

Gnarley Trees

Katka Kotrlová

Pavol Lukča

Viktor Tomkovič

Tatiana Tóthová

Školiteľ: Jakub Kováč*

Katedra informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

Abstrakt: V tomto článku prezentujeme našu prácu na projekte Gnarley Trees, ktorý začal Jakub Kováč ako svoju bakalársku prácu. Gnarley Trees je projekt, ktorý má dve časti. Prvá časť sa zaoberá kompiláciou dátových štruktúr, ktoré majú stromovú štruktúru, ich popisom a popisom ich hlavných výhod a nevýhod oproti iným dátovým štruktúram. Druhá časť sa zaoberá ich vizualizáciou a vizualizáciou vybraných algoritmov na týchto štruktúrach.

Dostupnosť: Softvér je voľne dostupný na stránke <http://people.ksp.sk/~kuko/gnarley-trees>.

Kľúčové slová: Gnarley Trees, vizualizácia, algoritmy a dátové štruktúry

1 Úvod

Ako ľudia so záujmom o dátové štruktúry sme sa rozhodli pomôcť vybudovať dobrý softvér na vizualizáciu algoritmov a dátových štruktúr a obohatiť kompiláciu Jakuba Kováča (Kováč, 2007) o ďalšie dátové štruktúry. Vizualizujeme rôznorodé dátové štruktúry. Z binárnych vyvažovaných stromov to sú *finger tree* a *reversal tree*, z hálď to sú *d-nárna halda*, *l'avicová halda*, *skew halda* a *párovacia halda*. Taktiež vizualizujeme aj *problém disjunktých množín (union-find problém)* a *písmenkový strom (trie)*.

Okrem vizualizácie prerábame softvér, doplnili sme ho o históriu krokov a operácií, jednoduchšie ovládanie a veľa iných vecí, zlepšujúcich celkový dojem. Softvér je celý v slovenčine a angličtine a je implementovaný v jazyku Java.

1.1 Vizualizácia

Dátové štruktúry a algoritmy tvoria základnú, prvotnú časť výučby informatiky. Vizualizácia algoritmov a dátových štruktúr je grafické znázornenie, ktoré abstrahuje spôsob ako algoritmus a dátové štruktúry pracujú od ich vnútornej reprezentácie a umiestnení v pamäti. Je teda vyhľadávaná a všeobecne rozšírená pomôcka pri výučbe. Výsledky výskumov ohľadne

jej efektívnosti sa líšia, od stavu „nezaznamenali sme výrazné zlepšenie“ po „je viditeľné zlepšenie“ (Shaffer et al., 2010).

Rozmach vizualizačných algoritmov priniesla najmä Java a jej fungovanie bez viazanosti na konkrétny operačný systém. Kvalita vizualizácií sa líši a keďže ide o ľahko naprogramovateľné programy, je ich veľa a sú pomerne nekvalitné. V takomto množstve je ťažké nájsť kvalitné vizualizácie. Zbieraním a analyzovaním kvality sa venuje skupina AlgoViz, ktorá už veľa rokov funguje na portále <http://algoviz.org/>.

Zaujímavé je pozorovanie, že určovanie si vlastného tempa pri vizualizácii je veľká pomôcka. Naopak, ukazovanie pseudokódu alebo nemožnosť určenia si vlastného tempa (napríklad animácia bez možnosti pozastavenia), takmer žiadne zlepšenie nepri-
náša (Shaffer et al., 2010; Saraiya et al., 2004).

Motivácia

Z vyššie uvedeného je jasné, že našou snahou je vytvoriť kvalitnú kompiláciu a softvér, ktorý bude nezávislý od operačného systému, bude vyhovovať ako pomôcka pri výučbe ako aj pri samoštúdiu a bude voľne prístupný a náležite propagovaný. Toto sú hlavné body, ktoré nespĺňa žiaden slovenský a len veľmi málo svetových vizualizačných softvérov. Našou hlavnou snahou je teda ponúknuť plnohodnotné prostredie pri učení.

