

Первый коллоквиум, семестр 4

24 марта 2019 г.

Оглавление

1	Определения	3
1.1	Произведение мер	3
1.2	Сферические координаты в R^3 и в R^m , их Якобианы	3
1.3	Образ меры при отображении	4
1.4	Взвешенный образ меры	4
1.5	Плотность одной меры по отношению к другой	4
1.6	Заряд, множество положительности	5
1.6.1	Заряд	5
1.6.2	Множество положительности	5
1.7	Интегральные неравенства Гельдера и Минковского	5
1.7.1	Неравенство Гельдера	5
1.7.2	Неравенство Минковского	5
1.8	Интеграл комплекснозначной функции	5
1.9	Пространство $L_p(E, \mu)$, $1 \leq p < +\infty$	6
1.10	Пространство $L_\infty(E, \mu)$	6
1.11	Существенный супремум	6
1.12	Условие L_{loc}	7
1.13	Несобственный интеграл Лебега в R	7
1.14	Фундаментальная последовательность, полное пространство	7
1.14.1	Фундаментальная последовательность	7
1.14.2	Полное пространство	7
1.15	Плотное множество	7
2	Теоремы	8
2.1	Теорема Леви	8
2.2	Линейность интеграла Лебега	8
2.3	Теорема об интегрировании положительных рядов	8

2.4	Абсолютная непрерывность интеграла	8
2.5	Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере.	9
2.6	Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде.	9
2.7	Теорема Фату. Следствия.	10
2.7.1	Следствие 1	10
2.7.2	Следствие 2	10
2.8	Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры	10
2.8.1	Лемма	10
2.8.2	Следствие	11
2.8.3	Теорема	11
2.9	Критерий плотности	11
2.10	Единственность плотности	11
2.11	Лемма о множестве положительности	12
2.12	Теорема Радона-Никодима	12
2.13	Лемма об образах малых кубических ячеек при диффеоморфизме	12
2.14	Лемма о вариациях на тему регулярности меры Лебега	12
2.15	Теорема об образе меры Лебега при диффеоморфизме	13
2.16	Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега	13
2.17	Принцип Кавальери	13
2.18	Сферические координаты в R^m	13
2.19	Совпадение определенного интеграла и интеграла Лебега	14
2.20	Теорема Тонелли	14
2.21	Объем шара в \mathbb{R}^m	14
2.22	Теорема Фубини	15
2.23	Формула для Бета-функции	15
2.24	Предельный переход под знаком интеграла при наличии равномерной сходимости	15
2.25	Теорема Лебега о непрерывности интеграла по параметру	16
2.26	Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру	16
2.27	Теорема о вложении пространств L^p	16
2.28	Теорема о сходимости в L_p и по мере	16
2.29	Полнота L^p	17

Глава 1

Определения

1.1 Произведение мер

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle, \langle Y, \mathbb{B}, \nu \rangle$ - пространства с мерой.

μ, ν - σ -конечные меры.

$$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{A \times B \subset X \times Y : A \in \mathbb{A}, B \in \mathbb{B}\}$$

$$m_0 : \mathbb{A} \times \mathbb{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

$$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$$

m - называется произведением мер μ и ν , если m - мера, которая является Лебеговским продолжением m_0 с полукольца $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ на некоторую σ -алгебру $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$.

$m = \mu \times \nu$ - обозначение.

$\langle X \times Y, \mathbb{A} \otimes \mathbb{B}, \mu \times \nu \rangle$ - произведение пространств с мерой.

1.2 Сферические координаты в R^3 и в R^m , их Якобианы

$$x_1 = r \cdot \cos \phi_1$$

$$x_2 = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \cos \phi_2$$

$$x_3 = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdot \cos \phi_3$$

\vdots

$$x_{m-2} = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{m-3} \cdot \cos \phi_{m-2}$$

$$x_{m-1} = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{m-2} \cdot \cos \phi_{m-1}$$

$$x_m = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{m-2} \cdot \sin \phi_{m-1}$$

$$1 \leq i \leq m-2 : \phi_i \in [0, \pi]$$

$$i = m-1 : \phi_i \in [0, 2\pi]$$

$$r \geq 0$$

$$\mathcal{J} = r^{m-1} \cdot (\sin \phi_1)^{m-2} \cdot (\sin \phi_2)^{m-3} \cdots (\sin \phi_{m-2})^1 \cdot (\sin \phi_{m-1})^0$$

Что тут происходит идейно. Сначала мы проецируем наш m -мерный вектор на нормаль к $(m-1)$ -мерной гиперплоскости. Потом рассматриваем проекцию на эту гиперплоскость и в ней рекурсивно повторяем процедуру, пока не дойдём до нашего любимого \mathbb{R}^2 . Уже в нём рассматриваем обычные полярные координаты (отсюда и другие ограничения на размер угла).

