

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Vizualizácia algoritmov a dátových štruktúr

Bakalárska práca

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Vizualizácia algoritmov a dátových štruktúr

Bakalárska práca

Študijný program: Informatika
Študijný odbor: 2508 Informatika
Školiace pracovisko: Katedra Informatiky FMFI
Vedúci práce: Mgr. Jakub Kováč

Pod'akovanie

Veľká vďaka za to, že mi pomohli patrí môjmu školiteľovi Kubovi Kováčovi a mojim rodičom.

Abstrakt

Táto práca sa zaoberá vizualizáciou dátových štruktúr. Nadväzuje na bakalársku prácu Jakuba Kováča (2007) a rozvíja kompiláciu o ďalšie dátové štruktúry. V prvej časti sú tieto dátové štruktúry, konkrétne union-find, lexikografický strom a sufixový strom, definované a konkrétne algoritmy popísané. V druhej časti sa pojednáva samotná vizualizácia a popisuje sa implementácia. Práca je prehľadom dátových štruktúr s priloženým Java appletom na CD ako pomôckou pri vizualizácii.

Kľúčové slová: vizualizácia, ADŠ, algoritmy a dátové štruktúry, union-find, stringológia, lexikografický strom, trie, sufixový strom.

Abstract

This work is about visualization of algorithms and data structures. Continues the bachelor thesis of Jakub Kováč (2007) and extends the compilation by another data structures. In the first part are the structures, namely union-find, lexicographical tree (trie) and suffix tree, defined and the algorithms described. The second part is a description and a implementation of the software. The work is an overview of data structures with a software CD included.

Keywords: visualization, ADS, algorithms and data structures, union-find, stringology, lexicographical tree, trie, suffix tree.

Obsah

Úvod	1
1 Union-find problém	3
1.1 Použitie	3
1.2 Popis	3
1.3 Heuristika na spájanie	4
1.4 Heuristiky na kompresiu cesty	4
2 Písmenkový strom	6
2.1 Popis	6
2.2 Použitie	7
3 Suffixový strom	9
3.1 Zostrojenie suffixového stromu	9
3.2 Ukkonenov algoritmus	9
3.2.1 Suffixové linky	10
3.2.2 Zníženie nárokov na pamäť	10
3.2.3 Rozširovanie stromu	10
3.2.4 Zhrnutie	11
3.3 Použitie	13
4 Popis softvéru	14
4.1 Analýza	14
4.1.1 Union/Find Algorithm Visualization	14
4.1.2 AlVie	15
4.1.3 Data Structure Visualizations	16
4.1.4 TRAKLA2	17
4.1.5 Ďalšie vizualizácie	18
4.2 Špecifikácia požiadaviek	18
4.2.1 Prostredie	19
4.2.2 Požiadavky	19

4.2.3	Prevádzkové požiadavky	19
4.3	Návrh	19
4.3.1	Technické požiadavky	20
4.3.2	Užívateľské požiadavky	20
4.3.3	Použité technológie	20
4.3.4	Rozhranie aplikácie	20
4.3.5	Prepojenie s predošlým systémom	21
5	Implementácia softvéru	22
5.1	Vizualizácia	22
5.1.1	Union-find	22
5.1.2	Písmenkový strom	23
5.1.3	Sufixový strom	23
5.2	Implementácia tried	23
5.3	Testovanie, prevádzka a údržba	23
	Záver	24
	Literatúra	25

Úvod

Dátové štruktúry a algoritmy tvoria základnú, prvotnú časť výučby informatiky. Vizualizácia algoritmov a dátových štruktúr je grafické znázornenie, ktoré abstrahuje od implementačných detailov a reprezentácie v pamäti. Je teda vhodnou pomôckou pri výučbe i samoštúdiu.

Ukážka nášho softvéru *Gnarley Trees* je na obrázku 1. Tento projekt začal ako bakalárska práca Jakuba Kováča (KOVÁČ, 2007); v tejto práci popisujeme nové dátové štruktúry, ktoré sme vizualizovali a nové funkcie a vylepšenia, ktoré sme doplnili.

Konkrétne ide o *union-find problém*, *písmenkový strom (trie)* a *sufixový strom*.

Okrem vizualizácie softvér prerábame a neustále vylepšujeme. Doplnili sme ho o históriu krokov a operácií, jednoduchšie ovládanie a veľa ďalších funkcií. Softvér je celý v slovenčine aj angličtine a je implementovaný v jazyku JAVA. Dostupný je na stránke <http://people.ksp.sk/~kuko/gnarley-trees> vo forme appletov s jednotlivými dátovými štruktúrami, a tiež vo forme samostatného programu, ktorý obsahuje všetky dátové štruktúry a je určený na používanie offline.

Našou snahou je vytvoriť kvalitný softvér nezávislý od operačného systému, ktorý bude vyhovovať ako pomôcka pri výučbe ako aj pri samoštúdiu a bude voľne prístupný.

Predchádzajúci výskum v oblasti pedagogiky zatiaľ nedokázal úplne preukázať pedagogickú efektívnosť vizualizácií (SHAFFER; COOPER; ALON a spol., 2010), avšak viacero štúdií potvrdilo zvýšený záujem a zapojenosť študentov (NAPS; RÖßLING; ALMSTRUM a spol., 2002; C.D. HUNDHAUSEN; DOUGLAS; STASKO, 2002).

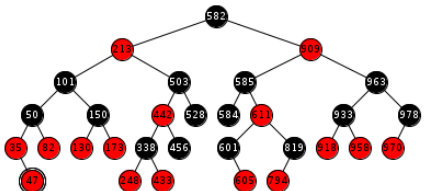
Rozmach vizualizácie algoritmov priniesla najmä JAVA a jej fungovanie bez viazanosti na konkrétny operačný systém. Kvalita iných existujúcich vizualizácií sa líši a keďže ide o ľahko naprogramovateľné programy, je ich veľa a sú pomerne nekvalitné (SHAFFER; COOPER; ALON a spol., 2010). Zbieraním a analyzovaním kvality sa venuje skupina AlgoViz (<http://algoviz.org/>).

Zaujímavé je pozorovanie, že určovanie si vlastného tempa pri vizualizácii je veľká pomôcka. Naopak, ukazovanie pseudokódu alebo nemožnosť určenia si vlastného tempa (napríklad animácia bez možnosti pozastavenia), takmer žiadne zlepšenie neprináša (SHAFFER; COOPER; ALON a spol., 2010; SARAIYA; SHAFFER; MCCRICKARD; NORTH, 2004).

Prácu sme rozdelili na popis jednotlivých dátových štruktúr, ktoré sme vizualizovali a popis samotného softvéru. V kapitolách 1, 2 a 3 je postupne popis *union-find*, *písmenkového stromu* a *sufixového stromu*. V kapitole 4 je popis softvéru a v kapitole 5 je implementácia.

Dátové štruktúry Language

Červeno-čierny strom



Vlož 47

1. Začneme v koreni.
2. Keďže $47 < 582$, vkladáme do ľavého podstromu.
3. Keďže $47 < 213$, vkladáme do ľavého podstromu.
4. Keďže $47 < 101$, vkladáme do ľavého podstromu.
5. Keďže $47 < 50$, vkladáme do ľavého podstromu.
6. Keďže $47 > 35$, vkladáme do pravého podstromu.
7. **Pripad I, červený strýko:**
 Prefarbíme otca a strýka na čierne, starého otca na červeno a pokračujeme starým otcom.
8. Hotovo.

Vlož Hľadať Odstráň Späť Ďalej
☒ Pauzy Zmaž Náhodné ☐ Súvis s 2-3-4 stromami

Size: 30; Height: 6 = 1.20-opt; Ave. depth: 4.27

Obrázok 1: *Softvér Gnarley Trees*. V ovládacom paneli dole môže užívateľ zvoliť operáciu a vstupnú hodnotu a sledovať priebeh algoritmu (momentálne vkladanie prvku 47). Užívateľ postupuje vlastným tempom pomocou tlačidiel „Ďalej“ alebo „Späť“. Vpravo je popis vykonávaných krokov; kliknutím na konkrétny krok v histórii sa môže užívateľ vrátiť.

Kapitola 1

Union-find problém

V niektorých aplikáciach potrebujeme udržiavať prvky rozdelené do skupín (disjunktných množín), pričom skupiny sa môžu zlučovať a my potrebujeme pre daný prvok efektívne zistiť, do ktorej skupiny patrí. Predpokladáme, že každá množina S je jednoznačne určená jedným svojim zástupcom $x \in S$ a potrebujeme implementovať nasledovné tri operácie:

- $makeSet(x)$ – vytvorí novú množinu $S = \{x\}$ s jedným prvkom;
- $union(x, y)$ – ak x, y sú zástupcovia množín S a T , $union$ vytvorí novú množinu $S \cup T$, pričom S aj T zmaže. Zástupcom novej množiny $S \cup T$ je x alebo y .
- $find(x)$ – nájde zástupcu množiny, v ktorej sa prvok x nachádza.

