

1 Аппроксимативная единица. (а. е.)

Пояснения: нужна 1-ца по свертке, но это не совсем функция, поэтому зададим её как предел последовательности.

$D \subset R, h_0$ – предельная точка D в \overline{R} , тогда $\{K_h\}_{h \in D}$ – а. е. если:

$$\text{AE1: } \forall h \in D \quad K_h \in L_1[-\pi, \pi] \quad \int_{-\pi}^{\pi} K_h = 1$$

$$\text{AE2: } \exists M \forall h \quad \int_{-\pi}^{\pi} |K_h| \leq M$$

$$\text{AE3: } \forall \delta \in (0, \pi) \quad \int_{E_\delta} |K_h| \xrightarrow{h \rightarrow h_0} 0, \text{ где } E_\delta = [-\pi, \pi] \setminus [h_0 - \delta, h_0 + \delta]$$

2 Базис, полная, замкнутая ОС

$\{e_k\}$ — ортогональная система в \mathbb{H} .

1. $\{e_k\}$ — **базис**, если $\forall x \in \mathbb{H} \exists c_k$, что $x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \cdot e_k$
2. $\{e_k\}$ — **полная** О.С., если $(\forall k \ z \perp e_k) \Rightarrow z = 0$.
3. $\{e_k\}$ — **замкнутая** О.С., если $\forall x \in \mathbb{H} \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(x)|^2 \cdot \|e_k\|^2 = \|x\|^2$.

3 Бескоординатное определение ротора и дивергенции

$\text{rot } F$ — это такое векторное поле, что $\forall a \forall n_0 (\text{rot } F(a))_{n_0} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial B_r} F_l dl$

где B_r — круговой контур, n_0 — нормаль контура, F_l — проекция на касательное направление контура.

$$\text{Пояснение: } \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial B_r} F_l dl = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{B_r} \langle \text{rot } F, n_0 \rangle dS \approx_{r \approx 0} \text{rot } F(a)$$

$$\text{div } F(a) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_3(B(a,r))} \iiint_{B(a,r)} \text{div } F \, dx \, dy \, dz = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_3(B(a,r))} \iint_{\partial B(a,r)} \langle F, n_0 \rangle dS$$

4 Вычисление интеграла Дирихле

Ты проиграл

5 Гильбертово пространство

H — линейное пространство над \mathbb{R} или \mathbb{C} , в котором задано скалярное произведение, и полное относительно соответствующей нормы, называется Гильбертовым.

6 Задание стороны поверхности с помощью касательных реперов

F_1, F_2 — два касательных векторных поля к поверхности M .

$\forall p \in M \quad F_1(p), F_2(p)$ — Л.Н.З. касательные векторы.

Тогда поле нормалей стороны определяется, как $n := F_1 \times F_2$

Репер — пара векторов из $F_1 \times F_2$.

7 Измеримое множество на элементарной двумерной поверхности в \mathbb{R}^3

$M \subset \mathbb{R}^3$ — простое 2-мерное многообразие, C^1 гладкости.

$\phi: \underset{\text{откр. обл.}}{O} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \phi \in C^1$ — гомеоморфизм, $\phi(O) = M$

$E \subset M$ — изм. по Лебегу, если $\phi^{-1}(E)$ — изм. по Лебегу в \mathbb{R}^2

8 Интеграл II рода

M — простая гладкая двусторонняя двумерная поверхность в \mathbb{R}^3 .

n_0 — фиксированная сторона (одна из двух).

$F: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ — векторное поле.

Тогда интегралом II рода назовем $\int_M \langle F, n_0 \rangle ds$

Замечания

1. Смена стороны эквивалентна смене знака.
2. Не зависит от параметризации.

