$ (очевидно, т.к. это сдвиг и интеграл не меняется). $||g_h - g||^p = \int_0^T ||g(x+h) - g(x)||^p \le \epsilon_0^p T = \frac{\epsilon}{3}$ (можно так подобрать ϵ_0. Тогда: $||f_h - f|| \le ||f_h - g_h|| + ||g_h - g|| + ||g - f|| \le \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$, чтд.
3. 2й пункт — аналогично, но возьмем шар $B(0, R)$ и финитную функцию g, что $g \equiv 0$ вне этого шара. Остальное — аналогично.

2.39 Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве

1. $x_n \to x, y_n \to y \Rightarrow \langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$
2. $\sum x_k$ сходится, тогда $\forall y : \sum \langle x_k, y \rangle = \langle \sum x_k, y \rangle$
3. $\sum x_k$ - ортогональный ряд, тогда $\sum x_k$ - сх $\Leftrightarrow \sum |x_k|^2$ сходится, при этом $|\sum x_k|^2 = \sum |x_k|^2$

Доказательство

1. $|\langle x_k, y_k \rangle - \langle x, y \rangle| = |\langle x_k, y_k \rangle - \langle x_k, y \rangle + \langle x_k, y \rangle - \langle x, y \rangle| \leqslant |\langle x_k, y_k - y \rangle| + |\langle x_k - x, y \rangle| \leqslant |x_k| \cdot |y_k - y| + |x_k - x| \cdot |y| \to 0$ (так как огр $\cdot$ б.м. + б.м. $\cdot$ огр $\to 0$)
2. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$

   $\langle \sum\limits_{k=1}^{n} x_k, y \rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x_k, y \rangle$

   Устремляя n к ∞, получаем требуемое равенство
3. Обозначим $C_n := \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2$

   $|S_n|^2 = \langle \sum\limits_{k=1}^{n} x_k, \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \rangle = \sum\limits_{k,j} \langle x_k, x_j \rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x_k, x_k \rangle$ (так как $k \neq j \Rightarrow \langle x_k, x_j \rangle = 0$) $= \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2 = C_n$

   Аналогично, $||S_n|^2 - |S_m|^2| = |C_n - C_m|$

   Тогда $C_n, |S_n|^2$ фунадментальны одновременно $\Rightarrow$ сходятся одновременно при устремлении n к ∞

2.40 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе

$\{e_k\}$ — ортогональная система в $\mathbb{H}$, $x \in \mathbb{H}, x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k \cdot e_k$

Тогда:

1. $\{e_k\}$ — Л.Н.З.

2. $c_k = \dfrac{\langle x, e_k \rangle}{||e_k||^2}$

3. $c_k \cdot e_k$ — проекция x на прямую $\{te_k \mid t \in \mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C})\}$
   Иными словами, $x = c_k \cdot e_k + z$, где $z \perp e_k$

Доказательство:

1. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k e_k = 0$. Умножим скалярно на e_m $(1 \leqslant m \leqslant N)$

   Получим: $\alpha_m ||e_m||^2 = 0 \Rightarrow \alpha_m = 0 \Rightarrow$ комб. тривиальная $\Rightarrow$ Л.Н.З.

2. $\langle x, e_m \rangle = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \langle c_k e_k, e_m \rangle = c_m \cdot ||e_m||^2$ (верно в силу сходимости ряда)

3. $x = c_k \cdot e_k + z$. Доказать: $z \perp e_k$.
   $\langle z, e_k \rangle = \langle x - c_k e_k, e_k \rangle = c_k \cdot ||e_k||^2 - c_k \cdot ||e_k||^2 = 0$

2.41 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя

$\{e_k\}$ — ортогональная система в $\mathbb{H}$, $x \in \mathbb{H}, n \in \mathbb{N}$
$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(x) e_k$, $\mathcal{L} = Lin(e_1, e_2, \dots e_n) \subset \mathbb{H}$
Тогда:

1. S_n — орт. проекция x на пр-во $\mathcal{L}$. Иными словами $x = S_n + z$, $z \perp \mathcal{L}$

2. S_n — наилучшее приближение x в $\mathcal{L}$ $(||x - S_n|| = \min\limits_{y \in \mathcal{L}} ||x - y||)$

3. $||S_n|| \leqslant ||x||$

Доказательство:

1. (a) $z = x - S_n$

   (b) $z \perp \mathcal{L} \Leftrightarrow \forall k = 1, 2 ... n : z \perp e_k$

   (c) $\langle z, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle S_n, e_k \rangle = c_k ||e_k||^2 - c_k ||e_k||^2 = 0$

2. $||x - y||^2 = ||S_n + z - y||^2 = ||(S_n - y) + z||^2 = ||S_n - y||^2 + ||z||^2 \geqslant\geqslant ||z||^2 = ||x - S_n||^2$

3. $||x||^2 = ||S_n||^2 + ||z||^2$ (теорема о сумме орт. ряда) $\geqslant ||S_n||^2$

Следствие: Неравенство Бесселя

$\forall\{e_k\}$ – О.С. : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |c_k(x)|^2 \cdot ||e_k||^2 \leqslant ||x||^2$

2.42 Теорема Рисса – Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля

$\{e_k\}$ – орт. сист. в $\mathbb{H}$, $x \in \mathbb{H}$

Тогда:

1. Ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k(x)e_k$ сходится в $\mathbb{H}$
2. $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k e_k + z \Rightarrow \forall k\ z \perp e_k$
3. $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k e_k \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$

Доказательство:

1. Ряд Фурье – ортогональный ряд
   его сходимость $\Leftrightarrow$ сходимости $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2$
   $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 \leq \|x\|^2$ по неравенству Бесселя
2. $\langle z, e_k\rangle = \langle x - \sum c_i e_i, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle - \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \langle c_i(x)e_i, e_k\rangle = 0$
3. $\Rightarrow$ - утв. 3 теоремы о св-вах сх-ти в гильбертовом пр-ве
   $\Leftarrow$ Из п. 2 ряд ортог.
   $\|x\|^2 = \|\sum c_k e_k\|^2 + \|z\|^2 = \sum |c_k|^2 \|e_k\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2 + \|z\|^2 \Rightarrow z = 0$

2.43 Теорема о характеристике базиса

$\{e_k\}$ — ортогональная система в $\mathbb{H}$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\{e_1\}$ — базис.

