Второй коллоквиум, семестр 4

12 мая 2019 г.

Оглавление

Глава 1

Определения

1.1 Равномерная сходимость несобственного интеграла

Ты проиграл

1.2 Нормальное топологическое пространство

Ты проиграл

1.3 Финитная функция

$\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. $\exists$ шар $B : \varphi \equiv 0$ вне B. Тогда ϕ — финитная.
Множество непрерывных финитных функций обозначаем как $C_0(\mathbb{R}^m)$.

1.4 Гильбертово пространство

$\mathbb{H}$ — линейное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, в котором задано скалярное произведение, и полное относительно соответствуйющей нормы, называется Гильбертовым.

1.5 Ортогональный ряд

$x_k \in \mathbb{H}, \sum x_k$ называется ортогональным рядом, если $\forall k, l : k \neq l : x_k \perp x_l$.

1.6 Сходящийся ряд в Гильбертовом пространстве

$x_n \in \mathbb{H}$.
$\sum x_n$ сходится к x, если
$S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, $S_n \to x$ (то есть, $|S_n - x| \to 0$ — сходимость по норме).

1.7 Ортогональная система (семейство) векторов

$\{e_k\} \in \mathbb{H}$ - ортогональное семейство векторов, если $\forall k \neq l\ e_k \perp e_l$, $\forall k\ e_k \neq 0$.

1.8 Ортонормированная система

$\{e_k\} \in \mathbb{H}$ - ортонормированное семейство векторов, если e_k — ортогональное семейство векторов, и $\forall k\ |e_k| = 1$.

1.9 Коффициенты Фурье

$\{e_k\}$ - ортогональное семейство векторов в $\mathbb{H}, x \in \mathbb{H}$.
$c_k(x) = \dfrac{\langle x, e_k \rangle}{|e_k|^2}$ называются коэффициентами Фурье вектора x по ортогональной системе $\{e_k\}$.

1.10 Ряд Фурье в Гильбертовом пространстве

$\sum c_k(x) \cdot e_k$ называется рядом Фурье вектора x по ортогональной системе $\{e_k\}$.

1.11 Базис, полная, замкнутая ОС

$\{e_k\}$ — ортогональная система в $\mathbb{H}$.

1. $\{e_k\}$ — **базис**, если $\forall x \in \mathbb{H}\ \exists c_k$, что $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k \cdot e_k$
2. $\{e_k\}$ — **полная** О.С., если $(\forall k\ z \perp e_k) \Rightarrow z = 0$.
3. $\{e_k\}$ — **замкнутая** О.С., если $\forall x \in \mathbb{H}\ \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |c_k(x)|^2 \cdot ||e_k||^2 = ||x||^2$.

1.12 Измеримое множество на элементарной двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$

$M \subset R^3$ – простое 2-мерное многообразие, C^1 гладкости.
$\phi : \underset{\text{откр. обл.}}{O} \subset R^2 \to R^3$, $\phi \in C^1$ – гомеофорфизм, $\phi(O) = M$
$E \subset M$ – изм. по Лебегу, если $\phi^{-1}(E)$ – изм. по Лебегу в R^2

1.13 Мера Лебега на простой двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$

$S(E) := \iint\limits_{\phi^{-1}(E)} |\phi'_u \times \phi'_v| dudv$ – взвеш. образ меры Лебега отн. ϕ. Значит это мера на $\mathbb{A}_M$

1.14 Поверхностный интеграл первого рода

M – простое, гл, 2-мерное в R^3, ϕ – параметризация
f – изм. отн. S (см. выше), $f > 0$ (или f – суммируем. по S)
Тогда: $\int_M f dS$ – называет инт. первого рода функ. f по поверхности M

1.15 Кусочно-гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$

$M \subset \mathbb{R}^3$ называется кусочно-гладкой, если M представляет собой объединение:

- конечного числа простых гладких поверхностей
- конечного числа простых гладких дуг
- конечного числа точек

1.16 Тригонометрический ряд

- $$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

  (где a_i, b_i – коэффициенты ряда).

- Другая форма:
$$\sum_{k=\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$
Тогда $S_n := \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$.

1.17 Коэффициенты Фурье функции

- $$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \; dx$$
- $$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \; dx$$
- $$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \; dx$$

1.18 Класс Липшица с константой M и показателем альфа

Ты проиграл

1.19 Сторона поверхности

Сторона (простой) гладкой двумерной поверхности — непрерывное поле единичных нормалей. Поверхность, для которой существует сторона, называется двусторонней. Если же стороны не существует, она называется односторонней.

1.20 Задание стороны поверхности с помощью касательных реперов

F_1, F_2 – два касательных векторных поля к поверхности M.
$\forall p \in M \quad F_1(p), F_2(p)$ – Л.Н.З. касательные векторы.
Тогда поле нормалей стороны определяется, как $n := F_1 \times F_2$

Репéр - пара векторов из $F_1 \times F_2$.