3. $F = (P, Q, R).$

Тогда интеграл имеет вид $\iint Pdydz + Qdzdx + Rdx dy.$

NB: $Qdx dz = -Qdz dx.$

9 Класс Липшица с константой М и показателем альфа

$$E \in \langle a, b \rangle Lip_M^\alpha(E) = \{f : \forall x, y \in E : |F(x) - F(y)| \leq M|x - y|^\alpha\}$$

10 Корректность определения свертки

$$f, K \in L_1[-\pi, \pi]$$

Тогда: $(f * K)$ – корректно заданная функция из $L_1[-\pi, \pi]$

11 Коэффициенты Фурье

$\{e_k\}$ - ортогональное семейство векторов в $\mathbb{H}, x \in \mathbb{H}.$

$c_k(x) = \frac{\langle x, e_k \rangle}{|e_k|^2}$ называются коэффициентами Фурье вектора x по ортогональной системе $\{e_k\}.$

12 Коэффициенты Фурье функции

•

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx$$

•

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

•

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx$$

13 Кусочно-гладкая поверхность в \mathbb{R}^3

$M \subset \mathbb{R}^3$ называется кусочно-гладкой, если M представляет собой объединение:

- конечного числа простых гладких поверхностей
- конечного числа простых гладких дуг
- конечного числа точек

14 Лемма Урысона

X — нормальное топологическое пространство, то есть:

1. Все одноточечные множества замкнуты.
2. Любые два непересекающихся замкнутых множества отделимы окрестностями:
 A, B — замкнуты, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \exists A_1, B_1$ — открыты, $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, $A \subset A_1$, $B \subset B_1$.

F_0, F_1 — замкнуты, $F_0 \cap F_1 = \emptyset$.

Тогда: $\exists f : X \rightarrow [0, 1]$, непрерывная (в смысле топологического определения непрерывности), равная 0 на F_0 и равная 1 на F_1 .

15 Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда

Пусть $S_n \rightarrow f$ в $L_1(-\pi, \pi]$

Тогда:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$
$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

16 Лемма о слабой сходимости сумм Фурье

Ты проиграл

17 Лемма об оценке интеграла ядра Дирихле

1. $D_n(t) = \frac{\sin nt}{\pi t} + \frac{1}{2\pi}(\cos nt + h(t) \sin nt)$, где $h(t)$ не зависит от n и $|h(t)| \leq 1$ на $[-\pi; \pi]$.

2. $\forall x, |x| < 2\pi \quad \left| \int_0^x D_n(t) dt \right| < 2$

18 Леммы о равномерной ограниченности сумм Фурье и об обобщенном равенстве Парсеваля

Ты проиграл

19 Мера Лебега на простой двумерной поверхности в \mathbb{R}^3

$S(E) := \iint_{\phi^{-1}(E)} |\phi'_u \times \phi'_v| du dv$ – взвеш. образ меры Лебега отн. ϕ . Значит это мера на \mathbb{A}_M

20 Метод суммирования средними арифметически-ми

$$\sum a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^n S_k$$

21 Нормальное топологическое пространство

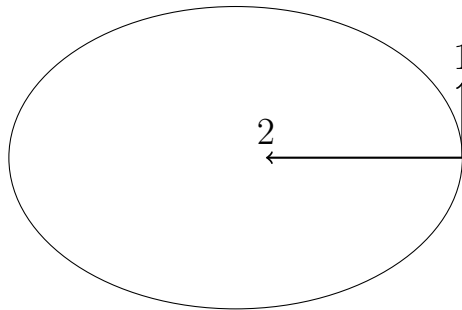
$\mathfrak{R}^m, F_1, F_2 \subset \mathfrak{R}^m$ – замкнутое подмножество и не пересек,

Тогда $\exists U(F_1), U(F_2)$ – откp. мн-ва: $F_1 \subset U(F_1), F_2 \subset U(F_2), U(F_1) \cap U(F_2) = \emptyset$

22 Ориентация контура, согласованная со стороной поверхности

Ориентация контура согласована со стороной поверхности, если она задает эту сторону.

Пояснение: Рассмотрим некоторый контур (замкнутую петлю) и точку на нем. Построим два касательных вектора к контуру в этой точке: первый — снаружи от контура (задает направление «движения» по петле), второй — внутри контура. Тогда будем называть такую ориентацию согласованной со стороной, если направление векторного произведения первого и второго векторов в точке совпадает с направлением нормали к поверхности.



23 Ортогональная система (семейство) векторов

$\{e_k\} \in \mathbb{H}$ - ортогональное семейство векторов, если $\forall k \neq l \ e_k \perp e_l, \forall k \ e_k \neq 0$.