2 Rozšírenie predošlej práce

Projekt Gnarley Trees sme rozšírili nielen o vizualizácie ďalších dátových štruktúr, ale pribudli aj softvérové (vizualizačné) vylepšenia.

toto treba kompletne vymyslieť a napísať a potom tam dakde pichnúť:

Tesnejšie vykresľovanie grafov. V pôvodnej verzii programu sa stromy vykresľovali tak, že vertikálna súradnica predstavovala hĺbku v strome a horizontálna poradie vrcholu v *inorderovom* prechode stromu. Toto je ale spôsob, ktorý nešetrí priestor a

*algviz@googlegroups.com

pri štruktúrach ako písmenkový strom by výsledné stromy vyzerali škaredo. Preto sme sa rozhodli pre stromy implementovať alternatívny spôsob rozloženia, ktorý vymyslel ? a pre n -árne stromy rozšíril ?. Tieto rozloženia vykresľujú vrcholy stromov čo najtesnejšie, pričom dodržia tieto pravidlá:

- vrcholy v rovnakej hĺbke sú vykreslené na jednej priamke a priamky určujúce jednotlivé úrovne sú rovnobežné;
- poradie synov je zachované;
- otec leží v strede nad najľavejším a najpravejším synom;
- izomorfné podstromy sa vykreslia identicky až na presunutie;
- ak vo všetkých vrcholoch vymeníme poradie všetkých synov, výsledný strom sa vykreslí zrkadlovo.

2.1 História krokov

Každá vizualizovaná operácia (insert/delete/...; ďalej len vizualizácia) na dátovej štruktúre pozostáva z niekoľkých krokov. Jednou z noviniek v projekte je možnosť vrátiť sa pri prehliadaní operácií o niekoľko krokov späť (história krokov), resp. vrátiť späť celé operácie (história operácií).

Niekedy sa stáva, že nedočkavý užívateľ rýchlo prekliká cez celú vizualizáciu a pritom si nestihne uvedomiť, aké zmeny sa vykonali na danej dátovej štruktúre. Inokedy je operácia taká rozsiahla, že niektoré dôležité zmeny si nevšimne. Vtedy by bolo užitočné pozrieť si vizualizáciu ešte raz (alebo niekoľkokrát). Tento problém rieši história krokov. Užívateľ má možnosť vrátiť sa späť o jeden krok (tlačidlo „Späť“, „Previous“) alebo preskočiť na ľubovoľný krok po kliknutí na zodpovedajúci komentár.

História krokov a operácií je atomická. Krok/operácia sa vykoná/vráti celý(-á) alebo vôbec, pričom stav dátovej štruktúry korešponduje s pozíciou v histórii. To umožňuje po vrátení celej operácie vykonať inú operáciu. Táto vlastnosť je užitočná najmä v prípade vykonania operácie (prípadne zmazania celej dátovej štruktúry) omylom.

2.2 Ďalšie rozšírenia

Patrí k nim možnosť priblíženia/vzdialenia a presunu vykreslenej dátovej štruktúry v rámci vizualizačnej

plochy. Užívateľ túto funkcionality využije najmä pri dátových štruktúrach s veľkým počtom prvkov, kedy je obmedzený veľkosťou plochy. Ďalším rozšírením je výpis celej postupnosti komentárov vizualizovanej operácie, ktorý prináša spolu s históriou krokov značné zjednodušenie výučby. Užívateľ si môže konkrétne vizualizáciu pozrieť toľko krát, koľko potrebuje na jej správne pochopenie. Navyše vidí, aké kroky budú nasledovať/predchádzať a podľa toho si môže určiť vlastné tempo prezerania vizualizácie. Ak si myslí, že daným krokom už porozumel, môže ich preskočiť.

3 Vyvážené stromy

uz boli, pribudli

3.1 Finger tree

3.2 Reversal tree

Táňa, čiň sa!