1.1 Použitie

Union-find sa dá použiť na reprezentáciu neorientovaného grafu, do ktorého pridávame hrany a odpovedáme na otázku: „Sú dané dva vrcholy spojené nejakou cestou?“ (t. j. sú v rovnakom komponente súvislosti?) Medzi najznámejšie aplikácie patria Kruskalov algoritmus na nájdenie najlacnejšej kostry (KRUSKAL, 1956) a unifikácia (KNIGHT, 1989).

GILBERT; NG; PEYTON (1994) ukázali, ako sa dá union-find použiť pri Choleského dekompozícii riedkych matic. Autori navrhli efektívny algoritmus, ktorý zistí počet nenulových prvkov v každom riadku a stĺpci výslednej matice, čo slúži na efektívnu alokáciu pamäte.

Pre offline verziu úlohy, kde sú všetky operácie dopredu známe, GABOW; R. TARJAN (1985) navrhli lineárny algoritmus. Článok obsahuje tiež viacero aplikácií v teoretickej informatike.

1.2 Popis

Dátová štruktúra *union-find* sa reprezentuje ako les, kde každý strom zodpovedá jednej množine a korene stromov sú zástupcovia množín. Pri implementácii si stačí pre každý prvok

x udržiavať smerník $p(x)$ na jeho otca (pre koreň je $p(x) = \text{NULL}$).

Operácia *makeset*(x) teda vytvorí nový prvok x a nastaví $p(x) = \text{NULL}$.

Operáciu *find*(x) vykonáme tak, že budeme sledovať cestu po smerníkoch, až kým nenájde zástupcu.

Operáciu *union*(x, y) ide najjednoduchšie vykonať tak, že presmerujeme smerník $p(y)$ na prvok x , teda $p(y) \leftarrow x$. Môžeme ľahko pozorovať, že takýto *naivný* spôsob je neefektívny, lebo nám operácia *find*(x) v najhoršom prípade, na n prvkoch, trvá $\Omega(n)$ krokov.

Existujú dva prístupy ako zlepšiť operácie a tým aj zrýchliť ich vykonanie. Sú to: heuristika *spájanie podľa ranku* a rôzne heuristiky na *kompresiu cesty*.

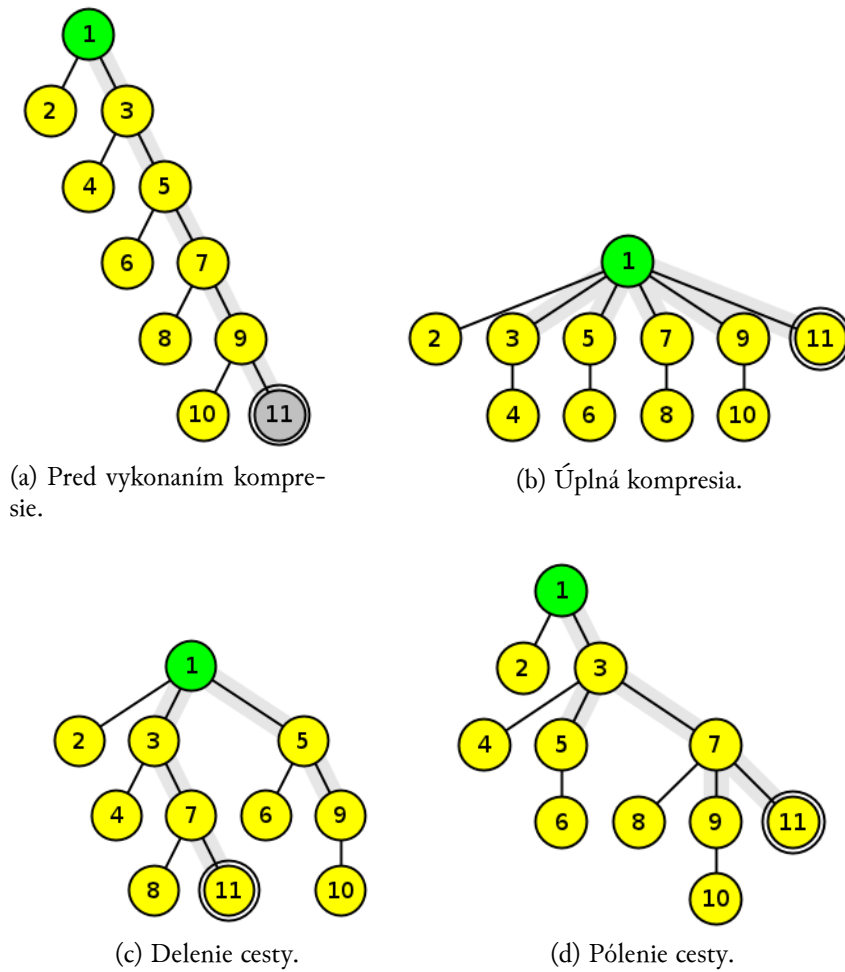
1.3 Heuristika na spájanie

Prvá heuristika pre každý vrchol x udržiava hodnotu *rank*(x), ktorá určuje najväčšiu možnú hĺbku podstromu s koreňom x . Pri operácii *makeset*(x) zadefinujeme *rank*(x) = 1. Pri operácii *union*(x, y) porovnáme *rank*(x) a *rank*(y) a vždy napojíme strom s menším rankom pod strom s väčším rankom. Ak majú oba stromy rovnaký rank, napojíme povedzme x pod y a *rank*(y) zvýšime o 1.

1.4 Heuristiky na kompresiu cesty

Druhou heuristikou je kompresia cesty. Algoritmov na efektívnu kompresiu cesty je veľa (R. E. TARJAN; Jan van LEEUWEN, 1984), tu popíšeme tie najefektívnejšie. Prvou z nich je *úplná kompresia* (HOPCROFT; ULLMAN, 1973). Pri vykonávaní operácie *find*(x), potom, ako nájdeme zástupcu, napojíme všetky vrcholy po ceste priamo pod koreň (obr. 1.1b). Toto síce trochu spomalí prvé hľadanie, ale výrazne zrýchli ďalšie hľadania pre všetky prvky na ceste ku koreňu. Druhou heuristikou je *delenie cesty* (J. LEEUWEN; WEIDE, 1977). Pri vykonávaní operácie *find*(x) pripojíme každý vrchol v ceste od vrcholu x po koreň stromu na otca jeho otca (obr. 1.1c). Tretou heuristikou je *pólenie cesty* (J. LEEUWEN; WEIDE, 1977). Pri vykonávaní operácie *find*(x) pripojíme každý druhý vrchol v ceste od vrcholu x po koreň stromu na otca jeho otca (obr. 1.1d).

Časová zložitosť union-findu závisí od toho, koľko prvkov je v množinách a koľko je operácií celkovo vykonaných operácií. Všetky uvedené spôsoby ako vykonať operáciu *find*(x) sa dajú použiť s oboma realizáciami operácie *union*. Počet prvkov označme n a počet operácií m . V praxi je zvyčajne počet operácií oveľa väčší ako počet prvkov. Pri tomto predpoklade ($m \geq n$) je pri použití spájania podľa ranku časová zložitosť pre algoritmus bez kompresie $\Theta(m \log n)$ a pre všetky tri uvedené typy kompresí $\Theta(m \alpha(m, n))$. V tabuľke 1.1 je porovnanie časových zložítostí (R. E. TARJAN; Jan van LEEUWEN, 1984).



Obrázok 1.1: *Kompresia cesty z vrcholu 11 do koreňa.* Cesta je vyznačená šedou. Pri úplnej kompresii (b) sa všetky vrcholy napoja na zástupcu. Pri delení cesty (c) a pólení cesty (d) sa cesta skráti približne na polovicu.

	Naivné spájanie	Spájanie podľa ranku
Naivné hľadanie	$\Theta(mn)$	$\Theta(m \log n)$
Úplná kompresia, delenie cesty, pólenie cesty	$\Theta\left(m \log_{1+m/n} n\right)$	$\Theta(m\alpha(m, n))$

(a) Prehľad časových zložítostí, ak $m \geq n$.

	Naivné spájanie	Spájanie podľa ranku
Naivné hľadanie	$\Theta(mn)$	$\Theta(n + m \log n)$
Úplná kompresia	$\Theta(n + m \log n)$	$\Theta(n + m\alpha(n, n))$
Delenie cesty	$\Theta(n \log m)$	$\Theta(n + m\alpha(n, n))$
Pólenie cesty	$\Omega(n + m \log n),$ $O(n \log m)$	$\Theta(n + m\alpha(n, n))$

(b) Prehľad časových zložítostí, ak $m < n$.

Tabuľka 1.1: Porovnanie časových zložítostí pre rôzne kombinácie hľadání prvkov a spájání množín pre union-find. Počet prvkov je n a počet operácií je m . Ackermannova inverzná funkcia je označená ako α . V praxi zväčša platí, že $m > n$.

Kapitola 2

Písmenkový strom

Písmenkový strom reprezentuje množinu slov. Oproti binárnym vyhľadávacím stromom je hlavný rozdiel v tom, že kľúče nie sú uložené vo vrcholoch, ale samotná poloha v strome určuje kľúč (slovo).

2.1 Popis

Písmenkový strom je *zakorenený strom*, v ktorom každá hrana obsahuje práve jeden znak z abecedy alebo *ukončovací znak*. Teda, každá cesta z koreňa do listu so znakmi $w_1, w_2, \dots, w_n, \$$ prirodzene zodpovedá slovu $w = w_1 w_2 \dots w_n$. *Ukončovací znak* je ľubovoľný, dopredu dohodnutý symbol, ktorý sa v abecede nenachádza (napr. \$).