24 Ортогональный ряд

$x_k \in \mathbb{H}, \sum x_k$ называется ортогональным рядом, если $\forall k, l : k \neq l : x_k \perp x_l$.

25 Ортонормированная система

$\{e_k\} \in \mathbb{H}$ - ортонормированное семейство векторов, если e_k — ортогональное семейство векторов, и $\forall k \ |e_k| = 1$.

26 Перестановка двух предельных переходов. Предельный переход в несобственном интеграле.

Ты проиграл

27 Плотность в L^p множества ступенчатых функций

Ты проиграл

28 Плотность в L^p множества финитных непрерывных функций

$(\mathbb{R}^m, \mathbb{A}, \lambda_m)$

$E \subset \mathbb{R}^m$ — изм. Тогда множество финитных непрерывных функций плотно в $L_p(E, \lambda_m)$, $p \in [1; +\infty]$

29 Поверхностный интеграл первого рода

M — простое, гл, 2-мерное в R^3 , ϕ — параметризация

f — изм. отн. S (см. выше), $f > 0$ (или f — суммируем. по S)

Тогда: $\int_M f dS$ — называет инт. первого рода функ. f по поверхности M

30 Полнота тригонометрической системы и другие следствия теоремы Фейера

Ты проиграл

31 Правило Лейбница для несобственных интегралов

Ты проиграл

32 Признак Дини. Следствия

$$f \in L_1[-\pi, \pi]$$

$$x_0 \in R$$

$$S \in R$$

$$(*) \int_0^\pi \frac{|f(x_0+t)-2S+f(x_0-t)|}{t} dt \text{ сходится}$$

Тогда:

$$S_n(f, x_0) \rightarrow S$$

Следствие1:

\exists 4 предела

$$\lim_{t \rightarrow \pm 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0 \pm 0)}{t}$$

Тогда:

$$\text{Ряд фурье сходится в } x_0 \text{ как } \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

Следствие2:

$$f \in L_1[-\pi, \pi]$$

f непрерывна в x_0

\exists конечные $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$

Тогда:

$$S_n(f, x_0) \rightarrow f(x_0)$$

33 Принцип локализации Римана

$$f, G \in L_1[-\pi, \pi]$$

$$x_0 \in R, \delta > 0$$

$$f \equiv g \text{ на } (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Тогда:

$$S_n(f, x_0) - S_n(g, x_0) \rightarrow 0$$

34 Равномерная сходимость несобственного интеграла

$$I(y) \text{ - п.с. на мн-ве } Y, \int_A^B f(x, y) dx \xrightarrow{B \rightarrow b_0} Y(y) \text{ т.е.} \\ \Leftrightarrow \sup_{Y \in y} \left| \int_A^B f(x, y) dx \right| \xrightarrow{B \rightarrow b \rightarrow 0} 0$$

35 Ротор, дивергенция векторного поля

$F = (P, Q, R)$ — векторное поле в \mathbb{R}^3 .

$\operatorname{rot} F = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y)$ — ротор, вихрь

$\operatorname{div} F = P'_x + Q'_y + R'_z$. Многомерный случай определяется аналогично.

36 Ряд Фурье в Гильбертовом пространстве

$\sum c_k(x) \cdot e_k$ называется рядом Фурье вектора x по ортогональной системе $\{e_k\}$.

37 Свертка

$f, K \in L_1[-\pi, \pi]$ — пеорид.

$$(f * K)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt$$

38 Свойства свертки функции из L^p с функцией из L^q

$f \in L^p; K \in L^q$

$$1 \leq p \leq +\infty; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Тогда:

- $f * K$ — непр. на $[-\pi, \pi]$
- $\|f * K\|_{\infty} \leq \|K\|_q \|f\|_p$

39 Следствие о синус-коэффициентах интегрируемой функции

Ты проиграл

40 Соленоидальное векторное поле

Векторное поле A — соленоидальное, если \exists векторное поле $B : \operatorname{rot} B = A$. Тогда B называется векторным потенциалом поля A .

41 Соленоидальность бездивергентного векторного поля

A - соленоидально $\Leftrightarrow \operatorname{div}(A) = 0$

$A \in C^1, O$ — хорошая область.

