# Первый коллоквиум, семестр 4

24 марта 2019 г.

# Оглавление

# Глава 1

# Определения

## 1.1 Произведение мер

$< X, \mathbb{A}, \mu >, < Y, \mathbb{B}, \nu >$ - пространства с мерой.
$\mu$, $\nu$ - $\sigma$-конечные меры.
$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{A \times B \subset X \times Y : A \in \mathbb{A}, B \in \mathbb{B}\}$
$m_0 : \mathbb{A} \times \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{R}}$
$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$
$m$ - называется произведением мер $\mu$ и $\nu$, если $m$ - мера, которая является Лебеговским продолжением $m_0$ с полукольца $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ на некоторую $\sigma$-алгебру $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$.
$m = \mu \times \nu$ - обозначение.
$< X \times Y, \mathbb{A} \otimes \mathbb{B}, \mu \times \nu >$ - произведение пространств с мерой.

## 1.2 Сферические координаты в $R^3$ и в $R^m$, их Якобианы

$x_1 = r \cdot \cos\phi_1$ $\qquad$ $1 \le i \le m-2 : \phi_i \in [0, \pi]$
$x_2 = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \cos\phi_2$ $\qquad$ $i = m-1 : \phi_i \in [0, 2\pi]$
$x_3 = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \cdot \cos\phi_3$ $\qquad$ $r \ge 0$
$\vdots$
$x_{m-2} = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \cdots \sin\phi_{m-3} \cdot \cos\phi_{m-2}$
$x_{m-1} = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \cdots \sin\phi_{m-2} \cdot \cos\phi_{m-1}$
$x_m = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \cdots \sin\phi_{m-2} \cdot \sin\phi_{m-1}$

$\mathcal{J} = r^{m-1} \cdot (\sin\phi_1)^{m-2} \cdot (\sin\phi_2)^{m-3} \cdots (\sin\phi_{m-2})^1 \cdot (\sin\phi_{m-1})^0$

Что тут происходит идейно. Сначала мы проецируем наш $m$-мерный вектор на нормаль к $(m-1)$-мерной гиперплоскости. Потом рассматриваем проекцию на эту гиперплоскость и в ней рекурсивно повторяем процедуру, пока не дойдём до нашего любимого $\mathbb{R}^2$. Уже в нём рассматривем обычные полярные координаты (отсюда и другие ограничения на размер угла).

## 1.3 Образ меры при отображении

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ — пространство с мерой, $< Y, \mathbb{B}, \_ >$ — пространство с $\sigma$-алгеброй.
$\Phi : X \to Y$, $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$ (прообраз любого множества из $\mathbb{B}$ лежит в $\mathbb{A}$).
Пусть для $\forall E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) = \mu(\Phi^{-1}(E))$.
$\nu$ является мерой на $Y$ и называется образом меры $\mu$ при отображении $\Phi$.

## 1.4 Взвешенный образ меры

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ — пространство с мерой, $< Y, \mathbb{B}, \_ >$ — пространство с $\sigma$-алгеброй.
$\Phi : X \to Y$, $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$ (прообраз любого множества из $\mathbb{B}$ лежит в $\mathbb{A}$).
$\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая.
Пусть для $E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) = \int\limits_{\Phi^{-1}(E)} \omega \, d\mu$.
$\nu$ является мерой на $Y$ и называется взвешенным образом меры $\mu$.
При $\omega \equiv 1$ взвешенный образ меры является обычным образом меры.

## 1.5 Плотность одной меры по отношению к другой

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ — пространство с мерой.
$\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая.
$\nu(E) = \int_E \omega(x) \, d\mu$. $\nu$ — мера на $X$.
$\omega$ называется плотностью $\nu$ относительно $\mu$.

## 1.6 Заряд, множество положительности

### 1.6.1 Заряд

$< X, \mathbb{A}, \_ >$ — пространство с $\sigma$-алгеброй.
$\phi : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ (конечная, не обязательно неотрицательная).
$\phi$ счётно аддитивна.
Тогда $\phi$ — заряд.

