

# Первый коллоквиум, семестр 4

24 марта 2019 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Определения</b>	<b>3</b>
1.1	Произведение мер . . . . .	3
1.2	Сферические координаты в $R^3$ и в $R^m$ , их Якобианы . . . . .	3
1.3	Образ меры при отображении . . . . .	4
1.4	Взвешенный образ меры . . . . .	4
1.5	Плотность одной меры по отношению к другой . . . . .	4
1.6	Заряд, множество положительности . . . . .	5
1.6.1	Заряд . . . . .	5
1.6.2	Множество положительности . . . . .	5
1.7	Интегральные неравенства Гельдера и Минковского . . . . .	5
1.7.1	Неравенство Гельдера . . . . .	5
1.7.2	Неравенство Минковского . . . . .	5
1.8	Интеграл комплекснозначных функции . . . . .	5
1.9	Пространство $L_p(E, \mu)$ , $1 \leq p < +\infty$ . . . . .	6
1.10	Пространство $L_\infty(E, \mu)$ . . . . .	6
1.11	Существенный супремум . . . . .	6
1.12	Условие $L_{loc}$ . . . . .	7
1.13	Несобственный интеграл Лебега в $R$ . . . . .	7
1.14	Фундаментальная последовательность, полное пространство . . . . .	7
1.14.1	Фундаментальная последовательность . . . . .	7
1.14.2	Полное пространство . . . . .	7
1.15	Плотное множество . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Теоремы</b>	<b>8</b>
2.1	Теорема Леви . . . . .	8
2.2	Линейность интеграла Лебега . . . . .	8
2.3	Теорема об интегрировании положительных рядов . . . . .	8

2.4	Абсолютная непрерывность интеграла . . . . .	8
2.5	Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере. . . . .	9
2.6	Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде. . . . .	9
2.7	Теорема Фату. Следствия. . . . .	10
2.7.1	Следствие 1 . . . . .	10
2.7.2	Следствие 2 . . . . .	10
2.8	Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры . . . . .	10
2.8.1	Лемма . . . . .	10
2.8.2	Следствие . . . . .	11
2.8.3	Теорема . . . . .	11
2.9	Критерий плотности . . . . .	11
2.10	Единственность плотности . . . . .	11
2.11	Лемма о множестве положительности . . . . .	12
2.12	Теорема Радона-Никодима . . . . .	12
2.13	Лемма об образах малых кубических ячеек при диффеоморфизме . . . . .	12
2.14	Лемма о вариациях на тему регулярности меры Лебега . . . . .	12
2.15	Теорема об образе меры Лебега при диффеоморфизме . . . . .	13
2.16	Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега . . . . .	13
2.17	Принцип Кавальери . . . . .	13
2.18	Сферические координаты в $R^m$ . . . . .	13
2.19	Совпадение определенного интеграла и интеграла Лебега . . . . .	14
2.20	Теорема Тонелли . . . . .	14
2.21	Объем шара в $\mathbb{R}^m$ . . . . .	14
2.22	Теорема Фубини . . . . .	15
2.23	Формула для Бета-функции . . . . .	15
2.24	Предельный переход под знаком интеграла при наличии равномерной сходимости . . . . .	15
2.25	Теорема Лебега о непрерывности интеграла по параметру . . . . .	16
2.26	Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру . . . . .	16
2.27	Теорема о вложении пространств $L^p$ . . . . .	16
2.28	Теорема о сходимости в $L_p$ и по мере . . . . .	16
2.29	Полнота $L^p$ . . . . .	17

# Глава 1

## Определения

### 1.1 Произведение мер

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle, \langle Y, \mathbb{B}, \nu \rangle$  - пространства с мерой.

$\mu, \nu$  -  $\sigma$ -конечные меры.

$$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{A \times B \subset X \times Y : A \in \mathbb{A}, B \in \mathbb{B}\}$$

$$m_0 : \mathbb{A} \times \mathbb{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

$$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$$

$m$  - называется произведением мер  $\mu$  и  $\nu$ , если  $m$  - мера, которая является Лебеговским продолжением  $m_0$  с полукольца  $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$  на некоторую  $\sigma$ -алгебру  $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ .

$m = \mu \times \nu$  - обозначение.

