Второй коллоквиум, семестр 4

12 мая 2019 г.

Оглавление

Глава 1

Определения

1.1 Равномерная сходимость несобственного интеграла

Ты проиграл

1.2 Нормальное топологическое пространство

Ты проиграл

1.3 Финитная функция

$\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. $\exists$ шар $B : \varphi \equiv 0$ вне B. Тогда ϕ — финитная.
Множество непрерывных финитных функций обозначаем как $C_0(\mathbb{R}^m)$.

1.4 Гильбертово пространство

$\mathbb{H}$ — линейное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, в котором задано скалярное произведение, и полное относительно соответствуйющей нормы, называется Гильбертовым.

1.5 Ортогональный ряд

$x_k \in \mathbb{H}, \sum x_k$ называется ортогональным рядом, если $\forall k, l : k \neq l : x_k \perp x_l$.

1.6 Сходящийся ряд в Гильбертовом пространстве

$x_n \in \mathbb{H}$.
$\sum x_n$ сходится к x, если
$S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, $S_n \to x$ (то есть, $|S_n - x| \to 0$ — сходимость по норме).

1.7 Ортогональная система (семейство) векторов

$\{e_k\} \in \mathbb{H}$ - ортогональное семейство векторов, если $\forall k \neq l$ $e_k \perp e_l$, $\forall k$ $e_k \neq 0$.

1.8 Ортонормированная система

$\{e_k\} \in \mathbb{H}$ - ортонормированное семейство векторов, если e_k — ортогональное семейство векторов, и $\forall k$ $|e_k| = 1$.

1.9 Коффициенты Фурье

$\{e_k\}$ - ортогональное семейство векторов в $\mathbb{H}, x \in \mathbb{H}$.
$c_k(x) = \dfrac{\langle x, e_k \rangle}{|e_k|^2}$ называются коэффициентами Фурье вектора x по ортогональной системе $\{e_k\}$.

1.10 Ряд Фурье в Гильбертовом пространстве

$\sum c_k(x) \cdot e_k$ называется рядом Фурье вектора x по ортогональной системе $\{e_k\}$.

1.11 Базис, полная, замкнутая ОС

$\{e_k\}$ — ортогональная система в $\mathbb{H}$.

1. $\{e_k\}$ — **базис**, если $\forall x \in \mathbb{H}$ $\exists c_k$, что $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k \cdot e_k$
2. $\{e_k\}$ — **полная** О.С., если $(\forall k$ $z \perp e_k) \Rightarrow z = 0$.
3. $\{e_k\}$ — **замкнутая** О.С., если $\forall x \in \mathbb{H}$ $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |c_k(x)|^2 \cdot ||e_k||^2 = ||x||^2$.

1.12 Измеримое множество на элементарной двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$

$M \subset R^3$ – простое 2-мерное многообразие, C^1 гладкости.
$\phi : \underset{\text{откр. обл.}}{O} \subset R^2 \to R^3$, $\phi \in C^1$ – гомеофорфизм, $\phi(O) = M$
$E \subset M$ – изм. по Лебегу, если $\phi^{-1}(E)$ – изм. по Лебегу в R^2

1.13 Мера Лебега на простой двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$

$S(E) := \iint\limits_{\phi^{-1}(E)} |\phi'_u \times \phi'_v| dudv$ – взвеш. образ меры Лебега отн. ϕ. Значит это мера на $\mathbb{A}_M$

1.14 Поверхностный интеграл первого рода

M – простое, гл, 2-мерное в R^3, ϕ – параметризация
f – изм. отн. S (см. выше), $f > 0$ (или f – суммируем. по S)
Тогда: $\int_M f dS$ – называет инт. первого рода функ. f по поверхности M

1.15 Кусочно-гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$

$M \subset \mathbb{R}^3$ называется кусочно-гладкой, если M представляет собой объединение:

- конечного числа простых гладких поверхностей
- конечного числа простых гладких дуг
- конечного числа точек

1.16 Тригонометрический ряд

- $$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

  (где a_i, b_i – коэффициенты ряда).

- Другая форма:
$$\sum_{k=\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$
Тогда $S_n := \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$.