1.3 Образ меры при отображении

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ — пространство с мерой, $\langle Y, \mathbb{B}, _ \rangle$ — пространство с σ -алгеброй.

$\Phi : X \rightarrow Y$, $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$ (прообраз любого множества из \mathbb{B} лежит в \mathbb{A}).

Пусть для $\forall E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) = \mu(\Phi^{-1}(E))$.

ν является мерой на Y и называется образом меры μ при отображении Φ .

1.4 Взвешенный образ меры

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ — пространство с мерой, $\langle Y, \mathbb{B}, _ \rangle$ — пространство с σ -алгеброй.

$\Phi : X \rightarrow Y$, $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$ (прообраз любого множества из \mathbb{B} лежит в \mathbb{A}).

$\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая.

Пусть для $E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \omega d\mu$.

ν является мерой на Y и называется взвешенным образом меры μ .

При $\omega \equiv 1$ взвешенный образ меры является обычным образом меры.

1.5 Плотность одной меры по отношению к другой

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ — пространство с мерой.

$\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая.

$\nu(E) = \int_E \omega(x) d\mu$. ν — мера на X .

ω называется плотностью ν относительно μ .

1.6 Заряд, множество положительности

1.6.1 Заряд

$\langle X, \mathbb{A}, _ \rangle$ — пространство с σ -алгеброй.

$\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ (конечная, не обязательно неотрицательная).

ϕ счётно аддитивна.

Тогда ϕ — заряд.

1.6.2 Множество положительности

$A \subset X$ — множество положительности, если $\forall B \subset A, B$ измеримо: $\phi(B) \geq 0$.

1.7 Интегральные неравенства Гельдера и Минковского

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle; f, g : E \subset X \rightarrow \mathbb{C}$ (E - изм.) — заданы п.в, измеримы.

1.7.1 Неравенство Гельдера

$$p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \text{ Тогда: } \int_E |fg| d\mu \leq \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_E |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

1.7.2 Неравенство Минковского

$$1 \leq p < +\infty. \text{ Тогда: } \left(\int_E |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

1.8 Интеграл комплекснозначной функции

(X, \mathbb{A}, μ) - пространство с мерой. $E \in \mathbb{A}$

$f : E \rightarrow \mathbb{C}$

f измерима (суммируема), если $Im(f)$ и $Re(f)$ измеримы (суммируема)

$$\int_E f = \int_E Re(f) + i \cdot \int_E Im(f)$$

1.9 Пространство $L_p(E, \mu)$, $1 \leq p < +\infty$

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$, $E \in \mathbb{A}$.

$$L'_p(E, \mu) = \{f : \text{п.в. } E \rightarrow \mathbb{C}, \text{ изм.}, \int_E |f|^p d\mu < +\infty\}$$

Это линейное пространство (по нер-ву Минковского и линейности пространства измеримых функций).

У этого пространства есть дефект — если определить норму как $\|f\| = \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$,

то будет сразу много нулей пространства (ненулевые функции, которые п.в. равны 0, будут иметь норму 0). Поэтому перейдем к фактор-множеству функций по отношению эквивалентности:

$f \sim g$, если $f = g$ п.в.

$$L_p(E, \mu) := L'_p(E, \mu) / \sim \text{ - лин. норм. пр-во с нормой } \|f\| = \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

NB1: Его элементы — классы эквивалентности обычных функций. Будем называть их тоже функциями. Они не умеют вычислять значение в точке (т.к. можно всегда подменить значение на любое другое и получить представителя все того же класса эквивалентности), но зато их можно интегрировать!

NB2: также иногда будем обозначать $\|f\|_p$ за норму f в пространстве L_p .

1.10 Пространство $L_\infty(E, \mu)$

$$L_\infty(E, \mu) = \{f : \text{п.в. } E \rightarrow \mathbb{C}, \text{ess sup}_E |f| < +\infty\}$$

NB1: $\|f\|_\infty = \text{ess sup}_E |f|$.

NB2: Новый вид нер-ва Гельдера : $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ (причем можно брать $p = +\infty, q = 1$ или наоборот).