$\langle X \times Y, \mathbb{A} \otimes \mathbb{B}, \mu \times \nu \rangle$  - произведение пространств с мерой.

### 1.2 Сферические координаты в $R^3$ и в $R^m$ , их Якобианы

$$x_1 = r \cdot \cos \phi_1$$

$$x_2 = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \cos \phi_2$$

$$x_3 = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdot \cos \phi_3$$

$\vdots$

$$x_{m-2} = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{m-3} \cdot \cos \phi_{m-2}$$

$$x_{m-1} = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{m-2} \cdot \cos \phi_{m-1}$$

$$x_m = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{m-2} \cdot \sin \phi_{m-1}$$

$$1 \leq i \leq m-2 : \phi_i \in [0, \pi]$$

$$i = m-1 : \phi_i \in [0, 2\pi]$$

$$r \geq 0$$

$$\mathcal{J} = r^{m-1} \cdot (\sin \phi_1)^{m-2} \cdot (\sin \phi_2)^{m-3} \cdots (\sin \phi_{m-2})^1 \cdot (\sin \phi_{m-1})^0$$

Что тут происходит идейно. Сначала мы проецируем наш  $m$ -мерный вектор на нормаль к  $(m-1)$ -мерной гиперплоскости. Потом рассматриваем проекцию на эту гиперплоскость и в ней рекурсивно повторяем процедуру, пока не дойдём до нашего любимого  $\mathbb{R}^2$ . Уже в нём рассматриваем обычные полярные координаты (отсюда и другие ограничения на размер угла).

### 1.3 Образ меры при отображении

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$  — пространство с мерой,  $\langle Y, \mathbb{B}, \_ \rangle$  — пространство с  $\sigma$ -алгеброй.

$\Phi : X \rightarrow Y$ ,  $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$  (прообраз любого множества из  $\mathbb{B}$  лежит в  $\mathbb{A}$ ).

Пусть для  $\forall E \in \mathbb{B}$   $\nu(E) = \mu(\Phi^{-1}(E))$ .

$\nu$  является мерой на  $Y$  и называется образом меры  $\mu$  при отображении  $\Phi$ .

### 1.4 Взвешенный образ меры

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$  — пространство с мерой,  $\langle Y, \mathbb{B}, \_ \rangle$  — пространство с  $\sigma$ -алгеброй.

$\Phi : X \rightarrow Y$ ,  $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$  (прообраз любого множества из  $\mathbb{B}$  лежит в  $\mathbb{A}$ ).

$\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\omega \geq 0$  — измеримая.

Пусть для  $E \in \mathbb{B}$   $\nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \omega d\mu$ .

$\nu$  является мерой на  $Y$  и называется взвешенным образом меры  $\mu$ .

При  $\omega \equiv 1$  взвешенный образ меры является обычным образом меры.

### 1.5 Плотность одной меры по отношению к другой

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$  — пространство с мерой.

$\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\omega \geq 0$  — измеримая.

$\nu(E) = \int_E \omega(x) d\mu$ .  $\nu$  — мера на  $X$ .

$\omega$  называется плотностью  $\nu$  относительно  $\mu$ .

## 1.6 Заряд, множество положительности

### 1.6.1 Заряд

$\langle X, \mathbb{A}, _ \rangle$  — пространство с  $\sigma$ -алгеброй.

$\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$  (конечная, не обязательно неотрицательная).

$\phi$  счётно аддитивна.

Тогда  $\phi$  — заряд.

### 1.6.2 Множество положительности

$A \subset X$  — множество положительности, если  $\forall B \subset A, B$  измеримо:  $\phi(B) \geq 0$ .

## 1.7 Интегральные неравенства Гельдера и Минковского

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle; f, g : E \subset X \rightarrow \mathbb{C}$  ( $E$  - изм.) — заданы п.в, измеримы.

