

2023 珏德·润材 51 人联考卷

数学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必把自己的姓名、考生号写等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 遁地摩天轮是衡朝著名建筑师格鲁·布拉德 (Glue Brother) 的杰作, 其可运行至地面下方, 使游客感受从地底升起的奇妙感受. 已知该摩天轮的中心位于地面上方 20 m 处, 旋转半径为 50 m, 摩天轮转一周的用时为 20 min, 设初始位置为摩天轮正上方, 则摩天轮货箱高度 y (m) 关于运动时间 t (min) 的表达式可能为
 - A. $y = 50 \cos \frac{\pi t}{20} + 20$
 - B. $y = 20 \cos \frac{\pi t}{20} + 50$
 - C. $y = 50 \cos \frac{\pi t}{10} + 20$
 - D. $y = 20 \cos \frac{\pi t}{10} + 50$
2. Digital 的成绩向来为人称道, 而其体育成绩也是首屈一指的: 在他带领之下, 13 班的篮球队常年称霸领奖台. 已知领奖台的形状为正四棱台, 其上、下底面的边长分别为 2、4, 体积为 $28\sqrt{2}$, 则其外接球的表面积为
 - A. 8π
 - B. 32π
 - C. 40π
 - D. 72π

3. 1951 年，生物学家张明觉发现精子获能现象，从此试管婴儿的研究踏入了正轨；数十年后，生物化学家张文珏继承先辈的志向，在生物化学领域做出了卓著贡献。他在观测生物的某一指标时，发现该指标 ϕ 关于时间 t 的关系式大致符合 $\phi = c(t - \lambda)e^{-t}$ 的关系，其对应的观测图象如下。则 λ 的值约为

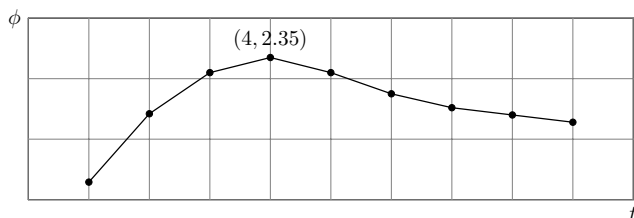


图 1: 第 3 题观测数据

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
4. 《论语·侍坐》中提到孔子与弟子子路、曾皙、冉有、公西华的逐一对话；数千年后，班主任 Jimmy 常请学生吃面，体现了中华优秀教育文化的传承。假设某日 Jimmy 要请包括高中英在内的 8 名高智能学生中的 4 名吃面，其中高中英因被要求奏乐，若选中则只能放在最后一位，则吃面顺序安排的可能情况总数为
- A. 1680 B. 1440 C. 1280 D. 1050
5. Remain 是人型自走计算器，善于解决估算问题。例如本题：设 $a = e^2$, $b = 2^e$, $c = 6e - 8$ ，则 a, b, c 的大小关系为
- A. $c < a < b$ B. $a < b < c$
 C. $b < a < c$ D. $a < c < b$
6. 小国和小潇在 Minecraft 中进行箭术决斗，两人用无限弓互相射击，局面一时十分混乱。小国以自己为坐标原点研究箭矢，发现箭矢的运动轨迹为抛物线 $C: x^2 = -2py$ ($p > 0$)，其焦点为 F ，过 F 的直线交 C 于 A, B 。若 $|FA| = 2|FB| = 6$ ，则 C 的焦点为
- A. $(0, -1)$ B. $(0, -2)$ C. $(0, -3)$ D. $(0, -4)$