2. $\forall x, y \in \mathbb{H} \quad \langle x, y\rangle = \sum c_k(x)\overline{c_k(y)}\|e_k\|^2$ (обобщенное уравнение замкнутости)

3. $\{e_k\}$ — замкнутая система.

4. $\{e_k\}$ — полная система.

5. $Lin(e_1, e_2, \ldots)$ — плотна в $\mathbb{H}$

Доказательство:

2.43.1 $\quad 1 \Rightarrow 2$

$x = \sum c_k(x)e_k$ – единственно (из геом. соображений: $c_k e_k$ – проекция)
$\langle e_k, y\rangle = \overline{\langle y, e_k\rangle} = \overline{c_k(y)}\|e_k\|^2$
$\langle x, y\rangle = \sum c_k(x)\langle e_k, y\rangle = \sum c_k(x)\overline{c_k(y)}\|e_k\|^2$

2.43.2 $\quad 2 \Rightarrow 3$

$y := x$
$\|x\|^2 = \sum |c_k(x)|^2\|e_k\|^2$ (см. п. 3 из опр.)

2.43.3 $\quad 3 \Rightarrow 4$

Пусть $\forall k \quad x_0 \perp e_k$
$c_k(x_0) = \frac{\langle x_0, e_k\rangle}{\|e_k\|^2} = 0$
$\|x_0\|^2 = \sum |c_k(x_0)|^2\|e_k\|^2 = 0$ (см. п. 2 из опр.)

2.43.4 $\quad 4 \Rightarrow 1$

$x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k e_k + z \Rightarrow$ (т. Рисса-Фишера (2)) $\forall k\ z \perp e_k \Rightarrow$ (из полноты) $z = 0$ (см. п. 1 из опр.)

2.43.5 $4 \Rightarrow 5$

Пусть $ClLin(e_1, e_2, \ldots) \neq \mathbb{H}$, $x \in \mathbb{H} \setminus ClLin(e_1, e_2, \ldots)$
из т. Рисса-Фишера (2): $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k e_k + z \Rightarrow \forall k \;\; z \perp e_k \Rightarrow x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k e_k \Rightarrow x \in ClLin(e_1, e_2, \ldots)$
Противоречие.

2.43.6 $5 \Rightarrow 4$

$\forall k \;\; x_0 \perp e_k \Rightarrow x_0 \perp Lin(e_1, e_2, \ldots) \Rightarrow x_0 \perp ClLin(e_1, e_2, \ldots)(= \mathbb{H}) \Rightarrow x_0 \perp x_0 \Rightarrow \|x_0\|^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$

2.44 Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда

Пусть $S_n \to f$ в $L_1(-\pi, \pi]$

Тогда:
$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \; dx \quad k = 0, 1, 2, \ldots$
$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \; dx \quad k = 0, 1, 2, \ldots$
$c_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \; dx \quad k = 0, 1, 2, \ldots$
Доказательство:
Почему нельзя сказать, что коэффициенты — это коэффициенты ряда Фурье, а потому вычисляются как скалярные произведения???
$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \cos jx + b_j \sin jx$ (– это T_n)
При $n \geq k$:

1. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} S_n(x) \cos kx dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} a_k \cos^2 kx dx = \pi a_k$ (в силу ортогональности триг системы)

2. $|\int\limits_{-\pi}^{\pi} S_n(x) \cos kx dx - \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx| \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} |S_n(x) - f(X)| \cdot |\cos kx| \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} |S_n(x) - f(x)| \to 0$

Из 1 и 2 следует равенство для a_k. Аналогично доказывается и для других.

2.45 Теорема Римана-Лебега

$E \subset \mathbb{R}^1$ – измеримо
$f \in L_1(E, \lambda),\ \lambda$- мера Лебега
Тогда:

$$\int\limits_E f(x)e^{ikx}dx \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

$$\int\limits_E f(x)cos(kx)dx \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

$$\int\limits_E f(x)sin(kx)dx \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

Доказательство:
Пусть $f \equiv 0$ вне E, тогда можно считать, что $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$
Обозначим $e(x) = cos(x)$, или $sin(x)$, или e^{ix}, в зависимости от ситуации. Заметим, что $e(t+\pi) = -e(t)$
$\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e(kt) \overset{t=\tau+\frac{\pi}{k}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau+\frac{\pi}{k})e(k\cdot(\tau+\frac{\pi}{k})) = -\int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau+\frac{\pi}{k})e(k\tau)$
$\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e(kt) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e(kt) - \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau+\frac{\pi}{k})e(kt) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}}(f(t) - f(t+\frac{\pi}{k}))e(kt)$

$|\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e(kt)| \leq \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} |f(t) - f(t+\frac{\pi}{k})|dt$ (так как $|e(kt)| \leq 1$)$\xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$,
по непрерывности сдвига

2.46 Три следствия об оценке коэффициентов Фурье

2.46.1 Следствие 1

$|a_k(f)|,\ |b_k(f)|,\ 2|c_k(f)| \leq w(f, \frac{\pi}{k})$

2.46.2 Следствие 2

$f \in \widetilde{C^r}[-\pi, \pi]$
Тогда $|a_k(f)|,\ |b_k(f)|,\ 2|c_k(f)| \leq \frac{const}{|k|^r}\ \ (k \neq 0)$

2.46.3 Следствие 3

1. $0 < \alpha \leq 1,\ f \in Lip_\mu \alpha$
   Тогда $|a_k(f)|,\ |b_k(f)|,\ 2|c_k(f)| \leq \frac{\mu\pi^\alpha}{|k|^r}$

2. $0 < \alpha \leq 1, f \in C^r,\ f^r \in Lip_\mu \alpha$
   Тогда $|a_k(f)|,\ |b_k(f)|,\ 2|c_k(f)| \leq \frac{const}{|k|^{r+\alpha}}$

2.47 Принцип локализации Римана

$f, G \in L_1[-\pi, \pi]$
$x_0 \in R, \delta > 0$
$f \equiv g$ на $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
Тогда:
$S_n(f, x_0) - S_n(g, x_0) \to 0$
Доказательство:
$h := f - g \equiv 0$ на $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
$S_n(h, x_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(x_0 + t)(ctg(\frac{t}{2}) sin(nt) + cos(nt))dt$ (57 теорема)
$h_1 = \frac{1}{2} h(x_0 + t)$
$h_2 = \frac{1}{2} h(x_0 + t) ctg(\frac{t}{2})$
$S_n(h, x_0) = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} h_1 cos(nt) + h_2 sin(nt) = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{-\delta} h_1 cos(nt) + h_2 sin(nt) + \dfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\delta}^{\delta} 0 + \dfrac{1}{\pi} \int\limits_{\delta}^{\pi} h_1 cos(nt) + h_2 sin(nt)$
Оценим:
$|h_2(t)| \leq \frac{1}{2} |h(x_0 + t) ctg(\frac{t}{2})| \leq \frac{1}{2} |h(x_0 + t)| \frac{2}{\delta}$ (так как $|ctg(x)| < |\dfrac{1}{x}|$, а $|t| > |\delta|$)

Тогда $h_1, h_2 \in L_1$, тогда по теореме Римана-Лебега два крайних интеграла стремятся к 0.