### 1.7.1 Неравенство Гельдера

$$p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \text{ Тогда: } \int_E |fg| d\mu \leq \left( \int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_E |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

### 1.7.2 Неравенство Минковского

$$1 \leq p < +\infty. \text{ Тогда: } \left( \int_E |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_E |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

## 1.8 Интеграл комплекснозначных функции

$(X, \mathbb{A}, \mu)$  - пространство с мерой.  $E \in \mathbb{A}$

$f : E \rightarrow \mathbb{C}$

$f$  измерима (суммируема), если  $Im(f)$  и  $Re(f)$  измеримы (суммируема)

$$\int_E f = \int_E Re(f) + i \cdot \int_E Im(f)$$

## 1.9 Пространство $L_p(E, \mu)$ , $1 \leq p < +\infty$

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ ,  $E \in \mathbb{A}$ .

$$L'_p(E, \mu) = \{f : \text{п.в. } E \rightarrow \mathbb{C}, \text{ изм.}, \int_E |f|^p d\mu < +\infty\}$$

Это линейное пространство (по нер-ву Минковского и линейности пространства измеримых функций).

У этого пространства есть дефект — если определить норму как  $\|f\| = \left( \int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ ,

то будет сразу много нулей пространства (ненулевые функции, которые п.в. равны 0, будут иметь норму 0). Поэтому перейдем к фактор-множеству функций по отношению эквивалентности:

$f \sim g$ , если  $f = g$  п.в.

$$L_p(E, \mu) := L'_p(E, \mu) / \sim \text{ - лин. норм. пр-во с нормой } \|f\| = \left( \int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

NB1: Его элементы — классы эквивалентности обычных функций. Будем называть их тоже функциями. Они не умеют вычислять значение в точке (т.к. можно всегда подменить значение на любое другое и получить представителя все того же класса эквивалентности), но зато их можно интегрировать!

NB2: также иногда будем обозначать  $\|f\|_p$  за норму  $f$  в пространстве  $L_p$ .

## 1.10 Пространство $L_\infty(E, \mu)$

$$L_\infty(E, \mu) = \{f : \text{п.в. } E \rightarrow \mathbb{C}, \text{ess sup}_E |f| < +\infty\}$$

NB1:  $\|f\|_\infty = \text{ess sup}_E |f|$ .

NB2: Новый вид нер-ва Гельдера :  $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$  (причем можно брать  $p = +\infty, q = 1$  или наоборот).

## 1.11 Существенный супремум

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ ,  $E \subset X$  — изм.,  $f : \text{п.в. } E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .

Тогда:  $\text{ess sup}_{x \in E} f(x) = \inf \{A \in R : f(x) \leq A \text{ при п.в. } x\}$ .

В этом определении  $A$  - существенная верхняя граница.

Свойства:

1.  $\operatorname{ess\,sup}_E f \leq \sup_E f$
2.  $f(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_E f$  при п.в.  $x \in E$ .
3.  $\int_E |fg| d\mu \leq \operatorname{ess\,sup}_E |g| \cdot \int_E |f| d\mu$ .

## 1.12 Условие $L_{loc}$

: (

## 1.13 Несобственный интеграл Лебега в $R$

: (

## 1.14 Фундаментальная последовательность, полное пространство

### 1.14.1 Фундаментальная последовательность

$\{a_n\}$  - фунд. посл. в метрическом пр-ве  $(X, \rho)$ , если  $\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n, k > N : \rho(a_n, a_k) < \epsilon$

### 1.14.2 Полное пространство

$X$  - полное пространство, если любая фундаментальная последовательность в нём сходится.

## 1.15 Плотное множество

Множество  $A$  плотно во множестве  $B$ , если  $\forall b \in B \forall \epsilon > 0$  верно, что  $U_\epsilon(b) \cap A \neq \emptyset$ .



# Глава 2

## Теоремы

### 2.1 Теорема Леви

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ ,  $f_n \geq 0$  - изм.

$f_1(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \dots$  при почти всех  $x$

$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  при почти всех  $x$  (считаем, что при остальных  $x : f \equiv 0$ )

Тогда:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu$

### 2.2 Линейность интеграла Лебега

$f, g$  измеримые, Тогда  $\int_{\mathbb{E}} (f + g) = \int_{\mathbb{E}} f + \int_{\mathbb{E}} g$

### 2.3 Теорема об интегрировании положительных рядов

$u_n(x) \geq 0$  почти всюду на  $\mathbb{E}$ , тогда  $\int_{\mathbb{E}} (\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu(x)$

### 2.4 Абсолютная непрерывность интеграла

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$  - пространство с мерой

$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  - суммируема

Тогда  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall E - \text{измеримое } \mu E < \delta \mid \int_E f d\mu < \epsilon$