1.17 Коэффициенты Фурье функции

- $$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \ dx$$
- $$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \ dx$$
- $$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \ dx$$

1.18 Класс Липшица с константой М и показателем альфа

Ты проиграл

1.19 Сторона поверхности

Сторона (простой) гладкой двумерной поверхности — непрерывное поле единичных нормалей. Поверхность, для которой существует сторона, называется двусторонней. Если же стороны не существует, она называется односторонней.

1.20 Задание стороны поверхности с помощью касательных реперов

F_1, F_2 – два касательных векторных поля к поверхности M.
$\forall p \in M \quad F_1(p), F_2(p)$ – Л.Н.З. касательные векторы.
Тогда поле нормалей стороны определяется, как $n := F_1 \times F_2$

Репéр - пара векторов из $F_1 \times F_2$.

1.21 Интеграл II рода

M — простая гладкая двусторонняя двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$.
n_0 — фиксированная сторона (одна из двух).
$F : M \to \mathbb{R}^3$ – векторное поле.

Тогда интегралом II рода назовем $\int\limits_M \langle F, n_0 \rangle ds$

Замечания

1. Смена стороны эквивалентна смене знака.

2. Не зависит от параметризации.

3. $F = (P, Q, R)$.

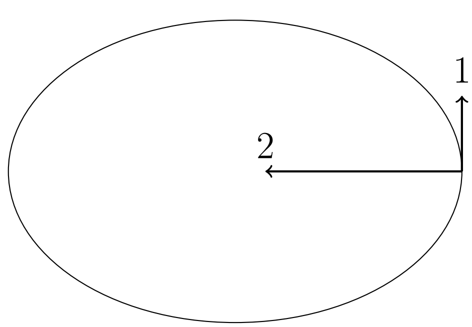
   Тогда интеграл имеет вид $\iint Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$.

   NB: $Qdxdz = -Qdzdx$.

1.22 Ориентация контура, согласованная со стороной поверхности

Ориентация контура согласована со стороной поверхности, если она задает эту сторону.

Пояснение: Рассмотрим некоторый контур (замкнутую петлю) и точку на нем. Построим два касательных вектора к контуру в этой точке: первый — снаружи от контура (задает направление «движения» по петле), второй — внутри контура. Тогда будем называть такую ориентацию согласованной со стороной, если направление векторного произведения первого и второго векторов в точке совпадает с направлением нормали к поверхности.



1.23 Ядро Дирихле, ядро Фейера

1.23.1 Ядро Дирихле

$$D_n(t) = \frac{1}{\pi}(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt)$$

1.23.2 Ядро Фейера

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(t)$$

1.24 Свертка

$f, K \in L_1[-\pi, \pi]$ – пеорид.

$$(f * K)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt$$

1.25 Аппроксимативная единица. (а. е.)

Пояснения: нужна 1-ца по свертке, но это не совсем функция, поэтому зададим её как предел последовательности.

$D \subset R, h_0$ – предельная точка D в $\overline{R}$, тогда $\{K_h\}_{h \in D}$ – а. е. если:

AE1: $\forall h \in D \;\; K_h \in L_1[-\pi, \pi] \;\; \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_h = 1$

AE2: $\exists M \; \forall h \;\; \int\limits_{-\pi}^{\pi} |K_h| \leq M$

AE3: $\forall \delta \in (0, \pi) \;\; \int\limits_{E_\delta} |K_h| \underset{h \to h_0}{\to} 0$, где $E_\delta = [-\pi, \pi] \setminus [h_0 - \delta, h_0 + \delta]$

1.26 Усиленная аппроксимативная единица.

Изменяем свойство AE3, на AE3':

$\forall h \; K_h \in L_\infty[-\pi, \pi]; \;\; \forall \delta \in (0, \pi) \;\;\; \underset{t \in E_\delta}{\operatorname{ess\,sup}} |K_h(t)| \underset{h \to h_0}{\to} 0$

1.27 Метод суммирования средними арифметическими

$\sum a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} \cdot \sum\limits_{k=0}^{n} S_k$

1.28 Суммы Фейера.

