# Einführung in das Wissenschaftliche Rechnen
# Praktikumsblatt 6
# Aufgabe 15 (Transportgleichung)

Lena Hilpp Matr.Nr.: 1941997
Jan Frithjof Fleischhammer Matr.Nr.: 2115491

08.06.2020

## Problemstellung

In dieser Aufgabe betrachtet man das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\varepsilon\Delta u + b \cdot \nabla u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

mit $\varepsilon = 0.02$ $b = [1, 1/2]$ und als Gebiet $\Omega = (0,1)^2$. Die rechte Seite $f$ von (1) wird so gewählt, dass die exakte Lösung durch

$$u(x,y) = x\left(1 - \exp\left(-\frac{b1}{\varepsilon}(1-x)\right)\right) y \left(1 - \exp\left(-\frac{b2}{\varepsilon}(1-y)\right)\right)$$

gegeben ist.
Mit Hilfe der Finiten-Differenzen-Methode wird eine numerische Lösung berechnet und die experientelle Konvergenzordnung der 5-Punkte-Stern-Approximation mit dem zentralen Differenzenquotienten, für die Diskretisierung des Gradienten, bestimmt.

## Ergebnis

In *Abbildung 1* sieht man die numerische Lösung des Transportproblems für verschiedene $\varepsilon$ auf dem Gebiet mit $11$ Knoten pro Dimension. Man kann erkennen, dass die Lösung für größere $\varepsilon$ flacher wird.

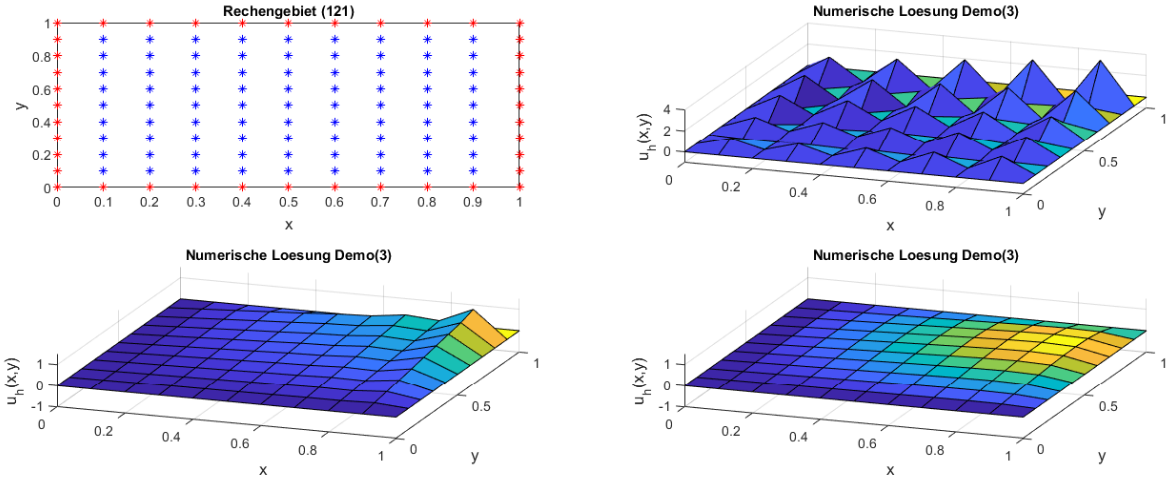


Abbildung 1: Gitter $\mathcal{G}_h$ und numerische Lösung $u_h$ für $\varepsilon = 0.001/0.02/0.1$

In *Abbildung 2* ist die numerische Lösung für die selben $\varepsilon$ und für $100$ Knoten pro Dimension abgebildet.

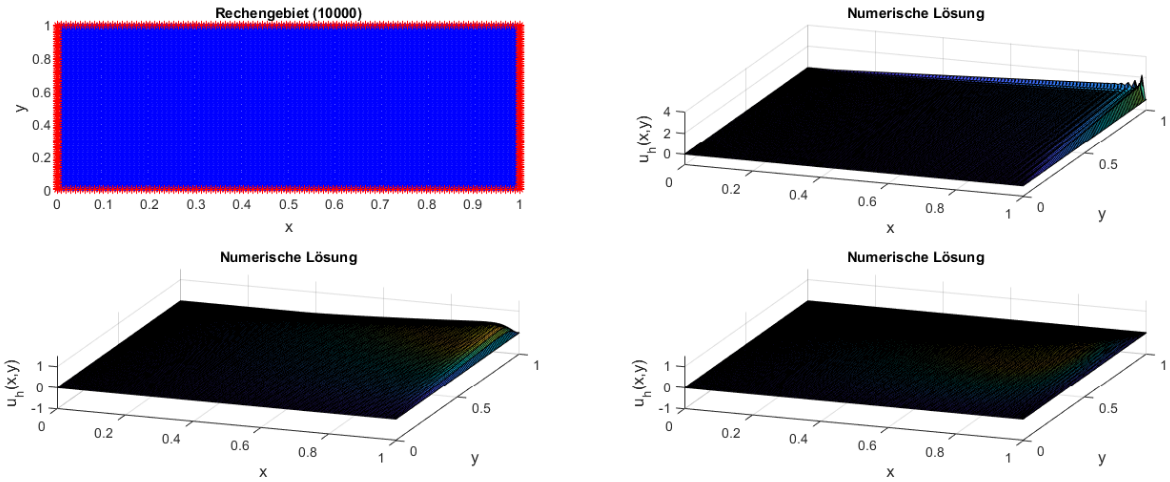


Abbildung 2: Gitter $\mathcal{G}_h$ und numerische Lösung $u_h$ für $\varepsilon = 0.001/0.02/0.1$

Dieses Randwertproblem ist für kleine $\varepsilon > 0$ ein Beispiel für ein konvektionsdominiertes Modellproblem (Transportgleichung) und zeigt die typisch auftretenden Schwierigkeiten dieser Klasse von partiellen Differentialgleichungen. Dies kann man für die verschiedenen $\varepsilon$ in *Abbildung 3* deutlich erkennen. Die Konvergenz für sehr kleine $\varepsilon$ ist sehr schlecht und die Lösung instabil. Das zentrale Differenzenverfahren versagt für $\varepsilon \ll h$.