4 Haldy

4.1 d -nárna halda

4.2 Ľavicová halda

4.3 Skew halda

4.4 Párovacia halda

Katka, zase spíš?! [citácie]

5 Union-find

Popis. V niektorých aplikáciach potrebujeme udržiavať prvky rozdelené do skupín (disjunktných množín), pričom skupiny sa môžu zlučovať a my potrebujeme pre daný prvok efektívne zistiť, do ktorej skupiny patrí. Predpokladáme, že každá množina S je jednoznačne určená jedným svojim zástupcom $x \in S$ a potrebujeme implementovať nasledovné tri operácie:

- $make_set(x)$ – vytvorí novú množinu $S = \{x\}$ s jedným prvkom;
- $union(x, y)$ – ak x, y sú zástupcovia množín S a T , $union$ vytvorí novú množinu $S \cup T$, pričom S aj T zmaže. Zástupcom novej množiny $S \cup T$ je x alebo y .

- $find(x)$ – nájde zástupcu množiny, v ktorej sa prvok x nachádza.

V takejto situácii je vhodná štruktúra *union-find*. Táto dátová štruktúra sa reprezentuje ako les, kde každý strom zodpovedá jednej množine a korene stromov sú zástupcovia množín. Pri implementácii si stačí pre každý prvok x udržiavať smerník $p(x)$ na jeho otca (pre koreň je $p(x) = \text{NULL}$).

Operácia $make_set(x)$ teda vytvorí nový prvok x a nastaví $p(x) = \text{NULL}$.

Operáciu $find(x)$ vykonáme tak, že budeme sledovať cestu po smerníkoch, až kým nenájdeme zástupcu.

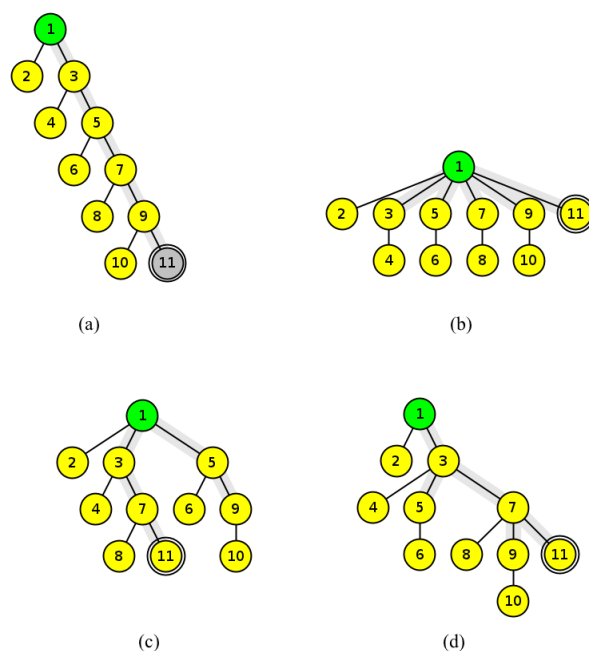
Operáciu $union(x, y)$ ide najjednoduchšie vykonať tak, že presmerujeme smerník $p(y)$ na prvok x , teda $p(y) = x$. Môžeme ľahko pozorovať, že takýto *naivný* spôsob je neefektívny, lebo nám operácia $find(x)$ v najhoršom prípade, na n prvkoch, trvá $O(n)$ krokov.

Použitie. Medzi najznámejšie problémy, ktoré sa riešia pomocou union-find patria Kruskalov algoritmus na nájdenie najlacnejšej kostry (Kruskal, 1956) a unifikácia (Knight, 1989). Veľmi priamočiare použitie je na zodpovedanie otázky „Koľko je komponentov súvislosti?“ alebo „Sú dva prvky v rovnakej množine?“ („Sú dva objekty navzájom prepojené?“), ak máme dovolené za behu pridávať hrany (spájať množiny objektov). Niektoré ďalšie grafové problémy popísal napr. Tarjan (1979).

Existujú dva prístupy ako zlepšiť operácie a tým aj zrýchliť ich vykonanie. Sú to: heuristika *spájanie podľa ranku* a rôzne heuristiky na *kompresiu cesty*.