2.48 Признак Дини. Следствия

$f \in L_1[-\pi, \pi]$
$x_0 \in R$
$S \in R$
$(*) \int\limits_0^\pi \frac{|f(x_0 + t) - 2S + f(x_0 - t)|}{t} dt$ сходится

Тогда:

$S_n(f, x_0) \to S$

Следствие1:

$\exists$ 4 предела

$\lim_{t \to \pm 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0 \pm 0)}{t}$

Тогда:

Ряд фурье сходится в x_0 как $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$

Следствие2:

$f \in L_1[-\pi, \pi]$

f непрерывна в x_0

$\exists$ конечные $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$

Тогда:

$S_n(f, x_0) \to f(x_0)$

Доказательство: $D_n(t) = \frac{sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\pi sin(\frac{t}{2})}$

$\phi(t) = f(x_0 + t) - 2S + f(x_0 - t)$

$$S_n(f, x_0) - S \overset{\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n = 1}{=} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x_0 + t) - S) D_n(t) dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi} (f(x_0 + t) - S) D_n(t) dt + \int\limits_{-\pi}^{0} (f(x_0 + t) - S) D_n(t) dt = \int\limits_{0}^{\pi} \phi(t) D_n(t) dt$$

Введём h_1, h_2:

$$h_1(t) := \begin{cases} \frac{1}{2}\phi(t), t \in [0, \pi] \\ 0, t \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

$$h_2(t) := \begin{cases} \frac{1}{2}\phi(t) \operatorname{ctg}(\frac{t}{2}), t \in [0, \pi] \\ 0, t \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

Покажем что h_1 суммируема

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |h_1(t)| dt \leq \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\phi(t)| dt \leq \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (|f(x_0 + t)| + 2|S| + |f(x_0 - t)|) dt < +\infty$$

(поскольку f суммируема)

Покажем что h_2 суммируема

$|\operatorname{ctg}(\frac{t}{2})| < \frac{2}{|t|}, t \in [-\pi, \pi]$

$\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi |\phi(t)||\operatorname{ctg}(\frac{t}{2})|dt \le \int\limits_0^\pi \frac{|\phi(t)|}{t}dt < +\infty$ по (*)

Тогда
$\int\limits_0^\pi \phi(t)D_n(t) = C \cdot \int\limits_0^\pi \phi(t)(ctg(\frac{t}{2})sin(nt) + cos(nt)) =$ (C — хз какая констатна, что-то из ядра Дирихле)
$= C \cdot \int\limits_{-\pi}^\pi h_1\cos(nt) + h_2\sin(nt) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (по теореме Римана-Лебега)

Следствие1:
$\exists$ 4 предела
$\lim_{t\to\pm 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0\pm 0)}{t}$
Тогда:
Ряд фурье сходится в x_0 как $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$

Следствие2:
$f \in L_1[-\pi,\pi]$
f непрерывна в x_0
$\exists$ конечные $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$
Тогда:
$S_n(f,x_0) \to f(x_0)$

2.49 Корректность определения свертки

$f, K \in L_1[-\pi,\pi]$
Тогда: $(f * K)$ – корректно заданная фукнция из $L_1[-\pi,\pi]$
Доказательство:

- Докажем, что $g(x,t) = f(x-t)K(t)$ – измерима
  - $K(t)$ – измерима, как функция из L_1
  - $\phi(x,t) = f(x-t)$. Это функция принимает одинаковые значения на $t = x-C$.
    Поэтому: $R^2(\phi < a) = V^{-1}(E_{a'} \times R)$, где $V(x,t) = (x-t,t)$
    $E_{a'} = V(R(f < a))$ – измеримо, так как f – измеримо. Что за бред, V действует из R^2, а тут пытаются сделать из R
    Поэтому $R^2(\phi < a)$ – измеримо.

– Поэтому g – измерима, как произведение измеримых

- Проверим, что $g \in L_1([-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi])$

  $\iint\limits_{[-\pi,\pi]} |g| d\lambda^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (|K(t) \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|dx|)dt = ||f||_1 ||K||_1 < +\infty$

- По теореме Фубини $\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x,t)dt$ – суммируемая при в п. в. x

- Тогда свертка лежит в $L_1[-\pi,\pi]$

2.50 Свойства свертки функции из L^p с фукнцией из L^q

$f \in L^p$; $K \in L^q$
$1 \leqslant p \leqslant +\infty$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
Тогда:

- $f * K$ – непр. на $[-\pi,\pi]$

- $||f * K||_\infty \leqslant ||K||_q ||f||_p$

Доказательство: Это нер-во Гельдера

п. 2 $|(f*K)(x)| = |\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt| \underset{\text{нер-во Гельдера}}{\leq} ||K||_q ||f||_p$

$\sup|f*K| \leq ||f||_p ||K||_q \Rightarrow$ пунк 2

(Причем нер-во Гельдера выполнено и для $p = \infty$)

п. 1 – $p < +\infty$

$|(f*K)(x+h) - (f*K)(x)| = |\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x+h-t) - f(x-t))K(t)dt| \underset{\text{нер-во Гельдера}}{\leq}$
$|(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+h-t) - f(x-t)|^p dt)^{1/p} (\int\limits_{-\pi}^{\pi} |K(t)|^q dt)^{1/q} = ||K||_q (\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+h-t) - f(x-t)|^p dt)^{1/p} = ||K||_q (\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(y+h) - f(y)|^p dy)^{1/p} =$
Это неправда, почему границы интегрирования не сменились? Правда! Потому что функции продолжены по периодичности!!! $= ||K||_q ||f(y+h) - f(y)||_p \underset{\text{по непр. сдвига}}{\rightarrow} 0$