7. 阿颂是衡朝著名化学家. 某日, 阿颂进入实验室, 使用有机溶剂 CCl_4 进行卤素 I_2 溶液的萃取实验. 已知用 CCl_4 从水溶液中萃取 I_2 时, I_2 在 CCl_4 溶液中的浓度 (浓度为溶液中该物质的物质的量与溶剂体积的比值) 恒为水中的 85 倍. 现阿颂将一定体积的 I_2 溶液置于烧杯, 将体积相同的 CCl_4 溶液平均分为 k 份, 分 k 次加入烧杯中萃取 I_2 , 每次萃取完后立即将烧杯中的 CCl_4 溶液分液取出, 以此增大总萃取量. 若要使萃取完后水溶液中的 I_2 浓度不超过萃取前的 1×10^{-10} 倍, 则 k 至少为 (注: 参考数据见表)

n	9	10	11	12
$\lg n$	0.9542	1	1.0413	1.0791
$\lg(n + 85)$	1.9731	1.9777	1.9822	1.9867

图 2: 第 7 题参考数据

- A. 9 B. 10 C. 11 D. 12
8. 志泉施工队在施工时, 施工用铅垂重球 (下称为 “沉球”, 球心为 O) 由于意外砸到地上, 砸出了一个坑. 为确定坑的深度, 工作人员在空中吊起另一个球 (称为 “高球”, 球心为 O'), 使得两球的连心线竖直. 小尖站在距离两球连心线距离为 a 处的点 A , 测得 $\angle OAO' = 120^\circ$; 再用工具升至 A 点正上方 $\sqrt{2}a$ 处的点 A' , 测得 $\angle OA'O' = 90^\circ$, 则高球与沉球的连心线长 $OO' =$
- A. $\sqrt{6}a$ B. $2\sqrt{3}a$ C. $4a$ D. $2\sqrt{6}a$

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多个选项是正确的. 全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 错选或不选不得分.

9. 海天、Remain、阿颂经常根据考试成绩互相请吃饭. 某次考后, 阿颂说: “我要请吃饭”; 海天说: “阿颂要请吃饭”; Remain 说: “我不用请吃饭”. Luostar 看了他们的考试成绩并听了他们上述的对话后说: “你们之中有且仅有一个人要请吃饭, 有且仅有一个人说对了”. 则下列说法正确的是

- A. Remain 要请吃饭 B. 海天要请吃饭
C. 阿颂说对了 D. 海天说对了

10. 已知 $\triangle ABC$ 的重心为 O , $OA = 2OB = 2$, 记 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \vec{c} = \overrightarrow{OC}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ 的值可能为

- A. -8 B. -6 C. -4 D. -2

11. 三棱锥 $A - BCD$ 中, $AB = 2$, 平面 $ABD \perp$ 平面 BCD , $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 都为等边三角形, P, Q 为 AB, CD 上的动点, 记 PQ 与平面 BCD 、平面 ABD 的夹角分别为 α, β , 该三棱锥外接球的表面积为 S , 二面角 $B - AC - D$ 的平面角为 θ , 则

- A. $\tan \alpha \leq 2$ B. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
C. $S = \frac{20\pi}{3}$ D. $\cos \theta = \frac{1}{3}$

12. 对函数 $f(x) = \frac{bx^2 - 4x + b}{(a+1)x^2 + (a-1)}$, 记数对的集合 $U = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, |a| \leq 4, |b| \leq 4\}$, $A = \{(a, b) \in U \mid f(x) \text{ 无最小值}\}$, $B = \{(a, b) \in U \mid f(x) \leq 0\}$, 并记事件 $E : (a, b) \in U$, $F : (a, b) \in A$, $G : (a, b) \in B$, $H : (a, b) \in A \cap B$, $I : (a, b) \in A \cup B$, 则下列说法正确的是

- A. $P(F \mid E) = \frac{1}{3}$ B. $P(G \mid E) = \frac{8}{27}$
C. $P(H \mid E) = \frac{10}{81}$ D. $P(I \mid E) = \frac{37}{81}$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 金钩热爱刷题，且刷法多变，令人炫目. 经过研究发现，金钩在上一节课上刷的题对下一节课上刷的题有影响，情况如下表所示. 若已知本节课刷的题为数学，则上节课刷的题为物理的概率为 ▲ .

