

Экзамен

14 июня 2019 г.

Оглавление

1	Определения	6
1.1	Произведение мер	6
1.2	Сферические координаты в R^3 и в R^m , их Якобианы	6
1.3	Образ меры при отображении	7
1.4	Взвешенный образ меры	7
1.5	Плотность одной меры по отношению к другой	7
1.6	Заряд, множество положительности	8
1.6.1	Заряд	8
1.6.2	Множество положительности	8
1.7	Интегральные неравенства Гельдера и Минковского	8
1.7.1	Неравенство Гельдера	8
1.7.2	Неравенство Минковского	8
1.8	Интеграл комплекснозначной функции	8
1.9	Пространство $L_p(E, \mu)$, $1 \leq p < +\infty$	9
1.10	Пространство $L_\infty(E, \mu)$	9
1.11	Существенный супремум	9
1.12	Условие L_{loc}	10
1.13	Несобственный интеграл Лебега в R	10
1.14	Фундаментальная последовательность, полное пространство	10
1.14.1	Фундаментальная последовательность	10
1.14.2	Полное пространство	10
1.15	Плотное множество	11
1.16	Равномерная сходимост несобственного интеграла	11
1.17	Нормальное топологическое пространство	11
1.18	Финитная функция	11
1.19	Гильбертово пространство	11
1.20	Ортогональный ряд	11

1.21	Сходящийся ряд в Гильбертовом пространстве	11
1.22	Ортогональная система (семейство) векторов	12
1.23	Ортонормированная система	12
1.24	Коэффициенты Фурье	12
1.25	Ряд Фурье в Гильбертовом пространстве	12
1.26	Базис, полная, замкнутая ОС	12
1.27	Измеримое множество на элементарной двумерной поверхности в \mathbb{R}^3 .	13
1.28	Мера Лебега на простой двумерной поверхности в \mathbb{R}^3	13
1.29	Поверхностный интеграл первого рода	13
1.30	Кусочно-гладкая поверхность в \mathbb{R}^3	13
1.31	Тригонометрический ряд	13
1.32	Коэффициенты Фурье функции	14
1.33	Класс Липшица с константой M и показателем α	14
1.34	Сторона поверхности	14
1.35	Задание стороны поверхности с помощью касательных реперов	14
1.36	Интеграл II рода	15
1.37	Ориентация контура, согласованная со стороной поверхности	15
1.38	Ядро Дирихле, ядро Фейера	16
1.38.1	Ядро Дирихле	16
1.38.2	Ядро Фейера	16
1.39	Свертка	16
1.40	Аппроксимативная единица. (а. е.)	16
1.41	Усиленная аппроксимативная единица.	16
1.42	Метод суммирования средними арифметическими	17
1.43	Суммы Фейера.	17
1.44	Ротор, дивергенция векторного поля	17
1.45	Соленоидальное векторное поле	17
1.46	Бескоординатное определение ротора и дивергенции	17
1.47	Преобразование Фурье	18
1.48	Свертка в $L^1(\mathbb{R}^m)$	18
1.49	Интеграл Фурье, частичный интеграл Фурье	18
1.50	Обратное преобразование Фурье	18
2	Теоремы	19
2.1	Теорема Леви	19
2.2	Линейность интеграла Лебега	20

2.3	Теорема об интегрировании положительных рядов	21
2.4	Абсолютная непрерывность интеграла	21
2.4.1	Следствие	22
2.5	Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере.	22
2.6	Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде.	24
2.7	Теорема Фату	25
2.8	Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры	25
2.8.1	Лемма	25
2.8.2	Следствие	25
2.8.3	Теорема	25
2.9	Критерий плотности	26
2.10	Единственность плотности	27
2.11	Лемма о множестве положительности	28
2.12	Теорема Радона-Никодима	28
2.13	Лемма об образах малых кубических ячеек при диффеоморфизме	30
2.14	Лемма о вариациях на тему регулярности меры Лебега	31
2.15	Теорема об образе меры Лебега при диффеоморфизме	32
2.16	Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега	33
2.17	Принцип Кавальери	33
2.18	Сферические координаты в R^m	35
2.19	Совпадение определенного интеграла и интеграла Лебега	35
2.20	Теорема Тонелли	36
2.21	Объем шара в \mathbb{R}^m	37
2.22	Теорема Фубини	37
2.23	Формула для Бета-функции	38
2.24	Предельный переход под знаком интеграла при наличии равномерной сходимости	38
2.24.1	При L_{loc}	39
2.25	Теорема Лебега о непрерывности интеграла по параметру	40
2.26	Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру	40
2.27	Перестановка двух предельных переходов. Предельный переход в несобственном интеграле.	41
2.28	Вычисление интеграла Дирихле	41

2.29	Теорема об интегрировании несобственного интеграла по параметру . . .	41
2.30	Правило Лейбница для несобственных интегралов	41
2.31	Теорема о вычислении интеграла по мере Бореля—Стилтьеса (с леммой)	41
2.32	Теорема о вложении пространств L^p	41
2.33	Теорема о сходимости в L_p и по мере	42
2.34	Полнота L^p	43
2.35	Плотность в L^p множества ступенчатых функций	44
2.36	Лемма Урысона	44
2.37	Плотность в L^p множества финитных непрерывных функций	45
2.38	Теорема о непрерывности сдвига	45
2.39	Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве	46
2.40	Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе . . .	46
2.41	Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя	47
2.42	Теорема Рисса – Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля . .	48
2.43	Теорема о характеристике базиса	48
2.43.1	$1 \Rightarrow 2$	49
2.43.2	$2 \Rightarrow 3$	49
2.43.3	$3 \Rightarrow 4$	49
2.43.4	$4 \Rightarrow 1$	49
2.43.5	$4 \Rightarrow 5$	50
2.43.6	$5 \Rightarrow 4$	50
2.44	Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда	50
2.45	Теорема Римана-Лебега	51
2.46	Три следствия об оценке коэффициентов Фурье	51
2.47	Принцип локализации Римана	51
2.48	Признак Дини. Следствия	52
2.49	Корректность определения свертки	54
2.50	Свойства свертки функции из L^p с функцией из L^q	54
2.51	Теорема о свойствах аппроксимативной единицы	55
2.52	Теорема Фейера	57
2.53	Полнота тригонометрической системы и другие следствия теоремы Фейера	57
2.54	Лемма об оценке интеграла ядра Дирихле	57
2.55	Формула Грина	57
2.56	Теорема об интегрировании ряда Фурье	59

2.57	Следствие о синус-коэффициентах интегрируемой функции	60
2.58	Лемма о слабой сходимости сумм Фурье	60
2.59	Леммы о равномерной ограниченности сумм Фурье и об обобщенном равенстве Парсеваля	61
2.60	Формула Стокса	61
2.61	Формула Гаусса–Остроградского	62
2.62	Соленоидальность бездивергентного векторного поля	62
2.63	Свойства преобразования Фурье: непрерывность, ограниченность, сдвиг	63
2.64	Преобразование Фурье и дифференцирование	63
2.64.1	Обозначения	63
2.64.2	Утверждение: при п.в. u : $f(u, t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$)	63
2.64.3	Доказательство основного факта теоремы:	64
2.65	Следствие о преобразовании Фурье финитных функций	64
2.66	Лемма "о ядре Дирихле".	65
2.67	Теорема о равносходимости ряда Фурье и интеграла Фурье	65
2.68	Признак Дирихле–Жордана	66
2.69	Лемма о Вейерштрассовской аппроксимативной единице	67
2.70	Формула обращения преобразования Фурье.	67
2.71	Преобразование Фурье на классе быстро убывающих функций	67
2.72	Теорема Вейерштрасса (лемму можно не доказывать)	68
2.73	Следствие об одновременном приближении функции и ее производных	68

Глава 1

Определения

1.1 Произведение мер

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle, \langle Y, \mathbb{B}, \nu \rangle$ - пространства с мерой.

μ, ν - σ -конечные меры.

$$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{A \times B \subset X \times Y : A \in \mathbb{A}, B \in \mathbb{B}\}$$

$$m_0 : \mathbb{A} \times \mathbb{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

$$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$$

m - называется произведением мер μ и ν , если m - мера, которая является Лебеговским продолжением m_0 с полукольца $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ на некоторую σ -алгебру $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$.

$m = \mu \times \nu$ - обозначение.

$\langle X \times Y, \mathbb{A} \otimes \mathbb{B}, \mu \times \nu \rangle$ - произведение пространств с мерой.

1.2 Сферические координаты в R^3 и в R^m , их Якобианы

$$x_1 = r \cdot \cos \phi_1$$

$$x_2 = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \cos \phi_2$$

$$x_3 = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdot \cos \phi_3$$

\vdots

$$x_{m-2} = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{m-3} \cdot \cos \phi_{m-2}$$

$$x_{m-1} = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{m-2} \cdot \cos \phi_{m-1}$$

$$x_m = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{m-2} \cdot \sin \phi_{m-1}$$

$$1 \leq i \leq m-2 : \phi_i \in [0, \pi]$$

$$i = m-1 : \phi_i \in [0, 2\pi]$$

$$r \geq 0$$

$$\mathcal{J} = r^{m-1} \cdot (\sin \phi_1)^{m-2} \cdot (\sin \phi_2)^{m-3} \cdots (\sin \phi_{m-2})^1 \cdot (\sin \phi_{m-1})^0$$

Что тут происходит идейно. Сначала мы проецируем наш m -мерный вектор на нормаль к $(m-1)$ -мерной гиперплоскости. Потом рассматриваем проекцию на эту гиперплоскость и в ней рекурсивно повторяем процедуру, пока не дойдём до нашего любимого \mathbb{R}^2 . Уже в нём рассматриваем обычные полярные координаты (отсюда и другие ограничения на размер угла).

1.3 Образ меры при отображении

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ — пространство с мерой, $\langle Y, \mathbb{B}, _ \rangle$ — пространство с σ -алгеброй.

$\Phi : X \rightarrow Y$, $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$ (прообраз любого множества из \mathbb{B} лежит в \mathbb{A}).

Пусть для $\forall E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) = \mu(\Phi^{-1}(E))$.

ν является мерой на Y и называется образом меры μ при отображении Φ .

1.4 Взвешенный образ меры

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ — пространство с мерой, $\langle Y, \mathbb{B}, _ \rangle$ — пространство с σ -алгеброй.

$\Phi : X \rightarrow Y$, $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$ (прообраз любого множества из \mathbb{B} лежит в \mathbb{A}).

$\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая.

Пусть для $E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \omega d\mu$.

ν является мерой на Y и называется взвешенным образом меры μ .

При $\omega \equiv 1$ взвешенный образ меры является обычным образом меры.

1.5 Плотность одной меры по отношению к другой

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ — пространство с мерой.

$\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая.

$\nu(E) = \int_E \omega(x) d\mu$. ν — мера на X .

ω называется плотностью ν относительно μ .

1.6 Заряд, множество положительности

1.6.1 Заряд

$\langle X, \mathbb{A}, _ \rangle$ — пространство с σ -алгеброй.

$\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ (конечная, не обязательно неотрицательная).

ϕ счётно аддитивна.

Тогда ϕ — заряд.

1.6.2 Множество положительности

$A \subset X$ — множество положительности, если $\forall B \subset A, B$ измеримо: $\phi(B) \geq 0$.

1.7 Интегральные неравенства Гельдера и Минковского

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle; f, g : E \subset X \rightarrow \mathbb{C}$ (E - изм.) — заданы п.в, измеримы.

1.7.1 Неравенство Гельдера

$$p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \text{ Тогда: } \int_E |fg| d\mu \leq \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_E |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

1.7.2 Неравенство Минковского

$$1 \leq p < +\infty. \text{ Тогда: } \left(\int_E |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

1.8 Интеграл комплекснозначной функции

(X, \mathbb{A}, μ) - пространство с мерой. $E \in \mathbb{A}$

$f : E \rightarrow \mathbb{C}$

f измерима (суммируема), если $Im(f)$ и $Re(f)$ измеримы (суммируема)

$$\int_E f = \int_E Re(f) + i \cdot \int_E Im(f)$$

1.9 Пространство $L_p(E, \mu)$, $1 \leq p < +\infty$

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$, $E \in \mathbb{A}$.

$$L'_p(E, \mu) = \{f : \text{п.в. } E \rightarrow \mathbb{C}, \text{ изм.}, \int_E |f|^p d\mu < +\infty\}$$

Это линейное пространство (по нер-ву Минковского и линейности пространства измеримых функций).

У этого пространства есть дефект — если определить норму как $\|f\| = \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$,

то будет сразу много нулей пространства (ненулевые функции, которые п.в. равны 0, будут иметь норму 0). Поэтому перейдем к фактор-множеству функций по отношению эквивалентности:

$f \sim g$, если $f = g$ п.в.

$$L_p(E, \mu) := L'_p(E, \mu) / \sim - \text{ лин. норм. пр-во с нормой } \|f\| = \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

NB1: Его элементы — классы эквивалентности обычных функций. Будем называть их тоже функциями. Они не умеют вычислять значение в точке (т.к. можно всегда подменить значение на любое другое и получить представителя все того же класса эквивалентности), но зато их можно интегрировать!

NB2: также иногда будем обозначать $\|f\|_p$ за норму f в пространстве L_p .

1.10 Пространство $L_\infty(E, \mu)$

$$L_\infty(E, \mu) = \{f : \text{п.в. } E \rightarrow \mathbb{C}, \text{ess sup}_E |f| < +\infty\}$$

$$\text{NB1: } \|f\|_\infty = \text{ess sup}_E |f|.$$

NB2: Новый вид нер-ва Гельдера : $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ (причем можно брать $p = +\infty, q = 1$ или наоборот).

1.11 Существенный супремум

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$, $E \subset X$ — изм., $f : \text{п.в. } E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

$$\text{Тогда: } \text{ess sup}_{x \in E} f(x) = \inf \{A \in R : f(x) \leq A \text{ при п.в. } x\}.$$

В этом определении A - существенная верхняя граница.

Свойства:

1. $\operatorname{ess\,sup}_E f \leq \sup_E f$
2. $f(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_E f$ при п.в. $x \in E$.
3. $\int_E |fg| d\mu \leq \operatorname{ess\,sup}_E |g| \cdot \int_E |f| d\mu$.

1.12 Условие L_{loc}

$$f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

$(\mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu)$ – протр. с мерой

\mathbb{Y} – метр. протр. (или метризуемое); $a \in \mathbb{Y}$

$\forall y \ f^y(x) = f(x, y)$ – сумм. на \mathbb{X}

f удовлетворяет L_{loc} ($f \in (L_{loc})$) если:

- $\exists g : \mathbb{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – сумм.
- $\exists U(a) \ \forall y \in \dot{U}(a)$ при п. в. $x \in \mathbb{X} \ |f(x, y)| \leq g(x)$

1.13 Несобственный интеграл Лебега в R

Ты проиграл

1.14 Фундаментальная последовательность, полное пространство

1.14.1 Фундаментальная последовательность

$\{a_n\}$ – фунд. посл. в метрическом пр-ве (X, ρ) , если $\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n, k > N : \rho(a_n, a_k) < \epsilon$

1.14.2 Полное пространство

X – полное пространство, если любая фундаментальная последовательность в нём сходится.

1.15 Плотное множество

Множество A плотно во множестве B , если $\forall b \in B \forall \epsilon > 0$ верно, что $U_\epsilon(b) \cap A \neq \emptyset$.

1.16 Равномерная сходимость несобственного интеграла

$I(y)$ - р.с. на мн-ве Y , $\int_A^B f(x, y)dx \xrightarrow{B \rightarrow b_0} Y(y)$ т.е
 $\Leftrightarrow \sup_{Y \in y} \left| \int_A^B f(x, y)dx \right| \xrightarrow{B \rightarrow b \rightarrow 0} 0$

1.17 Нормальное топологическое пространство

$\mathbb{R}^m, F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^m$ — замкнутое подмножество и не пересек,

Тогда $\exists U(F_1), U(F_2)$ — откр. мн-ва: $F_1 \subset U(F_1), F_2 \subset U(F_2), U(F_1) \cap U(F_2) = \emptyset$

1.18 Финитная функция

$\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. \exists шар $B : \varphi \equiv 0$ вне B . Тогда ϕ — финитная.