Písmenkový strom je *asociatívne pole (slovník)*, čiže poskytuje tieto tri operácie:

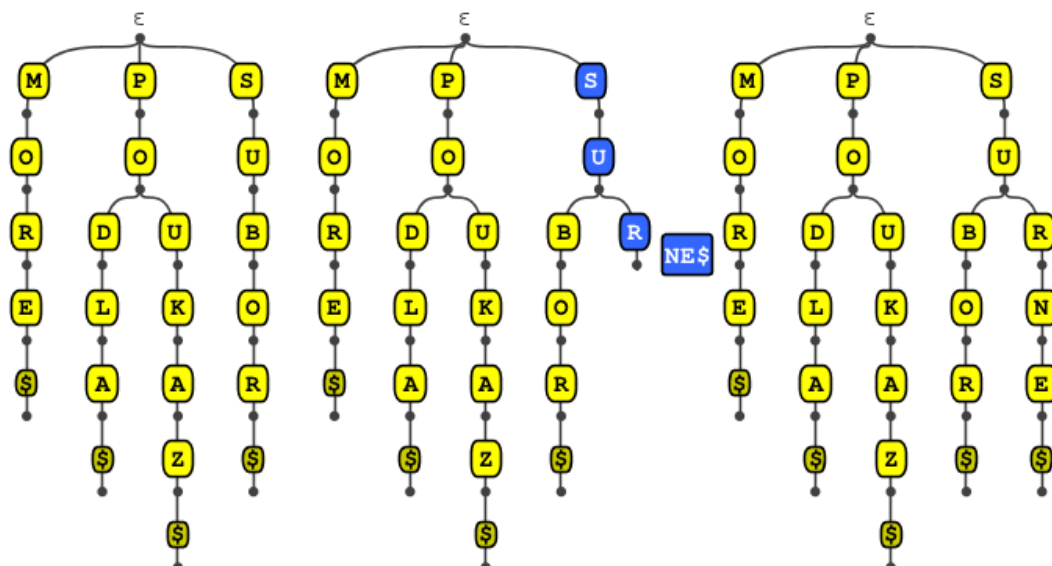
- $insert(w)$ – pridá do stromu slovo w ;
- $find(w)$ – zistí, či sa v strome slovo w nachádza;
- $delete(w)$ – odstráni zo stromu slovo w .

Všetky operácie začínajú v koreni a ku slovu pridávajú ukončovací znak, teda pracujú s reťazcom $w\$$.

Operácia $insert(w)$ vloží do stromu vstupný reťazec tak, že z reťazca číta znaky a prechádza po príslušných hranách. Ak hrana s daným symbolom neexistuje, pridá ju (pozri obr. 2.1).

Operácia $find(w)$ sa spustí z koreňa podľa postupnosti znakov. Ak hrana, po ktorej sa má spustiť neexistuje, dané slovo sa v strome nenachádza. Ak prečíta celý vstupný reťazec, dané slovo sa v strome nachádza.

Operácia $delete(w)$ najprv pomocou operácie $find(w)$ zistí umiestnenie slova. Ak sa slovo v strome nachádza, algoritmus odstráni hranu s ukončovacím znakom a vrchol, ktorý bol na nej zavesený. V tomto štádiu sa nám môže stať, že v strome ostane *mŕtva vetva* – nie je ukončená ukončovacím znakom. Pre fungovanie stromu to nevadí, všetky operácie by



Obrázok 2.1: Vloženie slova „SURNE“. Začiatok slova „SU“ sa v strome nachádza, ešte treba pripojiť hrany so znakmi R, N, E a \$.

prebiehali správne, ale takto štruktúra zaberá zbytočne veľa miesta. Preto je dobré túto mŕtvu vetvu odstrániť (pozri obr. 2.2).

Všetky tri operácie majú časovú zložitosť $O(|w|)$, kde $|w|$ je dĺžka slova.

2.2 Použitie

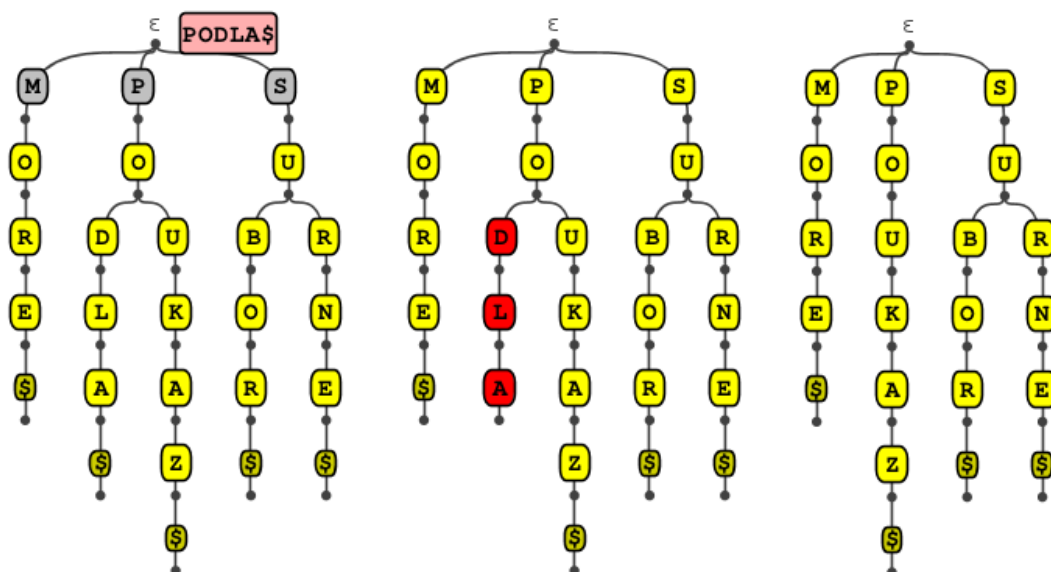
Prvýkrát navrhol písmenkový strom FREDKIN (1960), ktorý používal názov *trie memory*¹, keďže išlo o spôsob udržiavania dát v pamäti. MORRISON (1968) navrhol písmenkový strom, v ktorom sa každá cesta bez vetvení skomprimuje do jedinej hrany (na hranách potom nie sú znaky, ale slová). Táto štruktúra je známa pod menom *PATRICIA* (tiež *radix tree*, resp. *radix trie*) a využíva sa napríklad v *routovacích tabuľkách* (SKLOWER, 1991).

Písmenkový strom (tzv. *packed trie* alebo *hash trie*) sa používa napríklad v programe \TeX na slabikovanie slov (LIANG, 1983). Pôvodný návrh (FREDKIN, 1960) ako uložiť trie do pamäte zaberal príliš veľa nevyužitého priestoru. LIANG (1983) však navrhol, ako tieto nároky zmenšiť.

Písmenkové stromy sa podobajú na *konečné automaty*. Vznikli rôzne modifikácie stromov na automaty, ktorých hlavnou výhodou je, že v komprimovanej podobe spájajú nielen predpony, ale aj prípony slov a teda v slovách ľudských jazykov výrazne znižujú pamäťový priestor potrebný na uchovanie dátovej štruktúry. Vďaka tomu sa využívajú na jazykovú korekciu, automatické dopĺňanie slov a podobne (APPEL; JACOBSON, 1988; Claudio L. LUCCHESI; Claudio L. LUCCHESI; KOWALTOWSKI, 1992).

Ďalšie použitie písmenkoveho stromu je pri triedení zoznamu slov. Všetky slová sa pridávajú

¹Z anglického *retrieval* – získanie.



Obrázok 2.2: Odstránenie slova „PODLA“. Po odstránení \$ nám v strome ostane nepotrebná prípona „DLA“ (mŕtva vetva), ktorá je vyznačená červenou.

do stromu a potom sa spraví *preorderový prechod* stromu. Túto myšlienku spracovali Ranjan SINHA; Justin ZOBEL (2004) a veľmi výrazne zrýchlil triedenie dlhých zoznamov slov. Neskôr tento algoritmus vylepšili R. SINHA; RING; J. ZOBEL (2006). Kvôli tomu, ako algoritmus pracuje, sa nazýva *burtsort*.

Kapitola 3

Sufixový strom

Sufixový strom je písmenkový strom pre všetky *sufixy* (*prípony*) daného slova. Jeho veľká výhoda spočíva v rýchlom zostrojení a veľkom množstve efektívnych algoritmov na ňom. V softvéri sme vizualizovali jeho zostrojenie, a preto ho aj tu popíšeme.

3.1 Zostrojenie sufixového stromu

Existuje veľa spôsobov ako zostrojiť sufixový strom. Najjednoduchšie riešenie je využiť písmenkový strom a pridať do neho všetky sufixy. Takéto riešenie má časovú aj pamäťovú zložitosť $O(n^2)$.

UKKONEN (1995) navrhol, ako zostrojiť strom rýchlejšie a za behu.