Heuristika na spájanie. Prvá heuristika pridáva ku algoritmom hodnotu $rank(x)$, ktorá bude určovať najväčšiu možnú hĺbku podstromu zakorenenú vrcholom x . V tom prípade pri operácii $make_set(x)$ zadefinujeme $rank(x) = 0$. Pri operácii $union(x, y)$ vždy porovnáme $rank(x)$ a $rank(y)$, aby sme zistili, ktorý zástupca predstavuje menší strom. Smerník tohto zástupcu potom napojíme na zástupcu s vyšším rankom. Zástupca novej množiny bude ten s vyšším rankom. Ak sú oba ranky rovnaké, vyberieme ľubovoľného zo zástupcov x a y , jeho rank zvýšime o jeden a smerník ostatného zástupcu bude ukazovať na tohto zástupcu. Zástupcom novej množiny bude vybraný zástupca.

Heuristiky na kompresiu cesty. Druhou heuristikou je kompresia cesty. Algoritmov na efektívnu



Obr. 1: Kompresia cesty z vrcholu 11 do koreňa. Cesta je vyznačená šedou. (a) Pred vykonaním kompresie. Pri úplnej kompresii (b) sa všetky vrcholy napoja na zástupcu. Pri delení cesty (c) a pólení cesty (d) sa cesta skráti približne na polovicu.

kompresiu cesty je veľa (Tarjan and van Leeuwen, 1984). Tu popíšeme tie najefektívnejšie. Prvou z nich je *úplná kompresia* (Hopcroft and Ullman, 1973). Pri vykonávaní operácie $find(x)$, po tom, ako nájdeme zástupcu množiny obsahujúcej prvok x , smerníky prvkov navštívených po ceste (vrátane x) presmerujeme na zástupcu množiny. Toto síce spomalí prvé vykonávanie, ale výrazne zrýchli ďalšie hľadania. Druhou heuristikou je *delenie cesty* (Leeuwen and Weide, 1977). Pri vykonávaní operácie $find(x)$ pripojíme každý vrchol¹ v ceste od vrcholu x po koreň stromu na otca jeho otca. Treťou heuristikou je *pólenie cesty* (Leeuwen and Weide, 1977). Pri vykonávaní operácie $find(x)$ pripojíme každý druhý vrchol² v ceste od vrcholu x po koreň stromu na otca jeho otca.

Časová zložitosť union-findu závisí od toho, koľko prvkov je v množinách a koľko je operácií celkovo vykonaných operácií. Všetky uvedené spôsoby ako vykonať operáciu $find(x)$ sa dajú použiť s oboma realizáciami operácie $union(x, y)$. Počet prvkov označme n

¹Okrem koreňa a synov koreňa, keďže tie deda a otca resp. deda nemajú.

²Okrem koreňa a synov koreňa, keďže tie deda a otca resp. deda nemajú.

a počet operácií m . V praxi je zvyčajne počet operácií oveľa väčší ako počet prvkov. Pri tomto predpoklade ($m \geq n$) je pri použití spájania podľa ranku časová zložitosť pre algoritmus bez kompresie $\Theta(m \log n)$ a pre všetky tri uvedené typy kompresíí $\Theta(m \alpha(m, n))$ (Tarjan and van Leeuwen, 1984).

Vizualizácia. Union-find sme vizualizovali ako les. Pre názorné oddelenie množín sme si zvolili pravidlo, ktoré zakazovalo vykresliť vrchol napravo od najľavejšieho vrcholu a naľavo od napravejšieho vrcholu inej množiny. Jednotlivé množiny sme už vykreslovali tesným Walkerovým algoritmom (?). Vizualizácie poskytuje všetky vyššie spomínané heuristiky a aj tlačidlo na vykonanie viacerých náhodných spojení naraz. Toto je užitočné, keď chce užívateľ vidieť, ako dátová štruktúra vyzerá, po vykonaní veľa operácií.

6 Písmenkový strom

Písmenkový strom reprezentuje množinu slov. Oproti binárnym vyhľadávacím stromom je hlavný rozdiel v tom, že kľúče nie sú uložené vo vrchoch, ale samotná poloha v strome určuje kľúč (slovo).

