绝密 ★ 启用前

2023 珏德 • 润材 51 人联考卷

数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必把自己的姓名、考生号写等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 遁地摩天轮是衡朝著名建筑师格鲁 • 布拉德（Glue Brother）的杰作，其可运行至地面下方，使游客感受从地底升起的奇妙感受. 已知该摩天轮的中心位于地面上方 20 m 处，旋转半径为 50 m，摩天轮转一周的用时为 20 min，设初始位置为摩天轮正上方，则摩天轮货箱高度 y (m) 关于运动时间 t (min) 的表达式可能为

A. $y=50\cos\dfrac{\pi t}{20}+20$　　B. $y=20\cos\dfrac{\pi t}{20}+50$

C. $y=50\cos\dfrac{\pi t}{10}+20$　　D. $y=20\cos\dfrac{\pi t}{10}+50$

2. Digital 的成绩向来为人称道，而其体育成绩也是首屈一指的：在他带领之下，13 班的篮球队常年称霸领奖台. 已知领奖台的形状为正四棱台，其上、下底面的边长分别为 2、4，体积为 $28\sqrt{2}$，则其外接球的表面积为

A. 8π　　B. 32π　　C. 40π　　D. 72π

3. 1951 年，生物学家张明觉发现精子获能现象，从此试管婴儿的研究踏入了正轨；数十年后，生物化学家张文珏继承先辈的志向，在生物化学领域做出了卓著贡献. 他在观测生物的某一指标时，发现该指标 ϕ 关于时间 t 的关系式大致符合 $\phi=c(t-\lambda)e^{-t}$ 的关系，其对应的观测图象如下. 则 λ 的值约为

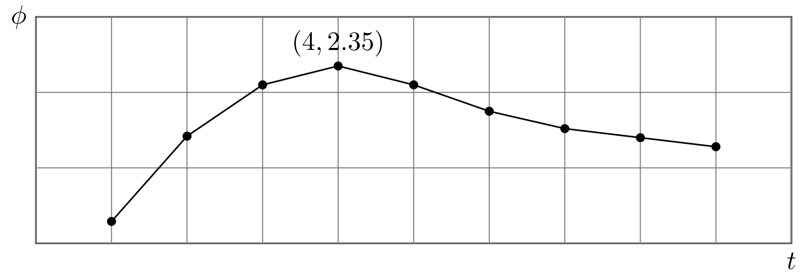

图 1: 第 3 题观测数据

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

4.《论语·侍坐》中提到孔子与弟子子路、曾皙、冉有、公西华的逐一对话；数千年后，班主任 Jimmy 常请学生吃面，体现了中华优秀教育文化的传承．假设某日 Jimmy 要请包括高中英在内的 8 名高智能学生中的 4 名吃面，其中高中英因被要求奏乐，若选中则只能放在最后一位，则吃面顺序安排的可能情况总数为

A. 1680　　B. 1440　　C. 1280　　D. 1050

5. Remain 是人型自走计算器，善于解决估算问题．例如本题：设 $a=e^2$，$b=2^e$，$c=6e-8$，则 a,b,c 的大小关系为

A. $c<a<b$　　B. $a<b<c$　　C. $b<a<c$　　D. $a<c<b$

6. 小国和小潇在 Minecraft 中进行箭术决斗，两人用无限弓互相射击，局面一时十分混乱．小国以自己为坐标原点研究箭矢，发现箭矢的运动轨迹为抛物线 $C: x^2=-2py\ (p>0)$，其焦点为 F，过 F 的直线交 C 于 A,B．若 $|FA|=2|FB|=6$，则 C 的焦点为

A. $(0,-1)$　　B. $(0,-2)$　　C. $(0,-3)$　　D. $(0,-4)$

7. 阿颂是衡朝著名化学家．某日，阿颂进入实验室，使用有机溶剂 CCl_4 进行卤素 I_2 溶液的萃取实验．已知用 CCl_4 从水溶液中萃取 I_2 时，I_2 在 CCl_4 溶液中的浓度（浓度为溶液中该物质的物质的量与溶剂体积的比值）恒为水中的 85 倍．现阿颂将一定体积的 I_2 溶液置于烧杯，将体积相同的 CCl_4 溶液平均分为 k 份，分 k 次加入烧杯中萃取 I_2，每次萃取完后立即将烧杯中的 CCl_4 溶液分液取出，以此增大总萃取量．若要使萃取完后水溶液中的 I_2 浓度不超过萃取前的 1×10^{-10} 倍，则 k 至少为（注：参考数据见表）

n	9	10	11	12
$\lg n$	0.9542	1	1.0413	1.0791
$\lg(n+85)$	1.9731	1.9777	1.9822	1.9867

图 2: 第 7 题参考数据

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

8. 志泉施工队在施工时，施工用铅垂重球（下称为“沉球”，球心为 O）由于意外砸到地上，砸出了一个坑．为确定坑的深度，工作人员在空中吊起另一个球（称为“高球”，球心为 O'），使得两球的连心线竖直．小尖站在距离两球连心线距离为 a 处的点 A，测得 $\angle OAO'=120°$；再用工具升至 A 点正上方 $\sqrt{2}a$ 处的点 A'，测得 $\angle OA'O'=90°$，则高球与沉球的连心线长 $OO'=$

