Первый коллоквиум, семестр 4

24 марта 2019 г.

Оглавление

1 Определения **2**

1.1 Произведение мер . . . 2

1.2 Сферические координаты в R^3 и в R^m, их Якобианы . . . 2

1.3 Образ меры при отображении . . . 3

1.4 Взвешенный образ меры . . . 3

1.5 Плотность одной меры по отношению к другой . . . 3

1.6 Заряд, множество положительности . . . 4

1.6.1 Заряд . . . 4

1.6.2 Множество положительности . . . 4

1.7 Интегральные неравества Гельдера и Минковского . . . 4

1.7.1 Нераветсво Гельдера . . . 4

1.7.2 Нераверство Минковского . . . 4

1.8 Интеграл комплекснозначных функции . . . 4

1.9 Пространство $L_p(E, \mu)$, $1 \leq p < +\infty$ . . . 5

1.10 Пространство $L_\infty(E, \mu)$ . . . 5

1.11 Существенный супремум . . . 5

1.12 Условие L_{loc} . . . 6

1.13 Несобственный интеграл Лебега в R . . . 6

1.14 Фундаментальная последовательность, полное пространство . . . 6

1.14.1 Фундаментальная последовательность . . . 6

1.14.2 Полное пространство . . . 6

1.15 Плотное множество . . . 6

2 Теоремы **7**

Глава 1

Определения

1.1 Произведение мер

$< X, \mathbb{A}, \mu >, < Y, \mathbb{B}, \nu >$ - пространства с мерой.

μ, ν - σ-конечные меры.

$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{A \times B \subset X \times Y : A \in \mathbb{A}, B \in \mathbb{B}\}$

$m_0 : \mathbb{A} \times \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{R}}$

$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$

m - называется произведением мер μ и ν, если m - мера, которая является Лебеговским продолжением m_0 с полукольца $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ на некоторую σ-алгебру $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$.

$m = \mu \times \nu$ - обозначение.

$< X \times Y, \mathbb{A} \otimes \mathbb{B}, \mu \times \nu >$ - произведение пространств с мерой.

1.2 Сферические координаты в R^3 и в R^m, их Якобианы

$x_1 = r \cdot \cos \phi_1$ $\qquad$ $1 \leq i \leq m-2 : \phi_i \in [0, \pi]$

$x_2 = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \cos \phi_2$ $\qquad$ $i = m-1 : \phi_i \in [0, 2\pi]$

$x_3 = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdot \cos \phi_3$ $\qquad$ $r \geq 0$

$\vdots$

$x_{m-2} = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{m-3} \cdot \cos \phi_{m-2}$

$x_{m-1} = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{m-2} \cdot \cos \phi_{m-1}$

$x_m = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{m-2} \cdot \sin \phi_{m-1}$

$\mathcal{J} = r^{m-1} \cdot (\sin\phi_1)^{m-2} \cdot (\sin\phi_2)^{m-3} \cdots (\sin\phi_{m-2})^1 \cdot (\sin\phi_{m-1})^0$

Что тут происходит идейно. Сначала мы проецируем наш m-мерный вектор на нормаль к $(m-1)$-мерной гиперплоскости. Потом рассматриваем проекцию на эту гиперплоскость и в ней рекурсивно повторяем процедуру, пока не дойдём до нашего любимого $\mathbb{R}^2$. Уже в нём рассматривем обычные полярные координаты (отсюда и другие ограничения на размер угла).

1.3 Образ меры при отображении

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ — пространство с мерой, $< Y, \mathbb{B}, \_ >$ — пространство с σ-алгеброй.
$\Phi : X \to Y$, $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$ (прообраз любого множества из $\mathbb{B}$ лежит в $\mathbb{A}$).
Пусть для $\forall E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) = \mu(\Phi^{-1}(E))$.
ν является мерой на Y и называется образом меры μ при отображении Φ.

1.4 Взвешенный образ меры

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ — пространство с мерой, $< Y, \mathbb{B}, \_ >$ — пространство с σ-алгеброй.
$\Phi : X \to Y$, $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$ (прообраз любого множества из $\mathbb{B}$ лежит в $\mathbb{A}$).
$\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая.
Пусть для $E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) = \int\limits_{\Phi^{-1}(E)} \omega \, d\mu$.
ν является мерой на Y и называется взвешенным образом меры μ.
При $\omega \equiv 1$ взвешенный образ меры является обычным образом меры.

1.5 Плотность одной меры по отношению к другой

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ — пространство с мерой.
$\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая.
$\nu(E) = \int_E \omega(x) \, d\mu$. ν — мера на X.
ω называется плотностью ν относительно μ.