Множество непрерывных финитных функций обозначаем как $C_0(\mathbb{R}^m)$.

1.19 Гильбертово пространство

\mathbb{H} — линейное пространство над \mathbb{R} или \mathbb{C} , в котором задано скалярное произведение, и полное относительно соответствующей нормы, называется Гильбертовым.

1.20 Ортогональный ряд

$x_k \in \mathbb{H}, \sum x_k$ называется ортогональным рядом, если $\forall k, l : k \neq l : x_k \perp x_l$.

1.21 Сходящийся ряд в Гильбертовом пространстве

$x_n \in \mathbb{H}$.

$\sum x_n$ сходится к x , если

$S_n := \sum_{k=1}^n x_k$, $S_n \rightarrow x$ (то есть, $|S_n - x| \rightarrow 0$ — сходимость по норме).

1.22 Ортогональная система (семейство) векторов

$\{e_k\} \in \mathbb{H}$ - ортогональное семейство векторов, если $\forall k \neq l \ e_k \perp e_l$, $\forall k \ e_k \neq 0$.

1.23 Ортонормированная система

$\{e_k\} \in \mathbb{H}$ - ортонормированное семейство векторов, если e_k — ортогональное семейство векторов, и $\forall k \ |e_k| = 1$.

1.24 Коэффициенты Фурье

$\{e_k\}$ - ортогональное семейство векторов в \mathbb{H} , $x \in \mathbb{H}$.

$c_k(x) = \frac{\langle x, e_k \rangle}{|e_k|^2}$ называются коэффициентами Фурье вектора x по ортогональной системе $\{e_k\}$.

1.25 Ряд Фурье в Гильбертовом пространстве

$\sum c_k(x) \cdot e_k$ называется рядом Фурье вектора x по ортогональной системе $\{e_k\}$.

1.26 Базис, полная, замкнутая ОС

$\{e_k\}$ — ортогональная система в \mathbb{H} .

1. $\{e_k\}$ — **базис**, если $\forall x \in \mathbb{H} \ \exists c_k$, что $x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \cdot e_k$
2. $\{e_k\}$ — **полная** О.С., если $(\forall k \ z \perp e_k) \Rightarrow z = 0$.
3. $\{e_k\}$ — **замкнутая** О.С., если $\forall x \in \mathbb{H} \ \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(x)|^2 \cdot \|e_k\|^2 = \|x\|^2$.

1.27 Измеримое множество на элементарной двумерной поверхности в \mathbb{R}^3

$M \subset \mathbb{R}^3$ – простое 2-мерное многообразие, C^1 гладкости.

$\phi: \underset{\text{откр. обл.}}{O} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \phi \in C^1$ – гомеоморфизм, $\phi(O) = M$

$E \subset M$ – изм. по Лебегу, если $\phi^{-1}(E)$ – изм. по Лебегу в \mathbb{R}^2

1.28 Мера Лебега на простой двумерной поверхности в \mathbb{R}^3

$S(E) := \iint_{\phi^{-1}(E)} |\phi'_u \times \phi'_v| du dv$ – взвеш. образ меры Лебега отн. ϕ . Значит это мера на \mathbb{A}_M

1.29 Поверхностный интеграл первого рода

M – простое, гл, 2-мерное в \mathbb{R}^3 , ϕ – параметризация

f – изм. отн. S (см. выше), $f > 0$ (или f – суммируем. по S)

Тогда: $\int_M f dS$ – называет инт. первого рода функ. f по поверхности M

1.30 Кусочно-гладкая поверхность в \mathbb{R}^3

$M \subset \mathbb{R}^3$ называется кусочно-гладкой, если M представляет собой объединение:

- конечного числа простых гладких поверхностей
- конечного числа простых гладких дуг
- конечного числа точек

1.31 Тригонометрический ряд

•

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

(где a_i, b_i – коэффициенты ряда).

- Другая форма:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

Тогда $S_n := \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}$.

1.32 Коэффициенты Фурье функции

-

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx$$

-

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

-

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx$$

1.33 Класс Липшица с константой M и показателем альфа

$$E \in \langle a, b \rangle Lip_M^\alpha(E) = \{f : \forall x, y \in E : |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha\}$$

1.34 Сторона поверхности

Сторона (простой) гладкой двумерной поверхности — непрерывное поле единичных нормалей. Поверхность, для которой существует сторона, называется двусторонней. Если же стороны не существует, она называется односторонней.

1.35 Задание стороны поверхности с помощью касательных реперов

F_1, F_2 — два касательных векторных поля к поверхности M .

$\forall p \in M \quad F_1(p), F_2(p)$ — Л.Н.З. касательные векторы.

Тогда поле нормалей стороны определяется, как $n := F_1 \times F_2$

Репер — пара векторов из $F_1 \times F_2$.

1.36 Интеграл II рода

M — простая гладкая двусторонняя двумерная поверхность в \mathbb{R}^3 .

n_0 — фиксированная сторона (одна из двух).

$F : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ — векторное поле.

Тогда интегралом II рода назовем $\int_M \langle F, n_0 \rangle ds$

Замечания

1. Смена стороны эквивалентна смене знака.
2. Не зависит от параметризации.
3. $F = (P, Q, R)$.

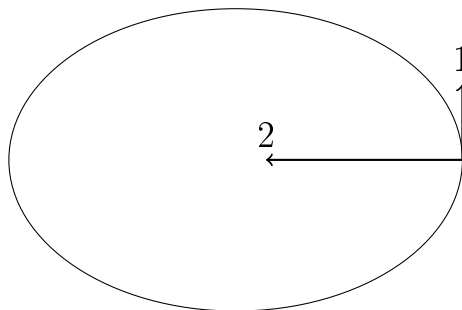
Тогда интеграл имеет вид $\iint Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$.

NB: $Qdx dz = -Qdz dx$.

1.37 Ориентация контура, согласованная со стороной поверхности

Ориентация контура согласована со стороной поверхности, если она задает эту сторону.

Пояснение: Рассмотрим некоторый контур (замкнутую петлю) и точку на нем. Построим два касательных вектора к контуру в этой точке: первый — снаружи от контура (задает направление «движения» по петле), второй — внутри контура. Тогда будем называть такую ориентацию согласованной со стороной, если направление векторного произведения первого и второго векторов в точке совпадает с направлением нормали к поверхности.



1.38 Ядро Дирихле, ядро Фейера

1.38.1 Ядро Дирихле

$$D_n(t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right)$$

1.38.2 Ядро Фейера

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t)$$

1.39 Свертка

$f, K \in L_1[-\pi, \pi]$ – пеорид.

$$(f * K)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt$$

1.40 Аппроксимативная единица. (а. е.)

Пояснения: нужна 1-ца по свертке, но это не совсем функция, поэтому зададим её как предел последовательности.

$D \subset R, h_0$ – предельная точка D в \overline{R} , тогда $\{K_h\}_{h \in D}$ – а. е. если:

$$\text{AE1: } \forall h \in D \quad K_h \in L_1[-\pi, \pi] \quad \int_{-\pi}^{\pi} K_h = 1$$

$$\text{AE2: } \exists M \forall h \quad \int_{-\pi}^{\pi} |K_h| \leq M$$

$$\text{AE3: } \forall \delta \in (0, \pi) \quad \int_{E_\delta} |K_h| \xrightarrow{h \rightarrow h_0} 0, \text{ где } E_\delta = [-\pi, \pi] \setminus [h_0 - \delta, h_0 + \delta]$$

1.41 Усиленная аппроксимативная единица.

Изменяем свойство AE3, на AE3':

$$\forall h \quad K_h \in L_\infty[-\pi, \pi]; \quad \forall \delta \in (0, \pi) \quad \operatorname{ess\,sup}_{t \in E_\delta} |K_h(t)| \xrightarrow{h \rightarrow h_0} 0$$

1.42 Метод суммирования средними арифметическими

$$\sum a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^n S_k$$

1.43 Суммы Фейера.

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \Phi_n(t) dt$$

1.44 Ротор, дивергенция векторного поля

$F = (P, Q, R)$ — векторное поле в \mathbb{R}^3 .

$\text{rot } F = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y)$ — ротор, вихрь

$\text{div } F = P'_x + Q'_y + R'_z$. Многомерный случай определяется аналогично.

1.45 Соленоидальное векторное поле

Векторное поле A — соленоидальное, если \exists векторное поле $B : \text{rot } B = A$. Тогда B называется векторным потенциалом поля A .

1.46 Бескоординатное определение ротора и дивергенции

$\text{rot } F$ — это такое векторное поле, что $\forall a \forall n_0 (\text{rot } F(a))_{n_0} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial B_r} F_l dl$

где B_r — круговой контур, n_0 — нормаль контура, F_l — проекция на касательное направление контура.

Пояснение: $\frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial B_r} F_l dl = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{B_r} \langle \text{rot } F, n_0 \rangle dS \underset{r \approx 0}{\approx} \text{rot } F(a)$

$\text{div } F(a) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_3(B(a,r))} \iiint_{B(a,r)} \text{div } F dx dy dz = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_3(B(a,r))} \iint_{\partial B(a,r)} \langle F, n_0 \rangle dS$

1.47 Преобразование Фурье

$$f_n(x) \in L^1(R^m), y \in R^m$$

$$\widehat{f}(y) = \int_{R^m} f(x) e^{-2\pi i \langle y, x \rangle} dx \text{— Преобразование Фурье}$$

Свойства:

1. \widehat{f} — непрерывно в R^m , $|f(x) e^{-2\pi i \langle y, x \rangle}| \leq |f(x, y)|$
2. \widehat{f} — ограничено, $|\widehat{f}(y)| \leq \int_{R^m} |f(x) e^{-2\pi i \langle y, x \rangle}| dx$

TODO

1.48 Свертка в $L^1(\mathbb{R}^m)$

$$f, g \in L^1(R^m)$$

$$(f * g)(x) = \int_{R^m} f(u) g(x - u) du$$

$$(f * g) \in L^1(R^m) \text{— как для свертки на } [-\pi, \pi]$$

1.49 Интеграл Фурье, частичный интеграл Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_R \widehat{f}(y) e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dy \text{— Интеграл Фурье}$$

Но это не точно

1.50 Обратное преобразование Фурье

$$f(x) = \int_R \widehat{f}(y) e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dy \text{— Формула обращения}$$

$$I_A(f, x) = \int_{-A}^A \widehat{f}(y) e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dy$$

Но это не точно

Глава 2

Теоремы

2.1 Теорема Леви

(X, \mathbb{A}, μ) , $f_n \geq 0$ - изм.

$f_1(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \dots$ при почти всех x

$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ при почти всех x (считаем, что при остальных $x : f \equiv 0$)

Тогда: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu$

Доказательство:

N.B. $\int_X f_n \leq \int_X f_{n+1} \Rightarrow \exists \lim$

f - измерима как предел последовательности измеримых функций

1. \leq

Очевидно: $f_n \leq f$ при п.в $x \Rightarrow \int_X f_n \leq \int_X f$. Делаем предельный переход по n .

2. \geq

(a) Логичная редукция: хочется доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) \geq \int_X g$, где $0 \leq g \leq f$, g ступенчатая.

(b) Наглая редукция: докажем, что $\forall c \in (0, 1) : \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) \geq c \cdot \int_X g$

i. $E_n = \{x \mid f_n(x) \geq c \cdot g\}$. Очевидно $E_1 \subset \dots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$

ii. $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$ т.к. $c < 1$

iii. $\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \int_{E_n} c \cdot g$ (по определению E_n)
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \geq c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} g = c \cdot \int_X g$

- iv. Последний знак равно обусловлен тем, что интеграл неотрицательной и измеримой функции по множеству - мера (см. следствие 3 предыдущей теоремы), и мы используем непрерывность меры снизу
- v. Устремляем c к 1.

2.2 Линейность интеграла Лебега

f, g измеримые, Тогда $\int_{\mathbb{E}} (f + g) = \int_{\mathbb{E}} f + \int_{\mathbb{E}} g$

Доказательство:

1. Пусть f, g - ступенчатые, тогда у них имеется общее разбиение

$$f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$$

$$g = \sum_k (\alpha_k \cdot \chi_{E_k})$$

$$\int_{\mathbb{E}} (f + g) = \sum_k (\lambda_k + \alpha_k) \cdot \mu E_k = \sum_k \lambda_k \cdot \mu E_k + \sum_k \alpha_k \cdot \mu E_k = \int_{\mathbb{E}} f + \int_{\mathbb{E}} g, \text{ что и требовалось доказать}$$

2. $f, g \geq 0$, измеримые

Тогда $\exists h_n : 0 \leq h_n \leq h_{n+1} \leq f$, h_n ступенчатые

$\exists \widetilde{h}_n : 0 \leq \widetilde{h}_n \leq \widetilde{h}_{n+1} \leq g$, \widetilde{h}_n ступенчатые

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = f$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \widetilde{h}_n = g$$

$$\int_{\mathbb{E}} (h_n + \widetilde{h}_n) = \int_{\mathbb{E}} h_n + \int_{\mathbb{E}} \widetilde{h}_n$$

$$\int_{\mathbb{E}} (h_n + \widetilde{h}_n) \rightarrow \int_{\mathbb{E}} (f + g)$$

$$\int_{\mathbb{E}} h_n \rightarrow \int_{\mathbb{E}} f$$

$$\int_{\mathbb{E}} \widetilde{h}_n \rightarrow \int_{\mathbb{E}} g$$

Тогда $\int_{\mathbb{E}} (f + g) = \int_{\mathbb{E}} f + \int_{\mathbb{E}} g$, что и требовалось доказать

3. Если f, g - любые измеримые, распишем обе через срезки и докажем для них

2.3 Теорема об интегрировании положительных рядов

$u_n(x) \geq 0$ почти всюду на \mathbb{E} , тогда $\int_{\mathbb{E}} (\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu(x)$

Доказательство:

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N u_n(x); S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

$$1. S_N - \text{возрастает к } S \text{ при почти всех } x \xrightarrow{\text{Т. Леви}} \int_{\mathbb{E}} S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{E}} S = \int_{\mathbb{E}} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

$$2. \text{ С другой стороны } \int_{\mathbb{E}} S_N = \int_{\mathbb{E}} \sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n=1}^N \int_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu$$

3. Найденные пределы совпадают в силу единственности предела последовательности, что и требовалось доказать.

2.4 Абсолютная непрерывность интеграла

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ - пространство с мерой

$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ - суммируема

Тогда $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall E - \text{измеримое } \mu E < \delta \mid \int_E f d\mu < \epsilon$

Доказательство:

$$X_n := X(|f| \geq n)$$

$$X_n \supset X_{n+1} \supset \dots$$

$\mu(\cap X_n) = 0$, т.к. f — суммируема и потому почти везде конечна.

1. Мера : $(A \mapsto \int_A |f|)$ также равна 0 на $\cap X_n$. По непрерывности сверху: $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \int_{X_{n_\epsilon}} |f| < \epsilon/2$

2. Зафиксируем ϵ в доказываемом утверждении, возьмем $\delta := \frac{\epsilon/2}{n_\epsilon}$

$$3. \left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| = \int_{E \cap X_{n_\epsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\epsilon}^c} |f| \leq^* \int_{X_{n_\epsilon}} |f| + n_\epsilon \cdot \mu(E \cap X_{n_\epsilon}^c) \stackrel{**}{<} \epsilon/2 + n_\epsilon \cdot \mu E < \epsilon/2 + n_\epsilon \cdot \frac{\epsilon/2}{n_\epsilon} < \epsilon$$

* - В первом слагаемом увеличили множество, во втором посмотрели на определение X_n , взяли дополнение, воспользовались 6-м простейшим свойством интеграла

** - Воспользовались непрерывностью сверху

2.4.1 Следствие

f — суммируема

e_n — измеримые множества

Тогда если $\mu e_n \rightarrow 0$, то $\int_{e_n} f \rightarrow 0$

2.5 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере.