Popis. Písmenkový strom je *zakorenený strom*, v ktorom každá hrana obsahuje práve jeden znak z abecedy alebo *ukončovací znak*. Teda, každá cesta z koreňa do listu so znakmi $w_1, w_2, \dots, w_n, \$$ prirodzene zodpovedá slovu $w = w_1 w_2 \dots w_n$. *Ukončovací znak* je ľubovoľný, dopredu dohodnutý symbol, ktorý sa v abecede nenachádza (napr. \$).

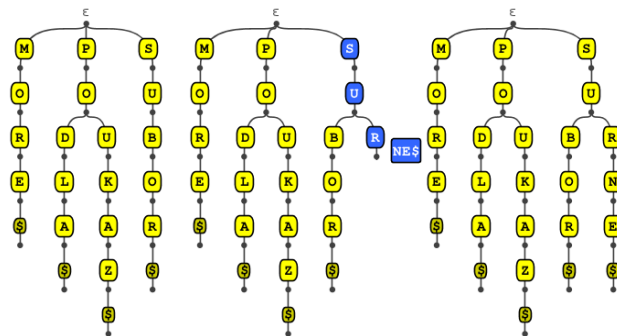
Písmenkový strom je *asociatívne pole (slovník)*, čiže poskytuje tieto tri operácie:

- $insert(w)$ – pridá do stromu slovo w ;
- $find(w)$ – zistí, či sa v strome slovo w nachádza;
- $delete(w)$ – odstráni zo stromu slovo w .

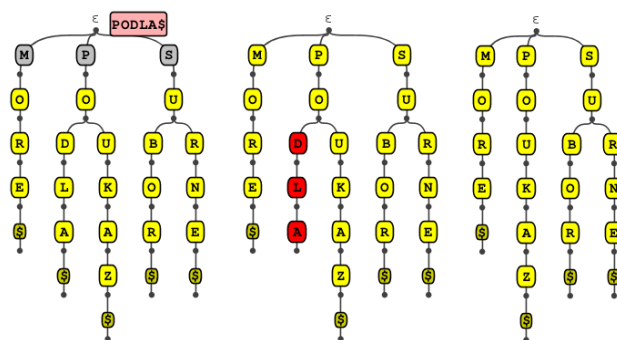
Všetky operácie začínajú v koreni a ku slovu pridávajú ukončovací znak, teda pracujú s reťazcom $w\$$.

Operácia $insert(w)$ vloží do stromu vstupný reťazec tak, že z reťazca číta znaky a prechádza po príslušných hranách. Ak hrana s daným symbolom neexistuje, pridá ju (pozri obr. 2).

Operácia $find(w)$ sa spustí z koreňa podľa postupnosti znakov. Ak hrana, po ktorej sa má spustiť neexistuje, dané slovo sa v strome nenachádza. Ak prečíta



Obr. 2: Vloženie slova „SURNE“. Začiatok slova „SU“ sa v strome nachádza, ešte treba pripojiť hrany so znakmi R, N, E a \$.



Obr. 3: Odstránenie slova „PODLA“. Po odstránení \$ nám v strome ostane nepotrebná prípona „DLA“ (mŕtva vetva), ktorá je vyznačená červenou.

celý vstupný reťazec, dané slovo sa v strome nachádza.

Operácia $delete(w)$ najprv pomocou operácie $find(w)$ zistí umiestnenie slova. Ak sa slovo v strome nachádza, algoritmus odstráni hrana s ukončovacím znakom a vrchol, ktorý bol na nej zavesený. V tomto štádiu sa nám môže stať, že v strome ostane *mŕtva vetva* – nie je ukončená ukončovacím znakom. Pre fungovanie stromu to nevedí, všetky operácie by prebiehali správne, ale takto štruktúra zaberá zbytočne veľa miesta. Preto je dobré túto mŕtvu vetvu odstrániť (pozri obr. 3).

Všetky tri operácie majú časovú zložitosť $O(|w|)$, kde $|w|$ je dĺžka slova.