### 1.6.2 Множество положительности

$A \subset X$ — множество положительности, если $\forall B \subset A$, $B$ измеримо: $\phi(B) \geq 0$.

## 1.7 Интегральные неравенства Гельдера и Минковского

$< X, \mathbb{A}, \mu >$; $f, g : E \subset X \to \mathbb{C}$ ($E$ - изм.) — заданы п.в, измеримы.

### 1.7.1 Неравенство Гельдера

$p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда: $\int\limits_E |fg| d\mu \leq \left( \int\limits_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int\limits_E |g|^q d\mu) \right)^{\frac{1}{q}}$

### 1.7.2 Неравенство Минковского

$1 \leq p < +\infty$. Тогда: $\left( \int\limits_E |f+g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int\limits_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int\limits_E |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$

## 1.8 Интеграл комплекснозначной функции

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ - пространство с мерой. $E \in \mathbb{A}$
$f : E \to \mathbb{C}$
$f$ измерима (суммируема), если $Im(f)$ и $Re(f)$ измеримы (суммируема)
$\int_E f = \int_E Re(f) + i \cdot \int_E Im(f)$

## 1.9 Пространство $L_p(E, \mu)$, $1 \le p < +\infty$

$< X, \mathbb{A}, \mu >$, $E \in \mathbb{A}$.
$L'_p(E,\mu) = \{f : \text{п.в. } E \to \mathbb{C},\ \text{изм.},\ \int\limits_E |f|^p d\mu < +\infty\}$
Это линейное пространство (по нер-ву Минковского и линейности пространства измеримых функций).

У этого пространства есть дефект — если определить норму как $||f|| = \left(\int\limits_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, то будет сразу много нулей пространства (ненулевые функции, которые п.в. равны 0, будут иметь норму 0). Поэтому перейдем к фактор-множеству функций по отношению эквивалентности:
$f \sim g$, если $f = g$ п.в.
$L_p(E,\mu) := L'_p(E,\mu)/\sim$ - лин. норм. пр-во с нормой $||f|| = \left(\int\limits_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

NB1: Его элементы — классы эквивалентности обычных функций. Будем называть их тоже функциями. Они не умеют вычислять значение в точке (т.к. можно всегда подменить значение на любое другое и получить представителя все того же класса эквивалентности), но зато их можно интегрировать!

NB2: также иногда будем обозначать $||f||_p$ за норму $f$ в пространстве $L_p$.

## 1.10 Пространство $L_\infty(E, \mu)$

$L_\infty(E,\mu) = \{f : \text{п.в. } E \to \mathbb{C},\ \operatorname*{ess\,sup}_E |f| < +\infty\}$
NB1: $||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_E |f|$.

NB2: Новый вид нер-ва Гельдера : $||f \cdot g||_1 \le ||f||_p \cdot ||g||_q$ (причем можно брать $p = +\infty, q = 1$ или наоборот).

## 1.11 Существенный супремум

$< X, \mathbb{A}, \mu >$, $E \subset X$ — изм., $f$ : п.в. $E \to \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда: $\operatorname*{ess\,sup}_{x \in E} f(x) = \inf\{A \in R : f(x) \le A \text{ при п.в. } x\}$.

В этом определении $A$ - существенная верхняя граница.
Свойства:

1. $\operatorname*{ess\,sup}_E f \leq \sup_E f$
2. $f(x) \leq \operatorname*{ess\,sup}_E f$ при п.в. $x \in E$.
3. $\int\limits_E |fg| d\mu \leq \operatorname*{ess\,sup}_E |g| \cdot \int\limits_E |f| d\mu$.

## 1.12 Условие $L_{loc}$

: (

## 1.13 Несобственный интеграл Лебега в $R$

: (

## 1.14 Фундаментальная последовательность, полное пространство

### 1.14.1 Фундаментальная последовательность

$\{a_n\}$ - фунд. посл. в метрическом пр-ве $(X, \rho)$, если $\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n, k > N : \rho(a_n, a_k) < \epsilon$

### 1.14.2 Полное пространство

$X$ - полное пространство, если любая фундаментальная последовательность в нём сходится.