3.2 Ukkonenov algoritmus

Hlavnou myšlienkou algoritmu je pre slovo $w_1w_2w_3 \dots w_n\$$ postupne vytvoriť suffixové stromy pre slová $w_1, w_1w_2, \dots, w_1w_2w_3 \dots w_n\$$. Označme tieto stromy $T(1), T(2), \dots, T(n), T$. Teda, vytvárame n stromov a každý zatiaľ na vytvorenie potrebuje $O(n^2)$ krokov. Toto je na prvý pohľad veľmi nešikovné riešenie pretože počet krokov potrebných na zostrojenie všetkých stromov je $O(n^3)$. Avšak zopár vylepšeniami je možné tento algoritmus zrýchliť až na hranicu $O(n)$ a to aj pre rýchlosť, aj pre pamäť.

Môžeme si všimnúť, že keď už máme vytvorený strom $T(i-1)$ (ktorý obsahuje sufixy $w_1 \dots w_{i-1}, w_2 \dots w_{i-1}, \dots, w_{i-1}$), tak pre vytvorenie stromu $T(i)$ netreba znovu vytvárať nový strom a pridávať do neho sufixy $w_1 \dots w_{i-1}w_i, w_2 \dots w_{i-1}w_i, \dots, w_{i-1}w_i$, ale stačí rozšíriť existujúce sufixy o znak w_i .

Druhým dobrým pozorovaním je fakt, že keď máme znak a , slovo v a v strome sa nachádza sufix av , tak sa v strome určite nachádza aj slovo v . Vyplýva to zo základnej vlastnosti sufixových stromov – sufixový strom obsahuje všetky sufixy.

3.2.1 Suffixové linky

Pri vytváraní stromu $T(i)$ zo stromu $T(i-1)$ postupne rozširujeme suffixy, no bolo by neefektívne ich vždy vyhľadávať z koreňa. Preto zavedieme *suffixový link* pre každý vrchol okrem koreňa, ten suffixový link nemá. Pre vrchol končiaci suffix *av* to je vrchol končiaci suffix *v*.

Algoritmus teda zmeníme tak, že namiesto opätovného vyhľadávania suffixu z koreňa, vyhľadáme bod, z ktorého začneme pridávať len raz a ďalej sa navigujeme po linkoch. Po pridaní vrchola, nazvime ho u_i , do stromu prejdeme suffixovým linkom na miesto, kde opäť pripojíme vrchol u_{i+1} . Vytvoríme suffixový link pre vrchol u_i – bude to smerník na u_{i+1} .

Ako nám to pomohlo zlepšiť časovú zložitosť? Teraz nám stačí pre každý z n stromov nájsť suffix, kde začneme rozširovať strom. Ten nájdeme na $O(n)$ krokov. Rozšírenie stromu o jeden znak zaberie tiež $O(n)$ krokov. Dokopy venujeme jednému stromu $O(n)$ krokov a n stromom venujeme $O(n^2)$.

Ďalším zlepšením bude pamäťová optimalizácia.

3.2.2 Zníženie nárokov na pamäť

Veľmi priamočiarym krokom k zlepšeniu pamätevej náročnosti sa zdá byť kompresia hrán. Po nej na hranách nie je len jeden znak, ale celý reťazec znakov. Takto má celý strom dovedna $O(n)$ hrán. Dôvod, prečo ju uvádzam až tu, je jednoduchý. Prichádza prirodzene s druhým vylepšením. Namiesto toho, aby sme si na hrane pamätali celý reťazec, budeme si na nej pamätať len počiatočnú a konečnú pozíciu v slove, pre ktorý beží algoritmus¹. Po týchto zlepšeniach nám stačí pamätať si $O(n)$ informácií.

Keďže kompresiou sa niektoré vrcholy stratili, musíme upraviť spôsob, ako sa pohybovať po suffixových linkoch. Úprava bude mierna. Po pridaní znaku prejdeme do najbližšieho vrcholu a popri tom si zapamätáme reťazec znakov, ktorý sme prešli. Keďže si znaky na hrane pamätáme ako dvojicu čísel, toto nám zaberie len $O(1)$ krokov. Keď následne prejdeme po suffixovom linku, vyhľadáme zapamätaný reťazec. Z vlastností stromu vyplýva, že stačí pozerat' len na prvé písmeno každej hrany preto, aby sme vedeli, či po nej máme prejsť alebo nie.

To, akým spôsobom sa písmenko po vyhľadaní pridá a kde vieme ušetriť počet krokov, popíšeme v nasledujúcej časti.

3.2.3 Rozširovanie stromu

Pri rozširovaní stromu o písmenko môžu nastať tieto tri prípady:

- *prvý prípad*: písmenko pripájame k vrcholu, z ktorého nepokračuje hrana, a teda je listom;

¹Tento krok predpokladá, že vieme adresovať reťazec priamo.

- *druhý prípad*: písmenko pripájame na miesto, z ktorého nepokračuje hrana s daným písmenkom, ale pokračuje z neho hrana s iným písmenkom;
- *tretí prípad*: písmenko pripájame na miesto, z ktorého pokračuje hrana s daným písmenkom.

Po tomto rozdelení môžeme ľahšie pozorovať ďalšie veci. Prvou je, že akonáhle vytvoríme novú vetvu (nastane prvý alebo druhý prípad), tak ju v ďalších krokoch môžeme len rozšíriť. Čiže, ak sme raz pridali list, ten aj listom navždy ostane. Túto skutočnosť môžeme využiť v implementácii tak, že pri vytváraní hrany nastavíme indexy hrany na i (index momentálneho písmenka, o ktoré strom rozširujeme) a e , čo je globálna premenná označujúca momentálny koniec v slove, ktorá sa každým rozšírením zvýši o jeden.

Druhým pozorovaním je, že po prvom výskyte tretieho prípadu sa strom už nerozšíri. Vyplýva to zo základnej vlastnosti sufixového stromu: ak rozširujeme strom o písmenko w_i a v strome je slovo $w_j \cdots w_i$, tak sú v ňom aj slová $w_{j+1} \cdots w_i, w_{j+2} \cdots w_i, \dots, w_i$.

Ďalším pozorovaním je, že pri rozširovaní najprv nastávajú prvé prípady, potom druhé a až potom tretie.

So všetkými týmito poznatkami môžeme konečne skonštruovať výslednú podobu algoritmu.

3.2.4 Zhrnutie

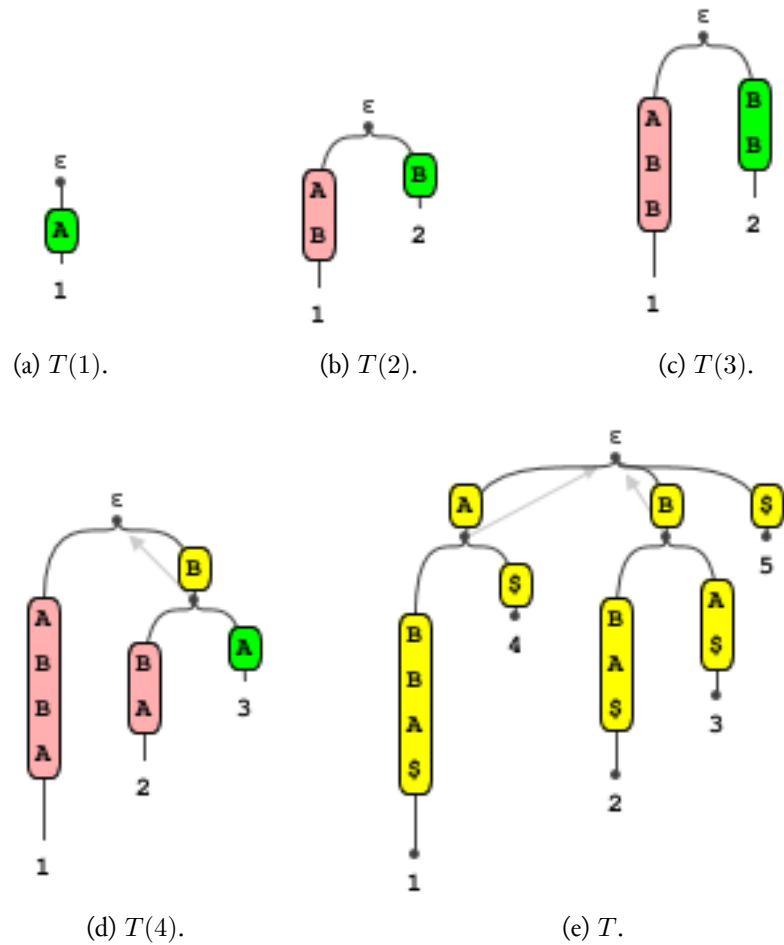
Sufixový strom T pre slovo $w = w_1w_2w_3 \cdots w_n\$$, vytvoríme tak, že z prázdneho stromu vytvoríme postupne stromy $T(1), T(2), T(3), \dots, T(n), T$.

Strom $T(1)$ vytvoríme triviálne; pridáme koreňu hrana s dvojicou indexov $(1, e)$ a nastavíme štartovací vrchol u_s na práve vytvorený vrchol.