$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} S_k(f(x)) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\Phi_n(t)dt$

1.29 Ротор, дивергенция векторного поля

$F = (P, Q, R)$ — векторное поле в $\mathbb{R}^3$.
$rot\ F = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y)$ – ротор, вихрь
$div\ F = P'_x + Q'_y + R'_z$. Многомерный случай определяется аналогично.

1.30 Соленоидальное векторное поле

Векторное поле A — соленоидальное, если $\exists$ векторное поле $B : rot\ B = A$. Тогда B называется векторным потенциалом поля A.

1.31 Бескоординатное определение ротора и дивергенции

$rot\ F$ — это такое векторное поле, что $\forall a\ \forall n_0 (rotF(a))_{n_0} = \lim\limits_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{\partial B_r} F_l dl$
где B_r – круговой контур, n_0 – нормаль контура, F_l – проекция на касательное направление контура.
Пояснение: $\frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{\partial B_r} F_l dl = \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{B_r} \langle rot\ F, n_0 \rangle dS \underset{r\approx 0}{\approx} rotF(a)$
$divF(a) = \lim\limits_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_3(B(a,r))} \iiint\limits_{B(a,r)} divF\, dx\, dy\, dz = \lim\limits_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_3(B(a,r))} \iint\limits_{\partial B(a,r)} \langle F, n_0 \rangle dS$

Глава 2

Теоремы

2.1 Перестановка двух предельных переходов. Предельный переход в несобственном интеграле.

Ты проиграл

2.2 Вычисление интеграла Дирихле

Ты проиграл

2.3 Теорема об интегрировании несобственного интеграла по параметру

Ты проиграл

2.4 Правило Лейбница для несобственных интегралов

Ты проиграл

2.5 Теорема о вычислении интеграла по мере Бореля—Стилтьеса (с леммой)

Ты проиграл

2.6 Плотность в L^p множества ступенчатых функций

Ты проиграл

2.7 Лемма Урысона

X — нормальное топологическое пространство, то есть:

1. Все одноточечные множества замкнуты.
2. Любые два непересекающихся замкнутых множества отделимы окрестностями: A, B — замкнуты, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \exists A_1, B_1$ — открыты, $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, $A \subset A_1$, $B \subset B_1$.

F_0, F_1 — замкнуты, $F_0 \cap F_1 = \emptyset$.
Тогда: $\exists f : X \to [0, 1]$, непрерывная (в смысле топологического определения непрерывности), равная 0 на F_0 и равная 1 на F_1.

2.8 Плотность в L^p множества финитных непрерывных функций

$(\mathbb{R}^m, \mathbb{A}, \lambda_m)$

$E \subset \mathbb{R}^m$— изм. Тогда множество финитных непрерывных функций плотно в $L_p(E, \lambda_m), p \in [1; +\infty]$

2.9 Теорема о непрерывности сдвига

Обозначения:
$f_h := f(x+h)$
$[0,T] \subset \mathbb{R}$. Будем считать, что $L_p[0,T]$ состоит из T-периодических функций $\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$.
Отсюда $\int_0^T f = \int_a^{a+T} f$.
$\widetilde{C}[0,T] = f \in C[0,T] : f(0) = f(T).||f|| = max_{x\in[0,T]}|f(x)|$
NB: $f \in \widetilde{C}[0,T] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна (по т. Кантора).
Формулировка:

1. $f-$ рвнм. непр. на $\mathbb{R}^m$. Тогда $||f - f_h||_\infty \to 0$ при $h \to 0$.
2. $1 \le p < +\infty$ $f \in L_p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$. Тогда $||f - f_h||_p \to 0$.
3. $f \in \widetilde{C}[0,T]$. Тогда $||f - f_h||_\infty \to 0$.
4. $1 \le p < +\infty$ $f \in L_p[0;T]$. Тогда $||f - f_h||_p \to 0$.