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ — пространство с мерой,

f_n, f — измеримы,

$f_n \xrightarrow{\mu} f$ (сходится по мере),

$\exists g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ такая, что:

- $\forall n$, для «почти всех» x $|f_n(x)| \leq g(x)$ (g называется мажорантой)
- g — суммируемая

Тогда:

- f_n, f — суммируемы
- $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$
- $\int_X f_n \rightarrow \int_X f$ («уж тем более»)

Доказательство:

1. f_n — суммируема, так как существует мажоранта g :

$$(a) |f_n| \leq g, \text{ поэтому } \int_X |f_n| \leq \int_X g.$$

(b) g суммируема и положительна $\Rightarrow \int_X g < +\infty \Rightarrow \int_X |f_n| < +\infty \Rightarrow f_n$ суммируема.

2. f – суммируема по теореме Рисса ($f_{n_k} \rightarrow f$ почти везде, $|f_{n_k}| \leq g$, тогда $|f| \leq g$ почти везде)

3. «уж тем более»:

$$\left| \int_X f_n - \int_X f \right| \leq \int_X |f_n - f|$$

Допустим, что $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ уже доказано.

Тогда «уж тем более» очевидно.

4. Докажем основное утверждение:

Разберем два случая:

(a) $\mu X < \infty$ Фиксируем $\epsilon \geq 0$ $X_n := X(|f_n - f| \geq \epsilon)$

$\mu X_n \rightarrow 0$ (так как $f_n \Rightarrow f$)

$$\begin{aligned} \int_X |f_n - f| &= \int_{X_n} |f_n - f| + \int_{X_n^c} |f_n - f| \leq \int_{X_n} 2g + \int_{X_n^c} \epsilon < \epsilon + \epsilon \mu X \text{ (прим.} \\ \int_{X_n} 2g &\rightarrow 0 \text{ по след. к т. об абс. сходимости)} \end{aligned}$$

(b) $\mu X = \infty$

Докажем «Антиабсолютную непрерывность» для g :

$$\forall \epsilon \exists A \subset X : \mu A - \text{конечно, } \int_{X \setminus A} g < \epsilon$$

доказательство:

$$\int_X g = \sup \left\{ \int_X g_k \mid 0 \leq g_k \leq g \right\} \text{ (} g_k \text{ – ступен.)}$$

$$\exists g_n : \int_X g - \int_X g_n < \epsilon$$

$$A := \text{supp } g_n \text{ (} \text{supp } f := \{x \mid f(x) \neq 0\})$$

$$A = \bigcup_{k \mid \alpha_k \neq 0} E_k \text{ (где } g_n = \sum_{\text{конечная}} \alpha_k \chi_{E_k})$$

$$\int_X g_n = \sum \alpha_k \mu E_k < +\infty \text{ (} \mu A \text{ – конеч.)}$$

$$\int_{X \setminus A} g = \int_{X \setminus A} (g - g_n) \leq \int_X (g - g_n) < \epsilon$$

Теперь докажем основное утверждение:

$$\int_X |f_n - f| = \int_A |f_n - f| + \int_{X \setminus A} |f_n - f| \leq \int_A |f_n - f| + 2\epsilon < 3\epsilon \left(\int_A |f_n - f| \rightarrow 0 \text{ по} \right.$$

п. (a))

2.6 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде.

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ – пространство с мерой,

f_n, f – измеримы,

$f_n \rightarrow f$ почти везде,

$\exists g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ такая, что:

- $\forall n$, для «почти всех» x $|f_n(x)| \leq g(x)$ (g называется мажорантой)
- g – суммируемая

Тогда:

- f_n, f – суммируемы
- $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$
- $\int_X f_n \rightarrow \int_X f$ («уж тем более»)

Доказательство:

1. Суммируемость и «уж тем более» см. пред. теорему.

2. Докажем основное утверждение:

$$h_n(x) := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, \dots)$$

Заметим, что при фикс. x выпол. $0 \leq h_n \leq 2g$ почти везде

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |f_n - f| = 0 \text{ почти везде}$$

$2g - h_n \uparrow$, $2g - h_n \rightarrow 2g$ почти везде

$$\int_X (2g - h_n) d\mu \rightarrow \int_X 2g \text{ (по т. Леви)}$$

$$\int_X 2g - \int_X h_n \rightarrow \int_X 2g, \text{ значит, } \int_X h_n \rightarrow 0$$

$$\int_X |f_n - f| \leq \int_X h_n \rightarrow 0$$

2.7 Теорема Фату

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ – пространство с мерой

f_n, f – измеримы,

$$f_n \geq 0$$

$f_n \rightarrow f$ «почти везде»

$$\exists C > 0 \forall n \int_X f_n d\mu \leq C$$

$$\text{Тогда: } \int_X f \leq C$$

Доказательство:

$$g_n := \inf(f_n, f_{n+1}, \dots) \quad (g_n \leq g_{n+1} \leq \dots)$$

$$\lim g_n = \underline{\lim}(f_n) \stackrel{\text{почти везде}}{=} \lim f_n = f \quad (g_n \rightarrow f \text{ почти везде})$$

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n \leq C$$

$$\int_X f = \text{по т. Леви} = \lim \int_X g_n \leq C$$

2.8 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры

2.8.1 Лемма

Пусть у нас есть $\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ и $\langle Y, \mathbb{B}, \nu \rangle$ и $\Phi : X \rightarrow Y$

Пусть $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$

Пусть для $E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) := \mu(\Phi^{-1}(E))$

Тогда:

$$\nu \text{ — мера на } (Y, \mathbb{B}), \quad \nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 \cdot d\mu$$

2.8.2 Следствие

Из этого следует, что если f — измеримая функция в Y (относительно ν), то $f \circ \Phi$ измерима относительно μ .

2.8.3 Теорема

Есть пространства $\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ и $\langle Y, \mathbb{B}, \nu \rangle$.

$\Phi : X \rightarrow Y$ $w \geq 0$ — измеримая, ν — взвешенный образ μ (w — плотность)

Тогда:

Для $\forall f \geq 0$ — измерима на Y , $f \circ \Phi$ — измерима (относительно μ)

$$\int_Y f d\nu = \int_X f(\Phi(x)) * \omega(x) d\mu(x)$$

Замечание: То же верно, если f суммируема.

Доказательство:

- $f \circ \Phi$ — измерима (из леммы)
- Возьмем $f = \chi_E$, $E \in \mathbb{B}$
 $(f \circ \Phi)(x) = \chi_{\Phi^{-1}(E)}$ — определение взвешенного образа меры
 $\nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \omega d\mu$ — доказали первый пункт
- — f — ступенчатая $\Rightarrow f = \sum \alpha_k * \chi_{E_k}$

$$- \int_Y \sum \alpha_k * \chi_{E_k} d\nu = \sum_Y \int \alpha_k \chi_{E_k} d\nu \stackrel{\text{первый случай}}{=} \sum \alpha_k \int_X \chi_{E_k}(\Phi(x)) * \omega(x) dx =$$

$$\int_X \sum \alpha_k \chi_{E_k}(\Phi(x)) * \omega(x) d\mu(x) = \int f \circ \Phi * \omega d\mu$$
- Если f — произвольная неотрицательная, то будем строить возрастающую последовательность ступенчатых, поточечно сходящихся к f . Тогда $\int_Y f_n d\nu = \int_X f_n(\Phi(x)) * \omega(x) d\mu(x)$. По теореме Леви делаем переход под знаком интеграла и всё доказываем.

2.9 Критерий плотности

Есть пространство $\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$

ν — еще одна мера.

$\omega \geq 0$ — измерима на X .

Тогда:

ω — плотность ν относительно $\mu \iff$ Для любого $A \in \mathbb{A} : \mu A \cdot \inf_A(\omega) \leq \nu(A) \leq \mu A \cdot \sup_A(\omega)$

Доказательство:

- \Rightarrow : очевидно из стандартного свойства интеграла
- \Leftarrow

Докажем, что $\nu A = \int_A \omega \cdot d\mu$

Пусть $\omega = 0$ на A . Тогда $0 \cdot \mu A \leq \nu A \leq 0 \cdot \mu A \Rightarrow \nu A = 0$

$$\int_A w = \int_A 0 = 0$$

Пусть $w > 0$ на A (иначе выделим ту часть, где 0 , для неё верно, докажем для остального). Зафиксируем произвольное $q \in (0; 1)$

Рассмотрим множества $A_j = \{x \in A : q^j \leq w(x) \leq q^{j-1}\}$

Из двусторонней оценки следует, что $q^j \cdot \mu A_j \leq \nu A_j \leq q^{j-1} \cdot \mu A_j$

Интегрируя по μ неравенство в определении A_j , получаем

$$q^j \cdot \mu A_j \leq \int_{A_j} w d\mu \leq q^{j-1} \cdot \mu A_j$$

Суммируя по j , получаем

$$q \cdot \int_A w d\mu \leq \sum_j q^j \nu A_j \leq \nu A \leq \frac{1}{q} \sum_j q^j \nu A_j \leq \frac{1}{q} \int_A w d\mu$$

Отсюда $q \cdot \int_A w d\mu \leq \nu A \leq \frac{1}{q} \int_A w d\mu$ для любого $q \in (0; 1)$. Переходим к пределу при $q \rightarrow 1$, получаем что нужно

2.10 Единственность плотности

$f, g \in L(x)$.

Пусть $\forall A$ — измеримо: $\int_A f = \int_A g$.

Тогда:

$f = g$ почти везде

Следствие:

Плотность ν относительно μ определена однозначно с точностью до μ -почти везде.

Доказательство:

- Вместо двух функций давайте рассмотрим одну $h = f - g$ и $\forall \int_A h = 0$. Пусть $A_+ = X(h \geq 0)$ и $A_- = X(h < 0)$
- $\int_{A_+} |h| = \int_{A_+} h = 0$
 $\int_{A_-} |h| = - \int_{A_-} h = 0$
- $X = A_+ \sqcup A_-$. Тогда $\int_X |h| = \int_{A_+} |h| + \int_{A_-} |h| = 0 \Rightarrow h = 0$ почти везде.

Почему? Ну потому что $\forall \epsilon > 0 : h > 0$ на X_ϵ меры 0 (иначе интеграл не 0)

То есть $|h| > \frac{1}{k}$ на X_k меры 0. Используем непрерывность сверху ($X_1 \subset X_2 \subset \dots$), поэтому $|h| > 0$ на X_0 меры 0, поэтому $h = 0$ пв

2.11 Лемма о множестве положительности

Пусть есть пространство $\langle X, \mathbb{A} \rangle$ и ϕ — заряд.

Тогда:

$\forall A \in \mathbb{A} \exists B \subset A : \phi(B) \geq \phi(A)$ и B — множество положительности

Доказательство:

- Если $\phi(A) \leq 0$, возьмём $B = \emptyset$. Далее $\phi(A) > 0$.
- E — множество ϵ -положительности (М ϵ П), если $\forall C \subset E, C$ измеримо: $\phi(C) \geq -\epsilon$
- **Утверждение:** $\forall \epsilon > 0$ A содержит М ϵ П C , такое что $\phi(C) \geq \phi(A)$.
 1. Если A — М ϵ П, то $C = A$
 2. Пусть A — не М ϵ П. Тогда существует $C_1 \subset A : \phi(C_1) < -\epsilon$.
Пусть $A_1 = A \setminus C_1$. $\phi(A_1) > \phi(A)$
 3. Если A_1 — М ϵ П, то это и есть искомое C . Иначе продолжим строить так A_2, A_3, \dots и C_2, \dots
 4. Процесс конечен, так как все C_i дизъюнкты, $\phi(C_i) < -\epsilon$, но $\phi(\bigsqcup C_i)$ конечно по определению заряда.
- Построим B : C_1 — множество 1-положительности в A . C_2 — множество $\frac{1}{2}$ -положительности в C_1 , и т. д. Тогда $B = \bigcap C_i$ — М ϵ П для любого ϵ , значит, это МП.
- $\phi(B) = \lim_{i \rightarrow \infty} \phi(C_i) \geq \phi(A)$ Это какая-то пародия на непрерывность меры, только для зарядов?

2.12 Теорема Радона-Никодима

Пусть есть пространство (X, \mathbb{A}, μ) .

ν — мера на \mathbb{A} .

Обе меры конечные и $\nu \prec \mu$ (абсолютная непрерывность меры: если $\mu E = 0$, то $\nu E = 0$).

Тогда:

$\exists! f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (с точностью до почти везде), которая является плотностью ν относительно μ и при этом f суммируема по μ .

Доказательство:

- единственность — из леммы
- строим кандидата на роль f . $P = \{p(x) | p \geq 0, \text{изм.}, \forall E \in \mathbb{A} : \int_E p \cdot d\mu \leq \nu(E)\}$

1. $P \neq \emptyset$ и $0 \in P$

2. $p_1, p_2 \in P \Rightarrow h = \max(p_1, p_2) \in P$

$$\forall E \int_E h d\mu = \int_{E(p_1 \geq p_2)} h d\mu + \int_{E(p_1 < p_2)} h d\mu = \int_{E(p_1 \geq p_2)} p_1 + \int_{E(p_1 < p_2)} p_2 \leq \nu(E(p_1 \geq p_2)) + \nu(E(p_1 < p_2)) = \nu E$$

По индукции $\max(p_1 \dots p_n) \in P$

3. $I = \sup_{p \in P} \int_X p d\mu$

\exists последовательность $f_1 \leq f_2 \leq \dots \in P : \int_X f_n d\mu \rightarrow I$ докажем, что она существует

4. Рассмотрим $p_1, p_2, \dots : \int_X p_n \rightarrow I$ (потому что супремум), а также $f_n = \max(p_1 \dots p_n) \in P$

5. $f := \lim f_n$. Тогда $\int_E f d\mu \stackrel{\text{Левин}}{=} \lim \int_E f_n d\mu \leq \nu E$, а следовательно $\int_X f = \lim \int_X f_n = I \leq \nu(X)$ Почему вообще $\int_X f_n d\mu \rightarrow I$?

6. Отлично, проверим, что f — плотность ν относительно μ .

(а) Предположим, что это не так: $\exists E_0 : \nu E_0 > \int_{E_0} f d\mu$

(б) $\mu E_0 > 0$ (иначе интеграл равен нулю и мера ν равна нулю из абсолютной непрерывности)

(с) Возьмем $a > 0 : \nu E_0 - \int_{E_0} f d\mu > a \cdot \mu E_0$

(д) Рассмотрим заряд $\phi(E) = \nu E - \int_E f d\mu - a \cdot \mu E$ (это законно, потому что меры конечные)

(е) $\phi(E_0) > 0$ (пункт с). Возьмем МП $B \subset E_0 : \phi(B) \geq \phi(E_0) > 0$. Тогда $\nu(B) = \phi(B) + \int_B f \cdot d\mu + a \cdot \mu B \geq \phi(B) > 0$

(ф) Проверим, что $f + a \cdot \chi_B \in P$. По определению: $\int_E (f + a \cdot \chi_B) d\mu = \int_{E \setminus B} f \cdot$

$$d\mu + \int_{E \cap B} f \cdot d\mu + a \cdot \mu(B \cap E) = \int_{E \setminus B} f + \nu(E \cap B) - \phi(E \cap B) \stackrel{f \in P}{\leq} \nu(E \setminus$$

$$B) + \nu(E \cap B) - \phi(E \cap B) = \nu E - \phi(E \cap B) \stackrel{\phi \geq 0}{\leq} \nu E$$

(g) $\int_X f + a \cdot \chi_B = I + a \cdot \mu B > I$, что противоречит определению I .