本节课 \ 上节课	数学	物理	化学
数学	0.2	0.4	0.4
物理	0.6	0.2	0.2
化学	0.4	0.3	0.3

图 3: 第 13 题金钩刷题概率分布

14. 在数学小组“北约”的一次会议上，珏·尼格·卷签的复数难题吸引了大家的目光，激起了大家对复数动态问题的兴趣. 已知复数 z_1 与 z_2 满足: z_1 与 z_2 的实部均为正实数, 且 z_1^2 与 z_2^2 的实部均为 2. 则 $|z_1 + 2| + |z_2 + 2| - |z_1 - z_2|$ 的最小值为 ▲ .
15. 作为珠海一中的信息竞赛之光，万哥常常研究各类数据结构，常见的“二叉树”更是不在话下. 对数列 $\{a_n\}$ ，可用如下方式将其排成二叉树结构：在一张白纸上写下 a_1 ，随后在该数的左下与右下分别写下 a_2 与 a_3 ，再在 a_2 的左下与右下分别写下 a_4 与 a_5 ，在 a_3 的左下与右下分别写下 a_6 与 a_7 ，依此类推. 由此得到的二叉树中， a_1 称为第一层， a_2 与 a_3 所在行称为第二层， a_4 至 a_7 所在行称为第三层，依此类推. 现将数列 $\{a_n\}$: $a_1 = 71$, $a_n = \begin{cases} a_{\frac{n}{2}} + 31, & \text{若 } n \text{ 为偶数;} \\ a_{\frac{n-1}{2}} + 40, & \text{若 } n \text{ 为奇数.} \end{cases}$ 排成二叉树结构，记 b_m 为前 m 层中所有数之和，则 b_m 的通项公式为 ▲ ；记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，任写出两个使 S_n 为完全平方数的两个 n 值: ▲ . (第一空 2 分，第二空 3 分，其中第一个 n 值 1 分，第二个 n 值 2 分)
16. “珏玉标志”是 13 班的精神图腾，如图所示. 其中横线与竖线相交于 9 个交点，算上横线的 6 个端点，共 15 个顶点. 现用 4 种颜色给这 15 个顶点上色，使得相邻（有短边相连）的两顶点不同色，则总染色方案数为 ▲ .

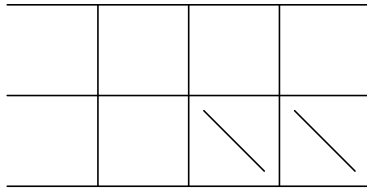


图 4: 第 16 题珏玉标志

四、解答题：本大题共 6 小题，第 17 小题 10 分，其余每题各 12 分，共 70 分。

17. (10 分) 锐角三角形 ABC 中， $a \cos C = c(1 - \cos A)$.

(1) 求 B 的取值范围；

(2) 若 $\triangle ABC$ 的周长为 4，求 \overrightarrow{AB} 在 \overrightarrow{AC} 上的投影向量长度的最大值.

18. (12 分) 如图，三棱锥 $A-BCD$ 中， $AB \perp CD$ ，平面 $ABD \perp$ 平面 BCD ， M, N 分别为 BC, AD 中点， $MN \perp BC$ ， $BD > BC$.

(1) 求证：平面 $ABC \perp$ 平面 ACD ；

(2) 若 $BC = CD = \sqrt{2}AB = 2\sqrt{2}$ ，求平面 AMN 与平面 BMN 夹角的余弦值.

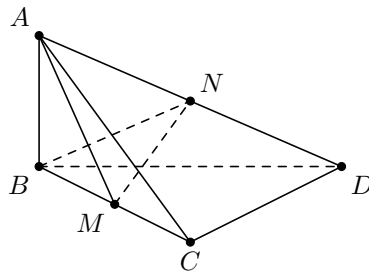


图 5: 第 18 题图

19. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 8}{2a_n + 2}$, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 记 $S_0 = 0$.