Postupne vytvárame strom $T(i)$ zo stromu $T(i-1)$ rozšírením stromu $T(i-1)$ o písmenko w_i ² nasledovne:

1. index e nastavíme na novú hodnotu i ; Tým sme vykonali všetky prvé prípady. Vieme si udržiavať ich počet j ;
2. za aktuálny vrchol u si zvolíme štartovací vrchol u_s ;
3. z aktuálneho vrcholu prejdeme po hrane vyššie a zapamätáme si reťazec α ;
4. ak nie sme v koreni, prejdeme po sufixovom linku. Nastavíme aktuálny vrchol;
5. z aktuálneho vrcholu vyhľadáme reťazec $w_{j+1} \cdots w_i$;
6. teraz môže nastať druhý alebo tretí prípad:

²Respektíve strom T zo stromu $T(n)$ o písmenko w_n .



Obrázok 3.1: *Suffixové stromy*. Na obrázku sú suffixové stromy pre slová A, AB, ABB, ABBA, ABBA\$. Šípky znázorňujú suffixové linky, ružovou a zelenou sú označené hrany, na ktoré sa bude v nasledujúcom, kroku aplikovať prvé pravidlo. Čísla označujú, na ktorom znaku začína daný suffix v slove.

- ak nastal druhý prípad, v prípade potreby rozdelíme hranu. Nastavíme aktuálny vrchol na posledný navštívený (respektíve vytvorený) a v prípade potreby nastavíme sufixový link. K aktívnemu vrcholu pripojíme hranu s indexami (i, e) , zvýšime index j o 1 a nastavíme štartovací vrchol na práve vytvorený. Vrátime sa na krok 3;
- ak nastal tretí prípad, v prípade potreby nastavíme sufixový link.

7. zvýšime hodnotu i o jeden a vrátime sa na krok 1.

Takto vybudujeme sufixový strom pre slovo w .

3.3 Použitie

Suffixový strom má v stringológii veľa využití (GUSFIELD, 1997). Najtriviálnejší je algoritmus na zistenie podreťazca v slove. Navyše vieme určiť, na ktore pozícií sa podreťazec vyskytuje. Pri konštrukcii stromu stačí označovať listy číslami v poradí podľa vytvorenia.

Suffixový strom pre viacej reťazcov sa nazýva *všeobecný sufixový strom* a dá sa zostrojiť miernou úpravou Ukkonenovho algoritmu. Reťazce $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ spojíme a oddelíme unikátnymi oddelovačmi. Vznikne nám slovo $v_1\$_1v_2\$_2v_3\$_3 \dots v_n\$_n$, z ktorého vieme vybudovať sufixový strom. Tento strom sa dá využiť na vyhľadanie najdlhšieho spoločného podreťazca.

Kapitola 4

Popis softvéru

V predchádzajúcich kapitolách sme si popísali niektoré dátové štruktúry a vybrané algoritmy. Hlavnou náplňou je ich vizualizácia. Ako sme povedali v úvode, vizualizácia je názorné vykreslenie dátovej štruktúry, pričom jej reprezentácia v pamäti je nepotrebná (no občas je názorná aj tá). Vizualizácia algoritmu je znázornenie priebehu algoritmu na dátovej štruktúre.

4.1 Analýza

Softvér vizualizuje dátové štruktúry, algoritmy na nich a popisuje ako algoritmy fungujú. Preto sa hodí ako učebná pomôcka pre študentov na samoštúdium a pre učiteľov na názorné ukážky pri vyučovaní.

Vizualizované dátové štruktúry sú známe a rozšírenie vizualizácie je veľké, preto existuje veľa podobných aplikácií a appletov znázorňujúcich tieto dátové štruktúry a algoritmy. Väčšina z nich je na úrovni školských projektov a je súkromná. Preto porovnam len tie vizualizácie, ktoré sú vybrané skupinou ľudí venujúcej sa vizualizácií algoritmov; skupinou `algoviz.org`. Analýza prebehla v máji 2012.

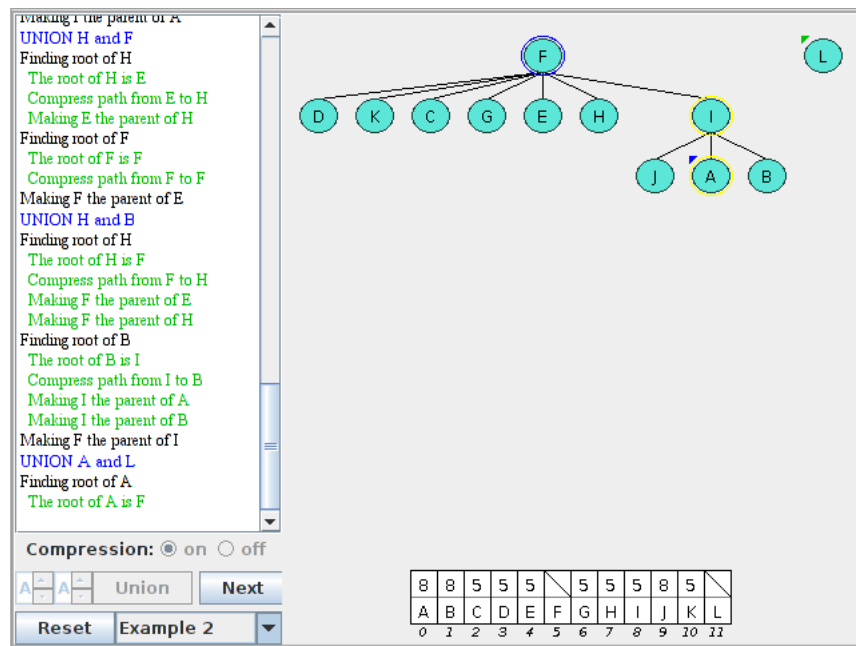
4.1.1 Union/Find Algorithm Visualization

Tento malý applet je súčasťou väčšieho projektu *Virginia Tech Algorithm Visualizations*. Applet je implementovaný v programovacom jazyku JAVA a po grafickej stránke je veľmi podobný ako zvyšok projektu. Softvér je vydaný pod licenciou GPL. Vytvorili ho Cris Kania a Cliff Shaffer počas jesene 2004.

Je dostupný na: <http://research.cs.vt.edu/AVresearch/UF/>.

Popis

Applet poskytuje operácie *union* a *find* na ôsmich, dvanástich, šesnástich alebo dvadsiatich vrchoch. Na obrázku 4.1 je obrazovka appletu. Môžeme vidieť, že dátová štruktúra je vykreslená vpravo. Použitý je jednoduchý algoritmus. Vpravo dole je vykreslená reprezentácia



Obrázok 4.1: *Softvér Union/Find Algorithm Visualization*. V ľavej časti obrazovky sa nachádzajú výpisy a možnosti nastavenia, vpravo je vizualizácia dátovej štruktúry a prebiehajúceho algoritmu.

v poli a pre každý vrchol je vypísaný otec. Vľavo je riadne vypísaný zoznam vykonaných krokov, ktorý je navyše farebne odlišený. Farby vo výpise a vo vizualizácii spolu korešpondujú. Vľavo dole sú nastavenia. Z intuitívneho prehľadu teda applet poskytuje operácie *union* s heuristikou na spájanie a *find* s možnosťami bez kompresie a s kompresiou cesty (popísané v sekcích 1.3 a 1.4).

Softvér poskytuje priestor len na malé príklady. Na pochopenie ako fungujú algoritmy to je postačujúce. Ovládanie je intuitívne.

4.1.2 ALVie

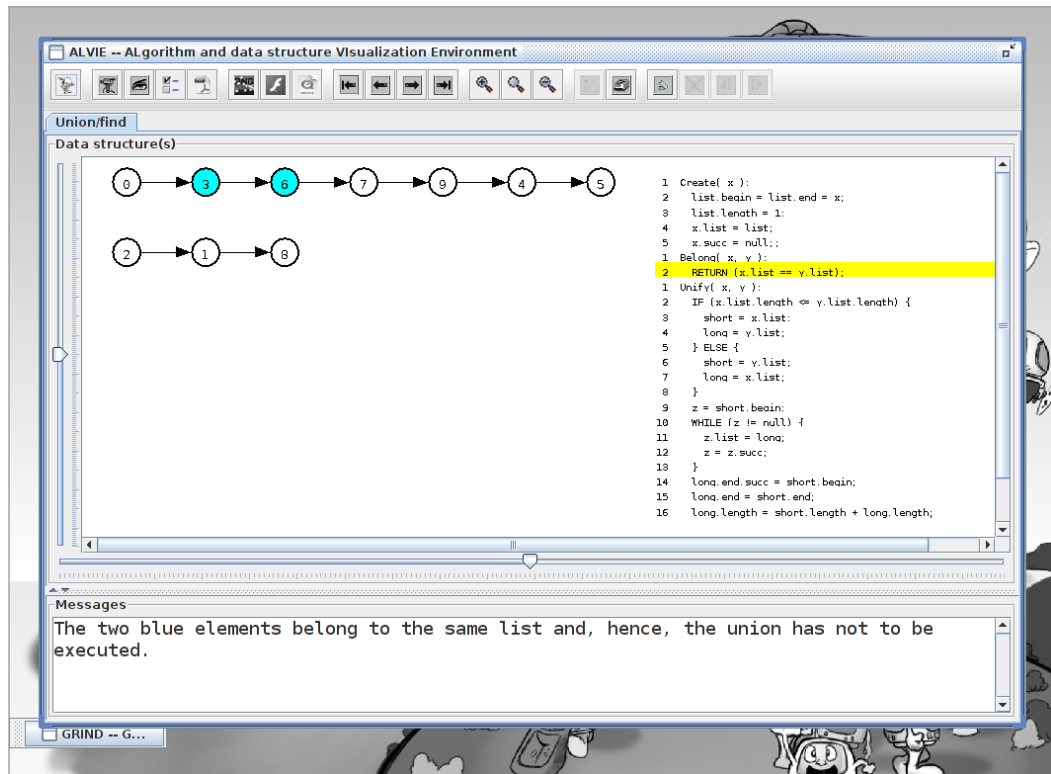
The girl's name Alvie, also used as boy's name Alvie, is a variant of Alvina (old English), and the meaning of Alvie is „elf or magical being, friend“.