2.13 Лемма об образах малых кубических ячеек при диффеоморфизме

$$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$a \in O, \Phi \in C^1(O)$$

$$\text{Возьмём } c > |\det \Phi'(a)| \neq 0$$

тогда $\exists \delta > 0 : \forall$ кубической ячейки $Q, Q \subset B(a, \delta), a \in Q$ выполняется

$$\lambda \Phi(Q) < c \cdot \lambda Q$$

Доказательство

$\Phi(Q)$ измеримо, так как образ измеримого множества при гладком отображении измерим

$$L := \Phi'(a), L \text{ обратимо, так как } |\det L| \neq 0.$$

$$\Phi(x) = \Phi(a) + L(x - a) + o(x - a)$$

$$a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a)) = x + o(x - a)$$

Можем писать о малое, так как растяжение произошло не более чем в $|\det L^{-1}|$ раз, а $|\det L| \neq 0$

$$\text{Пусть } \Psi(x) := a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a))$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists B(a, \delta), \text{ такой, что при } x \in B(a, \delta) \quad |\Psi(x) - x| < \frac{\epsilon}{\sqrt{m}} |x - a| \quad (\text{так как } \Psi(x)$$

это почти x , только плюс $o(x - a)$)

$$a \in Q \subset B(a, \delta), \text{ где } Q \text{ — куб со стороной } h$$

$x \in Q$, тогда $|a - x| < \sqrt{m} \cdot h$ (так как диагональ m -мерного куба со стороной h равна $\sqrt{m} \cdot h$)

$$\text{Тогда } |\Psi(x) - x| < \epsilon h$$

$$\text{При } x, y \in Q, i \in \{1 \dots m\}$$

$$|\Psi(x)_i - \Psi(y)_i| \leq |\Psi(x)_i - x_i| + |\Psi(y)_i - y_i| + |x_i - y_i| \leq |\Psi(x) - x| + |\Psi(y) - y| + h < (1 + 2\epsilon)h$$

$$\Psi(Q) \subset \text{кубу со стороной } (1 + 2\epsilon)h$$

$$\lambda(\Psi(Q)) < (1 + 2\epsilon)^m \lambda Q$$

Φ выражается через Ψ через сдвиги и линейные преобразования. Тогда

$$\lambda(\Phi(Q)) = |\det L| \cdot \lambda \Psi(Q) \leq |\det L| \cdot (1 + 2\epsilon)^m \cdot \lambda Q$$

Возьмём ϵ так, чтобы $|\det L| \cdot (1 + 2\epsilon)^m$ было меньше c . Тогда при таком ϵ

$$\lambda(\Phi(Q)) < c \cdot \lambda Q$$

2.14 Лемма о вариациях на тему регулярности меры Лебега

$f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывна.

$A \subset O$, A — измеримо.

$A \subset Q$ (кубическая ячейка) $\subset \overline{Q} \subset O$, то есть граница A не лежит на границе O .

Тогда

$$\inf_{A \subset G \subset O, G \text{ — open set}} (\lambda G \cdot \sup_G(f)) = \lambda A \cdot \sup_A f$$

Доказательство

Докажем, что левая часть \geq и \leq правой

\geq очевидно, так как правая часть — нижняя граница для всего, встречающегося под \inf

Докажем \leq

1. $\lambda A = 0$. Тогда правая часть $= 0$.

$$A \subset \overline{Q} \Rightarrow \sup_A f < +\infty$$

$$\overline{Q} \text{ — компакт, } \alpha := \text{dist}(\overline{Q}, \partial O) > 0$$

Для множества $G : A \subset G \subset \frac{\alpha}{2}$ -окрестности ячейки Q

Назовём Q_1 кубическую ячейку, которая больше Q и у которой каждая сторона отстоит на $\frac{\alpha}{2\sqrt{m}}$ от соответствующей стороны Q .

$$A \subset G \subset \text{Int}(Q_1)$$

$$\sup_G f \leq \sup_{\overline{Q_1}} f < +\infty$$

При этом λG может быть выбрана сколь угодно близко к $\lambda A = 0$ по регулярности меры Лебега.

2. $\lambda A > 0, \sup_A f < c$

Возьмём c_1 :

$$\sup_A f < c_1 < c$$

Выберем ϵ так чтобы

$$\epsilon \cdot c_1 < \lambda A \cdot (c - c_1) \quad (*)$$

G_ϵ — такое множество, что $A \subset G_\epsilon$, G_ϵ — открытое, $\lambda(G_\epsilon \setminus A) < \epsilon$

$$G_1 := f^{-1}((-\infty; c_1)) \cap G_\epsilon \text{ — открытое}$$

$$\lambda(G_1 \setminus A) < \epsilon$$

$$\lambda G_1 \cdot \sup_{G_1} f \leq (\lambda A + \epsilon) \cdot c_1 < \lambda A \cdot c \text{ (из (*))}$$

(так как $G \subset f^{-1}(-\infty; c_1)$, то есть f на G_1 не больше c_1)

$$\inf(\lambda G \cdot \sup_G f) < \lambda A \cdot c$$

Переходя к \inf по c , получаем что требовалось

2.15 Теорема об образе меры Лебега при диффеоморфизме

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ - Диффеоморфизм, $\forall A \in \mathbb{M}^m, A \subset O$

$$\lambda(\Phi(A)) = \int_A |\det \Phi'(x)| d\lambda(x)$$

Доказательство:

Пусть $\nu A = \lambda(\Phi(A))$, проверим, что $|\det \Phi'(x)|$ - плотность ν относительно λ .

Обозначим $J(x) = |\det \Phi'(x)|$

Проверим $\forall A : \inf_{x \in A} J(x) \cdot \lambda A \leq \nu A \leq \sup_{x \in A} J(x) \cdot \lambda A$

Достаточно проверить только правую, так как левая эквивалентна $\lambda A \leq (\inf_{x \in A} J_\Phi(x))^{-1} \nu A$.

а $(\inf_{x \in A} J_\Phi(x))^{-1} = \sup_{x \in A} (J_\Phi(x))^{-1} = \sup_{y \in A'} J_{\Phi^{-1}}(y)$ (где $A' = \Phi(A)$, $A = \Phi^{-1}(A')$)

Тогда $\lambda(\Phi^{-1}(A')) \leq \sup_{y \in A'} J_{\Phi^{-1}}(y) \cdot \lambda A'$ эквивалентно правому неравенству, но для Φ^{-1}

Докажем правую часть

1. A - кубическая ячейка, $A \subset \bar{A} \subset O$

Пусть это неверно, тогда $\exists Q : \sup_{x \in Q} J(x) \cdot \lambda Q < \nu Q$. Возьмём $c : \sup_{x \in Q} J(x) < c$, тогда $c \cdot \lambda Q < \nu Q$. Разобьём Q на 2^m кубических ячеек, сторона каждой из которых в 2 раза меньше стороны исходной, тогда $\exists Q_1 : c \cdot \lambda Q_1 < \nu Q_1$. Аналогично делим Q_1 , по индукции строим вложенную последовательность таких ячеек. $\forall n : c \cdot \lambda Q_n < \nu Q_n$ (*)

Рассмотрим $a = \bigcap Q_n$, при этом $J(a) = |\det \Phi'(a)| < c$. Тогда по лемме $\exists B(a, \delta) : \text{при } Q_n \subset B(a, \delta) : \lambda \Phi(Q_n) < c \cdot \lambda Q_n$ - противоречие с (*).

2. A - открытое множество. Тогда $A = \bigsqcup A_i$. (кубические ячейки). Способ разбиения был в прошлом семе.

Тогда $\nu A = \sum \nu A_i \leq \sum \sup_{A_i} J \cdot \lambda A_i \leq \sum \sup_A J \cdot \lambda A_i = \sup_A J \cdot \sum \lambda A_i = \sup_A J \cdot \lambda A$

3. A - произвольное измеримое.

$\nu A \leq \nu G$ ($A \subset G$, G - открытое), тогда $\nu A \leq \sup_G J \cdot \lambda G \Rightarrow \nu A \leq \inf_{A \subset G - \text{openset}} (\sup_G J \cdot \lambda G) \Rightarrow \nu A \leq \sup_A J \cdot \lambda A$ (из леммы)

2.16 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ - диффеоморфизм

$O' = \Phi(O)$ — открытое

f задана на O' , $f \geq 0$, измерима по Лебегу, тогда

$$\int_{O'} f(y) \cdot d\lambda(y) = \int_O f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| \cdot d\lambda(x)$$

Доказательство:

Изи.

$\nu(A) = \lambda\Phi(A)$, ν имеет плотность $J\Phi$ относительно λ .

Применить теорему об интеграле по взвешенному образу меры.

2.17 Принцип Кавальери

(X, α, μ) и (Y, β, ν) — пространства с мерами, причем μ, ν — σ -конечные и полные $m = \mu \times \nu$, $C \in \alpha \otimes \beta$, тогда:

1. При п.в. x C_x измеримо (ν -измеримо), т.е. $C_x \in \beta$
2. Функция $x \rightarrow \nu C_x$ — измеримая (в широком смысле) на X

NB: ϕ — измерима в широком смысле, если она задана при п.в. x , и $\exists f : X \rightarrow \mathbb{R}'$ — измеримая и $\phi = f$ п.в. При этом $\int_X \phi = \int_X f$ (по опр.)

$$3. mC = \int_X \nu(C_x) \cdot d\mu(x)$$

Доказательство: Рассмотрим D — совокупность все множеств C , для которых утверждение теоремы верно.

$\rho = \alpha \times \beta$ — полукольцо измеримых «прямоугольников».

1. $\rho \subset D$

$$C = A \times B. \text{ то есть } \forall x \ C_x = \begin{cases} \emptyset, x \notin A; \\ B, x \in A \end{cases}$$

$x \rightarrow \nu(C_x)$, функция $\nu(B) \cdot \chi_A(x)$ — изм.

$$\int_X \nu(C_x) d\mu = \nu B \int_X \chi_A(x) d\mu(x) = \nu B \cdot \mu A = mC$$

2. $E_i \in D$, E_i дизъюнкты $\Rightarrow E := \bigsqcup E_i \in D$

при п.в. x $(E_i)_x$ — измеримы

при п.в. x все $(E_i)_x$ — измеримы, $E_x = \bigsqcup (E_i)_x$ — измеримо.

$\nu E_x = \sum \nu(E_i)_x$ ($\nu(E_i)_x$ — изм. как функция от x) \Rightarrow функция $x \rightarrow \nu E_x$ — измерима

$$\int_X \nu E_x d\mu(x) = \sum_i \int \nu(E_i)_x d\mu(x) = \sum_i mE_i = mE$$

3. $E_i \in D$, $E_1 \supset E_2 \supset \dots$; $mE_i < +\infty$. Тогда $E := \bigcap E_i \in D$

$$\int_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty (*)$$

функция $x \rightarrow \nu(E_i)_x$ — суммируема \Rightarrow п.в. конечна.

при всех x $(E_i)_x \downarrow E_x$, т.е. $(E_1)_x \supset (E_2)_x \supset \dots$ и $\bigcap (E_i)_x = E_x$

при п.в. x $\nu(E_i)_x$ — конечны (для таких x).

Тогда E_x — измерима и $\lim \nu(E_i)_x = \nu E_x$ по непр-ти меры ν сверху.

(Th. Лебега) $|\nu(E_i)_x| \leq \nu(E_1)_x$ — сумм. \Rightarrow функция $x \rightarrow \nu E_x$ — изм.

$\int_X \nu E_x d\mu = \lim \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \lim mE_i = mE$ (непр. сверху меры m). Этот предельный переход корректен как раз по теореме Лебега ($f_n \rightarrow f$ п.в. $g : |f_n| \leq g$ — сумм. Тогда $\int f_n \rightarrow \int f$).

NB: мы доказали про пересечения и про объединения (пусть пересечения убывающие, а объединения — дизъюнкты, но это лечится). Поэтому $\bigcap_j (\cup_i A_{i,j}) \in D$, если $A_{i,j} \in \rho$ ($\rho \subset D$).

4. $mE = 0 \Rightarrow E \in D$

$\exists H \in D$, H имеет вид $\bigcap (\cup A_{i,j})$, где все $A_{i,j} \in \rho$

(из п.5 т. о продолжении, чем бы это ни было) Найдется такое H такого вида, что $E \subset H$, $mH = 0$ $0 = mH = \int_X \nu H_x d\mu(x) \Rightarrow \nu H_x = 0$ ($= 0$ при п.в. x).

$E_x \subset H_x \Rightarrow E_x$ — ν -изм. (из полноты ν) и $\nu E_x = 0$ п.в. x

$$\int_X \nu E_x d\mu = 0 = mE$$

5. C — измеримо, $mC < +\infty$. Тогда $C \in D$.

$C = H \setminus e$, где $me = 0$, H — вида $\bigcap (\cup A_{i,j})$. (так можно представить, потому что любое измеримое мн-во сколь угодно близко (с точностью до меры-0) прибли-

жается множеством полученным из прямоугольников)

$$C_x = H_x \setminus e_x \text{ — изм. при п.в. } x$$

$$\nu e_x = 0 \text{ п.в. } x \text{ (проверено в п.4)}$$

$$\nu C_x = \nu H_x = \nu e_x \text{ — изм. п.в. } x$$

$$\int_X \nu C_x = \int_X \nu H_x - \int_X \nu e_x = \int \nu H_x = mH = mC.$$

6. C — m -изм. произвольное

$$X = \sqcup X_k, Y = \sqcup Y_n \text{ } (\mu X_k \text{ — кон, } \nu Y_n \text{ — кон.}).$$

$$C = \sqcup_{k,n} (C \cap (X_k \times Y_n)) \in D \text{ (по п.2) (т.к. } C \cap (X_k \times Y_n) \in D \text{ по п.5)}$$

2.18 Сферические координаты в R^m

$$x_1 = r \cdot \cos \phi_1$$

$$1 \leq i \leq m-2 : \phi_i \in [0, \pi]$$

$$x_2 = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \cos \phi_2$$

$$i = m-1 : \phi_i \in [0, 2\pi]$$

$$x_3 = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdot \cos \phi_3$$

$$r \geq 0$$

\vdots

$$x_{m-2} = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{m-3} \cdot \cos \phi_{m-2}$$

$$x_{m-1} = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{m-2} \cdot \cos \phi_{m-1}$$

$$x_m = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{m-2} \cdot \sin \phi_{m-1}$$

$$\mathcal{J} = r^{m-1} \cdot (\sin \phi_1)^{m-2} \cdot (\sin \phi_2)^{m-3} \cdots (\sin \phi_{m-2})^1 \cdot (\sin \phi_{m-1})^0$$

Что тут происходит идейно. Сначала мы проецируем наш m -мерный вектор на нормаль к $(m-1)$ -мерной гиперплоскости. Потом рассматриваем проекцию на эту гиперплоскость и в ней рекурсивно повторяем процедуру, пока не дойдём до нашего любимого R^2 . Уже в нём рассматриваем обычные полярные координаты (отсюда и другие ограничения на размер угла).