$- p = +\infty$

$|(f*K)(x+h)-(f*K)(x)| = |\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x+h-t)-f(x-t))K(t)dt| \underset{\text{нер-во Гельдера}}{\leq}$

$(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|K|)\cdot \underset{t=[-\pi,\pi]}{esssup}|f(x+h-t)-f(x-t)| =$

$||K||_1 \cdot \underset{t=[x+\pi,x-\pi]}{esssup}|f(t+h)-f(t)| \underset{\text{по непр. сдвига}}{\to} 0$

2.51 Теорема о свойствах аппроксимативной единицы

1. $f \in \widetilde{C}[-\pi,\pi] \Rightarrow (f*K_h) \underset{h\to h_0}{\rightrightarrows} f$, где свертка $(f*K)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt$
2. $f \in L^1[-\pi,\pi] \Rightarrow ||(f*K_h)-f||_1 \underset{h\to h_0}{\to} 0$
3. K_h - усил. апрокс ед. f - непр. в точке x. Тогда $(f*K_h)(x) \to f(x)$

   Замеч.) пункт 2 верен для L_p

Доказательство:

1. $(f*K)(x)-f(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))K_h(t)dt =$ (f рнепр., т.к. f непр на компакте $[-\pi,\pi] \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi}|(f(x-t)-f(x))K_h(t)|dt = \int\limits_{E_\delta} + \int\limits_{(-\delta,\delta)} = I_1 + I_2$

   Заметим, что $I_1 \leq 2||f||_\infty \int\limits_{E_\delta}|K_h| < \frac{\epsilon}{2}$, т.к. f - огр, и по 3 a.e. интеграл стремится к 0

   Заметим, что $I_2 \leq \frac{\epsilon}{2M}\int\limits_{(-\delta,\delta)}|K_h|dt < \frac{\epsilon}{2}$, т.к. по непрерывности : $\forall\epsilon > 0 \exists\delta : |f(x) - f(x-\delta)| < \epsilon' = \frac{\epsilon}{2M}$

2. $||(f*K_h(x))-f||_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi}|\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x-t)-f(x)K_h(t)dt|dx \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)-f(x)||K_h(t)|dtdx =$ $||K_h||_1\int\limits_{-\pi}^{\pi}g(-t)\frac{K(t)}{||K_h||_1}dt$, где $g(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|dx$

   $\frac{|K_h|}{||K_h||}$ - a.e. $\Rightarrow \int\limits_{-\pi}^{\pi}g(-t)\frac{|K|}{||K_h||}dt \underset{h\to h_0}{\to} g(0) = 0$. Замечание: последний пределльный переход верен из свойства (1) выше, т.к. $K*g \Rightarrow g$, а $K*g = \int\limits_{-\pi}^{\pi}g(x-t)K(t)dt$ для любого x, в нашем случае в интеграле $g(-t)$, то есть взято $x = 0$

3. $(f * K_h)(x) - f(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))K_h(t)dt = I_1 + I_2$ (как в пункте 1.)

   $I_2 \le 2\delta\epsilon\ esssup(K_h)$, т.к. f - непр и поэтому на $(-\delta, \delta)$ интеграл от $f(x-t) - f(x) 2\delta\epsilon$

   $I_1 \le (2\pi|f(x)| + ||f||_1) esssup_{E_\delta}(K_h)$, т.к. $\int\limits_{E_\delta} f(x)K_h(t) \le$ Полный бред написан, что это за интеграл вообще? По какой переменной интегрирование? $esssup_{E_\delta}(K_h) \cdot 2\pi|f(x)| \to 0$ (т.к. $esssup \to 0$). Аналогично $\int\limits_{E_\delta} f(x-t)K_h(t) \le 2\pi||f(x)||_1 esssup_{E_\delta}(K_h) \to 0$.

   Все доказано!

2.52 Теорема Фейера

1. $f \in \widetilde{C}[\pi, -\pi]$, тогда $\sigma_n \underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} f$
2. $f \in L_p[\pi, -\pi], (1 \le p < +\infty)$, тогда $||\sigma_n(f) - f||_p \underset{n\to+\infty}{\to} 0$
3. $f \in L_1[\pi, -\pi]$, f- непр. в т. x, тогда $\sigma_n(f, x) \underset{n\to+\infty}{\to} f(x)$

Доказательство:

1. ядра Фейера – аппрок. единица
   - $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n = 1$ – по Лемме о простых свойствах ядра Фейера
   - $\Phi_n > 0 \Rightarrow \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\Phi_n| \le 1$ (bиз 1 пункта следует второй)
   - $t \in E_\delta\ |\Phi_n(t)| = \frac{1}{(n+1)2\pi} \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{\sin^2(t/2)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

   Далее по теореме о свойствах аппрок. ед-цы следуют все 3 пункта.

2.53 Полнота тригонометрической системы и другие следствия теоремы Фейера

Ты проиграл

2.54 Лемма об оценке интеграла ядра Дирихле

1. $D_n(t) = \frac{\sin nt}{\pi t} + \frac{1}{2\pi}(\cos nt + h(t)\sin nt)$, где $h(t)$ не зависит от n и $|h(t)| \leq 1$ на $[-\pi;\pi]$.

2. $\forall x, |x| < 2\pi \mid \int_0^x D_n(t)dt| < 2$

2.55 Формула Грина

$D \subset \mathbb{R}^2$ – компакт, связное, одновясвязное, ориентировано
$\delta D - C^2$-гладкая кривая, тоже ориентировано
D и δD ориентированы согласовано
P, Q – функции, гладкие в открытой области $O \supset D$
Тогда:

$$\iint\limits_D (\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y})dxdy = \int\limits_{\delta D}(P(x,y)dx + Q(x,y))dy$$

Доказательство:
Докажем для областей вида "криволинейный четырехугольник" , т.е.
$x \in [a;b]$
$y \in [\phi_1(x);\phi_2(x)]$, где $\phi_2(x) > \phi_1(x)$
Представляется в аналогичном виде, относительно y

Ориентируем обход нашего четырехугольника против часовой стрелки.
Назовем пути по сторонам $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ начиная с нижней против часовой стрелки соответсвенно.
Из линейности интеграла по векторному полю следует, что для доказательства достаточно проверить:

$$-\iint\limits_D \frac{\delta P}{\delta y}dxdy = \int\limits_{\delta D} Pdx$$

Почему второе проверять не нужно?

