Einführung in das Wissenschaftliche Rechnen
Praktikumsblatt 2
Aufgabe 2 (Konvergenzordnung)

Lena Hilpp Matr.Nr.: 1941997
Jan Frithjof Fleischhammer Matr.Nr.: 2115491

06.05.2020

Problemstellung

In dieser Aufgabe haben wir das Konvergenzverhalten des θ-Euler-Verfahren

$$y^{i+1} = y^i + \tau((1-\theta)f(t_i, y^i) + \theta f(t_{i+1}, y^{i+1}) \text{ für } \theta \in [0,1],\ i = 0, 1, ...$$

untersucht. Dabei haben wir folgende Verfahren verwendet:

- explizites Eulerverfahren $(\theta = 0)$
- Crank-Nicolson-Verfahren $(\theta = 0.5)$
- implizites Eulerverfahren $(\theta = 1)$

Wir wollen die experimentelle Konvergenzordnung (eoc = experimental order of convergence) untersuchen. Als Test-Problem verwenden wir das Anfangswertproblem des *Verhulst*-Modells zur Modellierung der Weltbevölkerung

$$y' = y(d - ay) \qquad \text{(Verhulst)}$$

mit Parametern $d = 2.9 * 10^{-2}$ und $a = 2.941 * 10^{-3}$.
Die exakte Lösung ist dabei gegeben durch

$$y(t) = \frac{d/a}{1 - Cexp(-d(t - t_0))} \qquad (1)$$

mit $C \approx -2.25$ und $t_0 = 1960$ für $t \geq 1960$.

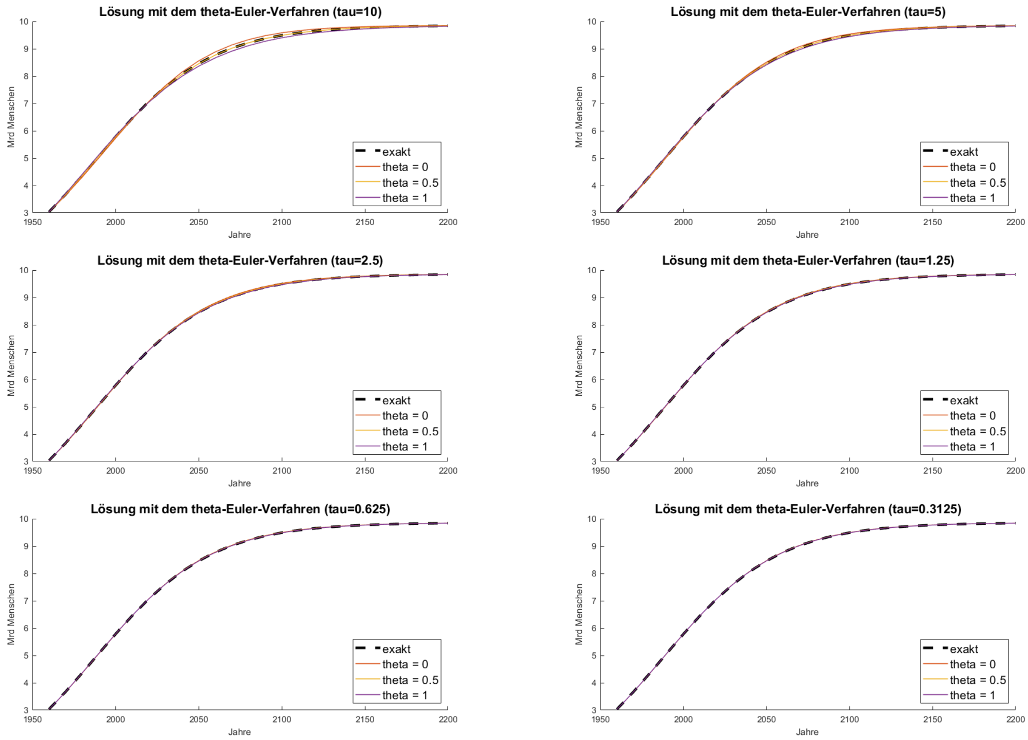

Abbildung 1: Lösungsverlauf für unterschiedliche Schrittweiten

Ergebnis

In Abbildung 1 sieht man den Verlauf der numerischen Lösungen im Vergleich zur exakten Lösung.
Wir speichern das Maximum über den Fehler aller Zeitschritte

$$|E|_\infty := \max_{i=1,\ldots,N} |E_i|$$

wobei

$$E_i := y(t_i) - y^i$$

der Fehler zwischen der Approximation $(y^i)_i$ und der exakten Lösung y ist.

Für die Konvergenzordnung benötigen wir die Abschätzung

$$|E|_\infty \leq C\tau^p$$

wobei p die Konvergenzordnung ist, τ die Schrittweite und C eine Konstante ist, die nur von dem Intervall $I = [0, T]$, der Lipschitz-Konstanten L_f der rechten Seite der DGL und der zweiten Ableitung der exakten Lösung abhängt.

Eine solche Abschätzung erhält man durch das $eoctool$.