2.19 Совпадение определенного интеграла и интеграла Лебега

Ты проиграл

2.20 Теорема Тонелли

$\langle X, \alpha, \mu \rangle, \langle Y, \beta, \nu \rangle$ - пространства с мерой

μ, ν - σ -конечны, полные

$$m = \mu \times \nu$$

$f : X \times Y \rightarrow \bar{R}, f \geq 0$, f - измерима относительно m

Тогда:

1. при почти всех $x \in X$ f_x - измерима на Y ,
где $f_x : Y \rightarrow \bar{R}, f_x(y) = f(x, y)$
(симметричное утверждение верно для y)
2. Функция $x \mapsto \phi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ - измерима* на X
(симметричное утверждение верно для y)
3.
$$\int_{X \times Y} f(x, y) dm = \int_X \phi(x) d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

Доказательство:

Докажем в 3 пункта, постепенно ослабляя ограничения на функцию f

1. Пусть $C \subset X \times Y$ - измеримо относительно m , $f = \chi_C$
 - (a) $f_x(y) = \chi_{C_x}(y)$, где C_x - сечение по x
 C_x - измеримо при почти всех x , так как это одномерное сечение, таким образом f_x - измеримо, при почти всех x .
 - (b) $\phi(x) = \int_Y f_x d\nu = \nu C_x$ - по принципу Кавальери это измеримая* функция.
 - (c)
$$\int_X \phi(x) d\mu = \int_X \nu C_x d\mu \stackrel{\text{Кавальери}}{=} m C \stackrel{\text{опр. инт}}{=} \int_{X \times Y} \chi_C dm = \int_{X \times Y} f(x, y) dm$$
2. Пусть f - ступенчатая, $f \geq 0, f = \sum_{\text{кон}} a_k \chi_{C_k}$

(a) $f_x = \sum a_k \chi_{(C_k)_x}$ - измерима при почти всех x

(b) $\phi(x) = \sum a_k \nu(C_k)_x$ - измерима* как конечная сумма измеримых

$$(c) \int_X \phi(x) d\mu = \int_X \sum_{\text{кон}} a_k \nu(C_k)_x d\mu = \sum_{\text{кон}} \int_X a_k \nu(C_k)_x d\mu = \sum a_k m C_k = \int_{X \times Y} f dm$$

3. Пусть f - измеримая, $f \geq 0$

$f = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n$, где $g_n \geq 0$ - ступенчатая, g_n - монотонно возрастает к f (из Теоремы об аппроксимации измеримой функции ступенчатыми)

(a) $f_x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (g_n)_x \Rightarrow f_x$ - измерима при *почти всех* x .

(b) $\phi(x) = \int_{\mathbb{Y}} f_x d\nu \stackrel{\text{т.ЛевИ}}{=} \lim_{\mathbb{Y}} \int (g_n)_x d\nu$

$\phi_n(x) := \int_{\mathbb{Y}} (g_n)_x d\nu$ - измерима по пункту 1

$0 \leq (g_n)_x$ - возрастает, тогда $\phi(x)$ - измерима, $\phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x) \leq \dots$ и $\phi_n(x) \rightarrow \phi(x)$

(c) $\int_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu \stackrel{\text{т.ЛевИ}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \phi_n(x) d\mu \stackrel{\text{п.2}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} g_n dm \stackrel{\text{т.ЛевИ}}{=} \int f dm$

2.21 Объем шара в \mathbb{R}^m

$B(0, R) \subset \mathbb{R}^m$

$\lambda_m(B(0, R)) = \int_{B(0, R)} 1 d\lambda_m = \int \mathcal{J} =$

$= \int_0^R dr \int_0^\pi d\phi_1 \cdots \int_0^\pi d\phi_{m-2} \int_0^{2\pi} d\phi_{m-1} \cdot r^{m-1} (\sin \phi_1)^{m-2} \dots (\sin \phi_{m-2}) \Rightarrow$

$\int_0^\pi (\sin \phi_k)^{m-2-(k+1)} = B(\frac{m-k}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{m-k}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m-k}{2} + \frac{1}{2})}$

$\rightarrow = \frac{R^m}{m} \frac{\Gamma(\frac{m-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{\Gamma(\frac{m-2}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m-1}{2})} \dots \frac{\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} 2\pi =$

$= \frac{\pi R^m}{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^{m-2}}{\Gamma(\frac{m}{2})} = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2} + 1)} R^m$

Или просто:

$B(0, r) \subset \mathbb{R}^m$

$\lambda_m(B(0, r)) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2} + 1)} r^m$

2.22 Теорема Фубини

(X, α, μ) и (Y, β, ν) - пространства с мерами, причем μ, ν — σ -конечны

на $X \times Y$ есть $\alpha \otimes \beta$, причем $m(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$ — произведение мер — σ -конечная мера на $\alpha \times \beta$

$(X \times Y), \alpha \otimes \beta, m$ — произведение пр-в с мерой

Обозначение : $C \subset X \times Y, x \in X$ тогда

$C_x = y : (x, y) \in C$ — Сечение I рода

$C_y = x : (x, y) \in C$ — Сечение II рода

2.23 Формула для Бета-функции

$B(s, t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1} dx$, где s и $t > 0$ - Бета-функция

$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$, где $s > 0$, тогда $B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\Gamma(t) &= \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \left(\int_0^{+\infty} y^{t-1} e^{-y} dy \right) dx = \left[\begin{array}{c} y \rightarrow u \\ y = u - x \end{array} \right] = \int_0^{+\infty} x^{s-1} \left(\int_x^{+\infty} (u-x)^{t-1} e^{-u} du \right) dx = \\ &= \int_{x \geq 0} \dots = \text{меняем порядок интегрирования} \\ &\quad u \geq x \\ &= \int_0^{+\infty} du \int_0^u dx (x^{s-1} (u-x)^{t-1} e^{-u}) = \left[\begin{array}{c} x \rightarrow v \\ x = uv \end{array} \right] = \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\int_0^1 u^{s-1} v^{s-t} u^{t-1} (1-v)^{t-1} u dv \right) du = \\ &= \int_0^{+\infty} u^{s+t-1} e^{-u} \left(\int_0^1 v^{s-1} (1-v)^{t-1} dv \right) du = B(s, t) \Gamma(s+t), \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

2.24 Предельный переход под знаком интеграла при наличии равномерной сходимости

$$f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

$(\mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu)$ — простр. с мерой

\mathbb{Y} — метр. простр. (или метризуемое)

$\forall y \ f^y(x) = f(x, y)$ — сумм. на \mathbb{X}

$$\mu X < +\infty; \ f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow a} \phi(x)$$

Тогда:

• ϕ — сумм.

$$\bullet \int_X f(x, y) d\mu(x) \xrightarrow{y \rightarrow a} \int_X \phi(x) d\mu(x)$$

Доказательство: По Гейне: $y_n \rightarrow a$

При больших $n \quad \forall x \quad |f(x, y_n) - \phi(x)| < 1$

$$\Rightarrow |\phi(x)| \leq |f(x, y_n)| + 1 \Rightarrow \int_X |\phi(x)| \leq \int_X |f| + \mu X$$

Из этого следует, что ϕ – суммируемо.

$$\left| \int_X f(x, y_n) d\mu(x) - \int_X \phi \right| \leq \int_X |f(x, y_n) - \phi(x)| d\mu \leq \sup_{x \in X} |f(x, y_n) - \phi(x)| \mu X$$

$$\sup_{x \in X} |f(x, y_n) - \phi(x)| \mu X \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

2.24.1 При L_{loc}

Определение L_{loc}

$$f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

$(\mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu)$ – пространство с мерой

\mathbb{Y} – метрическое пространство (или метризуемое); $a \in \mathbb{Y}$

$\forall y \quad f^y(x) = f(x, y)$ – суммируемо на \mathbb{X}

f удовлетворяет L_{loc} ($f \in (L_{loc})$) если:

- $\exists g : \mathbb{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – суммируемо.
- $\exists U(a) \quad \forall y \in \dot{U}(a)$ при п. в. $x \in \mathbb{X} \quad |f(x, y)| \leq g(x)$

Формулировка в контексте определения:

$\phi := \lim_{y \rightarrow a} f(x, y)$ – задана при п. в. x

$f(x, y)$ удовлетворяет условию L_{loc} в точке a и мажорантой g

Тогда:

- ϕ – суммируемо.
- $\int_X f(x, y) d\mu(x) \xrightarrow{y \rightarrow a} \int_X \phi(x) d\mu(x)$

Доказательство: На самом деле это переформулировка Теоремы Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде. (см теор. № 13)

2.25 Теорема Лебега о непрерывности интеграла по параметру

$f(x, y)$ при почти всех x непрерывно по y в точке $a \in Y$ т.е. $f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow a} f(x, a)$

f удовлетворяет L_{loc} в точке a

Тогда: $J(y) = \int_X f(x, y) d\mu$ — непрерывно в точке a

Доказательство:

надо $\int_X f(x, y) d\mu \xrightarrow{y \rightarrow a} \int \varphi d\mu$ (это в теореме выше, ??? Лебега по параметру)

2.26 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру

$f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$(\mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu)$ — простр. с мерой

\mathbb{Y} — метр. простр. (или метризуемое)

$\forall y \int f_y(x) = f(x, y)$ — сумм. на \mathbb{X}

$\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}$ — промежуток

при п. в. $x \quad \forall y \exists f'_y(x, y)$

f'_y удовлетворяет усл. L_{loc} в точке $a \in \mathbb{Y}$

Тогда:

- $I(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$ — дифф. в точке a

- $I'(a) = \int_X f'_y(x, a) d\mu(x)$

Доказательство:

$$F(x, h) = \frac{f(x, a+h) - f(x, a)}{h} \rightarrow f'_y(x, a)$$

$$\frac{I(a+h) - I(a)}{h} = \int_X F(x, h) d\mu(x) \xrightarrow{?} \int_X f'_y(x, a) d\mu$$

чтобы использовать предельный переход нужно проверить $F(x, h) \in L_{loc}$ в точке $h = 0$, т. е. найти локальную мажоранту. (см. теор. о пред. переход. под интегралом)

$$|F(x, h)| \underset{\text{т. Лагранжа}}{=} |f'_y(x, a + \theta h)| \underset{f'_y \in L_{loc} \text{ in } a}{\leq} g(x)$$

2.27 Перестановка двух предельных переходов. Предельный переход в несобственном интеграле.

Ты проиграл

2.28 Вычисление интеграла Дирихле

Ты проиграл

2.29 Теорема об интегрировании несобственного интеграла по параметру

Ты проиграл

2.30 Правило Лейбница для несобственных интегралов

Ты проиграл

2.31 Теорема о вычислении интеграла по мере Бореля—Стилтьеса (с леммой)

Ты проиграл

2.32 Теорема о вложении пространств L^p

$$\mu E < +\infty, 1 \leq s < r \leq +\infty$$

Тогда:

1. $L_r(E, \mu) \subset L_s(E, \mu)$
2. $\forall f$ — измеримая : $\|f\|_s \leq \mu E^{1/s-1/r} \|f\|_r$

Доказательство:

- $2 \Rightarrow 1$ (Это очевидно: достаточно рассмотреть неравенство из пункта 2. Из него следует, что $\|f\|_s \leq \text{const} \cdot \|f\|_r$. см. опред. L_p)
- Рассмотрим два случая:

1. $r = +\infty$ (очев.)

$$\|f\|_s = (\int |f|^s \cdot 1)^{1/s} \leq ((\text{esssup}|f|)^s \int 1 d\mu)^{1/s} = \|f\|_\infty \cdot \mu E^{1/s}$$

(последнее по определению *esssup*)

2. $r < +\infty$

$$(\|f\|_s)^s = \int |f|^s \cdot 1 d\mu \leq (\int |f|^r)^{\frac{s}{r}} \cdot (\int 1^{\frac{r}{r-s}})^{\frac{r-s}{r}} = (\|f\|_r)^s \cdot \mu E^{1-\frac{s}{r}}$$

(существенный шаг: применить неравенство Гельдера)

2.33 Теорема о сходимости в L_p и по мере

$$1 \leq p < +\infty$$

$$f_n \in L_p(\mathbb{X}, \mu)$$

1. • $f \in L_p$

• $f_n \rightarrow f$ в L_p

Тогда: $f_n \xrightarrow{\mu} f$ (по мере)

2. • $f_n \xrightarrow{\mu} f$ (либо если $f_n \rightarrow f$ почти везде)

• $|f_n| \leq g$ почти везде при всех n ; $g \in L_p$

Тогда: $f_n \rightarrow f$ в L_p

Доказательство:

1.

$$X_n(\epsilon) := X(|f_n - f| \geq \epsilon)$$

$$\begin{aligned} \mu X_n(\epsilon) &\stackrel{\text{т.к.}}{\leq} \int_{X_n} \left(\frac{|f_n - f|}{\epsilon} \right)^p = \frac{1}{\epsilon^p} \int_{X_n} |f_n - f|^p \leq \frac{1}{\epsilon^p} \int_X |f_n - f|^p = \\ &= \frac{1}{\epsilon^p} (\|f_n - f\|_p)^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

2. $f_n \xrightarrow{\mu} f$ Тогда $\exists n_k \mid f_{n_k} \rightarrow f$ почти везде.

Тогда $|f| \leq g$ п. в.

$|f_n - f|^p \leq (2g)^p$ – сумм. функции т. к. $g \in L_p$

$(\|f_n - f\|_p)^p = \int_X |f_n - f|^p d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (по теореме Лебега)

2.34 Полнота L^p

$L_p(E, \mu)$ $1 \leq p < \infty$ – полное

То есть любая фундаментальная последовательность сходится по норме $\|f\|_p$.

$$(\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, k \mid \|f_n - f_k\|_p < \epsilon) \Rightarrow (\exists f : \|f_n - f\|_p \rightarrow 0)$$

Доказательство:

1. Построим f .

Рассмотрим фундаментальную последовательность f_n .

$\exists N_1$ при $n_1, k > N_1 \mid \|f_{n_1} - f_k\| < \frac{1}{2}$

$\exists N_2$ при $n_2, k > N_2, N_1 \mid \|f_{n_2} - f_k\| < \frac{1}{4}$

...

Тогда: $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < 1$

$$f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}$$

Докажем, это функция f корректно задана:

- $S_N(x) := \sum_{k=1}^N |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$
 $\|S_N\|_p \leq \sum_{k=1}^N \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < 1$

Тогда по Теореме Фату: $\|S\|_p \leq 1$

Тогда $|S|^p$ – суммируема

Тогда $S(x)$ конечна при п. в. x и ряд $\sum f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ абс. сходится, а значит и просто сходится при п. в. x

$$f := f_{n_1} + \sum f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \text{ т. е. } f = \text{п. в. } \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}$$

2. Проверим, что $f_n \rightarrow f$ в L_p

Т. к. f_n — фунд., то $\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, n_k > N \quad \|f_n - f_{n_k}\| < \epsilon \Rightarrow \|f_n - f_{n_k}\|^p = \int_E |f_n - f_{n_k}|^p d\mu < \epsilon^p$

Тогда по теореме Фату: $\int_E |f - f_n|^p \leq \epsilon^p$

Тогда $\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad \|f - f_n\|_p < \epsilon$

Замечание: L_∞ — полное (упражнение)

2.35 Плотность в L^p множества ступенчатых функций

Ты проиграл

2.36 Лемма Урысона

X — нормальное топологическое пространство, то есть:

1. Все одноточечные множества замкнуты.
2. Любые два непересекающихся замкнутых множества отделимы окрестностями:
 A, B — замкнуты, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \exists A_1, B_1$ — открыты, $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, $A \subset A_1$, $B \subset B_1$.

F_0, F_1 — замкнуты, $F_0 \cap F_1 = \emptyset$.

Тогда: $\exists f : X \rightarrow [0, 1]$, непрерывная (в смысле топологического определения непрерывности), равная 0 на F_0 и равная 1 на F_1 .

Доказательство:

1. Раскроем определение плотности: $\forall f \in L_p(E, \mu) \forall \epsilon > 0 \exists \varphi \in C_0(\mathbb{R}^m) : \|f - \varphi\|_p < \epsilon$. Таким образом достаточно научиться приближать f и φ ступенчатыми функциями f_n : $\|f - f_n\|_p < \epsilon/2$ и $\|\varphi - f_n\|_p < \epsilon/2$

2. **TODO!**

2.37 Плотность в L^p множества финитных непрерывных функций

$(\mathbb{R}^m, \mathbb{A}, \lambda_m)$

$E \subset \mathbb{R}^m$ — изм. Тогда множество финитных непрерывных функций плотно в $L_p(E, \lambda_m)$, $p \in [1; +\infty]$

2.38 Теорема о непрерывности сдвига

Обозначения:

$$f_h := f(x + h)$$

$[0, T] \subset \mathbb{R}$. Будем считать, что $L_p[0, T]$ состоит из T -периодических функций $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Отсюда $\int_0^T f = \int_a^{a+T} f$.

$$\tilde{C}[0, T] = \{f \in C[0, T] : f(0) = f(T), \|f\| = \max_{x \in [0, T]} |f(x)|\}$$

NB: $f \in \tilde{C}[0, T] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна (по т. Кантора).