1. Преобразуем левую часть:
   $-\iint\limits_D \frac{\delta P}{\delta y}dxdy = -\int\limits_a^b dx \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} P'_y dy = -\int\limits_a^b P(x,y)\Big|_{y=\phi_1(x)}^{y=\phi_2(x)} dx =$
   $\int\limits_a^b P(x,\phi_1(x))dx - \int\limits_a^b P(x,\phi_2(x))$

2. Преобразуем правую часть:
$\int\limits_{\delta D}(Pdx + 0dy) = \int\limits_{\gamma_1} + \int\limits_{\gamma_2} + \int\limits_{\gamma_3} + \int\limits_{\gamma_4}$
$= \int\limits_a^b P(x, \phi_1(x))dx + 0 + \int\limits_b^a P(x, \phi_2(x))dx + 0 =$
$\int\limits_a^b P(x, \phi_1(x))dx - \int\limits_a^b P(x, \phi_2(x))$

Левая и правая части равны.

Если область более сложная - порежем на простые. Зафиксируем направление обхода, посчитаем на каждой.
При фиксированном направлении обхода пути на границах разрезов учитываются дважды с противоположными знаками, то есть в итоге имеем обход границы всей фигуры.
Из компактности и гладкости области следует, что допускается счетное количество разрезов.

2.56 Теорема об интегрировании ряда Фурье

$f \in L_1[-\pi; \pi]$.
Тогда $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) \int_a^b e^{ikx}dx$$

Сумма по $k \in \mathbb{Z}$ понимается в смысле главного значения ($\lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n}$).
Замечание: Ряд Фурье f может всюду расходиться, но ряд интеграла всегда сходится.
Доказательство:

1. Пусть $-\pi \leq a < b \leq \pi$. Если это не так всегда можно разбить интеграл на такие отрезки в силу периодичности функции.

2. Пусть $\chi(x) = \chi[a; b]$ (характеристическая функция отрезка $[a; b]$).

3. Рассмотрим частичную сумму ряда интегралов:
$\sum_{k=-N}^{N} c_k(f) \underbrace{\int_a^b e^{ikx}dx}_{2\pi c_{-k}(\chi)} = \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{2\pi}(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt) 2\pi c_{-k}(\chi)$.
Сумма конечная, поэтому это равно $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)S_N(\chi, t)dt$.

4. $S_N(\chi) \to \chi$ везде, кроме a и b *(не шарю почему, помогите)*

5. $|S_N(\chi,t)| = |\int_{-\pi}^{\pi}\chi(x)D_N(t-x)dx| = |\int_a^b D_N(t-x)dx| = |\int_0^{t-a}D_N - \int_0^{t-b}D_N| \le 4$ (по лемме об оценке интеграла D_N).

6. $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)S_N(\chi,t)dt \to \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\chi(t)dt$ по теореме Лебега о мажорированной сходимости.

2.57 Следствие о синус-коэффициентах интегрируемой функции

$f \in L^1[-\pi,\pi] \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n(f)}{n}$ — сх-ся

2.58 Лемма о слабой сходимости сумм Фурье

Вроде оно, но это не точно $f \in L_1[-\pi;\pi]$

Что это за обозначение?

Тогда $\forall u \in \widetilde{\mathbb{C}}^{\infty}$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} S_n(f,x)u(x)dx \to \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)u(x)dx$$

Доказательство: // TODO - нужно больше пояснений

1. $f * u$ - непр. и гладкая (т.к. $u \in L_\infty[-\pi,\pi]$)
   $((f*u)(x))' = (\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)u(x-t)dt)'_x = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)u'(x-t)dt$
   $\frac{d}{dt}(\int\limits_X f(x,t)d\nu(x)) = \int\limits_X f'_x(x,t)d\nu(x)$
   $L_{loc}(t_0):\quad \exists u(t_0) : |f'_t(x,t)| \le g(x), g(x)$ - сумм. при $x \in X, t \in u(t_0)$ $|f(t)u'(x-t)| \le \max|u'(y)| \cdot |f(t)|, y \in [-\pi,\pi]$

2. $\underline{u}(x) := u(-x)$
   $\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}u(x)dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}u(-x)dx = 2\pi c_k(\underline{u})$
   Так как сумма конечная, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} S_n(f,x)u(x)dx = \sum\limits_{k=-n}^{n}(c_k(f)\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}u(x)dx) = 2\pi\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k(f)c_k($
   $\sum\limits_{k=-n}^{n}(f*\underline{u})e^{ikx}\Big|_{x=0} \to (f'*\underline{u})(0) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\underline{u}(0-t)dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)u(t)dt$

Определение: f – обобщенная функция, если задан непрерывный функционал $\mathbb{C}^\infty \to \mathbb{R}$.

Определение: f, f_n – последовательность обобщенных функций: $f_n \to f$, если $\forall u \in \mathbb{C}^\infty \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_n u \to \int\limits_{-\pi}^{\pi} fu.$

2.59 Леммы о равномерной ограниченности сумм Фурье и об обобщенном равенстве Парсеваля

1. $f \in \widetilde{C^1}[-\pi,\pi] \Rightarrow$ ее суммы Фурье равн огр, т.е
   $\exists C : \forall n,\ \forall x\ |S_n(f,x)| < C$
2. $f \in \widetilde{C^1}[-\pi,\pi],\ g-$ изм, гл, пер, огр с равномерно огр суммами Фурье, $\exists C :$ $\forall n,\ \forall x\ |S_n(f,x)| < C$
   Тогда $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\overline{g}dx = 2\pi \sum c_n(f) * \overline{c_n(g)}-$ обобщ рав-во Пасеваля

2.60 Формула Стокса

Ω – эллиптическая, гладкая, двусторонняя поверхность, C^2-гладкое; n_0 – сторона
$\delta\Omega$ - ориентирована согласовано с n_0
(P, Q, R) – векторное поле на Ω, заданное в O - откр. : $\Omega \subset O \subset \mathbb{R}^3$
Тогда:

$$\int\limits_{\delta\Omega}(Pdx + Qdy + Rdz) = \iint\limits_{\Omega}((R_y^{'} - Q'_z)dydz + (P_z^{'} - R_x^{'})dzdx + (Q_x^{'} - P_y^{'})dxdy)$$

Доказательство:
Из соображений линейности интеграла по векторному полю достаточно проверить:

$$\int\limits_{\delta\Omega} Pdx = \iint\limits_{\Omega}(P_z^{'}dzdx - P_y^{'}dxdy)$$

Параметризуем область: $\Omega \leftrightarrow \left\langle \begin{matrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{matrix} \right\rangle$