## 1.15 Плотное множество

Множество $A$ плотно во множестве $B$, если $\forall b \in B \ \forall \epsilon > 0$ верно, что $U_\epsilon(b) \cap A \neq \emptyset$.

# Глава 2

# Теоремы

## 2.1 Теорема Леви

$(X, \mathbb{A}, \mu)$, $f_n \geqslant 0$ - изм.
$f_1(x) \leqslant ... \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant ...$ при почти всех $x$
$f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ при почти всех $x$ (считаем, что при остальных $x : f \equiv 0$)

Тогда: $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_X f_n(x) d\mu = \int\limits_X f(x) d\mu$

## 2.2 Линейность интеграла Лебега

$f, g$ измеримые, Тогда $\int\limits_{\mathbb{E}} (f+g) = \int\limits_{\mathbb{E}} f + \int\limits_{\mathbb{E}} g$

## 2.3 Теорема об интегрировании положительных рядов

$u_n(x) \geq 0$ *почти всюду* на $\mathbb{E}$, тогда $\int\limits_{\mathbb{E}} (\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)) d\mu(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu(x)$

## 2.4 Абсолютная непрерывность интеграла

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ - пространство с мерой
$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ - суммируема

Тогда $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ \forall E$ – измеримое $\mu E < \delta \ |\int\limits_E f d\mu| < \epsilon$

## 2.5 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере.

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ – пространство с мерой,
$f_n, f$ – измеримы,
$f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$ (сходится по мере),
$\exists g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что:

- $\forall n$, для «почти всех» $x \quad |f_n(x)| \leq g(x)$ ($g$ называется мажорантой)
- $g$ - суммируемая

<u>**Тогда:**</u>

- $f_n, f$ – суммируемы
- $\int\limits_X |f_n - f| d\mu \to 0$
- $\int\limits_X f_n \to \int\limits_X f$ («уж тем более»)

## 2.6 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде.

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ – пространство с мерой,
$f_n, f$ – измеримы,
$f_n \to f$ **почти везде**,
$\exists g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что:

- $\forall n$, для «почти всех» $x$ $|f_n(x)| \leq g(x)$ ($g$ называется мажорантой)
- $g$ - суммируемая

<u>**Тогда:**</u>

- $f_n, f$ — суммируемы

- $\int\limits_X |f_n - f| d\mu \to 0$
- $\int\limits_X f_n \to \int\limits_X f$ («уж тем более»)

## 2.7 Теорема Фату. Следствия.

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ – пространство с мерой
$f_n, f$ – измеримы,
$f_n \geq 0$
$f_n \to f$ «почти везде»
$\exists C > 0\ \forall n\ \int\limits_X f_n d\mu \leq C$
**Тогда:** $\int\limits_X f \leq C$

### 2.7.1 Следствие 1

$f_n, f \geq 0$ – измер.
$f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$
$\exists C\ \forall n \int\limits_X f_n \leq C$
Тогда: $\int\limits_X f \leq C$

### 2.7.2 Следствие 2

$f_n \geq 0$ – измер.
Тогда: $\int\limits_X \underline{\lim}\, f_n \leq \underline{\lim} \int\limits_X f_n$

## 2.8 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры

### 2.8.1 Лемма

Пусть у нас есть $< X, \mathbb{A}, \mu >$ и $< Y, \mathbb{B}, \_ >$ и $\Phi : X \to Y$
Пусть $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$
Пусть для $E \in \mathbb{B}\ \nu(E) := \mu(\Phi^{-1}(E))$
Тогда:

$\nu$ — мера на $(Y, \mathbb{B})$, $\nu(E) = \int\limits_{\Phi^{-1}(E)} 1 \cdot d\mu$

### 2.8.2 Следствие

Из этого следует, что если $f$ — измеримая функция в $Y$ (относительно $\nu$), то $f \circ \Phi$ измерима относительно $\mu$.