Формулировка:

1. f — рвнм. непр. на \mathbb{R}^m . Тогда $\|f - f_h\|_\infty \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.
2. $1 \leq p < +\infty$ $f \in L_p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$. Тогда $\|f - f_h\|_p \rightarrow 0$.
3. $f \in \tilde{C}[0, T]$. Тогда $\|f - f_h\|_\infty \rightarrow 0$.
4. $1 \leq p < +\infty$ $f \in L_p[0, T]$. Тогда $\|f - f_h\|_p \rightarrow 0$.

Доказательство:

1. 1 и 3 свойства следуют из определения рвнм. непр-ти: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}^m \forall h : |h| < \delta$ верно, что $|f(x) - f(x + h)| < \epsilon$, то есть $\|f - f_h\|_\infty < \epsilon$ (это для св-ва 1, во втором случае x из $[0, T]$).
2. 4 пункт: Подберем непрерывную функцию g , которая хорошо приближает f . $\|f - g\|_p < \frac{\epsilon}{3}$. Тогда $\|f_h - g_h\| < \frac{\epsilon}{3}$ (очевидно, т.к. это сдвиг и интеграл не меняется). $\|g_h - g\|^p = \int_0^T \|g(x + h) - g(x)\|^p \leq \epsilon_0^p T = \frac{\epsilon}{3}$ (можно так подобрать ϵ_0 . Тогда: $\|f_h - f\| \leq \|f_h - g_h\| + \|g_h - g\| + \|g - f\| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$, чтд.
3. 2й пункт — аналогично, но возьмем шар $B(0, R)$ и финитную функцию g , что $g \equiv 0$ вне этого шара. Остальное — аналогично.

2.39 Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве

1. $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \Rightarrow \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$
2. $\sum x_k$ сходится, тогда $\forall y : \sum \langle x_k, y \rangle = \langle \sum x_k, y \rangle$
3. $\sum x_k$ - ортогональный ряд, тогда $\sum x_k$ - сх $\Leftrightarrow \sum |x_k|^2$ сходится, при этом $|\sum x_k|^2 = \sum |x_k|^2$

Доказательство

1. $|\langle x_k, y_k \rangle - \langle x, y \rangle| = |\langle x_k, y_k \rangle - \langle x_k, y \rangle + \langle x_k, y \rangle - \langle x, y \rangle| \leq |\langle x_k, y_k - y \rangle| + |\langle x_k - x, y \rangle| \leq |x_k| \cdot |y_k - y| + |x_k - x| \cdot |y| \rightarrow 0$ (так как $\text{огр} \cdot \text{б.м.} + \text{б.м.} \cdot \text{огр} \rightarrow 0$)

2. $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$

$$\langle \sum_{k=1}^n x_k, y \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x_k, y \rangle$$

Устремляя n к ∞ , получаем требуемое равенство

3. Обозначим $C_n := \sum_{k=1}^n |x_k|^2$

$$\begin{aligned} |S_n|^2 &= \langle \sum_{k=1}^n x_k, \sum_{j=1}^n x_j \rangle = \sum_{k,j} \langle x_k, x_j \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x_k, x_k \rangle \quad (\text{так как } k \neq j \Rightarrow \langle x_k, x_j \rangle = 0) \\ &= \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = C_n \end{aligned}$$

Аналогично, $||S_n|^2 - |S_m|^2| = |C_n - C_m|$

Тогда $C_n, |S_n|^2$ фундаментальны одновременно \Rightarrow сходятся одновременно при устремлении n к ∞

2.40 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе

$\{e_k\}$ — ортогональная система в \mathbb{H} , $x \in \mathbb{H}, x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \cdot e_k$

Тогда:

1. $\{e_k\}$ — Л.Н.З.

$$2. c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{||e_k||^2}$$

3. $c_k \cdot e_k$ — проекция x на прямую $\{te_k \mid t \in \mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C})\}$

Иными словами, $x = c_k \cdot e_k + z$, где $z \perp e_k$

Доказательство:

1. Пусть $\sum_{k=1}^N \alpha_k e_k = 0$. Умножим скалярно на e_m ($1 \leq m \leq N$)

Получим: $\alpha_m ||e_m||^2 = 0 \Rightarrow \alpha_m = 0 \Rightarrow$ комб. тривиальная \Rightarrow Л.Н.З.

2. $\langle x, e_m \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle c_k e_k, e_m \rangle = c_m \cdot ||e_m||^2$ (верно в силу сходимости ряда)

3. $x = c_k \cdot e_k + z$. Доказать: $z \perp e_k$.

$$\langle z, e_k \rangle = \langle x - c_k e_k, e_k \rangle = c_k \cdot ||e_k||^2 - c_k \cdot ||e_k||^2 = 0$$

2.41 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя

$\{e_k\}$ — ортогональная система в \mathbb{H} , $x \in \mathbb{H}, n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=1}^n c_k(x) e_k, \quad \mathcal{L} = \text{Lin}(e_1, e_2, \dots, e_n) \subset \mathbb{H}$$

Тогда:

1. S_n — орт. проекция x на пр-во \mathcal{L} . Иными словами $x = S_n + z$, $z \perp \mathcal{L}$

2. S_n — наилучшее приближение x в \mathcal{L} ($||x - S_n|| = \min_{y \in \mathcal{L}} ||x - y||$)

3. $||S_n|| \leq ||x||$

Доказательство:

1. (a) $z = x - S_n$

(b) $z \perp \mathcal{L} \Leftrightarrow \forall k = 1, 2, \dots, n : z \perp e_k$

$$(c) \langle z, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle S_n, e_k \rangle = c_k ||e_k||^2 - c_k ||e_k||^2 = 0$$

2. $||x - y||^2 = ||S_n + z - y||^2 = ||(S_n - y) + z||^2 = ||S_n - y||^2 + ||z||^2 \geq ||z||^2 = ||x - S_n||^2$

$$3. \|x\|^2 = \|S_n\|^2 + \|z\|^2 \text{ (теорема о сумме орт. ряда)} \geq \|S_n\|^2$$

Следствие: Неравенство Бесселя

$$\forall \{e_k\} - \text{О.С.} : \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(x)|^2 \cdot \|e_k\|^2 \leq \|x\|^2$$

2.42 Теорема Рисса – Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля

$\{e_k\}$ – орт. сист. в \mathbb{H} , $x \in \mathbb{H}$

Тогда:

1. Ряд Фурье $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x)e_k$ сходится в \mathbb{H}

2. $x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k + z \Rightarrow \forall k \ z \perp e_k$

3. $x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$

Доказательство:

1. Ряд Фурье – ортогональный ряд

его сходимость \Leftrightarrow сходимости $\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2$

$\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 \leq \|x\|^2$ по неравенству Бесселя

2. $\langle z, e_k \rangle = \langle x - \sum c_i e_i, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \sum_{i=1}^{+\infty} \langle c_i(x) e_i, e_k \rangle = 0$

3. \Rightarrow - утв. 3 теоремы о св-вах сх-ти в гильбертовом пр-ве

\Leftarrow Из п. 2 ряд ортог.

$$\|x\|^2 = \|\sum c_k e_k\|^2 + \|z\|^2 = \sum |c_k|^2 \|e_k\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2 + \|z\|^2 \Rightarrow z = 0$$

2.43 Теорема о характеристике базиса

$\{e_k\}$ — ортогональная система в \mathbb{H}

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\{e_1\}$ — базис.
2. $\forall x, y \in \mathbb{H} \quad \langle x, y \rangle = \sum c_k(x) \overline{c_k(y)} \|e_k\|^2$ (обобщенное уравнение замкнутости)
3. $\{e_k\}$ — замкнутая система.
4. $\{e_k\}$ — полная система.
5. $Lin(e_1, e_2, \dots)$ — плотна в \mathbb{H}

Доказательство:

2.43.1 $1 \Rightarrow 2$

$$x = \sum c_k(x) e_k - \text{единственно (из геом. соображений: } c_k e_k - \text{проекция)}$$

$$\langle e_k, y \rangle = \overline{\langle y, e_k \rangle} = \overline{c_k(y)} \|e_k\|^2$$

$$\langle x, y \rangle = \sum c_k(x) \langle e_k, y \rangle = \sum c_k(x) \overline{c_k(y)} \|e_k\|^2$$

2.43.2 $2 \Rightarrow 3$

$$y := x$$

$$\|x\|^2 = \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 \quad (\text{см. п. 3 из опр.})$$

2.43.3 $3 \Rightarrow 4$

Пусть $\forall k \quad x_0 \perp e_k$

$$c_k(x_0) = \frac{\langle x_0, e_k \rangle}{\|e_k\|^2} = 0$$

$$\|x_0\|^2 = \sum |c_k(x_0)|^2 \|e_k\|^2 = 0 \quad (\text{см. п. 2 из опр.})$$

2.43.4 $4 \Rightarrow 1$

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k + z \Rightarrow (\text{т. Рисса-Фишера (2)}) \quad \forall k \quad z \perp e_k \Rightarrow (\text{из полноты}) \quad z = 0 \quad (\text{см. п. 1 из опр.})$$

2.43.5 $4 \Rightarrow 5$

Пусть $ClLin(e_1, e_2, \dots) \neq \mathbb{H}$, $x \in \mathbb{H} \setminus ClLin(e_1, e_2, \dots)$

из т. Рисса-Фишера (2): $x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k + z \Rightarrow \forall k \ z \perp e_k \Rightarrow x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k \Rightarrow x \in ClLin(e_1, e_2, \dots)$

Противоречие.

2.43.6 $5 \Rightarrow 4$

$\forall k \ x_0 \perp e_k \Rightarrow x_0 \perp Lin(e_1, e_2, \dots) \Rightarrow x_0 \perp ClLin(e_1, e_2, \dots) (= \mathbb{H}) \Rightarrow x_0 \perp x_0 \Rightarrow \|x_0\|^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$

2.44 Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда

Пусть $S_n \rightarrow f$ в $L_1(-\pi, \pi]$

Тогда:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Доказательство:

Почему нельзя сказать, что коэффициенты — это коэффициенты ряда Фурье, а потому вычисляются как скалярные произведения???

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n a_j \cos jx + b_j \sin jx \quad (- \text{ это } T_n)$$

При $n \geq k$:

$$1. \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x) \cos kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos^2 kx \, dx = \pi a_k \quad (\text{в силу ортогональности триг системы})$$

$$2. \left| \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x) \cos kx \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x) - f(x)| \cdot |\cos kx| \, dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x) - f(x)| \, dx \rightarrow 0$$

Из 1 и 2 следует равенство для a_k . Аналогично доказывается и для других.

2.45 Теорема Римана-Лебега

$E \subset \mathbb{R}^1$ – измеримо

$f \in L_1(E, \lambda)$, λ - мера Лебега

Тогда:

$$\begin{aligned}\int_E f(x)e^{ikx}dx &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \\ \int_E f(x)\cos(kx)dx &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \\ \int_E f(x)\sin(kx)dx &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0\end{aligned}$$

Доказательство:

Пусть $f \equiv 0$ вне E , тогда можно считать, что $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$

Обозначим $e(x) = \cos(x)$, или $\sin(x)$, или e^{ix} , в зависимости от ситуации. Заметим, что $e(t + \pi) = -e(t)$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(t)e(kt) &\stackrel{t=\tau+\frac{\pi}{k}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(\tau + \frac{\pi}{k})e(k \cdot (\tau + \frac{\pi}{k})) = - \int_{\mathbb{R}} f(\tau + \frac{\pi}{k})e(k\tau) \\ \int_{\mathbb{R}} f(t)e(kt) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(t)e(kt) - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(\tau + \frac{\pi}{k})e(kt) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (f(t) - f(t + \frac{\pi}{k}))e(kt)\end{aligned}$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(t)e(kt) \right| \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |f(t) - f(t + \frac{\pi}{k})| dt \quad (\text{так как } |e(kt)| \leq 1) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

по непрерывности сдвига

2.46 Три следствия об оценке коэффициентов Фурье

Ты проиграл

2.47 Принцип локализации Римана

$f, G \in L_1[-\pi, \pi]$

$x_0 \in \mathbb{R}, \delta > 0$

$f \equiv g$ на $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Тогда:

$$S_n(f, x_0) - S_n(g, x_0) \rightarrow 0$$

Доказательство:

$$h := f - g \equiv 0 \text{ на } (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$S_n(h, x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x_0 + t) \left(\operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right) \sin(nt) + \cos(nt) \right) dt \quad (57 \text{ теорема})$$

$$h_1 = \frac{1}{2} h(x_0 + t)$$

$$h_2 = \frac{1}{2} h(x_0 + t) \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$S_n(h, x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_1 \cos(nt) + h_2 \sin(nt) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} h_1 \cos(nt) + h_2 \sin(nt) + \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} 0 + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} h_1 \cos(nt) + h_2 \sin(nt)$$

Оценим:

$$|h_2(t)| \leq \frac{1}{2} |h(x_0 + t) \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right)| \leq \frac{1}{2} |h(x_0 + t)| \frac{2}{\delta} \quad (\text{так как } |\operatorname{ctg}(x)| < \left|\frac{1}{x}\right|, \text{ а } |t| > |\delta|)$$

Тогда $h_1, h_2 \in L_1$, тогда по теореме Римана-Лебега два крайних интеграла стремятся к 0.

2.48 Признак Дини. Следствия

$$f \in L_1[-\pi, \pi]$$

$$x_0 \in \mathbb{R}$$

$$S \in \mathbb{R}$$

$$(*) \int_0^{\pi} \frac{|f(x_0+t) - 2S + f(x_0-t)|}{t} dt \text{ сходится}$$

Тогда:

$$S_n(f, x_0) \rightarrow S$$

Следствие 1:

\exists 4 предела

$$\lim_{t \rightarrow \pm 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0 \pm 0)}{t}$$

Тогда:

$$\text{Ряд Фурье сходится в } x_0 \text{ как } \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$$

Следствие 2:

$$f \in L_1[-\pi, \pi]$$

f непрерывна в x_0

\exists конечные $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$

Тогда:

$$S_n(f, x_0) \rightarrow f(x_0)$$

$$\text{Доказательство: } D_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\pi\sin(\frac{t}{2})}$$

$$\phi(t) = f(x_0 + t) - 2S + f(x_0 - t)$$

$$\begin{aligned} S_n(f, x_0) - S &= \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) \phi(t) dt = \\ &= \int_0^{\pi} (f(x_0 + t) - S) D_n(t) dt + \int_{-\pi}^0 (f(x_0 + t) - S) D_n(t) dt = \int_0^{\pi} \phi(t) D_n(t) dt \end{aligned}$$

Введём h_1, h_2 :

$$h_1(t) := \begin{cases} \frac{1}{2}\phi(t), t \in [0, \pi] \\ 0, t \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

$$h_2(t) := \begin{cases} \frac{1}{2}\phi(t) \operatorname{ctg}(\frac{t}{2}), t \in [0, \pi] \\ 0, t \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

Покажем что h_1 суммируема

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h_1(t)| dt \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |\phi(t)| dt \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (|f(x_0 + t)| + 2|S| + |f(x_0 - t)|) dt < +\infty$$

(поскольку f суммируема)

Покажем что h_2 суммируема

$$\begin{aligned} |\operatorname{ctg}(\frac{t}{2})| &< \frac{2}{|t|}, t \in [-\pi, \pi] \\ \frac{1}{2} \int_0^{\pi} |\phi(t)| |\operatorname{ctg}(\frac{t}{2})| dt &\leq \int_0^{\pi} \frac{|\phi(t)|}{t} dt < +\infty \text{ по } (*) \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \phi(t) D_n(t) dt &= C \cdot \int_0^{\pi} \phi(t) (\operatorname{ctg}(\frac{t}{2}) \sin(nt) + \cos(nt)) dt = (C - \text{хз какая константа, что-то из ядра Дирихле}) \\ &= C \cdot \int_{-\pi}^{\pi} h_1 \cos(nt) + h_2 \sin(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ (по теореме Римана-Лебега)} \end{aligned}$$