1.11 Существенный супремум

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$, $E \subset X$ — изм., $f : \text{п.в. } E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда: $\text{ess sup}_{x \in E} f(x) = \inf \{A \in R : f(x) \leq A \text{ при п.в. } x\}$.

В этом определении A - существенная верхняя граница.

Свойства:

1. $\operatorname{ess\,sup}_E f \leq \sup_E f$
2. $f(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_E f$ при п.в. $x \in E$.
3. $\int_E |fg| d\mu \leq \operatorname{ess\,sup}_E |g| \cdot \int_E |f| d\mu$.

1.12 Условие L_{loc}

: (

1.13 Несобственный интеграл Лебега в R

: (

1.14 Фундаментальная последовательность, полное пространство

1.14.1 Фундаментальная последовательность

$\{a_n\}$ - фунд. посл. в метрическом пр-ве (X, ρ) , если $\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n, k > N : \rho(a_n, a_k) < \epsilon$

1.14.2 Полное пространство

X - полное пространство, если любая фундаментальная последовательность в нём сходится.

1.15 Плотное множество

Множество A плотно во множестве B , если $\forall b \in B \forall \epsilon > 0$ верно, что $U_\epsilon(b) \cap A \neq \emptyset$.

Глава 2

Теоремы

2.1 Теорема Леви

(X, \mathbb{A}, μ) , $f_n \geq 0$ - изм.

$f_1(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \dots$ при почти всех x

$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ при почти всех x (считаем, что при остальных $x : f \equiv 0$)

Тогда: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu$

2.2 Линейность интеграла Лебега

f, g измеримые, Тогда $\int_{\mathbb{E}} (f + g) = \int_{\mathbb{E}} f + \int_{\mathbb{E}} g$

2.3 Теорема об интегрировании положительных рядов

$u_n(x) \geq 0$ почти всюду на \mathbb{E} , тогда $\int_{\mathbb{E}} (\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu(x)$

2.4 Абсолютная непрерывность интеграла

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ - пространство с мерой

$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ - суммируема

Тогда $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall E - \text{измеримое } \mu E < \delta \mid \int_E f d\mu < \epsilon$

2.5 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере.

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ – пространство с мерой,

f_n, f – измеримы,

$f_n \xrightarrow{\mu} f$ (сходится по мере),

$\exists g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ такая, что:

- $\forall n$, для «почти всех» $x \quad |f_n(x)| \leq g(x)$ (g называется мажорантой)
- g – суммируемая

Тогда:

- f_n, f – суммируемы
- $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$
- $\int_X f_n \rightarrow \int_X f$ («уж тем более»)

2.6 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде.

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ – пространство с мерой,

f_n, f – измеримы,

$f_n \rightarrow f$ **почти везде**,

$\exists g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ такая, что:

- $\forall n$, для «почти всех» $x \quad |f_n(x)| \leq g(x)$ (g называется мажорантой)
- g – суммируемая

Тогда:

- f_n, f – суммируемы

- $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$
- $\int_X f_n \rightarrow \int_X f$ («уж тем более»)

2.7 Теорема Фату. Следствия.

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ – пространство с мерой

f_n, f – измеримы,

$f_n \geq 0$

$f_n \rightarrow f$ «почти везде»

$\exists C > 0 \forall n \int_X f_n d\mu \leq C$

Тогда: $\int_X f \leq C$

2.7.1 Следствие 1

$f_n, f \geq 0$ – измер.

$f_n \xrightarrow{\mu} f$

$\exists C \forall n \int_X f_n \leq C$

Тогда: $\int_X f \leq C$

2.7.2 Следствие 2

$f_n \geq 0$ – измер.

Тогда: $\int_X \varliminf f_n \leq \varliminf \int_X f_n$

2.8 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры

2.8.1 Лемма

Пусть у нас есть $\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ и $\langle Y, \mathbb{B}, \nu \rangle$ и $\Phi : X \rightarrow Y$

Пусть $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$

Пусть для $E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) := \mu(\Phi^{-1}(E))$

Тогда:

ν — мера на (Y, \mathbb{B}) , $\nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 \cdot d\mu$

2.8.2 Следствие

Из этого следует, что если f — измеримая функция в Y (относительно ν), то $f \circ \Phi$ измерима относительно μ .

2.8.3 Теорема

Есть пространства $\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ и $\langle Y, \mathbb{B}, \nu \rangle$.

$\Phi : X \rightarrow Y$ $w \geq 0$ — измеримая, ν — взвешенный образ μ (w — плотность)

Тогда:

Для $\forall f \geq 0$ — измерима на Y , $f \circ \Phi$ — измерима (относительно μ)

$$\int_Y f d\nu = \int_X f(\Phi(x)) * \omega(x) d\mu(x)$$

Замечание: То же верно, если f суммируема.