### 2.8.3 Теорема

Есть пространства $< X, \mathbb{A}, \mu >$ и $< Y, \mathbb{B}, \nu >$.
$\Phi : X \to Y$ $w \geq 0$ — измеримая, $\nu$ — взвешенный образ $\mu$ ($w$ — плотность)
Тогда:
Для $\forall f \geq 0$ — измерима на $Y$, $f \circ \Phi$ - измерима (относительно $\mu$)
$\int_Y f d\nu = \int_X f(\Phi(x)) * \omega(x) d\mu(x)$
Замечание: То же верно, если $f$ суммируема.

## 2.9 Критерий плотности

Есть пространство $< X, \mathbb{A}, \mu >$
$\nu$ — еще одна мера.
$\omega \geq 0$ — измерима на $X$.
Тогда:
$\omega$ — плотность $\nu$ относительно $\mu \Longleftrightarrow$ Для любого $A \in \mathbb{A} : \mu A \cdot \inf_A(\omega) \leq \nu(A) \leq \mu A \cdot \sup_A(\omega)$

## 2.10 Единственность плотности

$f, g \in L(x)$.
Пусть $\forall A$ — измеримо: $\int\limits_A f = \int\limits_A g$.
Тогда:
$f = g$ почти везде
Следствие:
Плостность $\nu$ относительно $\mu$ определена однозначно с точностью до $\mu$-почти везде.

## 2.11 Лемма о множестве положительности

Пусть есть пространство $< X, \mathbb{A} >$ и $\phi$ — заряд.
Тогда:
$\forall A \in \mathbb{A} \; \exists B \subset A : \phi(B) \geq \phi(A)$ и B — множество положительности

## 2.12 Теорема Радона-Никодима

Пусть есть пространство $(X, \mathbb{A}, \mu)$.
$\nu$ — мера на $\mathbb{A}$.
Обе меры конечные и $\nu \prec \mu$ (абсолютная непрерывность меры: если $\mu E = 0$, то $\nu E = 0$).
Тогда:
$\exists! f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (с точностью до почти везде), которая является плотностью $\nu$ относительно $\mu$ и при этом $f$ суммируема по $\mu$.

## 2.13 Лемма об образах малых кубических ячеек при диффеоморфизме

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
$a \in O, \Phi \in C^1(O)$
Возьмём $c > |\det \Phi'(a)| \neq 0$
тогда $\exists \delta > 0 : \forall$ кубической ячейки $Q, Q \subset B(a, \delta), a \in Q$ выполняется
$\lambda\Phi(Q) < c \cdot \lambda Q$

## 2.14 Лемма о вариациях на тему регулярности меры Лебега

$f : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — непрерывна.
$A \subset O$, $A$ — измеримо.
$A \subset Q$(кубическая ячейка) $\subset \overline{Q} \subset O$, то есть граница $A$ не лежит на границе $O$.
Тогда

$$\inf_{A \subset G \subset O, G-open\ set} (\lambda G \cdot \sup_G(f)) = \lambda A \cdot \sup_A f$$

## 2.15 Теорема об образе меры Лебега при диффеоморфизме

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - Диффеоморфизм, $\forall A \in \mathbb{M}^m, A \subset O$
$\lambda(\Phi(A)) = \int_A |\det \Phi'(x)| d\lambda(x)$

## 2.16 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - диффеоморфизм
$O' = \Phi(O)$ — открытое
$f$ задана на $O', f \geqslant 0$, измерима по Лебегу, тогда
$\int_{O'} f(y) \cdot d\lambda(y) = \int_O f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| \cdot d\lambda(x)$

## 2.17 Принцип Кавальери

$(X, \alpha, \mu)$ и $(Y, \beta, \nu)$ — пространства с мерами, причем $\mu$, $\nu$ — $\sigma$-конечные и полные $m = \mu \times \nu$, $C \in \alpha \otimes \beta$, тогда:

1. При п.в. $x$ $C_x$ измеримо ($\nu$-измеримо), т.е. $C_x \in \beta$
2. Функция $x \to \nu C_x$ — измеримая (в широком смысле) на $X$

   NB: $\phi$ — измерима в широком смысле, если она задана при п.в. x, и $\exists f : X \to R'$ — измеримая и $\phi = f$ п.в. При этом $\int_X \phi = \int_X f$ (по опр.)
3. $mC = \int_X \nu(C_x) \cdot d\mu(x)$

## 2.18 Сферические координаты в $R^m$

$x_1 = r \cdot \cos \phi_1$ $\qquad 1 \leq i \leq m-2 : \phi_i \in [0, \pi]$
$x_2 = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \cos \phi_2$ $\qquad i = m-1 : \phi_i \in [0, 2\pi]$
$x_3 = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdot \cos \phi_3$ $\qquad r \geq 0$
$\vdots$
$x_{m-2} = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{m-3} \cdot \cos \phi_{m-2}$

$x_{m-1} = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \cdots \sin\phi_{m-2} \cdot \cos\phi_{m-1}$
$x_m = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \cdots \sin\phi_{m-2} \cdot \sin\phi_{m-1}$

$\mathcal{J} = r^{m-1} \cdot (\sin\phi_1)^{m-2} \cdot (\sin\phi_2)^{m-3} \cdots (\sin\phi_{m-2})^1 \cdot (\sin\phi_{m-1})^0$
Что тут происходит идейно. Сначала мы проецируем наш $m$-мерный вектор на нормаль к $(m-1)$-мерной гиперплоскости. Потом рассматриваем проекцию на эту гиперплоскость и в ней рекурсивно повторяем процедуру, пока не дойдём до нашего любимого $\mathbb{R}^2$. Уже в нём рассматривем обычные полярные координаты (отсюда и другие ограничения на размер угла).

## 2.19 Совпадение определенного интеграла и интеграла Лебега

: (

## 2.20 Теорема Тонелли

$< \mathbb{X}, \alpha, \mu >$, $< \mathbb{Y}, \beta, \nu >$ - пространства с мерой
$\mu$, $\nu$ - $\sigma$-конечны, полные
$m = \mu \times \nu$
$f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \overline{R}$, $f \geq 0$, f - измерима относительно m
Тогда:

1. при *почти всех* $x \in X$ $f_x$ - измерима на $\mathbb{Y}$,
   где $f_x : \mathbb{Y} \to \overline{R}$, $f_x(y) = f(x, y)$
   (симметричное утверждение верно для y)

2. Функция $x \mapsto \phi(x) = \int\limits_{\mathbb{Y}} f_x d\nu = \int\limits_{\mathbb{Y}} f(x, y) d\nu(y)$ - измерима* на $\mathbb{X}$
   (симметричное утверждение верно для y)

3. $\int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} f(x, y) dm = \int\limits_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu = \int\limits_{\mathbb{X}} (\int\limits_{\mathbb{Y}} f(x, y) d\nu(y)) d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{Y}} (\int\limits_{\mathbb{X}} f(x, y) d\mu(x)) d\nu(y)$

## 2.21 Объем шара в $\mathbb{R}^m$

$B(0,R) \subset \mathbb{R}^m$

$\lambda_m(B(0,R)) = \int\limits_{B(0,R)} 1 d\lambda_m = \int \mathcal{J} =$

$= \int\limits_0^R dr \int\limits_0^\pi d\phi_1 \cdots \int\limits_0^\pi d\phi_{m-2} \int\limits_0^{2\pi} d\phi_{m-1} \cdot r^{m-1} (\sin\phi_1)^{m-2} \dots (\sin\phi_{m-2}) = \longrightarrow$

$\int\limits_0^\pi (\sin\phi_k)^{m-2-(k+1)} = B(\frac{m-k}{2}; \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{m-k}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m-k}{2}+\frac{1}{2})}$