Použitie. Prvýkrát navrhol písmenkový strom Fredkin (1960), ktorý používal názov *trie memory*³, keďže išlo o spôsob udržiavania dát v pamäti.

O niečo neskôr Knuth (1973) uviedol vo svojej knihe ako príklad na písmenkový strom vreckový

³Z anglického *retrieval* – získanie.

slovník. Knuth (1973) však ukázal len komprimovanie koncov vetiev. Písmenkový strom, v ktorom každý vrchol, ktorého otec má len jedného syna je zlúčený s otcom⁴, vymyslel Morrison (1968) a zaviedol pre ňho pojem *PATRICIA* (*radix tree*, resp. *radix trie*). Využíva sa napríklad v *routovacích tabuľkách* (Sklower, 1991).

Pôvodný návrh (Fredkin, 1960) ako uložiť trie do pamäte zaberá príliš veľa nevyužitého priestoru. Liang (1983) navrhol ako efektívne zmenšiť pamäťový priestor potrebný na uloženie trie. Nazval ho *packed trie* a navrhol spôsob, akým ho dobre použiť na slabikovanie slov. Systém bol následne použitý v programe \TeX .

Písmenkové stromy sa podobajú na *konečné automaty*. Vznikli rôzne modifikácie stromov na automaty, ktorých hlavnou výhodou je, že v komprimovanej podobe spájajú nielen predpony, ale aj prípony slov a teda v slovách ľudských jazykov výrazne znižujú pamäťový priestor potrebný na uchovanie dátovej štruktúry. Vďaka tomu sa využívajú na jazykovú korekciu, automatické dopĺňanie slov a podobne (Appel and Jacobson, 1988; Lucchesi et al., 1992).

Priamočiare je použitie písmenkového stromu na utriedenie poľa slov. Všetky slová sa pridávajú do stromu a potom sa spraví *preorderový prechod* stromu. Túto myšlienku spracovali Sinha and Zobel (2004) a veľmi výrazne zrýchlil triedenie dlhých zoznamov slov. Neskôr tento algoritmus vylepšili Sinha et al. (2006). Kvôli tomu, ako algoritmus pracuje, sa nazýva *bursts sort*.

Špeciálnym použitím písmenkového stromu je vytvorenie stromu zo všetkých prípon slova. Táto dátová štruktúra sa nazýva *suffixový strom* a dá sa modifikovať na udržiavanie viacerých slov. Tieto štruktúry majú veľmi veľa praktických využití (Gusfield, 1997).

Vizualizácia. Pri vizualizácii písmenkového stromu sme použili Walkerov algoritmus pre úsporné rozloženie vrcholov v strome. (?) Keď má vrchol viacej synov a hrany kreslíme priamo, tak vzniká nedostatok priestoru pre umiestnenie znakov na hrany. Preto sme sa rozhodli kresliť hrany zakrivene, podľa Bézierovej krivky určenej štyrmi bodmi. Vo vizualizácii sa dajú vložiť náhodné slová podľa momentálne nastaveného jazyka. Taktiež sa automaticky odstraňuje diakritika a interpunkcia, takže sa dá naraz vložiť súvislý text.

⁴Na hranách teda nie sú znaky, ale slová.

7 Záver

work in progress; čo sme spravili - už je v uvode?, preco sme lepsi - sme vobec lepsi (ako galles)?, čo este chceme/treba spraviť - maybe DONE, čo je rozrobene - v podstate to, čo chceme spraviť - same as previous?

V ďalšej práci sa budeme zaoberať implementovaním ďalších vizualizácií dátových štruktúr (napríklad TODO „tejto, tejto a aj tejto“), doplnením histórie krokov do všetkých dátových štruktúr, ale aj vylepšením GUI, refaktorovaním zdrojového kódu a inými softvérovými vylepšeniami. Naším cieľom je čo najviac zjednodušiť prácu s programom a tak zefektívniť výučbu jednotlivých dátových štruktúr, resp. spraviť ju zábavnejšou.