A. $\sqrt{6}a$　　B. $2\sqrt{3}a$　　C. $4a$　　D. $2\sqrt{6}a$

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多个选项是正确的。全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，错选或不选不得分。

9. 海天、Remain、阿颂经常根据考试成绩互相请吃饭．某次考后，阿颂说：“我要请吃饭”；海天说：“阿颂要请吃饭”；Remain 说：“我不用请吃饭”．Luostar 看了他们的考试成绩并听了他们上述的对话后说：“你们之中有且仅有一个人要请吃饭，有且仅有一个人说对了”．则下列说法正确的是

A. Remain 要请吃饭　　B. 海天要请吃饭

C. 阿颂说对了　　D. 海天说对了

10. 已知 $\triangle ABC$ 的重心为 O，$OA=2OB=2$，记 $\vec{a}=\overrightarrow{OA},\vec{b}=\overrightarrow{OB},\vec{c}=\overrightarrow{OC}$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ 的值可能为

A. -8　　B. -6　　C. -4　　D. -2

11. 三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB=2$，平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，$\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 都为等边三角形，P,Q 为 AB,CD 上的动点，记 PQ 与平面 BCD、平面 ABD 的夹角分别为 α,β，该三棱锥外接球的表面积为 S，二面角 $B-AC-D$ 的平面角为 θ，则

A. $\tan\alpha\leqslant 2$　　B. $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$　　C. $S=\dfrac{20\pi}{3}$　　D. $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$

12. 对函数 $f(x)=\dfrac{bx^2-4x+b}{(a+1)x^2+(a-1)}$，记数对的集合 $U=\{(a,b)\mid a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{Z},|a|\leqslant 4,|b|\leqslant 4\}$，$A=\{(a,b)\in U\mid f(x)\text{无最小值}\}$，$B=\{(a,b)\in U\mid f(x)\leqslant 0\}$，并记事件 $E:(a,b)\in U$，$F:(a,b)\in A$，$G:(a,b)\in B$，$H:(a,b)\in A\cap B$，$I:(a,b)\in A\cup B$，则下列说法正确的是

A. $P(F\mid E)=\dfrac{1}{3}$　　B. $P(G\mid E)=\dfrac{8}{27}$　　C. $P(H\mid E)=\dfrac{10}{81}$　　D. $P(I\mid E)=\dfrac{37}{81}$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 金钩热爱刷题，且刷法多变，令人眩目．经过研究发现，金钩在上一节课上刷的题对下一节课上刷的题有影响，情况如下表所示．若已知本节课刷的题为数学，则上节课刷的题为物理的概率为 ▲ ．

本节课 \ 上节课	数学	物理	化学
数学	0.2	0.4	0.4
物理	0.6	0.2	0.2
化学	0.4	0.3	0.3

图 3: 第 13 题金钩刷题概率分布

14. 在数学小组“北约”的一次会议上，珏•尼格•卷签的复数难题吸引了大家的目光，激起了大家对复数动态问题的兴趣．已知复数 z_1 与 z_2 满足：z_1 与 z_2 的实部均为正实数，且 z_1^2 与 z_2^2 的实部均为 2．则 $|z_1+2|+|z_2+2|-|z_1-z_2|$ 的最小值为 ▲ ．

15. 作为珠海一中的信息竞赛之光，万哥常常研究各类数据结构，常见的“二叉树”更是不在话下．对数列 $\{a_n\}$，可用如下方式将其排成二叉树结构：在一张白纸上写下 a_1，随后在该数的左下与右下分别写下 a_2 与 a_3，再在 a_2 的左下与右下分别写下 a_4 与 a_5，在 a_3 的左下与右下分别写下 a_6 与 a_7，依此类推．由此得到的二叉树中，a_1 称为第一层，a_2 与 a_3 所在行称为第二层，a_4 至 a_7 所在行称为第三层，依此类推．现将数列 $\{a_n\}$：$a_1=71$，$a_n=\begin{cases}a_{\frac{n}{2}}+31, & \text{若}n\text{为偶数；}\\ a_{\frac{n-1}{2}}+40, & \text{若}n\text{为奇数．}\end{cases}$ 排成二叉树结构，记 b_m 为前 m 层中所有数之和，则 b_m 的通项公式为 ▲ ；记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，任写出两个使 S_n 为完全平方数的两个 n 值： ▲ ．（第一空 *2* 分，第二空 *3* 分，其中第一个 n 值 *1* 分，第二个 n 值 *2* 分）

16. “珏玉标志”是 13 班的精神图腾，如图所示．其中横线与竖线相交于 9 个交点，算上横线的 6 个端点，共 15 个顶点．现用 4 种颜色给这 15 个顶点上色，使得相邻（有短边相连）的两顶点不同色，则总染色方案数为 ____▲____.