<http://alvie.algoritmica.org/alvie3/quickstart>

ALVie je veľký projekt. Je to prostredie na vizualizáciu algoritmov, vytváranie vlastných vizualizácií a veľmi flexibilné pridávanie vlastného materiálu. Slúžil na podporu talianskych škôl. Projekt momentálne spravuje Pilu Crescenzi. Je implementovaný v jazyku JAVA.

Popis

Na webovej stránke projektu (<http://alvie.algoritmica.org/alvie3>) je prehľadný popis funkcionality a používania. Aplikácia ponúka množstvo nastavení a veľa možností exportovania danej vizualizácie. Avšak nepodarilo sa mi nastaviť si vlastný vstup, preto som



Obrázok 4.2: Softvér *Alvie*. Prebieha XML skript. Vpravo je pomocný pseudokód.

ostal len pri základnej možnosti. Union-find je tu bohužiaľ implementovaný nie cez les, ale ako spájaný zoznam (obr. 4.2), čo asymptoticky spomaľuje beh algoritmu, takže sa v praxi s takouto implementáciou nedá stretnúť.

Napriek veľkému množstvu dodávaných algoritmov, veľkému možností nastavení a zobrazenému pseudokódu počas vizualizácie má tento softvér nevýhody v podobe horšieho ovládania a neoptimálnej implementácie disjunktných množín.

4.1.3 Data Structure Visualizations

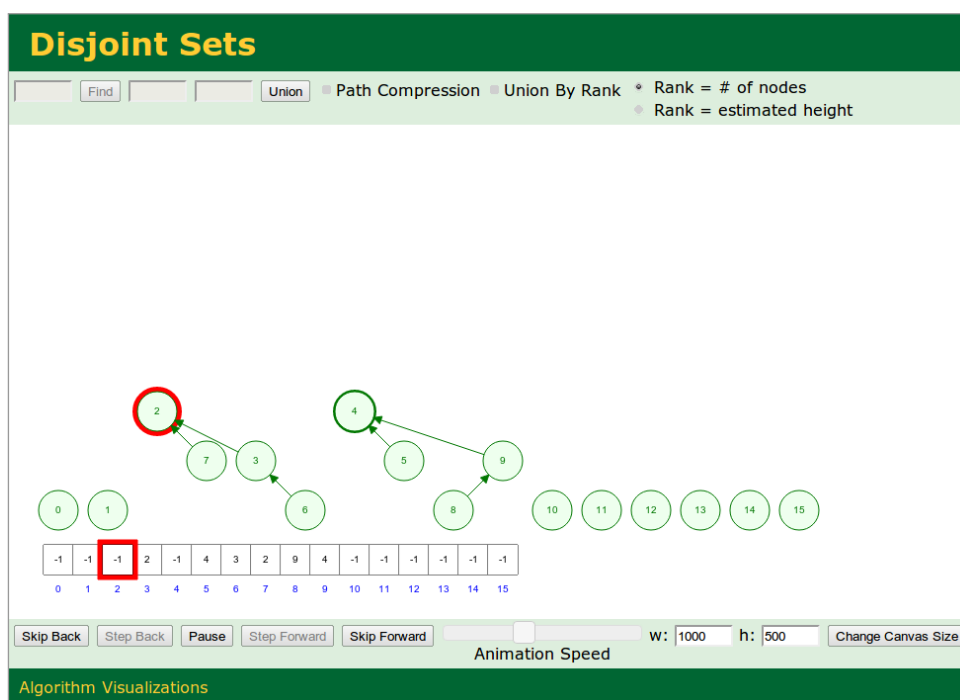
Vizualizácia union-find algoritmu je v tomto prípade súčasťou veľkého projektu využívajúceho veľa technológií (Flash, JAVA, HTML5). Autorom je David Galles.

Projekt je prístupný na: <http://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/>.

Popis

Autor si dal záležať na použití moderných technológií a celá internetová aplikácia vyzerá veľmi pekne. Aplikácia zobrazuje štruktúru aj ako les aj ako pole. Dá sa nastaviť rýchlosť algoritmu a možnosti heuristik. Vstupné parametre operácií sa zadávajú cez textové políčka.

Aplikácia je dobre popísaná, dá sa na nej nastaviť všetko potrebné vrátane rýchlosti premietania a veľkosti vykresľovacej plochy. Nevýhodou je, že nevypisuje, čo sa práve deje a teda používateľ musí algoritmus poznať.



Obrázok 4.3: *Softvér Data Structure Visualizations*. Prebieha spájanie dvoch množín. Celá aplikácia beží v internetovom prehliadači.

4.1.4 TRAKLA2

TRAKLA2 je učebná pomôcka vyvíjaná skupinou ľudí „Software visualization group“. Všetci sú študenti alebo zamestnanci na Helsinskej technickej univerzite. Obsahuje veľa algoritmov a ku každému má sadu úloh, ktoré žiak môže riešiť.

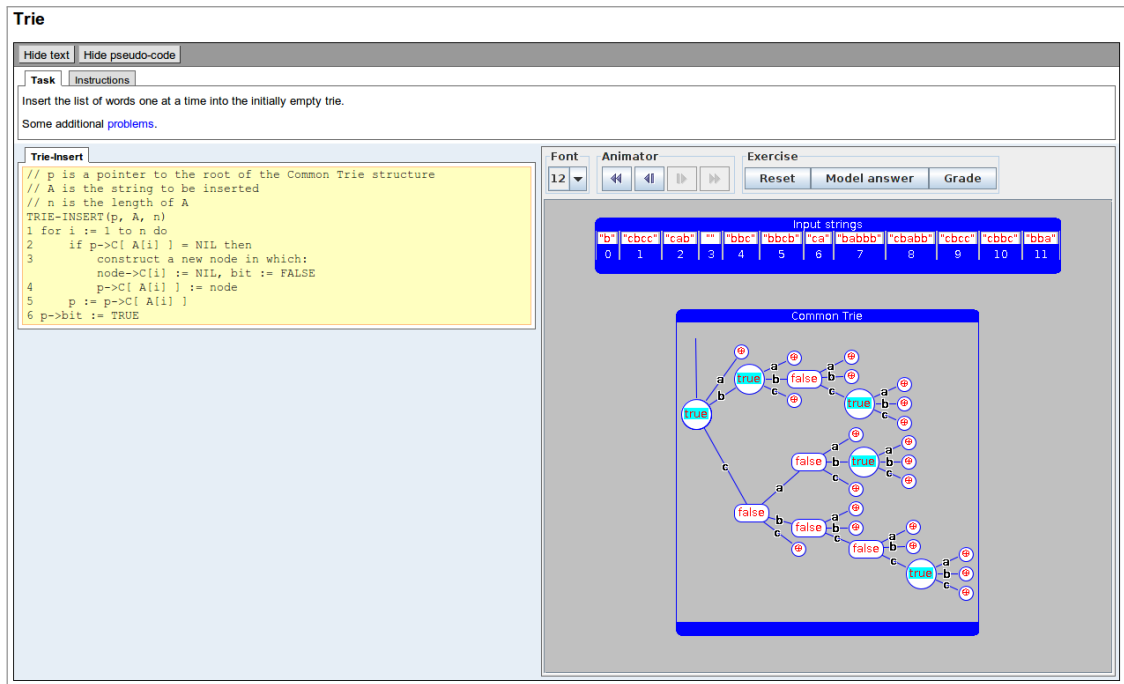
Celý výučbový systém je dostupný a popísaný na: <http://www.cse.hut.fi/en/research/SVG/TRAKLA2/index.shtml>.

Popis

Už na prvý pohľad je vidieť, že na projekte sa podieľa veľa ľudí. Stojí za ním viac ako 40 ľudí. Systém je premyslený, každý algoritmus obsahuje pseudokód. Všade sú pomôcky, takže ak sme niečomu nerozumeli, našli sme navigáciu na odpoveď.

Samotné vizualizovanie písmenkového stromu je vykonávané niektorým tesným algoritmom, čo je veľká výnimka pri vizualizáciách, ktoré sa nezaoberajú tým, ako vykresľovať grafy! V hornej časti je umiestnený pomocný text, vľavo je pseudokód a vpravo je dátová štruktúra, na ktorej sa vykonáva zadanie (obrázok 4.4). Je možné zvoliť si veľkosť písma.