Пусть G – наша область в координатах (u, v), L – граница Ω в новых координатах, тогда:

$\int\limits_{\delta\Omega} Pdx = \int\limits_{L} P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))(x_u^{'}du + x_v^{'}dv) = \int\limits_{L} Px_u^{'}du + Px_v^{'}dv \overset{\text{Грин}}{=}$
$\iint\limits_{G} ((P(x,y,z)x_v^{'})_u^{'} - (P(x,y,z)x_u^{'})_v^{'})dudv =$
$\iint\limits_{G} (P_z^{'}(z_u^{'}x_v^{'} - z_v^{'}x_u^{'}) - P_y^{'}(y_v^{'}x_u^{'} - y_u^{'}x_v^{'}))dudv =$
$\iint\limits_{G} P_z^{'} \begin{vmatrix} z_u^{'} & z_v^{'} \\ x_u^{'} & x_v^{'} \end{vmatrix} dudv - P_y^{'} \begin{vmatrix} x_u^{'} & x_v^{'} \\ y_u^{'} & y_v^{'} \end{vmatrix} dudv =$
$\iint\limits_{\Omega} (P_z^{'}dzdx - P_y^{'}dxdy)$
что и требовалось доказать

2.61 Формула Гаусса–Остроградского

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in G, f(x,y) \le z \le F(x,y)\}, G \subset \mathbb{R}^2, \partial G-$ гладкая кривая в $\mathbb{R}^2, F \in$ "$C'(G)$" (кавычки означают "включая границу, то есть с более широкой гладкой областью"), $\partial V-$ внешняя сторона, $R : O(V) \to \mathbb{R}$. Тогда

$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\partial V} R\, dx\, dy$$

Доказательство:
$\partial V = \Omega_F \cup \Omega_{cil} \cup \Omega_f$ (границы графика F, f и цилиндра между ними)

$\iiint\limits_{V} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{G}\, dx\, dy \int\limits_{f(x,y)}^{F(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz =$
$= \iint\limits_{G} (R(x,y,F(x,y)) - R(x,y,f(x,y)))\, dx\, dy =$ (см. пример после опр. инт. 2 рода)
$= \iint\limits_{\Omega_F} R\, dx\, dy - (-\iint\limits_{\Omega_f} R\, dx\, dy) + 0 =$ (так как проекция Ω_{cil} лежит в ∂G) Откуда эта формула?
$= \iint\limits_{\Omega_F} R\, dx\, dy + \iint\limits_{\Omega_f} R\, dx\, dy + \iint\limits_{\Omega_{cil}} R\, dx\, dy =$
$= \iint\limits_{\partial V} R\, dx\, dy$

2.62 Соленоидальность бездивергентного векторного поля

A - соленоидально $\Leftrightarrow div(A) = 0$

$A \in C^1, O$ — хорошая область.

Доказательство:

$\Rightarrow$. Тривиально : $A = rot(B)$. т.е.

$A_1 = (B_3)'_y - (B_2)'_z$, $A_2 = (B_1)'_z - (B_3)'_x$, $A_3 = (B_2)'_x - (B_1)'_y$ (система ***)

тогда $(A_1)'_x + (A_2)'_y + (A_3)'_z = 0$, чтд

$\Leftarrow$. $div(A) = 0$. Найдем B. Нужно решить относительно B систему *** (выше). Нагло примем $B_3 \equiv 0$. Тогда система будет состоять из простых уравнений:

$-(B_2)'_z = A_1$ (1), $(B_1)'_z = A_2$ (2), $(B_2)'_x - (B_1)'_y = A_3$ (3).

Из (1) : $B_2(x, y, z) = -\int_{z_0}^z A_1(x, y, z)dz + \phi(x, y)$

Из (2) : $B_1(x, y, z) = \int_{z_0}^z A_2(x, y, z)dz$ (еще одна наглость! берем аналогичное ϕ равным 0)

В (3) : $-\int_{z_0}^z (A'_1)_x dz + (\phi')_x - \int_{z_0}^z (A'_2)_y dz = A_3$.

Но т.к. $div(A) = 0$, то $\int_{z_0}^z (A_3)'_z dz + \phi'_x = A_3$ (это в последнее равенство подставили $(A_3)'_z = -(A_1)'_x - (A_2)'_y$). То есть $A_3(x, y, z) - A_3(x, y, z_0) + \phi'_x = A_3(x, y, z) \Rightarrow \phi'_x = A_3(x, y, z_0)$, ну а это значит $\phi = \int_{x_0}^x A_3(x, y, z)dx$. Мы нашли ϕ, такео ϕ найдется, подставим теперь во все равенства выше и получим верными равенства и выражения для B_1, B_2, B_3. Значит система *** для найденного B верна и значит это B таково, что $A = rot(B)$, то есть A — соленоидально! чтд

2.63 Свойства преобразования Фурье: непрерывность, ограниченность, сдвиг

Док-во:

Непрерывность: $|f(x)e^{-2\pi i<x,y>}| \leqslant |f(x)|$

Ограниченность: $|\widehat{f}(y)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^m} |f| = ||f||_1$

Сдвиг: $f_h = f(x - h), \widehat{f}_h(y) = \widehat{f}(y) \cdot e^{-2\pi i<h,y>}$

2.64 Преобразование Фурье и дифференцирование

$f \in L^1(\mathbb{R}^m)$

1. k — номер координаты, $\frac{df}{dx_k} \in L^1$, а также непрерывно $\widehat{(\frac{df}{dx_k})}(y) = 2\pi i y_k \hat{f}(y)$
2. $|x|f(x)$ — сумм. Тогда $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R}^m)$, $\forall c : \frac{d\hat{f}}{dy_k}(y) = -2\pi i(\widehat{x_k f(x)})$ (пр. Лейбница)

Доказательство:

2.64.1 Обозначения

Пусть $k = m$.
Рассмотрим $g = \frac{df}{dx_k}$, а также $(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m) = (u, t)$,
где $u = (x_1, \ldots, x_{m-1}), t = x_m$. Тогда $\frac{df}{dx_k} = \frac{df}{dt}(u, t) = g(u, t)$.