2.9 Критерий плотности

Есть пространство $\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$

ν — еще одна мера.

$\omega \geq 0$ — измерима на X .

Тогда:

ω — плотность ν относительно $\mu \iff$ Для любого $A \in \mathbb{A} : \mu A \cdot \inf_A(\omega) \leq \nu(A) \leq \mu A \cdot \sup_A(\omega)$

2.10 Единственность плотности

$f, g \in L(x)$.

Пусть $\forall A$ — измеримо: $\int_A f = \int_A g$.

Тогда:

$f = g$ почти везде

Следствие:

Плотность ν относительно μ определена однозначно с точностью до μ -почти везде.

2.11 Лемма о множестве положительности

Пусть есть пространство $\langle X, \mathbb{A} \rangle$ и ϕ — заряд.

Тогда:

$\forall A \in \mathbb{A} \exists B \subset A : \phi(B) \geq \phi(A)$ и B — множество положительности

2.12 Теорема Радона-Никодима

Пусть есть пространство (X, \mathbb{A}, μ) .

ν — мера на \mathbb{A} .

Обе меры конечные и $\nu \prec \mu$ (абсолютная непрерывность меры: если $\mu E = 0$, то $\nu E = 0$).

Тогда:

$\exists f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (с точностью до почти везде), которая является плотностью ν относительно μ и при этом f суммируема по μ .

2.13 Лемма об образах малых кубических ячеек при диффеоморфизме

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$a \in O, \Phi \in C^1(O)$

Возьмём $c > |\det \Phi'(a)| \neq 0$

тогда $\exists \delta > 0 : \forall$ кубической ячейки $Q, Q \subset B(a, \delta), a \in Q$ выполняется

$\lambda \Phi(Q) < c \cdot \lambda Q$

2.14 Лемма о вариациях на тему регулярности меры Лебега

$f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывна.

$A \subset O, A$ — измеримо.

$A \subset Q$ (кубическая ячейка) $\subset \overline{Q} \subset O$, то есть граница A не лежит на границе O .

Тогда

$$\inf_{A \subset G \subset O, G \text{ — open set}} (\lambda G \cdot \sup_G(f)) = \lambda A \cdot \sup_A f$$

2.15 Теорема об образе меры Лебега при диффеоморфизме

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ - Диффеоморфизм, $\forall A \in \mathbb{M}^m, A \subset O$
 $\lambda(\Phi(A)) = \int_A |\det \Phi'(x)| d\lambda(x)$

2.16 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ - диффеоморфизм
 $O' = \Phi(O)$ — открытое
 f задана на O' , $f \geq 0$, измерима по Лебегу, тогда
 $\int_{O'} f(y) \cdot d\lambda(y) = \int_O f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| \cdot d\lambda(x)$

2.17 Принцип Кавальери

(X, α, μ) и (Y, β, ν) — пространства с мерами, причем μ, ν — σ -конечные и полные
 $m = \mu \times \nu, C \in \alpha \otimes \beta$, тогда:

1. При п.в. x C_x измеримо (ν -измеримо), т.е. $C_x \in \beta$
2. Функция $x \rightarrow \nu C_x$ — измеримая (в широком смысле) на X

NB: ϕ — измерима в широком смысле, если она задана при п.в. x , и $\exists f : X \rightarrow R'$ — измеримая и $\phi = f$ п.в. При этом $\int_X \phi = \int_X f$ (по опр.)

3. $mC = \int_X \nu(C_x) \cdot d\mu(x)$

2.18 Сферические координаты в R^m

: (

2.19 Совпадение определенного интеграла и интеграла Лебега

: (

2.20 Теорема Тонелли

$\langle X, \alpha, \mu \rangle, \langle Y, \beta, \nu \rangle$ - пространства с мерой

μ, ν - σ -конечны, полные

$$m = \mu \times \nu$$

$f : X \times Y \rightarrow \bar{R}, f \geq 0$, f - измерима относительно m

Тогда:

1. при почти всех $x \in X$ f_x - измерима на Y ,
где $f_x : Y \rightarrow \bar{R}, f_x(y) = f(x, y)$
(симметричное утверждение верно для y)
2. Функция $x \mapsto \phi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ - измерима* на X
(симметричное утверждение верно для y)
3. $\int_{X \times Y} f(x, y) dm = \int_X \phi(x) d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$