Следствие 1:

\exists 4 предела

$$\lim_{t \rightarrow \pm 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0 \pm 0)}{t}$$

Тогда:

$$\text{Ряд Фурье сходится в } x_0 \text{ как } \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$$

Следствие 2:

$$f \in L_1[-\pi, \pi]$$

f непрерывна в x_0

\exists конечные $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$

Тогда:

$$S_n(f, x_0) \rightarrow f(x_0)$$

2.49 Корректность определения свертки

$$f, K \in L_1[-\pi, \pi]$$

Тогда: $(f * K)$ – корректно заданная функция из $L_1[-\pi, \pi]$

Доказательство:

- Докажем, что $g(x, t) = f(x - t)K(t)$ – измерима
 - $K(t)$ – измерима, как функция из L_1
 - $\phi(x, t) = f(x - t)$. Это функция принимает одинаковые значения на $t = x - C$.
Поэтому: $R^2(\phi < a) = V^{-1}(E_{a'} \times R)$, где $V(x, t) = (x - t, t)$
 $E_{a'} = V(R(f < a))$ – измеримо, так как f – измеримо. **Что за бред, V действует из R^2 , а тут пытаются сделать из R**
Поэтому $R^2(\phi < a)$ – измеримо.
 - Поэтому g – измерима, как произведение измеримых
- Проверим, что $g \in L_1([-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi])$
$$\iint_{[-\pi, \pi]} |g| d\lambda^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (|K(t)| \int_{-\pi}^{\pi} |f(x - t)| dx) dt = \|f\|_1 \|K\|_1 < +\infty$$
- По теореме Фубини $\int_{-\pi}^{\pi} g(x, t) dt$ – суммируемая при в. п. в. x
- Тогда свертка лежит в $L_1[-\pi, \pi]$

2.50 Свойства свертки функции из L^p с функцией из L^q

$$f \in L^p; K \in L^q$$

$$1 \leq p \leq +\infty; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Тогда:

- $f * K$ – непр. на $[-\pi, \pi]$
- $\|f * K\|_\infty \leq \|K\|_q \|f\|_p$

Доказательство: Это нер-во Гельдера

$$\text{п. 2 } |(f * K)(x)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt \right| \underset{\text{нер-во Гельдера}}{\leq} \|K\|_q \|f\|_p$$

$$\sup |f * K| \leq \|f\|_p \|K\|_q \Rightarrow \text{пункт 2}$$

(Причем нер-во Гельдера выполнено и для $p = \infty$)

$$\text{п. 1 } -p < +\infty$$

$$|(f * K)(x+h) - (f * K)(x)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+h-t) - f(x-t))K(t)dt \right| \underset{\text{нер-во Гельдера}}{\leq}$$

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h-t) - f(x-t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |K(t)|^q dt \right)^{1/q} = \|K\|_q \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h-t) - f(x-t)|^p dt \right)^{1/p} =$$

$$\|K\|_q \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(y+h) - f(y)|^p dy \right)^{1/p} =$$

Это неправда, почему границы интегрирования не сменились? Правда! По-
тому что функции продолжены по периодичности!!!

$$= \|K\|_q \|f(y+h) - f(y)\|_p \xrightarrow{\text{по непр. сдвига}} 0$$

$$-p = +\infty$$

$$|(f * K)(x+h) - (f * K)(x)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+h-t) - f(x-t))K(t)dt \right| \underset{\text{нер-во Гельдера}}{\leq}$$

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |K(t)|^q dt \right)^{1/q} \cdot \operatorname{esssup}_{t \in [-\pi, \pi]} |f(x+h-t) - f(x-t)| =$$

$$\|K\|_q \cdot \operatorname{esssup}_{t \in [x+\pi, x-\pi]} |f(t+h) - f(t)| \xrightarrow{\text{по непр. сдвига}} 0$$

2.51 Теорема о свойствах аппроксимативной единицы

$$1. f \in \tilde{C}[-\pi, \pi] \Rightarrow (f * K_h) \xrightarrow{h \rightarrow h_0} f, \text{ где свертка } (f * K)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt$$

$$2. f \in L^1[-\pi, \pi] \Rightarrow \|(f * K_h) - f\|_1 \xrightarrow{h \rightarrow h_0} 0$$

3. K_h - усил. апрокс ед. f - непр. в точке x . Тогда $(f * K_h)(x) \rightarrow f(x)$

Замеч.) пункт 2 верен для L_p

Доказательство:

$$1. (f * K)(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_h(t) dt = \int_{E_\delta} (f(x-t) - f(x)) K_h(t) dt + \int_{(-\delta, \delta)} (f(x-t) - f(x)) K_h(t) dt = I_1 + I_2$$

Заметим, что $I_1 \leq 2 \|f\|_\infty \int_{E_\delta} |K_h| < \frac{\epsilon}{2}$, т.к. f - огр, и по 3 а.е. интеграл стремится к 0

Заметим, что $I_2 \leq \frac{\epsilon}{2M} \int_{(-\delta, \delta)} |K_h| dt < \frac{\epsilon}{2}$, т.к. по непрерывности: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta : |f(x) - f(x - \delta)| < \epsilon' = \frac{\epsilon}{2M}$

$$2. \|(f * K_h)(x) - f(x)\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) - f(x) K_h(t) dt \right| dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| |K_h(t)| dt dx = \|K_h\|_1 \int_{-\pi}^{\pi} g(-t) \frac{|K(t)|}{\|K_h\|_1} dt, \text{ где } g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| dx$$

$\frac{|K_h|}{\|K_h\|} - \text{а.е.} \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} g(-t) \frac{|K|}{\|K_h\|} dt \xrightarrow{h \rightarrow h_0} g(0) = 0$. Замечание: последний предельный

переход верен из свойства (1) выше, т.к. $K * g \Rightarrow g$, а $K * g = \int_{-\pi}^{\pi} g(x-t) K(t) dt$

для любого x , в нашем случае в интеграле $g(-t)$, то есть взято $x = 0$

$$3. (f * K_h)(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_h(t) dt = I_1 + I_2 \text{ (как в пункте 1.)}$$

$I_2 \leq 2\delta \epsilon \text{esssup}(K_h)$, т.к. f - непр и поэтому на $(-\delta, \delta)$ интеграл от $f(x-t) - f(x)$ $2\delta \epsilon$

$I_1 \leq (2\pi |f(x)| + \|f\|_1) \text{esssup}_{E_\delta}(K_h)$, т.к. $\int_{E_\delta} f(x) K_h(t) \leq$ **Полный бред написан,**

что это за интеграл вообще? По какой переменной интегрирование? $\text{esssup}_{E_\delta}(K_h) \cdot$

$2\pi |f(x)| \rightarrow 0$ (т.к. $\text{esssup} \rightarrow 0$). Аналогично $\int_{E_\delta} f(x-t) K_h(t) \leq 2\pi \|f(x)\|_1 \text{esssup}_{E_\delta}(K_h) -$

0.

Все доказано!

2.52 Теорема Фейера

1. $f \in \tilde{C}[\pi, -\pi]$, тогда $\sigma_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$
2. $f \in L_p[\pi, -\pi], (1 \leq p < +\infty)$, тогда $\|\sigma_n(f) - f\|_p \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$
3. $f \in L_1[\pi, -\pi], f$ -непр. в т. x , тогда $\sigma_n(f, x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$

Доказательство:

1. ядра Фейера – аппрок. единица

- $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n = 1$ – по Лемме о простых свойствах ядра Фейера
- $\Phi_n > 0 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_n| \leq 1$ (биз 1 пункта следует второй)
- $t \in E_\delta \quad |\Phi_n(t)| = \frac{1}{(n+1)2\pi} \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{\sin^2(t/2)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

Далее по теореме о свойствах аппрок. ед-цы следуют все 3 пункта.

2.53 Полнота тригонометрической системы и другие следствия теоремы Фейера

Ты проиграл

2.54 Лемма об оценке интеграла ядра Дирихле

1. $D_n(t) = \frac{\sin nt}{\pi t} + \frac{1}{2\pi}(\cos nt + h(t) \sin nt)$, где $h(t)$ не зависит от n и $|h(t)| \leq 1$ на $[-\pi; \pi]$.
2. $\forall x, |x| < 2\pi \quad \left| \int_0^x D_n(t) dt \right| < 2$

2.55 Формула Грина

$D \subset \mathbb{R}^2$ – компакт, связное, односвязное, ориентировано

δD – C^2 -гладкая кривая, тоже ориентировано

D и δD ориентированы согласовано

P, Q – функции, гладкие в открытой области $O \supset D$

Тогда:

$$\iint_D \left(\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y} \right) dx dy = \int_{\delta D} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy)$$

Доказательство:

Докажем для областей вида "криволинейный четырехугольник", т.е.

$x \in [a; b]$

$y \in [\phi_1(x); \phi_2(x)]$, где $\phi_2(x) > \phi_1(x)$

Представляется в аналогичном виде, относительно y

Ориентируем обход нашего четырехугольника против часовой стрелки.

Назовем пути по сторонам $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ начиная с нижней против часовой стрелки соответственно.

Из линейности интеграла по векторному полю следует, что для доказательства достаточно проверить:

$$-\iint_D \frac{\delta P}{\delta y} dx dy = \int_{\delta D} P dx$$

Почему второе проверять не нужно?

1. Преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} -\iint_D \frac{\delta P}{\delta y} dx dy &= -\int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} P'_y dy = -\int_a^b P(x, y) \Big|_{y=\phi_1(x)}^{y=\phi_2(x)} dx = \\ &= \int_a^b P(x, \phi_1(x)) dx - \int_a^b P(x, \phi_2(x)) dx \end{aligned}$$

2. Преобразуем правую часть:

$$\begin{aligned} \int_{\delta D} (P dx + 0 dy) &= \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} \\ &= \int_a^b P(x, \phi_1(x)) dx + 0 + \int_b^a P(x, \phi_2(x)) dx + 0 = \\ &= \int_a^b P(x, \phi_1(x)) dx - \int_a^b P(x, \phi_2(x)) dx \end{aligned}$$

Левая и правая части равны.

Если область более сложная - порежем на простые. Зафиксируем направление обхода, посчитаем на каждой.

При фиксированном направлении обхода пути на границах разрезов учитываются

дважды с противоположными знаками, то есть в итоге имеем обход границы всей фигуры.

Из компактности и гладкости области следует, что допускается счетное количество разрезов.

2.56 Теорема об интегрировании ряда Фурье

$f \in L_1[-\pi; \pi]$.

Тогда $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) \int_a^b e^{ikx} dx$$

Сумма по $k \in \mathbb{Z}$ понимается в смысле главного значения $(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n)$.

Замечание: Ряд Фурье f может всюду расходиться, но ряд интеграла всегда сходится.

Доказательство:

1. Пусть $-\pi \leq a < b \leq \pi$. Если это не так всегда можно разбить интеграл на такие отрезки в силу периодичности функции.
2. Пусть $\chi(x) = \chi[a; b]$ (характеристическая функция отрезка $[a; b]$).
3. Рассмотрим частичную сумму ряда интегралов:

$$\sum_{k=-N}^N c_k(f) \underbrace{\int_a^b e^{ikx} dx}_{2\pi c_{-k}(\chi)} = \sum_{k=-N}^N \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) 2\pi c_{-k}(\chi).$$

Сумма конечная, поэтому это равно $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) S_N(\chi, t) dt$.

4. $S_N(\chi) \rightarrow \chi$ везде, кроме a и b (*не шарю почему, помогите*)
5. $|S_N(\chi, t)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} \chi(x) D_N(t-x) dx \right| = \left| \int_a^b D_N(t-x) dx \right| = \left| \int_0^{t-a} D_N - \int_0^{t-b} D_N \right| \leq 4$
(по лемме об оценке интеграла D_N).
6. $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) S_N(\chi, t) dt \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \chi(t) dt$ по теореме Лебега о мажорированной сходимости.

2.57 Следствие о синус-коэффициентах интегрируемой функции

Ты проиграл

2.58 Лемма о слабой сходимости сумм Фурье

Вроде оно, но это не точно $f \in L_1[-\pi; \pi]$

Что это за обозначение?

Тогда $\forall u \in \tilde{\mathbb{C}}^\infty$

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n(f, x)u(x)dx \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)u(x)dx$$

Доказательство: // TODO - нужно больше пояснений

1. $f * u$ - непр. и гладкая (т.к. $u \in L_\infty[-\pi, \pi]$)

$$((f * u)(x))' = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)u(x-t)dt \right)'_x = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)u'(x-t)dt$$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_X f(x, t) d\nu(x) \right) = \int_X f'_x(x, t) d\nu(x)$$

$$L_{loc}(t_0) : \exists u(t_0) : |f'_t(x, t)| \leq g(x), g(x) - \text{сумм. при } x \in X, t \in u(t_0) \quad |f(t)u'(x-t)| \leq \max |u'(y)| \cdot |f(t)|, y \in [-\pi, \pi]$$

2. $\underline{u}(x) := u(-x)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}u(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}u(-x)dx = 2\pi c_k(\underline{u})$$

$$\text{Так как сумма конечная, } \int_{-\pi}^{\pi} S_n(f, x)u(x)dx = \sum_{k=-n}^n (c_k(f) \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}u(x)dx) = 2\pi \sum_{k=-n}^n c_k(f)c_k(\underline{u})$$

$$\sum_{k=-n}^n (f * \underline{u})e^{ikx} \Big|_{x=0} \rightarrow (f' * \underline{u})(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\underline{u}(0-t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)u(t)dt$$

Определение: f – обобщенная функция, если задан непрерывный функционал $\mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение: f, f_n – последовательность обобщенных функций: $f_n \rightarrow f$, если $\forall u \in \mathbb{C}^\infty \quad \int_{-\pi}^{\pi} f_n u \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f u$.

2.59 Леммы о равномерной ограниченности сумм Фурье и об обобщенном равенстве Парсеваля

Ты проиграл

2.60 Формула Стокса

Ω – эллиптическая, гладкая, двусторонняя поверхность, C^2 –гладкое; n_0 – сторона $\delta\Omega$ - ориентирована согласовано с n_0

(P, Q, R) – векторное поле на Ω , заданное в O - откp. : $\Omega \subset O \subset \mathbb{R}^3$

Тогда:

$$\int_{\delta\Omega} (Pdx + Qdy + Rdz) = \iint_{\Omega} ((R'_y - Q'_z)dydz + (P'_z - R'_x)dzdx + (Q'_x - P'_y)dxdy)$$

Доказательство:

Из соображений линейности интеграла по векторному полю достаточно проверить:

$$\int_{\delta\Omega} Pdx = \iint_{\Omega} (P'_z dzdx - P'_y dxdy)$$

Параметризуем область: $\Omega \leftrightarrow \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$

Пусть G – наша область в координатах (u, v) , L – граница Ω в новых координатах, тогда:

$$\begin{aligned} \int_{\delta\Omega} Pdx &= \int_L P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))(x'_u du + x'_v dv) = \int_L Px'_u du + Px'_v dv \stackrel{\Gamma_{\text{рин}}}{=} \\ &\int_G ((P(x, y, z)x'_v)'_u - (P(x, y, z)x'_u)'_v) dudv = \\ &\int_G (P'_z(z'_u x'_v - z'_v x'_u) - P'_y(y'_v x'_u - y'_u x'_v)) dudv = \\ &\int_G P'_z \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} dudv - P'_y \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} dudv = \\ &\int_G (P'_z dzdx - P'_y dxdy) \end{aligned}$$

что и требовалось доказать

2.61 Формула Гаусса–Остроградского

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in G, f(x, y) \leq z \leq F(x, y)\}$, $G \subset \mathbb{R}^2$, ∂G — гладкая кривая в \mathbb{R}^2 , $F \in "C'(G)"$ (кавычки означают "включая границу, то есть с более широкой гладкой областью"), ∂V — внешняя сторона, $R : O(V) \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial V} R dx dy$$

Доказательство:

$\partial V = \Omega_F \cup \Omega_{cil} \cup \Omega_f$ (границы графика F , f и цилиндра между ними)

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_G dx dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \\ &= \iint_G (R(x, y, F(x, y)) - R(x, y, f(x, y))) dx dy = (\text{см. пример после опр. инт. 2 рода}) \\ &= \iint_{\Omega_F} R dx dy - (- \iint_{\Omega_f} R dx dy) + 0 = (\text{так как проекция } \Omega_{cil} \text{ лежит в } \partial G) \end{aligned}$$

Откуда эта формула?

$$\begin{aligned} &= \iint_{\Omega_F} R dx dy + \iint_{\Omega_f} R dx dy + \iint_{\Omega_{cil}} R dx dy = \\ &= \iint_{\partial V} R dx dy \end{aligned}$$

2.62 Соленоидальность бездивергентного векторного поля

A - соленоидально $\Leftrightarrow \operatorname{div}(A) = 0$

$A \in C^1$, O — хорошая область.