2.64.2 Утверждение: при п.в. u: $f(u, t) \to 0$ $(t \to \infty)$

Это утверждение почти очевидно: $\int_0^t g(u, \tau) d\tau = f(u, t) - f(u, 0)$,
g — сумм. в $\mathbb{R}^m$, тогда отображение $t \mapsto g(u, t)$ — сумм. п.в. u на $\mathbb{R}$ (это утверждает Теорема Фубини), т.е. $\int\limits_0^t g(u, \tau) d\tau \to \int\limits_0^{+\infty} g(u, \tau) d\tau$ (при п.в.u)
Аналогично: f — сумм в $\mathbb{R}^m$, тогда $t \mapsto f(u, t)$ — сумм в $\mathbb{R}$. То есть при п.в.u есть одновременно и предел $f(u, t \to \infty)$ и $f(u, t)$ суммируема на $\mathbb{R}$, тогда очевидно этот предел $f(u, t \to \infty) = 0$

2.64.3 Доказательство основного факта теоремы:

Докажем только пункт (1), а пункт (2) разбирается как-то так же + кукарек про пр. Лейбница
Найдем $\hat{g}$ (с помощью инт. по частям и сведения к $\hat{f}$).

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(u, t) e^{-2\pi i y_m t} dt \overset{\text{т.к. } g = f'_t}{=} f(u, t) e^{-2\pi i y_m t} \Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty} -$$

$$- \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u, t)(-2\pi i y_m) e^{-2\pi i y_m t} dt = (2\pi i y_m) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u, t) e^{-2\pi i y_m t} dt \text{ (при п.в. } u).$$

Но на самом деле мы считаем интегралы по $\mathbb{R}^m$!!! Поэтому мы только что показали следующее:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{m-1}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(u, t) e^{-2\pi i y_m t} e^{-2\pi i (u_1 y_1 + \ldots + u_{m-1} y_{m-1})} dt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{m-1}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (2\pi i y_m) f(u, t) e^{-2\pi i \langle (u,t), y \rangle} dt dy = (2\pi i y_m) \hat{f}(y), \text{ ч.т.д.}$$

2.65 Следствие о преоборазовании Фурье финитных функций

(Следствие из теоремы “56. Преобразование Фурье и дифференцирование“.)

1. $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$ – финитная ($= 0$ вне некоторой окрестности).
   Тогда $\widehat{f} \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$

   Что это за обозначение?

2. $f \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m)$
   Тогда $\forall p > 0 \quad |y|^p \widehat{f}(y)$ – сумм.

Доказательство:

1. Из финитности следует $\forall p \quad |x|^p f(x)$ – сумм.
   $\dfrac{\partial \widehat{f}}{\partial y} = -2\pi i \widehat{(x_k f)}$
   $\dfrac{\partial^2 \widehat{f}}{\partial y_k \partial y_l} = -2\pi i \dfrac{\partial}{\partial y_l} \widehat{(x_k f)} = -2\pi i(-2\pi i)(\widehat{x_l x_k f})$
   $\dots$

2. из п.1 теоремы (56) следует:

   (a) $\widehat{(\dfrac{\partial f}{\partial x_k})} = 2\pi i y_k \widehat{f}(y)$

   (b) $\forall \alpha$ – мультииндексы:
   $\widehat{(\dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha})} = (2\pi i)^{|\alpha|} y^\alpha \widehat{f}(y)$

   $\widehat{(\dfrac{\partial}{\partial x_l} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x_k})} = 2\pi i y_l \widehat{\dfrac{\partial f}{\partial x_k}}(y)$ // TODO - тут вроде надо будет пояснить, почему левая часть ограничена

2.66 Лемма "о ядре Дирихле".

Если:

1. $f \in L^1(\mathbb{R})$

2. $x \in \mathbb{R}$

Тогда: $\forall A > 0$ $I_A(f, x) = \int_{-A}^{A} \widehat{f}(y) e^{2\pi i x y} dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t) \frac{sin(2\pi A t)}{\pi t} dt$.
Доказательство:

$\chi_A := \chi_{[-A;A]}$
$I_A(f, x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)(\chi_A(y) e^{2\pi i x y}) dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)(\widehat{\chi_A e^{2\pi i x y}}) dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) \widehat{\chi_A}(y - x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{sin 2\pi A(y-}{\pi(y-x)}$

Следствие: $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, $A > 0$
Тогда $\forall \delta > 0 I_A(f,x) = \int_{-\delta}^{\delta} f(x-t)\frac{sin2\pi At}{\pi t}dt + o(1), A \to \infty$
Доказательство:
$\int_{|t|>\delta} f(x-t)\frac{sin2\pi At}{\pi t}dt \to 0$ по теореме Римана-Лебега $\frac{f(x-t)}{\pi t}$ - сумм в $\{t : |t| > \delta\}$
$|\frac{f(x-t)}{\pi t}| \le \frac{1}{\pi\delta}|f(x-t)|$
Замечание: $D_n(t) = \frac{sint}{t} + \frac{1}{2\pi}(cos(nt) + h(t)sin(nt))$

2.67 Теорема о равносходимости ряда Фурье и интеграла Фурье

Если:

1. $f \in L^1(R)$
2. $f_0 \in L^1[-\pi;\pi]$
3. $f = f_0$ в $U(x)$, где $x \in R$

Тогда в точке x: сходимость интеграла Фурье $\Leftrightarrow$ сходимость ряда Фурье и в случае сходимости $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)e^{2\pi ixy}dy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f_0)e^{i\pi x}$
Доказательство:
Проверим: $I_A(f,x) - S_{[2\pi A]}(f,x) \to 0 A \to \infty$

1. $I_A(f,x) = \int_{-\delta}^{\delta} f(x-t)\frac{\sin(2\pi At)}{\pi t}dt + o(1), A \to \infty$
2. $S_n(f,x) = \int_{-\delta}^{\delta} f(x-t)\frac{\sin(nt)}{\pi t}dt$

$2\pi A = n$ - целое, тогда проверять и ничего $2\pi A$ - нецелое. $n = [2\pi A]$ $|I_A(f,x) - I_{\frac{n}{2\pi}}(f,x)| = |\int_{-A}^{A} - \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}}| \le \int_{A-\frac{1}{2\pi}}^{A} + \int_{-A}^{-A+\frac{1}{2\pi}} \le 2 * \frac{1}{2\pi}\max_{|y|>A-\frac{1}{2\pi}|\hat{f}(y)|} \to 0$, как суммируемая функция.