## 2.5 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере.

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$  – пространство с мерой,

$f_n, f$  – измеримы,

$f_n \xrightarrow{\mu} f$  (сходится по мере),

$\exists g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  такая, что:

- $\forall n$ , для «почти всех»  $x \quad |f_n(x)| \leq g(x)$  ( $g$  называется мажорантой)
- $g$  – суммируемая

Тогда:

- $f_n, f$  – суммируемы
- $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$
- $\int_X f_n \rightarrow \int_X f$  («уж тем более»)

## 2.6 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде.

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$  – пространство с мерой,

$f_n, f$  – измеримы,

$f_n \rightarrow f$  **почти везде**,

$\exists g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  такая, что:

- $\forall n$ , для «почти всех»  $x \quad |f_n(x)| \leq g(x)$  ( $g$  называется мажорантой)
- $g$  – суммируемая

Тогда:

- $f_n, f$  – суммируемы

- $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$
- $\int_X f_n \rightarrow \int_X f$  («уж тем более»)

## 2.7 Теорема Фату. Следствия.

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$  – пространство с мерой

$f_n, f$  – измеримы,

$f_n \geq 0$

$f_n \rightarrow f$  «почти везде»

$\exists C > 0 \forall n \int_X f_n d\mu \leq C$

Тогда:  $\int_X f \leq C$

### 2.7.1 Следствие 1

$f_n, f \geq 0$  – измер.

$f_n \xrightarrow{\mu} f$

$\exists C \forall n \int_X f_n \leq C$

Тогда:  $\int_X f \leq C$

### 2.7.2 Следствие 2

$f_n \geq 0$  – измер.

Тогда:  $\int_X \varliminf f_n \leq \varliminf \int_X f_n$

## 2.8 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры

### 2.8.1 Лемма

Пусть у нас есть  $\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$  и  $\langle Y, \mathbb{B}, \nu \rangle$  и  $\Phi : X \rightarrow Y$

Пусть  $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$

Пусть для  $E \in \mathbb{B}$   $\nu(E) := \mu(\Phi^{-1}(E))$

Тогда:

$\nu$  — мера на  $(Y, \mathbb{B})$ ,  $\nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 \cdot d\mu$

### 2.8.2 Следствие

Из этого следует, что если  $f$  — измеримая функция в  $Y$  (относительно  $\nu$ ), то  $f \circ \Phi$  измерима относительно  $\mu$ .

### 2.8.3 Теорема

Есть пространства  $\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$  и  $\langle Y, \mathbb{B}, \nu \rangle$ .

$\Phi : X \rightarrow Y$   $w \geq 0$  — измеримая,  $\nu$  — взвешенный образ  $\mu$  ( $w$  — плотность)

Тогда:

Для  $\forall f \geq 0$  — измерима на  $Y$ ,  $f \circ \Phi$  — измерима (относительно  $\mu$ )

$$\int_Y f d\nu = \int_X f(\Phi(x)) * \omega(x) d\mu(x)$$

Замечание: То же верно, если  $f$  суммируема.

## 2.9 Критерий плотности

Есть пространство  $\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$

$\nu$  — еще одна мера.

$\omega \geq 0$  — измерима на  $X$ .

Тогда:

$\omega$  — плотность  $\nu$  относительно  $\mu \iff$  Для любого  $A \in \mathbb{A} : \mu A \cdot \inf_A(\omega) \leq \nu(A) \leq \mu A \cdot \sup_A(\omega)$

## 2.10 Единственность плотности

$f, g \in L(x)$ .

Пусть  $\forall A$  — измеримо:  $\int_A f = \int_A g$ .

Тогда:

$f = g$  почти везде

Следствие:

Плотность  $\nu$  относительно  $\mu$  определена однозначно с точностью до  $\mu$ -почти везде.

## 2.11 Лемма о множестве положительности

Пусть есть пространство  $\langle X, \mathbb{A} \rangle$  и  $\phi$  — заряд.

Тогда:

$\forall A \in \mathbb{A} \exists B \subset A : \phi(B) \geq \phi(A)$  и  $B$  — множество положительности

## 2.12 Теорема Радона-Никодима

Пусть есть пространство  $(X, \mathbb{A}, \mu)$ .