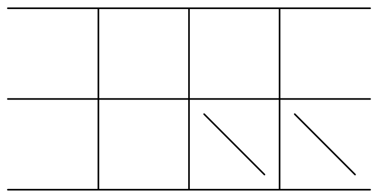

图 4: 第 16 题珏玉标志

四、解答题：本大题共 6 小题，第 17 小题 10 分，其余每题各 12 分，共 70 分。

17. (10 分) 锐角三角形 ABC 中，$a\cos C = c(1-\cos A)$.

(1) 求 B 的取值范围；

(2) 若 $\triangle ABC$ 的周长为 4，求 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影向量长度的最大值.

18. (12 分) 如图，三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB\perp CD$，平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，M,N 分别为 BC,AD 中点，$MN\perp BC$，$BD>BC$.

(1) 求证：平面 $ABC\perp$ 平面 ACD；

(2) 若 $BC=CD=\sqrt{2}AB=2\sqrt{2}$，求平面 AMN 与平面 BMN 夹角的余弦值.

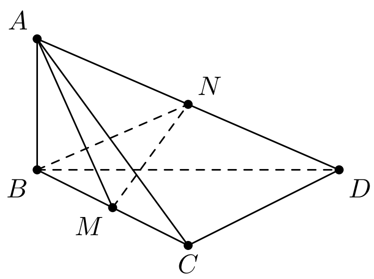

图 5: 第 18 题图

19. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+8}{2a_n+2}$，$S_n$ 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，记 $S_0=0$.

(1) 令 $b_n=\ln\dfrac{a_n-2}{a_n+4}$，求 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数，$c_n=\dfrac{2^n[S_{n-1}]}{[S_n][S_{n+1}]}$，求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

阅读下列材料，完成第 20 题。

好的诛题，可以帮我们更好地骗分和做题，可以触动选项、启迪智慧；好的诛题，可以改变一个人的命运，可以展现一个民族的形象……诛题是有力量的。

20. (12 分) 在不会做选择题时，诛题是一种行之有效的办法，用此法，平行班也能超越尖尖班.

(1) 小明是一名学生，他的诛题方法比较平庸. 其方法是：遇到会的题，就做；遇到不会的题，就诛（四个选项猜一个）. 已知某次考试的单选题中，小明会做 5 个，不会做 3 个，每道题 5 分，求小明得分的分布列及期望.

(2) 多选题是一款由国家教育考试院开发的开放试卷游戏，每道多选题的正确选项数 ξ 服从两点分布：$P(\xi=2)=p$，$P(\xi=3)=1-p$. 在该种题中，选全对得 5 分，部分选对得 2 分，选错或不选得 0 分. 对此，小明有两种诛题方案：

方案一：选一个走人（纯随机）；

方案二：算一个选项，若它错，则从剩下的选项中随机选一个；若它正确，则选它，并在剩下的选项中随机再选一个.

请从得分期望的角度讨论分析：对给定的 p，哪种方案更优？

阅读下列材料，完成第 21 题。

数千年前，古希腊数学家使用本轮—均轮模型，描述世间万物运行的轨道；数千年后，被誉为“数千年一遇的数学天材”的衡朝数学家高球澜村（*Takatama Namimura*）无师自通提出原理类似的“两圆法”并借此解决复杂的三角函数问题。高球提出的“两圆法”，本质上是通过搭建几何图形与复杂三角函数式之间的桥梁，将三角函数的级数与图形的性质一一对应，借此快速得到相关问题的答案。对“两圆法”的研究，不仅能为解决图形及函数问题提供帮助，更能为我们启迪研究周期函数的思路，揭示更深层的原理——傅里叶变换的本质。

21. (12 分) O,P,Q 为空间中的三个星球，其中 O 为恒星，P 为 O 的行星，Q 为 P 的彗星. P 环绕 O 公转的轨道为一圆轨道，其半径为 4 个单位长度；Q 环绕 P 公转的轨道也为圆轨道，其半径为 1 个单位长度. 这两个轨道在同一平面上，且 P 环绕 O 公转的角速度、Q 环绕 P 公转的角速度大小相同，方向相反. 已知时间 $t=0$ 时，O,P,Q 三点依次排列在同一射线上. 现以 O 为原点，该射线方向为 x 轴正方向，垂直于该射线方向为 y 轴正方向，建立平面直角坐标系.

(1) 求彗星 Q 运动轨迹的方程；

(2) 为了便于观测彗星 Q 的运动，计划发射一个环绕 O 作半径为 r 的圆周运动的观测器，要求该观测器始终位于彗星 Q 轨道的外测，且观测 Q 点轨道的视角（即过该探测器所在位置的作彗星 Q 轨迹的两切线的夹角）不能小于 $90°$，求 r 的取值范围.

22. (12 分) 已知函数 $f(x)=f'(1)x^2+f'(1)x-2e^x$.

(1) 求 $f(x)$.

(2) 令 $g(x)=f(x)-e^x\ln x$，求证：$g\left(\sqrt{\dfrac{e+4}{4e}}-\dfrac{1}{2}\right)>0$.