2.68 Признак Дирихле–Жордана

Если:
$f \in L^1(\mathbb{R})$ или $f \in L^1[-\pi,\pi]$
$x \in \mathbb{R}$, в окружности x f имеет ограниченную вариацию.
Тогда:
$S_n(f,x) \to_{n\to\infty} 1/2 * (f(x+0) + f(x-0))$

А также $I_A(f,x)$ стремится к этому при стремлении А к бесконечности *Доказательство:*
$S_n(f,x) = \int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x-t) * \frac{sin(nt)}{\pi t} dt + o(1) = \int\limits_{0}^{\delta} \phi(t) \frac{sin(nt)}{\pi t} dt + o(1)$, где $\phi(t) = f(x-t) + f(x+t)$
Пусть дельта меньше радиуса из условия. Пусть Φ - убывающая положительная функция и $\Phi(t) = \phi(t) * \chi_{[0,\delta]}(t)$
Так как ϕ - ограниченная вариация, то она представима как разность двух убывающих функций, а из этого у нас существует $\phi(t+0)$ для любого t(глобальный признак сходимости). */*у меня это указано в качестве замечаний */*
$\int\limits_{0}^{\delta} \Phi(t) \frac{sin(nt)}{\pi t} dt = \int\limits_{0}^{\infty} \Phi(t) \frac{sin(nt)}{\pi t} dt = / * u = nt * / = \int\limits_{0}^{\infty} \Phi(u/n) \frac{sin(u)}{\pi u} du \to magic - knowledge \to \phi(0+) \int\limits_{0}^{\infty} \frac{sin(u)}{\pi u} du = 1/2 * \phi(0+)$

2.69 Лемма о Вейерштрассовской аппроксимативной единице

1. W_t- a.e. при $t \to 0$
2. $W_t(x) = \int\limits_{R^m} e^{-\pi t^2 |y|^2} e^{-2\pi i <x,y>} dy$ т.е. $V_t = e^{-\pi t^2 |x|^2}$ тогда $W_t = (V_t)\hat{}$

2.69.1 a.e Вейерштрасса

$W_t(x) = \frac{1}{t^m} e^{-\frac{\pi}{t^w} x^2} = \frac{1}{t^m} e^{-\frac{\pi}{t^w}(x_1^2 + \ldots + x_m^2)},\ x \in R^m$

2.70 Формула обращения преобразования Фурье.

$f \in L^1(R^m)$ Если $\hat{f} \in L^1(R^m)$, то при п.в. x $f(x) = \int_{R^m} f\hat{(y)} e^{2\pi i <x,y>} dy$
Замечания:
1) П.Ч.: подынт.ф. непр. по x
есть сумм. мажоранта: $|f\hat{(y)}| \Rightarrow$ П.Ч. — непрерывна по x
2) ПЧ. непр по x и при этом ф-ла вып. п.в. $\Rightarrow$ ф-ла верна в точке непр-сти f
Итого: Если $f \in C(R^m), f \in L^1(R^m), \hat{f} \in L^1(R^m)$, то ф-ла обращения вып. при всех *x*. *Доказательство:* Пусть $w_t(x) = \frac{1}{t^m} e^{\frac{-\pi |x|^2}{t^2}}$, $x \in R^m$ (t $>$ 0)
$f * w_t(x) = \int_{R^m} f(y) w_t(x-y) dy = \int_{R^m} f(y) w_t(y-x) dy$ (w_t - четная) $= \int_{R^m} f(y+x) w_t(y)$

$= \int_{R^m} f(x+y)(\hat{V_t})dy = \int_{R^m} (f(y \hat{+} x))V_t(y)dy = \int_{R^m} e^{2\pi i<x,y>} f(\hat{y})V_t(y)dy$
Итак : $f * w_t(x) = \int_{R^m} e^{-pit^2|y|^2} e^{2\pi i<x,y>} f(\hat{y})dy = I$
(замечание: т.к. w_t четное, то в интеграле, равном w_t мы можем менять знак перед x и он останется тем же. этим мы и пользовались)
$e^{-pit^2|y|^2} e^{2\pi i<x,y>} f(\hat{y}) \to e^{2\pi i<x,y>} f(\hat{y})$ при $t \to 0$. И есть сумм. мажоранта $|f(\hat{y})|$.
Значит интеграл I стремится к $\int_{R^m} e^{2\pi i<x,y>} f(\hat{y})$
Берем $t_n \to 0$
$f * w_t \to f$ в $L^1 \Rightarrow$
$f * w_{t_n} \Rightarrow f$ (по мере)
$\Rightarrow \exists n_k : f * w_{t_{n_k}} \to f$ п.в. (т. Рисса)
Поэтому $f(x) = \lim_{t_{n_k} \to 0} f * f * w_{t_{n_k}} = \int \dots \to \int_{R^m} e^{2\pi i<x,y>} f(\hat{y})$, чтд

2.71 Преобразование Фурье на классе быстро убывающих функций

$\hat{} : S \to S-$ взаимоодназанчно

2.71.1 Класс быстро убывающих функций

$S(R^m) = \{f \in C^\infty(R^m) : \forall \alpha, \beta$ - мультииндексы $\underset{x \in R^m}{sup} |x^\beta D^\alpha f(x)| < +\infty\}$

2.72 Теорема Вейерштрасса (лемму можно не доказывать)

$f \in C(R^m)\ \forall R,\ \forall \epsilon > 0\ \exists$ полином $P(x) = P(x_1, ..., x_m) : |f(x) - P(x)| < \epsilon$ при $x \in B(0, R)$

2.72.1 Лемма

1. $f-$ финитная в $R^m, Q-$ многочлен *Тогда* $f * Q-$ многочлен

2. $W_t = \frac{1}{t^m} e^{-\frac{\pi}{t^2}|x|^2},\ x \in R^m-$ это функция хорошо приближающихся многочленов в любом шаре
   $\forall R\ \forall n \exists$ многочлен P_n :
   $\forall x \in B(0, R)\ |W_t(x) - P_n(x)| \le \frac{1}{t^m n!}(\frac{\pi R^2}{t^2})^n$

Доказательство $f_t = f * W_t,\ f_t \underset{t\to 0}{\rightrightarrows} f$, фикс t $|f(x) - f_t(x)| < \epsilon$
TODO

2.73 Следствие об одновременном приближении функции и ее производных

Возможно не то следствие
$f \in C^r(R^m)$ *Тогда* $\forall R > 0,\ \forall \epsilon > 0\ \exists P$ (многоч) $\forall$ мультииндекса $k : |k| \le r :$
$|D^k f(x) - D^k P(x)| < \epsilon,\ x \in B(0, R)$