$\nu$  — мера на  $\mathbb{A}$ .

Обе меры конечные и  $\nu \prec \mu$  (абсолютная непрерывность меры: если  $\mu E = 0$ , то  $\nu E = 0$ ).

Тогда:

$\exists f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  (с точностью до почти везде), которая является плотностью  $\nu$  относительно  $\mu$  и при этом  $f$  суммируема по  $\mu$ .

## 2.13 Лемма об образах малых кубических ячеек при диффеоморфизме

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$a \in O, \Phi \in C^1(O)$

Возьмём  $c > |\det \Phi'(a)| \neq 0$

тогда  $\exists \delta > 0 : \forall$  кубической ячейки  $Q, Q \subset B(a, \delta), a \in Q$  выполняется

$\lambda \Phi(Q) < c \cdot \lambda Q$

## 2.14 Лемма о вариациях на тему регулярности меры Лебега

$f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывна.

$A \subset O, A$  — измеримо.

$A \subset Q$  (кубическая ячейка)  $\subset \overline{Q} \subset O$ , то есть граница  $A$  не лежит на границе  $O$ .

Тогда

$$\inf_{A \subset G \subset O, G \text{ — open set}} (\lambda G \cdot \sup_G(f)) = \lambda A \cdot \sup_A f$$

## 2.15 Теорема об образе меры Лебега при диффеоморфизме

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  - Диффеоморфизм,  $\forall A \in \mathbb{M}^m, A \subset O$   
 $\lambda(\Phi(A)) = \int_A |\det \Phi'(x)| d\lambda(x)$

## 2.16 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  - диффеоморфизм  
 $O' = \Phi(O)$  — открытое  
 $f$  задана на  $O'$ ,  $f \geq 0$ , измерима по Лебегу, тогда  
 $\int_{O'} f(y) \cdot d\lambda(y) = \int_O f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| \cdot d\lambda(x)$

## 2.17 Принцип Кавальери

$(X, \alpha, \mu)$  и  $(Y, \beta, \nu)$  — пространства с мерами, причем  $\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечные и полные  
 $m = \mu \times \nu, C \in \alpha \otimes \beta$ , тогда:

1. При п.в.  $x$   $C_x$  измеримо ( $\nu$ -измеримо), т.е.  $C_x \in \beta$
2. Функция  $x \rightarrow \nu C_x$  — измеримая (в широком смысле) на  $X$

NB:  $\phi$  — измерима в широком смысле, если она задана при п.в.  $x$ , и  $\exists f : X \rightarrow R'$  — измеримая и  $\phi = f$  п.в. При этом  $\int_X \phi = \int_X f$  (по опр.)

3.  $mC = \int_X \nu(C_x) \cdot d\mu(x)$

## 2.18 Сферические координаты в $R^m$

: (

## 2.19 Совпадение определенного интеграла и интеграла Лебега

: (

## 2.20 Теорема Тонелли

$\langle X, \alpha, \mu \rangle, \langle Y, \beta, \nu \rangle$  - пространства с мерой

$\mu, \nu$  -  $\sigma$ -конечны, полные

$$m = \mu \times \nu$$

$f : X \times Y \rightarrow \bar{R}, f \geq 0$ ,  $f$  - измерима относительно  $m$

Тогда:

1. при почти всех  $x \in X$   $f_x$  - измерима на  $Y$ ,  
где  $f_x : Y \rightarrow \bar{R}, f_x(y) = f(x, y)$   
(симметричное утверждение верно для  $y$ )
2. Функция  $x \mapsto \phi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$  - измерима\* на  $X$   
(симметричное утверждение верно для  $y$ )
3.  $\int_{X \times Y} f(x, y) dm = \int_X \phi(x) d\mu = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$

