Einstaklingsverkefni 4 (e. Individual Assignment 4)

T-117-STR1, Strjál stærðfræði I, 2023-3

Reykjavik University - Department of Computer Science, Menntavegi 1, IS-101 Reykjavík, Iceland

Kennari: Harpa Guðjónsdóttir

harpagud@ru.is

October 6, 2023

Hér er Einstaklingsverkefni 4. Skilafrestur er þriðjudaginn 10.október 2023 kl. 23:59*. Nemendur skila lausnum á pdf/jpg formi á Gradescope (*Gradescope er bæði aðgengilegt í gegnum verkefnið í Canvas en einnig á gradescope.com*) og fá þær til baka með leiðréttingum. Þetta eru ein af 5 einstaklingsskilum. Þau gilda alls 20% af lokaeinkunn, en lægstu einkunn er sleppt.

<u>Mjög mikilvægt er að nemendur merki/tengi hvaða dæmi er á hvaða blaðsíðu á Gradescope, fyrir ómerkt/ótengd dæmi fást 0 stig.</u>

*nemendur á Austurlandi skila miðvikudaginn 11.október 2023 kl.23:59 og skilafrestur þeirra er stilltur miðað við það

English version:

("This is the fourth individual assignment. The deadline is Tuesday, October 10th 2023 at 23:59*. Students hand in solutions on pdf/jpg on Gradescope (*Gradescope is both accesible through the assignment in Canvas and also through gradescope.com*) and receive a graded version with comments. This is one of 5 individual assignments. All in all their weight is 20% of the final grade, but the lowest grade is dropped.")

<u>It is very important that students mark/assign which problem is on which page on Gradescope, for unmarked/unassigned examples you get 0 points.</u>

*students in the east of Iceland hand in on Wednesday October 11th at 23:59 and their deadline is set accordingly

Skiladæmi (e. Hand-in problems) :

Dæmi 1 (e. Problem 1) (15%)

Sannið með þrepasönnun ("mathematical induction") að eftirfarandi regla gildi fyrir allar jákvæðar heilar tölur n. Vandið röksemdafærsluna og látið ekkert vanta. **Setjið fram þrepunarforsenduna ("inductive hypothesis") og vitnið í hana þegar hún er notuð.** Sýnið **allar** milliniðurstöður í fylkjareikningum.
Gefið er fylkið

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Reglan er:

$$A^n = \begin{bmatrix} n+1 & n \\ -n & 1-n \end{bmatrix} \text{ fyrir } n \geq 1 \ .$$

English version

("Use mathematical induction to prove the following formula. Argue carefully and show your work. **State the inductive hypothesis and refer to it when it is used.** Show in detail **all** intermediate matrix calculations.
Given matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

The formula is:

$$A^n = \begin{bmatrix} n+1 & n \\ -n & 1-n \end{bmatrix} \text{ for } n \geq 1 \ .")$$

Dæmi 2 (e. Problem 2) (20%)

Sannið eftirfarandi setningu með þrepasönnun ("mathematical induction"). Vandið röksemdafærsluna og látið ekkert vanta. **Setjið fram þrepunarforsenduna ("inductive hypothesis") og vitnið í hana þegar hún er notuð.**

Setning: Summa fyrstu n liðanna af veldi af tveimur er $2^n - 1$.

Sönnum að setningin gildi fyrir öll $n \geq 1$. Látum setninguna heita $P(n)$ og þá fæst

$$P(n) : 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \ .$$

English version:

("Use mathematical induction to prove the following theorem. Argue carefully and show your work. **State the inductive hypothesis and refer to it when it is used.**

Theorem: The sum of the first n powers of two is $2^n - 1$.

Let's prove that the theorem holds for all $n \geq 1$. We call the theorem $P(n)$ and we now have

$$P(n) : 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \ .")$$

Dæmi 3 (e. Problem 3) (15%)

Gefin er eftirfarandi formúla fyrir fall

$$f(n) = 5n + 2, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

finnið þrepunarskilgreininguna á þessu falli, munið að taka fram viðeigandi upphafsskilyrði. Rökstyðjið svarið.

English version

("We are given the following formula for a function

$$f(n) = 5n + 2, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

give a recursive definition of this function, with initial condition(s). Argue carefully.")

Dæmi 4 (e. Problem 4) (8%+8%+10%)

Sænsk bílnúmer innihalda 6 stafi. Fyrst koma þrír bókstafir, síðan koma tveir tölustafir og í síðasta sætinu er ýmist bók- eða tölustafur. Allir bókstafirnir á bílnúmerinu eru hástafir. Gerum ráð fyrir 32 bókstöfum í stafrófinu og að öll slík bílnúmer séu leyfileg (t.d. KSF762, DLH15S, VVV111,VVV11V).

a) Hve mörg mismunandi bílnúmer eru til? Setjið upp svarið og reiknið út úr því.

b) Hve mörg slík bílnúmer byrja á X og enda á 2? Setjið upp svarið og reiknið út úr því.

c) Hve mörg bílnúmer innihalda strenginn 42 en ekki bókstafinn A og ekki töluna 7? Setjið upp svarið og reiknið út úr því.

English version

("A Swedish vehicle registration plate consists of 6 symbols. First there are three letters, then there are two digits and in the final place there is either a letter or a digit. All letters in the registration plate are capital letters. Assume that there are 32 different letters and that all such registration numbers are valid (e.g. KSF762, DLH15S, VVV111,VVV11V).

a) How many car registration numbers are there? Show a formula and compute a final answer.

b) How many such car registration numbers start with X and end with 1? Show a formula and compute a final answer.

c) How many such vehicle registration numbers contain the string 42, but neither the letter A nor the digit 7? Show a formula and compute a final answer.")

Dæmi 5 (e. Problem 5) (10%+14%)

Lykilorð skulu vera af lengdinni 7 tákn. Í þau má nota þrjár gerðir tákna, þ.e. bókstafi(eingöngu hástafi), sértákn og tölustafi. Gerum ráð fyrir 32 bókstöfum í stafrófinu, 20 sértáknum og 10 tölustöfum. Gerum ráð fyrir því að öll slík lykilorð séu leyfileg (t.d. AA$Y3B4, BA$Y3B4 og ####%%%).

a) Hve mörg lykilorð innihalda einungis eina gerð tákna (til dæmis eintóm sértákn)? Setjið upp svarið en ekki þarf að reikna út úr því.

b) Setjum nú það skilyrði að lykilorð verði að hafa sértákn í aftasta eða næst aftasta sætinu. Hve mörg lykilorð uppfylla skilyrðið? Setjið upp svarið, en ekki þarf að reikna út úr því. Rökstyðjið svarið.

English version

(" Passwords consist of 7 symbols which can be of three types, i.e. uppercase letters, special symbols or digits. Assume that there are 32 letters, 20 special symbols and 10 digits. Assume that all such passwords are valid (e.g. AA$Y3B4, BA$Y3B4 and ####%%%).

a) How many passwords contain only one type of symbols (for example only special symbols)? Show a formula but you do not have to compute a final answer.

b) Let us now require that a password must have a special symbol in the last position or in the second last position. How many passwords fulfill this condition? Show a formula but you do not have to compute a final answer. Show arguments.")