1.6 Заряд, множество положительности

1.6.1 Заряд

$< X, \mathbb{A}, \_ >$ — пространство с σ-алгеброй.
$\phi : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ (конечная, не обязательно неотрицательная).
ϕ счётно аддитивна.
Тогда ϕ — заряд.

1.6.2 Множество положительности

$A \subset X$ — множество положительности, если $\forall B \subset A$, B измеримо: $\phi(B) \geq 0$.

1.7 Интегральные неравества Гельдера и Минковского

$< X, \mathbb{A}, \mu >$; $f, g : E \subset X \to \mathbb{C}$ (E - изм.) — заданы п.в, измеримы.

1.7.1 Нераветсво Гельдера

$p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. <u>Тогда:</u> $\int\limits_E |fg| d\mu \leq \left(\int\limits_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_E |g|^q d\mu) \right)^{\frac{1}{q}}$

1.7.2 Нераверство Минковского

$1 \leq p < +\infty$. <u>Тогда:</u> $\left(\int\limits_E |f+g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\limits_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_E |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$

1.8 Интеграл комплекснозначных функции

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ - пространство с мерой. $E \in \mathbb{A}$
$f : E \to \mathbb{C}$
f измерима (суммируема), если $Im(f)$ и $Re(f)$ измеримы (суммируема)
$\int_E f = \int_E Re(f) + i \cdot \int_E Im(f)$

1.9 Пространство $L_p(E,\mu)$, $1 \le p < +\infty$

$< X, \mathbb{A}, \mu >$, $E \in \mathbb{A}$.
$L'_p(E,\mu) = \{f : \text{п.в. } E \to \mathbb{C},\ \text{изм.},\ \int\limits_E |f|^p d\mu < +\infty\}$
Это линейное пространство (по нер-ву Минковского и линейности пространства измеримых функций).

У этого пространства есть дефект — если определить норму как $||f|| = \left(\int\limits_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, то будет сразу много нулей пространства (ненулевые функции, которые п.в. равны 0, будут иметь норму 0). Поэтому перейдем к фактор-множеству функций по отношению эквивалентности:
$f \sim g$, если $f = g$ п.в.
$L_p(E,\mu) := L'_p(E,\mu)/\sim$ - лин. норм. пр-во с нормой $||f|| = \left(\int\limits_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

NB1: Его элементы — классы эквивалентности обычных функций. Будем называть их тоже функциями. Они не умеют вычислять значение в точке (т.к. можно всегда подменить значение на любое другое и получить представителя все того же класса эквивалентности), но зато их можно интегрировать!

NB2: также иногда будем обозначать $||f||_p$ за норму f в пространстве L_p.

1.10 Пространство $L_\infty(E,\mu)$

$L_\infty(E,\mu) = \{f : \text{п.в. } E \to \mathbb{C},\ \operatorname*{ess\,sup}_E |f| < +\infty\}$
NB1: $||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_E |f|$.

NB2: Новый вид нер-ва Гельдера : $||f \cdot g||_1 \le ||f||_p \cdot ||g||_q$ (причем можно брать $p = +\infty, q = 1$ или наоборот).

1.11 Существенный супремум

$< X, \mathbb{A}, \mu >$, $E \subset X$ — изм., $f :$ п.в. $E \to \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда: $\operatorname*{ess\,sup}_{x \in E} f(x) = \inf\{A \in R : f(x) \le A \text{ при п.в. } x\}$.

В этом определении A - существенная верхняя граница.
Свойства:

1. $\operatorname*{ess\,sup}_E f \le \sup_E f$
2. $f(x) \le \operatorname*{ess\,sup}_E f$ при п.в. $x \in E$.
3. $\int\limits_E |fg| d\mu \le \operatorname*{ess\,sup}_E |g| \cdot \int\limits_E |f| d\mu$.

1.12 Условие L_{loc}

: (

1.13 Несобственный интеграл Лебега в R

: (

1.14 Фундаментальная последовательность, полное пространство

1.14.1 Фундаментальная последовательность

$\{a_n\}$ - фунд. посл. в метрическом пр-ве (X, ρ), если $\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n, k > N : \rho(a_n, a_k) < \epsilon$

1.14.2 Полное пространство

X - полное пространство, если любая фундаментальная последовательность в нём сходится.

1.15 Плотное множество

Множество A плотно во множестве B, если $\forall b \in B\ \forall \epsilon > 0$ верно, что $U_\epsilon(b) \cap A \neq \emptyset$.

Глава 2

Теоремы