$\rightarrow = \frac{R^m}{m} \frac{\Gamma(\frac{m-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{\Gamma(\frac{m-2}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m-1}{2})} \cdots \frac{\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} 2\pi =$

$= \frac{\pi R^m}{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^{m-2}}{\Gamma(\frac{m}{2})} = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)} R^m$

Или просто:

$B(0,r) \subset \mathbb{R}^m$

$\lambda_m(B(0,r)) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)} r^m$

## 2.22 Теорема Фубини

$(X, \alpha, \mu)$ и $(Y, \beta, \nu)$ - пространства с мерами, причем $\mu, \nu$ — $\sigma$-конечны

на $X \times Y$ есть $\alpha \otimes \beta$, причем $m(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$ — произведение мер — $\sigma$-конечная мера на $\alpha \times \beta$

$(X \times Y), \alpha \otimes \beta, m$ — произведение пр-в с мерой

Обозначение : $C \subset X \times Y, x \in X$ тогда

$C_x = y : (x, y) \in C$ — Сечение I рода

$C_y = x : (x, y) \in C$ — Сечение II рода

## 2.23 Формула для Бета-функции

$B(s,t) = \int\limits_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}$, где s и t $>0$ - Бета-функция

$\Gamma(s) = \int\limits_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$, где s $>0$, тогда $B(s,t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$

## 2.24 Предельный переход под знаком интеграла при наличии равномерной сходимости

$f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \overline{\mathbb{R}}$
$(\mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu)$ – простр. с мерой
$\mathbb{Y}$ – метр. простр. (или метризуемое)
$\forall y \; f^y(x) = f(x, y)$ – сумм. на $\mathbb{X}$

$\mu X < +\infty$; $f(x, y) \underset{y \to a}{\rightrightarrows} \phi(x)$
Тогда:

- $\phi$ – сумм.
- $\int\limits_X f(x, y) d\mu(x) \underset{y \to a}{\longrightarrow} \int\limits_X \phi(x) d\mu(x)$

## 2.25 Теорема Лебега о непрерывности интеграла по параметру

: (

## 2.26 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру

$f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \overline{\mathbb{R}}$
$(\mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu)$ – простр. с мерой
$\mathbb{Y}$ – метр. простр. (или метризуемое)
$\forall y \; f^y(x) = f(x, y)$ – сумм. на $\mathbb{X}$

$\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}$ – промежуток
при п. в. $x \;\; \forall y \; \exists f'_y(x, y)$
$f'_y$ удовлетворяет усл. $L_{loc}$ в точке $a \in \mathbb{Y}$
Тогда:

- $I(y) = \int\limits_X f(x, y) d\mu(x)$ – дифф. в точке $a$
- $I'(a) = \int\limits_X f'_y(x, a) d\mu(x)$

## 2.27 Теорема о вложении пространств $L^p$

$\mu E < +\infty$, $1 \le s < r \le +\infty$
**Тогда:**

1. $L_r(E, \mu) \subset Ł_s(E, \mu)$
2. $\forall f$ — измеримая : $||f||_s \le \mu E^{1/s - 1/r} ||f||_r$

## 2.28 Теорема о сходимости в $L_p$ и по мере

$1 \le p < +\infty$
$f_n \in L_p(\mathbb{X}, \mu)$

1. - $f \in L_p$
   - $f_n \to f$ в $L_p$

   **Тогда:** $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$ (по мере)

2. - $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$ (либо если $f_n \to f$ почти везде)
   - $|f_n| \le g$ почти везде при всех $n$; $g \in L_p$

   **Тогда:** $f_n \to f$ в $L_p$

## 2.29 Полнота $L^p$

$L_p(E, \mu)$ $1 \le p < \infty$ – полное
То есть любая фундаментальная последовательность сходиться по норме $||f||_p$.

$$(\forall \epsilon > 0 \ \exists N \ \forall n, k \ ||f_n - f_k||_p < \epsilon) \Rightarrow (\exists f : ||f_n - f||_p \to 0)$$