Všetko je spravené pekne a prehľadne, možno grafická stránka by sa dala vylepšiť. Jediná chyba, na ktorú som narazil bola, že pokiaľ som kroky nevykonával v správnom poradí, nebola mi uznaná správna odpoveď aj keď výsledok správny bol. Toto je ale špecifická chyba len pre písmenkový strom (pre iné dátové štruktúry môže poradie pridávania zmeniť reprezentáciu).



Obrázok 4.4: *Prostredie TRAKLA2*. Riešenie zadania; budovanie písmenkového stromu obsahujúceho zadané reťazce. Celá aplikácia beží v internetovom prehliadači.

4.1.5 Ďalšie vizualizácie

Uviedol som tu tri podobné softvéry pre union-find a jeden pre písmenkový strom, ale samozrejme existuje veľa iných vizualizácií. Bohužiaľ veľa z nich skončí odovzdaná u učiteľa, je nekvalitná, alebo nepublikovaná a tak sa z nich stávajú neprístupné aplikácie.

Na sufixové stromy, konkrétne Ukkonenov algoritmus, ktorý sme vizualizovali, sa podarilo nájsť len jednu a aj to textovú vizualizáciu. Na jednoduché písmenkové stromy sme viac vizualizácií nenašli. Ďalšie programy vizualizovali textové dáta alebo iné modifikácie písmenkových stromov (niektoré sú uvedené v sekcii 2.2).

Všetky aplikácie, ktoré sme analyzovali, však mali jeden spoločný nedostatok. Nedalo sa rýchlo dostať ku stavu, kedy je na štruktúre vykonaných veľa operácií a pokračovať z tohto stavu ďalej. Toto môže byť nepríjemné v prípade, že si chce používateľ len pripomenúť na už existujúcej štruktúre ako algoritmus funguje, prípadne ako štruktúra po vykonaných operáciách vyzerá.

4.2 Špecifikácia požiadaviek

Počas analýzy sme zistili, že vizualizácie mali nedostatky najmä v tom, že sa na nich nedalo naraz vykonať viac operácií. V prípade, že sa dalo (sekcia 4.1.2), tak sa z tohto stavu nedalo pokračovať. Ďalej sme zistili, že aplikácie neposkytujú rozšírené metódy vstupu. Všeobecne bolo veľmi obtiažne vôbec vybudovať väčšiu dátovú štruktúru, na ktorej by boli algoritmy a hlavne ich efektivita viditeľnejšia. Pri niektorých vizualizáciach nebolo jasne viditeľné, čo sa

ide vykonať.

4.2.1 Prostredie

Naša aplikácia bude používaná najmä študentmi, ktorí si chcú zopakovať učivo z prednášok, alebo učiteľmi, ktorí túto aplikáciu budú chcieť využívať na hodinách.

4.2.2 Požiadavky

Preto sa nám zdalo byť vhodné, aby študent dostával výpisy o tom, čo sa bude diať a aby bolo prostredie pre ňo dostatočne užívateľsky príjemné. Pre učiteľa je potrebné, aby sa aplikácia prijateľne zobrazovala cez projektor, aby bola dátová štruktúra od začiatku naplnená (veľa krát sa algoritmy vysvetľujú na pripravenej dátovej štruktúre) a taktiež, aby bolo prostredie užívateľsky príjemné.

Softvér ako taký má vizualizovať tieto veci:

- dátovú štruktúru pre disjunktné množiny reprezentovanú stromom a na nej tieto algoritmy:
 - naivné spájanie, spájanie podľa ranku;
 - nekomprimované hľadanie, hľadanie s jednoduchou kompresiou, hľadanie s delením cesty, hľadanie s pólením cesty.
- písmenkový strom (trie) a na ňom tieto algoritmy:
 - vkladanie slova;
 - testovanie na prítomnosť slova;
 - mazanie slova.
- sufixový strom a jeho vytváranie pomocou Ukkonenovho algoritmu.

4.2.3 Prevádzkové požiadavky

Pretože ľudia používajú rôzne operačné systémy a softvér nepracuje so špecifickými systémovými zdrojmi je potrebné, aby bola aplikácia nezávislá od operačného systému. Keďže má byť dostupná na študentské účely, nemala by byť hardvérovo náročná.

4.3 Návrh

Táto práca je pokračovaním práce Jakuba Kováča a preto návrh vychádza hlavne z jeho práce. Našou hlavnou úlohou bolo implementovať vybrané dátové štruktúry a algoritmy. V nasledujúcich častiach si popíšeme požiadavky kladené na náš softvér, či už z hľadiska technického alebo používateľského, zvolené technológie a rozhranie systému.

4.3.1 Technické požiadavky

Softvér slúži na vizualizáciu a je potrebné ho implementovať multiplatformovo. Taktiež slúži aj na opisovanie prebiehajúceho algoritmu, teda je potrebná plocha na vykresľovanie, plocha na vypisovanie toho, čo sa deje, ovládacie prvky algoritmu a ovládacie prvky na výber dátových štruktúr.

4.3.2 Uživateľské požiadavky

Ako sme už naznačili používateľmi budú prevažne študenti a učitelia, veľmi pravdepodobne informatiky. Preto je vhodné okrem obvyčajného a pomalšieho zadávania vstupu po jednej operácii vytvoriť prostredie, v ktorom sa bude dať zadávať aj zložitejší vstup.

Ďalej treba názorne vizualizovať dátové štruktúry a všetko potrebné ku pochopeniu algoritmov. Konkrétne pri union-finde ide o prípadné ranky, pri písmenkovom strome odstraňovanie vetiev, prehľadné vykresľovanie pri prebiehajúcich algoritmoch a pri sufixovom strome sufixové linky, práve pridávaný sufix a celé slovo, ktorému sufixový strom budujeme.

4.3.3 Použité technológie

Keďže projekt je pokračovaním predošlej práce za hlavný programovací jazyk je zvolená JAVA. Na grafické znázornenie sú to jednotlivé triedy balíkov AWT a Swing. Na generovanie náhodných reťazcov používame špeciálne upravenú triedu s návrhovým vzorom *singleton*. Vďaka celkovej nenáročnosti na technológie a zameraniu projektu nebolo potrebné použiť viac technológií.

4.3.4 Rozhranie aplikácie

Pre potreby softvéru je potrebné zachovať súdržnosť. Rozhranie vizualizácií bude podobné ako všetkých iných štruktúr. Vstupné dáta budú zadávané do vstupného textového poľa, alebo klikaním myšou. Podľa stlačeného tlačidla sa spustí daný proces. Výstupné údaje budú prezentované vo vykresľovacom okne pre dátovú štruktúru a vo výpise pre komentáre. Vykreslená štruktúra sa bude dať zväčšiť, zmenšiť a posunúť pomocou myšky.

Pre každú dátovú štruktúru je potrebné zabezpečiť vstupné textové pole, prípadne dodatočné vstupné metódy a tlačidlá pre všetky operácie.

Union-find

Pre union-find je potrebné zabezpečiť vstupné textové pole, tlačidlá pre operácie *union* a *find*, vyberanie vstupných prvkov myšou, možnosť výberu medzi naivným spájaním a spájaním podľa ranku a medzi hľadaním zástupcu bez kompresie, s jednoduchou kompresiou, delením cesty a pólením cesty (popísané v kapitole 1).

Písmenkový strom

Pri písmenkovom strome je nutné zabezpečiť vstupné pole tak, aby sa do systému dostali slová, len s abecedou, ktorú chceme. Pre nás abecedu tvoria veľké písmená anglickej abecedy. Ďalej je potrebné, aby sa dal pridať do stromu ucelenejší text. Na vykonávanie operácií *insert*, *find* a *delete* je potrebné implementovať tlačidlá.

Sufixový strom

Sufixový strom je potrebné vytvoriť zo vstupného slova. Preto treba na tento účel implementovať jedno tlačidlo.

4.3.5 Prepojenie s predošlým systémom

Po implementácii má systém tvoriť jeden celok, preto treba dbať na celistvosť a podobný štýl programovania. Na jednotlivé implementovanie obrazoviek, vstupných polí a tlačidiel je nutné použiť už existujúce rozhranie a tak isto na implementáciu vizualizácie treba použiť rovnaký systém, ktorý vyžaduje dedenie z prepravených abstraktných tried.

V hornej lište aplikácie bolo menu na výber dátových štruktúr a menu na výber jazyka. Systém fungoval na princípe kontajnera inšanciovanej triedy udržiavajúcej jednotlivé obrazovky. Objekty mali priradenú dátovú štruktúru. Panel obsahoval plochy pre vykresľovanie, výpis komentárov (toho, čo sa bude diať) a ovládacie tlačidlá. Pri vykonaní zvolenej operácie sa spustilo nové vlákno vykonávajúce danú operáciu a obsluhujúcu obrazovku.

Všetky doterajšie vizualizácie pracovali s binárnymi stromami. Naše dátové štruktúry sú však všeobecné stromy, respektíve lesy. Preto je nutné implementovať triedu na prácu so všeobecnými stromami.

Kapitola 5

Implementácia softvéru

V tejto kapitole postupne uvedieme realizáciu návrhu popísaného v kapitole 4. Najskôr si popíšeme ako sme vizualizovali dané dátové štruktúry a algoritmy (sekcia 5.1) a ukážeme si implementáciu vybraných tried (sekcia 5.2). Na záver uvedieme ako dopadlo testovanie softvéru (sekcia 5.3).