42 Сторона поверхности

Сторона (простой) гладкой двумерной поверхности — непрерывное поле единичных нормалей. Поверхность, для которой существует сторона, называется двусторонней. Если же стороны не существует, она называется односторонней.

43 Суммы Фейера.

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \Phi_n(t) dt$$

44 Сходящийся ряд в Гильбертовом пространстве

$x_n \in \mathbb{H}$.

$\sum x_n$ сходится к x , если

$S_n := \sum_{k=1}^n x_k, S_n \rightarrow x$ (то есть, $|S_n - x| \rightarrow 0$ — сходимость по норме).

45 Теорема Римана-Лебега

$E \subset \mathbb{R}^1$ – измеримо

$f \in L_1(E, \lambda)$, λ - мера Лебега

Тогда:

$$\begin{aligned}\int_E f(x)e^{ikx} dx &\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0 \\ \int_E f(x)\cos(kx) dx &\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0 \\ \int_E f(x)\sin(kx) dx &\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0\end{aligned}$$

46 Теорема Рисса – Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля

$\{e_k\}$ – орт. сист. в \mathbb{H} , $x \in \mathbb{H}$

Тогда:

1. Ряд Фурье $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x)e_k$ сходится в \mathbb{H}
2. $x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k + z \Rightarrow \forall k \ z \perp e_k$
3. $x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$

47 Теорема Фейера

1. $f \in \tilde{C}[\pi, -\pi]$, тогда $\sigma_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$
2. $f \in L_p[\pi, -\pi], (1 \leq p < +\infty)$, тогда $\|\sigma_n(f) - f\|_p \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$
3. $f \in L_1[\pi, -\pi], f$ - непр. в т. x , тогда $\sigma_n(f, x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$

48 Теорема о вычислении интеграла по мере Бореля—Стилтьеса (с леммой)

Ты проиграл

49 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе

$\{e_k\}$ — ортогональная система в \mathbb{H} , $x \in \mathbb{H}, x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \cdot e_k$

Тогда:

1. $\{e_k\}$ — Л.Н.З.

$$2. c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$$

3. $c_k \cdot e_k$ — проекция x на прямую $\{te_k \mid t \in \mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C})\}$

Иными словами, $x = c_k \cdot e_k + z$, где $z \perp e_k$

50 Теорема о непрерывности сдвига

Обозначения:

$$f_h := f(x + h)$$

$[0, T] \subset \mathbb{R}$. Будем считать, что $L_p[0, T]$ состоит из T -периодических функций $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Отсюда $\int_0^T f = \int_a^{a+T} f$.

$$\tilde{C}[0, T] = f \in C[0, T] : f(0) = f(T). \|f\| = \max_{x \in [0, T]} |f(x)|$$

NB: $f \in \tilde{C}[0, T] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна (по т. Кантора).

Формулировка:

1. f — рвнм. непр. на \mathbb{R}^m . Тогда $\|f - f_h\|_\infty \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

2. $1 \leq p < +\infty$ $f \in L_p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$. Тогда $\|f - f_h\|_p \rightarrow 0$.

3. $f \in \tilde{C}[0, T]$. Тогда $\|f - f_h\|_\infty \rightarrow 0$.

4. $1 \leq p < +\infty$ $f \in L_p[0; T]$. Тогда $\|f - f_h\|_p \rightarrow 0$.

51 Теорема о свойствах аппроксимативной единицы

1. $f \in \tilde{C}[-\pi, \pi] \Rightarrow (f * K_h) \xrightarrow{h \rightarrow h_0} f$, где свертка $(f * K)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt$
 2. $f \in L^1[-\pi, \pi] \Rightarrow \|(f * K_h) - f\|_1 \xrightarrow{h \rightarrow h_0} 0$
 3. K_h - усил. апрокс ед. f - непр. в точке x . Тогда $(f * K_h)(x) \rightarrow f(x)$
- Замеч.) пункт 2 верен для L_p

52 Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве

1. $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \Rightarrow \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$
2. $\sum x_k$ сходится, тогда $\forall y : \sum \langle x_k, y \rangle = \langle \sum x_k, y \rangle$
3. $\sum x_k$ - ортогональный ряд, тогда $\sum x_k$ - сх $\Leftrightarrow \sum |x_k|^2$ сходится, при этом $|\sum x_k|^2 = \sum |x_k|^2$