2.21 Объем шара в \mathbb{R}^m

$$B(0, R) \subset \mathbb{R}^m$$

$$\lambda_m(B(0, R)) = \int_{B(0, R)} 1 d\lambda_m = \int \mathcal{J} =$$

$$= \int_0^R dr \int_0^\pi d\phi_1 \cdots \int_0^\pi d\phi_{m-2} \int_0^{2\pi} d\phi_{m-1} \cdot r^{m-1} (\sin \phi_1)^{m-2} \cdots (\sin \phi_{m-2}) \Rightarrow$$

$$\int_0^\pi (\sin \phi_k)^{m-2-(k+1)} = B\left(\frac{m-k}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{m-k}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m-k}{2} + \frac{1}{2})}$$

$$\rightarrow = \frac{R^m}{m} \frac{\Gamma(\frac{m-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{\Gamma(\frac{m-2}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m-1}{2})} \cdots \frac{\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} 2\pi =$$

$$= \frac{\pi R^m}{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^{m-2}}{\Gamma(\frac{m}{2})} = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2} + 1)} R^m$$

2.22 Теорема Фубини

(X, α, μ) и (Y, β, ν) - пространства с мерами, причем μ, ν — σ -конечны
на $X \times Y$ есть $\alpha \otimes \beta$, причем $m(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$ — произведение мер — σ -конечная мера на $\alpha \times \beta$

$(X \times Y), \alpha \otimes \beta, m$ — произведение пр-в с мерой

Обозначение : $C \subset X \times Y, x \in X$ тогда

$C_x = y : (x, y) \in C$ — Сечение I рода

$C_y = x : (x, y) \in C$ — Сечение II рода

2.23 Формула для Бета-функции

$B(s, t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1} dx$, где s и $t > 0$ - Бета-функция

$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$, где $s > 0$, тогда $B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$

2.24 Предельный переход под знаком интеграла при наличии равномерной сходимости

$f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$(\mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu)$ — простр. с мерой

\mathbb{Y} — метр. простр. (или метризуемое)

$\forall y \ f^y(x) = f(x, y)$ — сумм. на \mathbb{X}

$\mu X < +\infty; f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow a} \phi(x)$

Тогда:

• ϕ — сумм.

• $\int_X f(x, y) d\mu(x) \xrightarrow{y \rightarrow a} \int_X \phi(x) d\mu(x)$

2.25 Теорема Лебега о непрерывности интеграла по параметру

: (

2.26 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру

$$f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

$(\mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu)$ – простр. с мерой

\mathbb{Y} – метр. простр. (или метризуемое)

$\forall y \int f^y(x) d\mu(x) = \int f(x, y) d\mu(x)$ – сумм. на \mathbb{X}

$\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}$ – промежуток

при п. в. $x \quad \forall y \exists f'_y(x, y)$

f'_y удовлетворяет усл. L_{loc} в точке $a \in \mathbb{Y}$

Тогда:

- $I(y) = \int_{\mathbb{X}} f(x, y) d\mu(x)$ – дифф. в точке a
- $I'(a) = \int_{\mathbb{X}} f'_y(x, a) d\mu(x)$

2.27 Теорема о вложении пространств L^p

$$\mu E < +\infty, 1 \leq s < r \leq +\infty$$

Тогда:

1. $L_r(E, \mu) \subset L_s(E, \mu)$
2. $\forall f$ — измеримая : $\|f\|_s \leq \mu E^{1/s-1/r} \|f\|_r$

2.28 Теорема о сходимости в L_p и по мере

$$1 \leq p < +\infty$$

$$f_n \in L_p(\mathbb{X}, \mu)$$

$$1. \quad \bullet \quad f \in L_p$$

$$\bullet \quad f_n \rightarrow f \text{ в } L_p$$

Тогда: $f_n \xrightarrow{\mu} f$ (по мере)

$$2. \quad \bullet \quad f_n \xrightarrow{\mu} f \text{ (либо если } f_n \rightarrow f \text{ почти везде)}$$

$$\bullet \quad |f_n| \leq g \text{ почти везде при всех } n; \quad g \in L_p$$

Тогда: $f_n \rightarrow f$ в L_p

2.29 Полнота L^p

$L_p(E, \mu) \quad 1 \leq p < \infty$ – полное

То есть любая фундаментальная последовательность сходиться по норме $\|f\|_p$.

$$(\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, k \|f_n - f_k\|_p < \epsilon) \Rightarrow (\exists f : \|f_n - f\|_p \rightarrow 0)$$