5.1 Vizualizácia

Dátové štruktúry sme vizualizovali rôzne. Základom bol upravený algoritmus pre tesné vykresľovanie a použitie rôznych farieb pre prehľadnejšiu vizualizáciu.

5.1.1 Union-find

Dátovú štruktúru union-find sme vizualizovali ako les. Pre názorné oddelenie množín sme si zvolili pravidlo, ktoré zakazovalo vykresliť vrchol z iného stromu (prvok inej množiny) napravo od najľavejšieho vrcholu a naľavo od napravejšieho vrcholu inej množiny. Jednotlivé množiny sme už vykreslovali tesným Walkerovým algoritmom (WALKER II, 1990).

Vizualizácia poskytuje všetky heuristiky na spájanie a nájdenie reprezentanta množiny a aj tlačidlo na vykonanie viacerých náhodných spojení naraz. Toto je užitočné, keď chce užívateľ vidieť, ako dátová štruktúra vyzerá, po vykonaní veľa operácií. Okrem bežného textového vstupu je možné vyberať prvky aj myšou. Vybrané prvky sú zvýraznené.

Operácia *find*

Hľadanie reprezentanta množiny sme vizualizovali tak, že sme vybraný prvok označili, vyznačili sme cestu do koreňa a reprezentanta množiny (algoritmus dopredu nepozná reprezentanta, ale v rámci vizualizácie sme to považovali za vhodné). Následne sme vykonali kompresiu. Cestu sme nechali znázornenú šedou farbou, aby bolo vidieť ako vyzerá cesta pred a po prevedení algoritmu.

Pre heuristiky delenie a pólenie cesty sme použili ružovú farbu na označenie syna a vnuka, keďže tieto algoritmy s nimi pracujú.

Operácia *union*

Spájanie prvkov sme vizualizovali vykonaním dvoch hľadání reprezentanta a následného napojenia reprezentantov podľa typu algoritmu.

5.1.2 Písmenkový strom

Pri vizualizácii písmenkového stromu sme použili Walkerov algoritmus pre úsporné rozloženie vrcholov v strome (WALKER II, 1990). Keď má vrchol viacej synov a hrany kreslíme priamo, tak vzniká nedostatok priestoru pre umiestnenie znakov na hrany. Preto sme sa rozhodli kresliť hrany zakrivené, podľa Bézierovej krivky určenej štyrmi bodmi. Vo vizualizácii sa dajú vložiť náhodné slová podľa momentálne nastaveného jazyka. Taktiež sa automaticky odstraňuje diakritika a interpunkcia, takže sa dá naraz vložiť súvislý text.

Operácia *insert*

Operácia *find*

Operácia *delete*

5.1.3 Sufixový strom

Sufixový strom sme vizualizovali podobne ako písmenkový strom, použili sme Walkerov algoritmus (WALKER II, 1990) so zakrivenými hranami. Sufixové linky sme znázornili šedými šípkami. Na rozdiel od písmenkového stromu sa v sufixovom strome vyskytujú na hranách reťazce. Tie sme znázornili ako viac spojených hrán.

Ukkonenov algoritmus

Pri vizualizácii algoritmu označujeme hrany, pre ktoré platí prvý prípad, ružovou farbou. Hranu, pre ktorú platí prvý prípad a je pridaná ako posledná, označujeme zelenou farbou. Z tejto hrany začína „zaujímavejšia“ časť rozširovania stromu.

5.2 Implementácia tried

5.3 Testovanie, prevádzka a údržba

Záver

Tu by malo byť niečo v zmysle, že som to strašne nestihol a vymenované všetko, čo by som chcel dorobiť?

Literatúra

- APPEL, A. W.; JACOBSON, G. J. 1988. The world's fastest Scrabble program. *Communications of the ACM*. 1988, č. 31, č. 5, str. 572–578.
- FREDKIN, Edward. 1960. Trie memory. *Commun. ACM*. 1960, č. 3, č. 9, str. 490–499. Dostupné z WWW: <http://doi.acm.org/10.1145/367390.367400>. ISSN 0001-0782.
- GABOW, H.N.; TARJAN, R.E. 1985. A linear-time algorithm for a special case of disjoint set union. *Journal of computer and system sciences*. 1985, č. 30, č. 2, str. 209–221.
- GILBERT, J.R.; NG, E.G.; PEYTON, B.W. 1994. An efficient algorithm to compute row and column counts for sparse Cholesky factorization. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 1994, č. 15, str. 1075.
- GUSFIELD, Dan. 1997. *Algorithms on strings, trees, and sequences: computer science and computational biology*. New York, NY, USA : Cambridge University Press, 1997. ISBN 0-521-58519-8.
- HOPCROFT, John E.; ULLMAN, Jeffrey D. 1973. Set Merging Algorithms. *SIAM J. Comput.* 1973, č. 2, č. 4, str. 294–303. Dostupné z WWW: <http://dx.doi.org/10.1137/0202024>.
- HUNDHAUSEN, C.D.; DOUGLAS, S.A.; STASKO, J.T. 2002. A meta-study of algorithm visualization effectiveness. *Journal of Visual Languages & Computing*. 2002, č. 13, č. 3, str. 259–290.
- KNIGHT, Kevin. 1989. Unification: a multidisciplinary survey. *ACM Comput. Surv.* 1989, č. 21, č. 1, str. 93–124. Dostupné z WWW: <http://doi.acm.org/10.1145/62029.62030>. ISSN 0360-0300.
- KOVÁČ, Jakub. 2007. *Výhľadávacie stromy a ich vizualizácia*. 2007. Bakalárska práca, Univerzita Komenského v Bratislave.
- KRUSKAL, Joseph B. 1956. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1956, č. 7, č. 1, str. 48–50. Dostupné z WWW: <http://www.ams.org/journals/proc/1956-007-01/S0002-9939-1956-0078686-7/S0002-9939-1956-0078686-7.pdf>.

- LEEUEWEN, J.; WEIDE, Th.P. van der. 1977. *Alternative Path Compression Rules*. 1977. An outline of the results were presented at the Fachtagung on Algorithms and Complexity Theory, Oberwolfach, Oct 1977.
- LIANG, F. M. 1983. *Word hy-phen-a-tion by com-put-er*. 1983.
- LUCCHESI, Claudio L.; LUCCHESI, Cl'audio L.; KOWALTOWSKI, Tomasz. 1992. *Applications of Finite Automata Representing Large Vocabularies*. 1992.
- MORRISON, Donald R. 1968. PATRICIA – Practical Algorithm To Retrieve Information Coded in Alphanumeric. *J. ACM*. 1968, č. 15, č. 4, str. 514–534. Dostupné z WWW: <http://doi.acm.org/10.1145/321479.321481>. ISSN 0004-5411.
- NAPS, T.L.; RÖßLING, G.; ALMSTRUM, V. a spol. 2002. Exploring the role of visualization and engagement in computer science education. In. *ACM SIGCSE Bulletin*. Č. 2, 2002, str. 131–152.
- SARAIYA, Purvi; SHAFFER, Clifford A.; MCCRICKARD, D. Scott; NORTH, Chris. 2004. Effective features of algorithm visualizations. In. *Proceedings of the 35th SIGCSE technical symposium on Computer science education*. New York, NY, USA : ACM, 2004, str. 382–386. SIGCSE '04. Dostupné z WWW: <http://doi.acm.org/10.1145/971300.971432>. ISBN 1-58113-798-2.
- SHAFFER, Clifford A.; COOPER, Matthew L.; ALON, Alexander Joel D. a spol. 2010. Algorithm Visualization: The State of the Field. *Trans. Comput. Educ.* 2010, č. 10, str. 9:1–9:22. Dostupné z WWW: <http://doi.acm.org/10.1145/1821996.1821997>. ISSN 1946-6226.
- SINHA, Ranjan; ZOBEL, Justin. 2004. Cache-conscious sorting of large sets of strings with dynamic tries. *J. Exp. Algorithmics*. 2004, č. 9. Dostupné z WWW: <http://doi.acm.org/10.1145/1005813.1041517>. ISSN 1084-6654.
- SINHA, R.; RING, D.; ZOBEL, J. 2006. Cache-efficient String Sorting using Copying. *J. Exp. Algorithmics*. 2006, č. 11, str. 1.2. ISSN 1084-6654.
- SKLOWER, K. 1991. A tree-based packet routing table for Berkeley Unix. In. *Proceedings of the Winter 1991 USENIX Conference*. 1991, str. 93–104.
- TARJAN, Robert E.; LEEUEWEN, Jan van. 1984. Worst-case Analysis of Set Union Algorithms. *J. ACM*. 1984, č. 31, č. 2, str. 245–281. Dostupné z WWW: <http://doi.acm.org/10.1145/62.2160>. ISSN 0004-5411.
- UKKONEN, Esko. 1995. *On-Line Construction of Suffix Trees*. 1995.
- WALKER II, John Q. 1990. A node-positioning algorithm for general trees. *Software: Practice and Experience*. 1990, č. 20, č. 7, str. 685–705.