(1) 令 $b_n = \ln \frac{a_n - 2}{a_n + 4}$, 求 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数, $c_n = \frac{2^n [S_{n-1}]}{[S_n][S_{n+1}]}$, 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

阅读下列材料, 完成第 20 题。

好的诛题, 可以帮我们更好地骗分和做题, 可以触动选项、启迪智慧; 好的诛题, 可以改变一个人的命运, 可以展现一个民族的形象……诛题是有力量的。

20. (12 分) 在不会做选择题时, 诛题是一种行之有效的办法, 用此法, 平行班也能超越尖尖班.

(1) 小明是一名学生, 他的诛题方法比较平庸. 其方法是: 遇到会的题, 就做; 遇到不会的题, 就诛 (四个选项猜一个). 已知某次考试的单选题中, 小明会做 5 个, 不会做 3 个, 每道题 5 分, 求小明得分的分布列及期望.

(2) 多选题是一款由国家教育考试院开发的开放试卷游戏, 每道多选题的正确选项数 ξ 服从两点分布: $P(\xi = 2) = p$, $P(\xi = 3) = 1 - p$. 在该种题中, 选全对得 5 分, 部分选对得 2 分, 选错或不选得 0 分. 对此, 小明有两种诛题方案:

方案一: 选一个走人 (纯随机);

方案二: 算一个选项, 若它错, 则从剩下的选项中随机选一个; 若它正确, 则选它, 并在剩下的选项中随机再选一个.

请从得分期望的角度讨论分析: 对给定的 p , 哪种方案更优?

阅读下列材料，完成第 21 题。

数千年前，古希腊数学家使用本轮—均轮模型，描述世间万物运行的轨道；数千年后，被誉为“数千年一遇的数学天才”的衡朝数学家高球澜村（*Takatama Namimura*）无师自通提出原理类似的“两圆法”并借此解决复杂的三角函数问题。高球提出的“两圆法”，本质上是通过搭建几何图形与复杂三角函数式之间的桥梁，将三角函数的级数与图形的性质一一对应，借此快速得到相关问题的答案。对“两圆法”的研究，不仅能为解决图形及函数问题提供帮助，更能为我们启迪研究周期函数的思路，揭示更深层的原理——傅里叶变换的本质。

21. (12 分) O, P, Q 为空间中的三个星球，其中 O 为恒星， P 为 O 的行星， Q 为 P 的彗星。 P 环绕 O 公转的轨道为一圆轨道，其半径为 4 个单位长度； Q 环绕 P 公转的轨道也为圆轨道，其半径为 1 个单位长度。这两个轨道在同一平面上，且 P 环绕 O 公转的角速度、 Q 环绕 P 公转的角速度大小相同，方向相反。已知时间 $t = 0$ 时， O, P, Q 三点依次排列在同一射线上。现以 O 为原点，该射线方向为 x 轴正方向，垂直于该射线方向为 y 轴正方向，建立平面直角坐标系。

(1) 求彗星 Q 运动轨迹的方程；

(2) 为了便于观测彗星 Q 的运动，计划发射一个环绕 O 作半径为 r 的圆周运动的观测器，要求该观测器始终位于彗星 Q 轨道的外侧，且观测 Q 点轨道的视角（即过该探测器所在位置作与彗星 Q 轨迹相切的两条射线的夹角）不能小于 90° ，求 r 的取值范围。

22. (12 分) 已知函数 $f(x) = f'(1)x^2 + f'(1)x - 2e^x$ 。

(1) 求 $f(x)$ 。

(2) 令 $g(x) = f(x) - e^x \ln x$ ，求证： $g\left(\sqrt{\frac{e+4}{4e}} - \frac{1}{2}\right) > 0$ 。

试卷结束。

参考答案、原卷版、解析版可在 <https://frigus27.xyz/class13-math> 获取。