Доказательство:

\Rightarrow . Тривиально : $A = \operatorname{rot}(B)$. т.е.

$$A_1 = (B_3)'_y - (B_2)'_z, A_2 = (B_1)'_z - (B_3)'_x, A_3 = (B_2)'_x - (B_1)'_y \quad (\text{система } ***)$$

тогда $(A_1)'_x + (A_2)'_y + (A_3)'_z = 0$, чтд

\Leftarrow . $\operatorname{div}(A) = 0$. Найдем B . Нужно решить относительно B систему *** (выше). Нагло примем $B_3 \equiv 0$. Тогда система будет состоять из простых уравнений:

$$-(B_2)'_z = A_1 \quad (1), \quad (B_1)'_z = A_2 \quad (2), \quad (B_2)'_x - (B_1)'_y = A_3 \quad (3).$$

$$\text{Из (1) : } B_2(x, y, z) = - \int_{z_0}^z A_1(x, y, z) dz + \phi(x, y)$$

$$\text{Из (2) : } B_1(x, y, z) = \int_{z_0}^z A_2(x, y, z) dz \quad (\text{еще одна наглость! берем аналогичное } \phi \text{ равным } 0)$$

$$B(3) : -\int_{z_0}^z (A_1')_x dz + (\phi')_x - \int_{z_0}^z (A_2')_y dz = A_3.$$

Но т.к. $\operatorname{div}(A) = 0$, то $\int_{z_0}^z (A_3)'_z dz + \phi'_x = A_3$ (это в последнее равенство подставили $(A_3)'_z = -(A_1)'_x - (A_2)'_y$). То есть $A_3(x, y, z) - A_3(x, y, z_0) + \phi'_x = A_3(x, y, z) \Rightarrow \phi'_x = A_3(x, y, z_0)$, ну а это значит $\phi = \int_{x_0}^x A_3(x, y, z) dx$. Мы нашли ϕ , такоо ϕ найдется, подставим теперь во все равенства выше и получим верными равенства и выражения для B_1, B_2, B_3 . Значит система *** для найденного B верна и значит это B таково, что $A = \operatorname{rot}(B)$, то есть A — соленоидально! чтд

2.63 Свойства преобразования Фурье: непрерывность, ограниченность, сдвиг

Док-во:

$$\text{Непрерывность: } |f(x)e^{-2\pi i \langle x, y \rangle}| \leq |f(x)|$$

$$\text{Ограниченность: } |\widehat{f}(y)| \leq \int_{\mathbb{R}^m} |f| = \|f\|_1$$

$$\text{Сдвиг: } f_h = f(x - h), \widehat{f}_h(y) = \widehat{f}(y) \cdot e^{-2\pi i \langle h, y \rangle}$$

2.64 Преобразование Фурье и дифференцирование

$$f \in L^1(\mathbb{R}^m)$$

$$1. k \text{ — номер координаты, } \frac{df}{dx_k} \in L^1, \text{ а также непрерывно } \widehat{\left(\frac{df}{dx_k}\right)}(y) = 2\pi i y_k \widehat{f}(y)$$

$$2. |x|f(x) \text{ — сумм. Тогда } \widehat{f} \in C^1(\mathbb{R}^m), \forall c : \frac{d\widehat{f}}{dy_k}(y) = -2\pi i \widehat{(x_k f(x))} \text{ (пр. Лейбница)}$$

Доказательство:

2.64.1 Обозначения

Пусть $k = m$.

Рассмотрим $g = \frac{df}{dx_k}$, а также $(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m) = (u, t)$,

где $u = (x_1, \dots, x_{m-1}), t = x_m$. Тогда $\frac{df}{dx_k} = \frac{df}{dt}(u, t) = g(u, t)$.

2.64.2 Утверждение: при п.в. $u: f(u, t) \rightarrow 0 \ (t \rightarrow \infty)$

Это утверждение почти очевидно: $\int_0^t g(u, \tau) d\tau = f(u, t) - f(u, 0)$,

g — сумм. в \mathbb{R}^m , тогда отображение $t \mapsto g(u, t)$ — сумм. п.в. u на \mathbb{R} (это утверждает

Теорема Фубини), т.е. $\int_0^t g(u, \tau) d\tau \rightarrow \int_0^{+\infty} g(u, \tau) d\tau$ (при п.в.и)

Аналогично: f — сумм в \mathbb{R}^m , тогда $t \mapsto f(u, t)$ — сумм в \mathbb{R} . То есть при п.в.и есть одновременно и предел $f(u, t \rightarrow \infty)$ и $f(u, t)$ суммируема на \mathbb{R} , тогда очевидно этот предел $f(u, t \rightarrow \infty) = 0$

2.64.3 Доказательство основного факта теоремы:

Докажем только пункт (1), а пункт (2) разбирается как-то так же + кукарек про пр. Лейбница

Найдем \hat{g} (с помощью инт. по частям и сведения к \hat{f}).

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u, t) e^{-2\pi i y_m t} dt &\stackrel{\text{т.к. } g=f'_t}{=} f(u, t) e^{-2\pi i y_m t} \Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty} - \\ &- \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, t) (-2\pi i y_m) e^{-2\pi i y_m t} dt = (2\pi i y_m) \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, t) e^{-2\pi i y_m t} dt \quad (\text{при п.в. } u). \end{aligned}$$

Но на самом деле мы считаем интегралы по \mathbb{R}^m !!! Поэтому мы только что показали следующее:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{m-1} - \infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u, t) e^{-2\pi i y_m t} e^{-2\pi i (u_1 y_1 + \dots + u_{m-1} y_{m-1})} dt = \\ = \int_{\mathbb{R}^{m-1} - \infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi i y_m) f(u, t) e^{-2\pi i \langle (u, t), y \rangle} dt dy = (2\pi i y_m) \hat{f}(y), \quad \text{ч.т.д.} \end{aligned}$$

2.65 Следствие о преобразовании Фурье финитных функций

(Следствие из теоремы “56. Преобразование Фурье и дифференцирование“.)

1. $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$ — финитная (= 0 вне некоторой окрестности).
Тогда $\hat{f} \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$

Что это за обозначение?

2. $f \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m)$
Тогда $\forall p > 0 \quad |y|^p \hat{f}(y)$ — сумм.

Доказательство:

1. Из финитности следует $\forall p \quad |x|^p f(x)$ — сумм.
$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial y} = -2\pi i \widehat{(x_k f)}$$

$$\frac{\partial^2 \widehat{f}}{\partial y_k \partial y_l} = -2\pi i \frac{\partial}{\partial y_l} \widehat{(x_k f)} = -2\pi i (-2\pi i) \widehat{(x_l x_k f)}$$

...

2. из п.1 теоремы (56) следует:

$$(a) \widehat{\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)} = 2\pi i y_k \widehat{f}(y)$$

(b) $\forall \alpha$ - мультииндексы:

$$\widehat{\left(\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}\right)} = (2\pi i)^{|\alpha|} y^\alpha \widehat{f}(y)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = 2\pi i y_l \frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_k}(y) \quad // \quad \text{TODO - тут вроде надо будет пояснить, почему левая часть ограничена}$$

2.66 Лемма "о ядре Дирихле".

Если:

$$1. f \in L^1(\mathbb{R})$$

$$2. x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Тогда: } \forall A > 0 \quad I_A(f, x) = \int_{-A}^A \widehat{f}(y) e^{2\pi i x y} dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \frac{\sin(2\pi A t)}{\pi t} dt.$$

Доказательство:

$$\chi_A := \chi_{[-A; A]}$$

$$I_A(f, x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y) (\chi_A(y) e^{2\pi i x y}) dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) (\widehat{\chi_A e^{2\pi i x y}}) dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) \widehat{\chi_A}(y-x) dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{\sin 2\pi A(y-x)}{\pi(y-x)} dy$$

Следствие: $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, $A > 0$

$$\text{Тогда } \forall \delta > 0 \quad I_A(f, x) = \int_{-\delta}^{\delta} f(x-t) \frac{\sin 2\pi A t}{\pi t} dt + o(1), \quad A \rightarrow \infty$$

Доказательство:

$$\int_{|t|>\delta} f(x-t) \frac{\sin 2\pi A t}{\pi t} dt \rightarrow 0 \text{ по теореме Римана-Лебега } \frac{f(x-t)}{\pi t} - \text{ сумм в } \{t : |t| > \delta\}$$

$$\left| \frac{f(x-t)}{\pi t} \right| \leq \frac{1}{\pi \delta} |f(x-t)|$$

$$\text{Замечание: } D_n(t) = \frac{\sin t}{t} + \frac{1}{2\pi} (\cos(nt) + h(t) \sin(nt))$$

2.67 Теорема о равносходимости ряда Фурье и интеграла Фурье

Если:

1. $f \in L^1(\mathbb{R})$
2. $f_0 \in L^1[-\pi; \pi]$
3. $f = f_0$ в $U(x)$, где $x \in \mathbb{R}$

Тогда в точке x : сходимость интеграла Фурье \Leftrightarrow сходимость ряда Фурье и в случае сходимости $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{2\pi i xy} dy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f_0) e^{i\pi x}$

Доказательство:

Проверим: $I_A(f, x) - S_{[2\pi A]}(f, x) \rightarrow 0$ как $A \rightarrow \infty$

1. $I_A(f, x) = \int_{-\delta}^{\delta} f(x-t) \frac{\sin(2\pi At)}{\pi t} dt + o(1), A \rightarrow \infty$
2. $S_n(f, x) = \int_{-\delta}^{\delta} f(x-t) \frac{\sin(nt)}{\pi t} dt$

$2\pi A = n$ - целое, тогда проверять и ничего $2\pi A$ - нецелое. $n = [2\pi A]$ $|I_A(f, x) - I_{\frac{n}{2\pi}}(f, x)| = |\int_{-A}^A - \int_{-\frac{n}{2\pi}}^{\frac{n}{2\pi}}| \leq \int_{A-\frac{1}{2\pi}}^A + \int_{-A}^{-A+\frac{1}{2\pi}} \leq 2 * \frac{1}{2\pi} \max_{|y| > A-\frac{1}{2\pi}} |\hat{f}(y)| \rightarrow 0$, как суммируемая функция.

2.68 Признак Дирихле–Жордана

Если:

$f \in L^1(\mathbb{R})$ или $f \in L^1[-\pi, \pi]$

$x \in \mathbb{R}$, в окрестности x f имеет ограниченную вариацию.

Тогда:

$$S_n(f, x) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 1/2 * (f(x+0) + f(x-0))$$

А также $I_A(f, x)$ стремится к этому при стремлении A к бесконечности *Доказательство:*

$$S_n(f, x) = \int_{-\delta}^{\delta} f(x-t) * \frac{\sin(nt)}{\pi t} dt + o(1) = \int_0^{\delta} \phi(t) \frac{\sin(nt)}{\pi t} dt + o(1), \text{ где } \phi(t) = f(x-t) + f(x+t)$$

Пусть дельта меньше радиуса из условия. Пусть Φ - убывающая положительная функция и $\Phi(t) = \phi(t) * \chi_{[0, \delta]}(t)$

Так как ϕ - ограниченная вариация, то она представима как разность двух убывающих функций, а из этого у нас существует $\phi(t+0)$ для любого t (глобальный признак сходимости). /*у меня это указано в качестве замечаний */

$$\int_0^{\delta} \Phi(t) \frac{\sin(nt)}{\pi t} dt = \int_0^{\infty} \Phi(t) \frac{\sin(nt)}{\pi t} dt = \int_0^{\infty} \Phi(u/n) \frac{\sin(u)}{\pi u} du \rightarrow \text{magic - knowledge} \rightarrow \phi(0+) \int_0^{\infty} \frac{\sin(u)}{\pi u} du = 1/2 * \phi(0+)$$

2.69 Лемма о Вейерштрассовской аппроксимативной единице

Ты проиграл

2.70 Формула обращения преобразования Фурье.

$f \in L^1(R^m)$ Если $\hat{f} \in L^1(R^m)$, то при п.в. x $f(x) = \int_{R^m} \hat{f}(y) e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dy$

Замечания:

1) П.Ч.: подынт.ф. непр. по x

есть сумм. мажоранта: $|f(\hat{y})| \Rightarrow$ П.Ч. — непрерывна по x

2) ПЧ. непр по x и при этом ф-ла вып. п.в. \Rightarrow ф-ла верна в точке непр-сти f

Итого: Если $f \in C(R^m)$, $f \in L^1(R^m)$, $\hat{f} \in L^1(R^m)$, то ф-ла обращения вып. при всех

x . Доказательство: Пусть $w_t(x) = \frac{1}{t^m} e^{\frac{-\pi|x|^2}{t^2}}$, $x \in R^m$ ($t > 0$)

$$\begin{aligned} f * w_t(x) &= \int_{R^m} f(y) w_t(x-y) dy = \int_{R^m} f(y) w_t(y-x) dy \quad (w_t - \text{четная}) = \int_{R^m} f(y+x) w_t(y) dy \\ &= \int_{R^m} f(x+y) (\hat{V}_t) dy = \int_{R^m} (f(y+x)) V_t(y) dy = \int_{R^m} e^{2\pi i \langle x, y \rangle} \hat{f}(y) V_t(y) dy \end{aligned}$$

$$\text{Итак : } f * w_t(x) = \int_{R^m} e^{-\pi t^2 |y|^2} e^{2\pi i \langle x, y \rangle} \hat{f}(y) dy = I$$

(замечание: т.к. w_t четное, то в интеграле, равном w_t мы можем менять знак перед x и он останется тем же. этим мы и пользовались)

$e^{-\pi t^2 |y|^2} e^{2\pi i \langle x, y \rangle} \hat{f}(y) \rightarrow e^{2\pi i \langle x, y \rangle} \hat{f}(y)$ при $t \rightarrow 0$. И есть сумм. мажоранта $|f(\hat{y})|$.

Значит интеграл I стремится к $\int_{R^m} e^{2\pi i \langle x, y \rangle} \hat{f}(y) dy$

Берем $t_n \rightarrow 0$

$$f * w_t \rightarrow f \text{ в } L^1 \Rightarrow$$

$$f * w_{t_n} \Rightarrow f \text{ (по мере)}$$

$$\Rightarrow \exists n_k : f * w_{t_{n_k}} \rightarrow f \text{ п.в. (т. Рисса)}$$

Поэтому $f(x) = \lim_{t_{n_k} \rightarrow 0} f * w_{t_{n_k}} = \int \dots \rightarrow \int_{R^m} e^{2\pi i \langle x, y \rangle} \hat{f}(y) dy$, что и требовалось доказать.

2.71 Преобразование Фурье на классе быстро убывающих функций

Ты проиграл

2.72 Теорема Вейерштрасса (лемму можно не доказывать)

Ты проиграл

2.73 Следствие об одновременном приближении функции и ее производных

Ты проиграл