1.21 Интеграл II рода

M — простая гладкая двусторонняя двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$.
n_0 — фиксированная сторона (одна из двух).
$F : M \to \mathbb{R}^3$ – векторное поле.

Тогда интегралом II рода назовем $\int\limits_M \langle F, n_0 \rangle ds$

Замечания

1. Смена стороны эквивалентна смене знака.

2. Не зависит от параметризации.

3. $F = (P, Q, R)$.

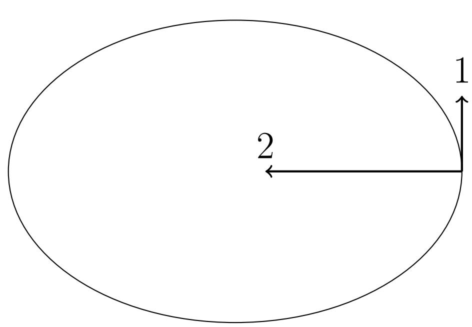
   Тогда интеграл имеет вид $\iint Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$.

   NB: $Qdxdz = -Qdzdx$.

1.22 Ориентация контура, согласованная со стороной поверхности

Ориентация контура согласована со стороной поверхности, если она задает эту сторону.

Пояснение: Рассмотрим некоторый контур (замкнутую петлю) и точку на нем. Построим два касательных вектора к контуру в этой точке: первый — снаружи от контура (задает направление «движения» по петле), второй — внутри контура. Тогда будем называть такую ориентацию согласованной со стороной, если направление векторного произведения первого и второго векторов в точке совпадает с направлением нормали к поверхности.



1.23 Ядро Дирихле, ядро Фейера

1.23.1 Ядро Дирихле

$$D_n(t) = \frac{1}{\pi}(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt)$$

1.23.2 Ядро Фейера

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(t)$$

1.24 Свертка

$f, K \in L_1[-\pi, \pi]$ – пеорид.

$$(f * K)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt$$

1.25 Аппроксимативная единица. (а. е.)

Пояснения: нужна 1-ца по свертке, но это не совсем функция, поэтому зададим её как предел последовательности.

$D \subset R, h_0$ – предельная точка D в $\overline{R}$, тогда $\{K_h\}_{h \in D}$ – а. е. если:

AE1: $\forall h \in D \;\; K_h \in L_1[-\pi, \pi] \; \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_h = 1$

AE2: $\exists M \; \forall h \; \int\limits_{-\pi}^{\pi} |K_h| \leq M$

AE3: $\forall \delta \in (0, \pi) \; \int\limits_{E_\delta} |K_h| \underset{h \to h_0}{\to} 0$, где $E_\delta = [-\pi, \pi] \setminus [h_0 - \delta, h_0 + \delta]$

1.26 Усиленная аппроксимативная единица.

Изменяем свойство AE3, на AE3':

$\forall h \; K_h \in L_\infty[-\pi, \pi]; \; \forall \delta \in (0, \pi) \;\; \operatorname*{ess\,sup}_{t \in E_\delta} |K_h(t)| \underset{h \to h_0}{\to} 0$

1.27 Метод суммирования средними арифметическими

$\sum a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} \cdot \sum\limits_{k=0}^{n} S_k$

1.28 Суммы Фейера.

$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} S_k(f(x)) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\Phi_n(t)dt$

1.29 Ротор, дивергенция векторного поля

$F = (P, Q, R)$ — векторное поле в $\mathbb{R}^3$.
$rot\ F = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y)$ – ротор, вихрь
$div\ F = P'_x + Q'_y + R'_z$. Многомерный случай определяется аналогично.

1.30 Соленоидальное векторное поле

Векторное поле A — соленоидальное, если $\exists$ векторное поле $B : rot\ B = A$. Тогда B называется векторным потенциалом поля A.

1.31 Бескоординатное определение ротора и дивергенции

$rot\ F$ — это такое векторное поле, что $\forall a\ \forall n_0 (rotF(a))_{n_0} = \lim\limits_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{\partial B_r} F_l dl$
где B_r – круговой контур, n_0 – нормаль контура, F_l – проекция на касательное направление контура.
Пояснение: $\frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{\partial B_r} F_l dl = \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{B_r} \langle rot\ F, n_0\rangle dS \underset{r\approx 0}{\approx} rotF(a)$
$divF(a) = \lim\limits_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_3(B(a,r))} \iiint\limits_{B(a,r)} divF\, dx\, dy\, dz = \lim\limits_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_3(B(a,r))} \iint\limits_{\partial B(a,r)} \langle F, n_0\rangle dS$