53 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя

$\{e_k\}$ — ортогональная система в \mathbb{H} , $x \in \mathbb{H}, n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=1}^n c_k(x) e_k, \quad \mathcal{L} = \text{Lin}(e_1, e_2, \dots, e_n) \subset \mathbb{H}$$

Тогда:

1. S_n — орт. проекция x на пр-во \mathcal{L} . Иными словами $x = S_n + z$, $z \perp \mathcal{L}$
2. S_n — наилучшее приближение x в \mathcal{L} ($\|x - S_n\| = \min_{y \in \mathcal{L}} \|x - y\|$)
3. $\|S_n\| \leq \|x\|$

54 Теорема о характеристике базиса

$\{e_k\}$ — ортогональная система в \mathbb{H}

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\{e_k\}$ — базис.
2. $\forall x, y \in \mathbb{H} \quad \langle x, y \rangle = \sum c_k(x) \overline{c_k(y)} \|e_k\|^2$ (обобщенное уравнение замкнутости)
3. $\{e_k\}$ — замкнутая система.
4. $\{e_k\}$ — полная система.
5. $\text{Lin}(e_1, e_2, \dots)$ — плотна в \mathbb{H}

55 Теорема об интегрировании несобственного интеграла по параметру

Ты проиграл

56 Теорема об интегрировании ряда Фурье

$f \in L_1[-\pi; \pi]$.

Тогда $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) \int_a^b e^{ikx} dx$$

Сумма по $k \in \mathbb{Z}$ понимается в смысле главного значения $(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n)$.

Замечание: Ряд Фурье f может всюду расходиться, но ряд интеграла всегда сходится.

57 Три следствия об оценке коэффициентов Фурье

Ты проиграл

58 Тригонометрический ряд

•

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

(где a_i, b_i – коэффициенты ряда).

• Другая форма:

$$\sum_{k=\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

Тогда $S_n := \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}$.

59 Усиленная аппроксимативная единица.

Изменяем свойство АЕЗ, на АЕЗ':

$$\forall h \ K_h \in L_{\infty}[-\pi, \pi]; \ \forall \delta \in (0, \pi) \ \operatorname{ess\,sup}_{t \in E_{\delta}} |K_h(t)| \xrightarrow{h \rightarrow h_0} 0$$

60 Финитная функция

$\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. \exists шар $B : \varphi \equiv 0$ вне B . Тогда ϕ – финитная.

Множество непрерывных финитных функций обозначаем как $C_0(\mathbb{R}^m)$.

61 Формула Гаусса–Остроградского

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in G, f(x, y) \leq z \leq F(x, y)\}$, $G \subset \mathbb{R}^2$, ∂G – гладкая кривая в \mathbb{R}^2 , $F \in "C'(G)"$ (кавычки означают "включая границу, то есть с более широкой гладкой областью"), ∂V – внешняя сторона, $R : O(V) \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial V} R dx dy$$

62 Формула Грина

$D \subset \mathbb{R}^2$ – компакт, связное, односвязное, ориентировано

δD – C^2 -гладкая кривая, тоже ориентировано

D и δD ориентированы согласовано

P, Q – функции, гладкие в открытой области $O \supset D$

Тогда:

$$\iint_D \left(\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y} \right) dx dy = \int_{\delta D} (P(x, y) dx + Q(x, y)) dy$$

63 Формула Стокса

Ω – эллиптическая, гладкая, двусторонняя поверхность, C^2 –гладкое; n_0 – сторона

$\delta\Omega$ - ориентирована согласовано с n_0

(P, Q, R) – векторное поле на Ω , заданное в O - откp. : $\Omega \subset O \subset \mathbb{R}^3$

Тогда:

$$\int_{\delta\Omega} (P dx + Q dy + R dz) = \iint_{\Omega} ((R'_y - Q'_z) dy dz + (P'_z - R'_x) dz dx + (Q'_x - P'_y) dx dy)$$

64 Ядро Дирихле, ядро Фейера

64.1 Ядро Дирихле

$$D_n(t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right)$$

64.2 Ядро Фейера

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t)$$