7.1 Príspevky autorov

Katka Kotrlová obohatila projekt o vizualizácie d-nárnej, ľavicovej, skew a párovacej haldy, Viktor Tomkovič pridal vizualizácie union-findu a písmenkového stromu, Tatiana Tóthová vizualizovala finger tree a Pavol Lukča dorobil históriu krokov a operácií do takmer všetkých slovníkov a venoval sa refaktorovaniu zdrojového kódu. Na príprave tohto textu sa podieľali všetci autori.

Podakovanie

Autori by sa chceli poďakovať školiteľovi za veľa dobrých rád a odborné vedenie pri práci.

Literatúra

- Aho, A. V. and Hopcroft, J. E. (1974). *The Design and Analysis of Computer Algorithms*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 1st edition.
- Appel, A. and Jacobson, G. (1988). The world's fastest scrabble program. *Communications of the ACM*, 31(5):572–578.
- Fredkin, E. (1960). Trie memory. *Commun. ACM*, 3(9):490–499.
- Galil, Z. and Italiano, G. F. (1991). Data structures and algorithms for disjoint set union problems. *ACM Comput. Surv.*, 23(3):319–344.

- Gusfield, D. (1997). *Algorithms on strings, trees, and sequences: computer science and computational biology*. Cambridge University Press, New York, NY, USA.
- Hopcroft, J. E. and Ullman, J. D. (1973). Set merging algorithms. *SIAM J. Comput.*, 2(4):294–303.
- Knight, K. (1989). Unification: a multidisciplinary survey. *ACM Comput. Surv.*, 21(1):93–124.
- Knuth, D. E. (1973). *The Art of Computer Programming, Volume III: Sorting and Searching*. Addison-Wesley.
- Kováč, J. (2007). Vyhľadávacie stromy a ich vizualizácia. Bakalárska práca.
- Kruskal, J. B. (1956). On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7(1):48–50.
- Leeuwen, J. and Weide, T. v. d. (1977). Alternative path compression rules. Technical report, University of Utrecht, The Netherlands. An outline of the results were presented at the Fachtagung on Algorithms and Complexity Theory, Oberwolfach, Oct 1977.
- Liang, F. (1983). *Word hyphenation by computer*. PhD thesis, Stanford University, Stanford, CA 94305.
- Lucchesi, C. L., Lucchesi, C. L., and Kowaltowski, T. (1992). Applications of finite automata representing large vocabularies.
- Morrison, D. R. (1968). Patricia – practical algorithm to retrieve information coded in alphanumeric. *J. ACM*, 15(4):514–534.
- Patwary, M., Blair, J., and Manne, F. (2010). Experiments on union-find algorithms for the disjoint-set data structure. *Experimental Algorithms*, pages 411–423.
- Saraiya, P., Shaffer, C. A., McCrickard, D. S., and North, C. (2004). Effective features of algorithm visualizations. In *Proceedings of the 35th SIGCSE technical symposium on Computer science education, SIGCSE '04*, pages 382–386, New York, NY, USA. ACM.
- Shaffer, C. A., Cooper, M. L., Alon, A. J. D., Akbar, M., Stewart, M., Ponce, S., and Edwards, S. H. (2010). Algorithm visualization: The state of the field. *Trans. Comput. Educ.*, 10:9:1–9:22.
- Sinha, R., Ring, D., and Zobel, J. (2006). Cache-efficient string sorting using copying. *J. Exp. Algorithmics*, 11:1.2.
- Sinha, R. and Zobel, J. (2004). Cache-conscious sorting of large sets of strings with dynamic tries. *J. Exp. Algorithmics*, 9.
- Sklower, K. (1991). A tree-based packet routing table for berkeley unix. In *Proceedings of the Winter 1991 USENIX Conference*, pages 93–104.
- Tarjan, R. E. (1979). Applications of path compression on balanced trees. *J. ACM*, 26(4):690–715.
- Tarjan, R. E. and van Leeuwen, J. (1984). Worst-case analysis of set union algorithms. *J. ACM*, 31(2):245–281.
- Yao, A. C. (1985). On the expected performance of path compression algorithms. *SIAM J. Comput.*, 14:129–133.