## 2.21 Объем шара в $\mathbb{R}^m$

$$B(0, R) \subset \mathbb{R}^m$$

$$\lambda_m(B(0, R)) = \int_{B(0, R)} 1 d\lambda_m = \int \mathcal{J} =$$

$$= \int_0^R dr \int_0^\pi d\phi_1 \cdots \int_0^\pi d\phi_{m-2} \int_0^{2\pi} d\phi_{m-1} \cdot r^{m-1} (\sin \phi_1)^{m-2} \cdots (\sin \phi_{m-2}) \Rightarrow$$

$$\int_0^\pi (\sin \phi_k)^{m-2-(k+1)} = B\left(\frac{m-k}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{m-k}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m-k}{2} + \frac{1}{2})}$$

$$\rightarrow = \frac{R^m}{m} \frac{\Gamma(\frac{m-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{\Gamma(\frac{m-2}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m-1}{2})} \cdots \frac{\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} 2\pi =$$

$$= \frac{\pi R^m}{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^{m-2}}{\Gamma(\frac{m}{2})} = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2} + 1)} R^m$$

## 2.22 Теорема Фубини

$(X, \alpha, \mu)$  и  $(Y, \beta, \nu)$  - пространства с мерами, причем  $\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечны  
на  $X \times Y$  есть  $\alpha \otimes \beta$ , причем  $m(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$  — произведение мер —  $\sigma$ -конечная мера на  $\alpha \times \beta$

$(X \times Y), \alpha \otimes \beta, m$  — произведение пр-в с мерой

Обозначение :  $C \subset X \times Y, x \in X$  тогда

$C_x = y : (x, y) \in C$  — Сечение I рода

$C_y = x : (x, y) \in C$  — Сечение II рода

## 2.23 Формула для Бета-функции

$B(s, t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1} dx$ , где  $s$  и  $t > 0$  - Бета-функция

$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$ , где  $s > 0$ , тогда  $B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$

## 2.24 Предельный переход под знаком интеграла при наличии равномерной сходимости

$f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$(\mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu)$  — простр. с мерой

$\mathbb{Y}$  — метр. простр. (или метризуемое)

$\forall y \ f^y(x) = f(x, y)$  — сумм. на  $\mathbb{X}$

$\mu X < +\infty; f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow a} \phi(x)$

Тогда:

•  $\phi$  — сумм.

•  $\int_X f(x, y) d\mu(x) \xrightarrow{y \rightarrow a} \int_X \phi(x) d\mu(x)$



## 2.25 Теорема Лебега о непрерывности интеграла по параметру

: (

## 2.26 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру

$$f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

$(\mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu)$  – простр. с мерой

$\mathbb{Y}$  – метр. простр. (или метризуемое)

$\forall y \ f^y(x) = f(x, y)$  – сумм. на  $\mathbb{X}$

$\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}$  – промежуток

при п. в.  $x \ \forall y \ \exists f'_y(x, y)$

$f'_y$  удовлетворяет усл.  $L_{loc}$  в точке  $a \in \mathbb{Y}$

Тогда:

- $I(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$  – дифф. в точке  $a$
- $I'(a) = \int_X f'_y(x, a) d\mu(x)$

## 2.27 Теорема о вложении пространств $L^p$

$$\mu E < +\infty, 1 \leq s < r \leq +\infty$$

Тогда:

1.  $L_r(E, \mu) \subset L_s(E, \mu)$
2.  $\forall f$  — измеримая :  $\|f\|_s \leq \mu E^{1/s-1/r} \|f\|_r$

## 2.28 Теорема о сходимости в $L_p$ и по мере

$$1 \leq p < +\infty$$

$$f_n \in L_p(\mathbb{X}, \mu)$$

$$1. \quad \bullet \quad f \in L_p$$

$$\bullet \quad f_n \rightarrow f \text{ в } L_p$$

**Тогда:**  $f_n \xrightarrow{\mu} f$  (по мере)

$$2. \quad \bullet \quad f_n \xrightarrow{\mu} f \text{ (либо если } f_n \rightarrow f \text{ почти везде)}$$

$$\bullet \quad |f_n| \leq g \text{ почти везде при всех } n; \quad g \in L_p$$

**Тогда:**  $f_n \rightarrow f$  в  $L_p$

## 2.29 Полнота $L^p$

$L_p(E, \mu)$   $1 \leq p < \infty$  – полное

То есть любая фундаментальная последовательность сходиться по норме  $\|f\|_p$ .

$$(\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, k \|f_n - f_k\|_p < \epsilon) \Rightarrow (\exists f : \|f_n - f\|_p \rightarrow 0)$$