2.10 Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве

1. $x_n \to x, y_n \to y \Rightarrow \langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$
2. $\sum x_k$ сходится, тогда $\forall y : \sum\langle x_k, y\rangle = \langle\sum x_k, y\rangle$
3. $\sum x_k$ - ортогональный ряд, тогда $\sum x_k$ - сх $\Leftrightarrow \sum |x_k|^2$ сходится, при этом $|\sum x_k|^2 = \sum |x_k|^2$

2.11 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе

$\{e_k\}$ — ортогональная система в $\mathbb{H}$, $x \in \mathbb{H}, x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k \cdot e_k$
Тогда:

1. $\{e_k\}$ — Л.Н.З.
2. $c_k = \dfrac{\langle x, e_k\rangle}{||e_k||^2}$

3. $c_k \cdot e_k$ — проекция x на прямую $\{te_k \mid t \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$)$\}$
   Иными словами, $x = c_k \cdot e_k + z$, где $z \perp e_k$

2.12 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя

$\{e_k\}$ — ортогональная система в $\mathbb{H}$, $x \in \mathbb{H}, n \in \mathbb{N}$
$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(x) e_k$, $\mathcal{L} = Lin(e_1, e_2, \dots e_n) \subset \mathbb{H}$
Тогда:

1. S_n — орт. проекция x на пр-во $\mathcal{L}$. Иными словами $x = S_n + z$, $z \perp \mathcal{L}$
2. S_n — наилучшее приближение x в $\mathcal{L}$ ($||x - S_n|| = \min\limits_{y \in \mathcal{L}} ||x - y||$)
3. $||S_n|| \leqslant ||x||$

2.13 Теорема Рисса – Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля

$\{e_k\}$ – орт. сист. в $\mathbb{H}$, $x \in \mathbb{H}$

Тогда:

1. Ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k$ сходится в $\mathbb{H}$
2. $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k e_k + z \Rightarrow \forall k \; z \perp e_k$
3. $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k e_k \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$

2.14 Теорема о характеристике базиса

$\{e_k\}$ — ортогональная система в $\mathbb{H}$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\{e_1\}$ — базис.

2. $\forall x, y \in \mathbb{H} \quad \langle x, y\rangle = \sum c_k(x)\overline{c_k(y)}\|e_k\|^2$ (обобщенное уравнение замкнутости)

3. $\{e_k\}$ — замкнутая система.

4. $\{e_k\}$ — полная система.

5. $Lin(e_1, e_2, \ldots)$ — плотна в $\mathbb{H}$

2.15 Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда

Пусть $S_n \to f$ в $L_1(-\pi, \pi]$

Тогда:

$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\ dx \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\ dx \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

$c_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\ dx \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

2.16 Теорема Римана-Лебега

$E \subset \mathbb{R}^1$ – измеримо

$f \in L_1(E, \lambda)$, λ- мера Лебега

Тогда:

$$\int\limits_E f(x)e^{ikx}dx \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

$$\int\limits_E f(x)cos(kx)dx \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

$$\int\limits_E f(x)sin(kx)dx \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

2.17 Три следствия об оценке коэффициентов Фурье

Ты проиграл

2.18 Принцип локализации Римана

$f, G \in L_1[-\pi, \pi]$
$x_0 \in R, \delta > 0$
$f \equiv g$ на $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
<u>Тогда:</u>
$S_n(f, x_0) - S_n(g, x_0) \to 0$

2.19 Признак Дини. Следствия

$f \in L_1[-\pi, \pi]$
$x_0 \in R$
$S \in R$
(*) $\int\limits_0^\pi \frac{|f(x_0+t)-2S+f(x_0-t)|}{t}dt$ сходится
<u>Тогда:</u>
$S_n(f, x_0) \to S$

<u>Следствие1:</u>
$\exists$ 4 предела
$\lim_{t\to\pm 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0\pm 0)}{t}$
<u>Тогда:</u>
Ряд фурье сходится в x_0 как $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$

<u>Следствие2:</u>
$f \in L_1[-\pi, \pi]$
f непрерывна в x_0
$\exists$ конечные $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$
<u>Тогда:</u>
$S_n(f, x_0) \to f(x_0)$

2.20 Корректность определения свертки

$f, K \in L_1[-\pi, \pi]$
Тогда: $(f * K)$ – корректно заданная фукнция из $L_1[-\pi, \pi]$

2.21 Свойства свертки функции из L^p с фукнцией из L^q

$f \in L^p$; $K \in L^q$
$1 \leqslant p \leqslant +\infty$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
Тогда:

- $f * K$ – непр. на $[-\pi, \pi]$
- $||f * K||_\infty \leqslant ||K||_q ||f||_p$

2.22 Теорема о свойствах аппроксимативной единицы

1. $f \in \widetilde{C}[-\pi, \pi] \Rightarrow (f * K_h) \underset{h \to h_0}{\rightrightarrows} f$, где свертка $(f * K)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt$
2. $f \in L^1[-\pi, \pi] \Rightarrow ||(f * K_h) - f||_1 \underset{h \to h_0}{\to} 0$
3. K_h - усил. апрокс ед. f - непр. в точке x. Тогда $(f * K_h)(x) \to f(x)$

   Замеч.) пункт 2 верен для L_p

2.23 Теорема Фейера

1. $f \in \widetilde{C}[\pi, -\pi]$, тогда $\sigma_n \underset{n \to +\infty}{\rightrightarrows} f$
2. $f \in L_p[\pi, -\pi], (1 \leq p < +\infty)$, тогда $||\sigma_n(f) - f||_p \underset{n \to +\infty}{\to} 0$
3. $f \in L_1[\pi, -\pi], f$- непр. в т. x, тогда $\sigma_n(f, x) \underset{n \to +\infty}{\to} f(x)$

2.24 Полнота тригонометрической системы и другие следствия теоремы Фейера

Ты проиграл

2.25 Лемма об оценке интеграла ядра Дирихле

1. $D_n(t) = \frac{\sin nt}{\pi t} + \frac{1}{2\pi}(\cos nt + h(t)\sin nt)$, где $h(t)$ не зависит от n и $|h(t)| \leq 1$ на $[-\pi; \pi]$.

2. $\forall x, |x| < 2\pi \ |\int_0^x D_n(t)dt| < 2$

2.26 Формула Грина

$D \subset \mathbb{R}^2$ – компакт, связное, одновясвязное, ориентировано
$\delta D - C^2$-гладкая кривая, тоже ориентировано
D и δD ориентированы согласовано
P, Q – функции, гладкие в открытой области $O \supset D$
Тогда:

$$\iint\limits_D (\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y})dxdy = \int\limits_{\delta D} (P(x,y)dx + Q(x,y))dy$$

2.27 Теорема об интегрировании ряда Фурье

$f \in L_1[-\pi; \pi]$.
Тогда $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) \int_a^b e^{ikx}dx$$

Сумма по $k \in \mathbb{Z}$ понимается в смысле главного значения ($\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n}$).
Замечание: Ряд Фурье f может всюду расходиться, но ряд интеграла всегда сходится.

2.28 Следствие о синус-коэффициентах интегрируемой функции

Ты проиграл

2.29 Лемма о слабой сходимости сумм Фурье

Ты проиграл

2.30 Леммы о равномерной ограниченности сумм Фурье и об обобщенном равенстве Парсеваля

Ты проиграл

2.31 Формула Стокса

Ω – эллиптическая, гладкая, двусторонняя поверхность, C^2-гладкое; n_0 – сторона
$\delta\Omega$ - ориентирована согласовано с n_0
(P, Q, R) – векторное поле на Ω, заданное в O - откр. : $\Omega \subset O \subset \mathbb{R}^3$
Тогда:

$$\int\limits_{\delta\Omega}(Pdx + Qdy + Rdz) = \iint\limits_{\Omega}((R_y^{'} - Q'_z)dydz + (P_z^{'} - R_x^{'})dzdx + (Q_x^{'} - P_y^{'})dxdy)$$

2.32 Формула Гаусса–Остроградского

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in G, f(x, y) \leq z \leq F(x, y)\}, G \subset \mathbb{R}^2, \partial G-$ гладкая кривая в $\mathbb{R}^2, F \in$ "$C'(G)$" (кавычки означают "включая границу, то есть с более широкой гладкой областью"), $\partial V-$ внешняя сторона, $R : O(V) \to \mathbb{R}$. Тогда

$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\partial V} R\, dx\, dy$$

2.33 Соленоидальность бездивергентного векторного поля

A - соленоидально $\Leftrightarrow div(A) = 0$
$A \in C^1, O$ — хорошая область.