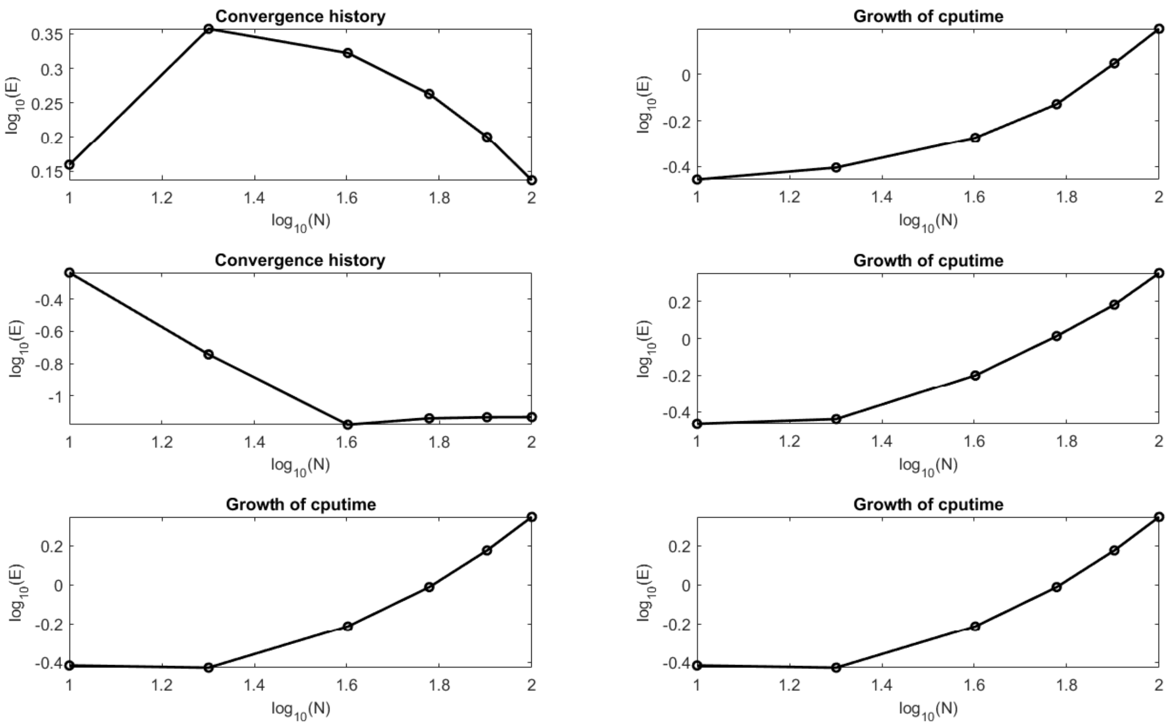


Abbildung 3: Konvergenzordnung und Rechenzeit für $\varepsilon = 0.001/0.02/0.1$

Abhilfe schafft das *upwind-Verfahren*. Hier erhält man auch für kleine $\varepsilon$ eine gute Approximation an die Lösung. Dies kann man für $\varepsilon = 0.001$ in *Abbildung 4* sehen.

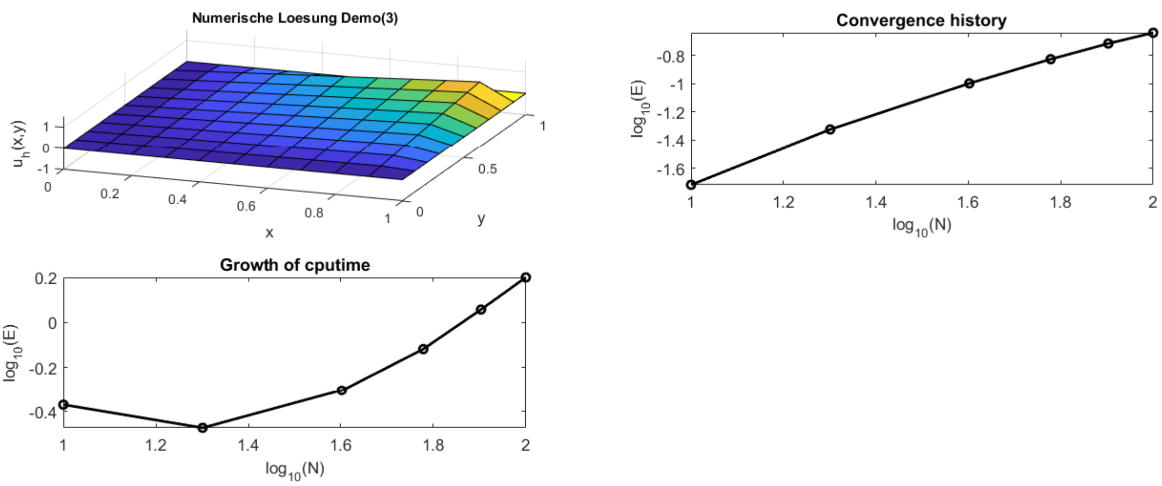


Abbildung 4: upwind-Verfahren für $\varepsilon = 0.001$