

Einführung in das Wissenschaftliche Rechnen

Praktikumsblatt 6

Aufgabe 14 (Singuläre Lösung)

Lena Hilpp Matr.Nr.: 1941997
Jan Frithjof Fleischhammer Matr.Nr.: 2115491

08.06.2020

Problemstellung

In dieser Aufgabe betrachtet man das Poisson-Problem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = u^D & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

wobei Ω ein sogenanntes L -Gebiet ist. Die rechte Seite f und die Dirichlet-Randbedingungen von (1) werden so gewählt, dass die exakte Lösung des Problems, in Polarkoordinaten, durch

$$u(r, \phi) = r^{2/3} \cos\left(\frac{2}{3}\phi - \frac{\pi}{6}\right)$$

gegeben ist. Daraus ergibt sich $f = 0$.

Mit Hilfe der Finiten-Differenzen-Methode wird eine numerische Lösung berechnet und die experimentelle Konvergenzordnung der 5- und 9-Punkte-Stern-Approximation bestimmt.

Ergebnis

In *Abbildung 1* sieht man die berechnete Lösung des Poisson-Problems auf unterschiedlich feinen Gittern. Die Lösung wird hier für 9 Knoten pro Dimension und für 100 Knoten pro Dimension dargestellt.

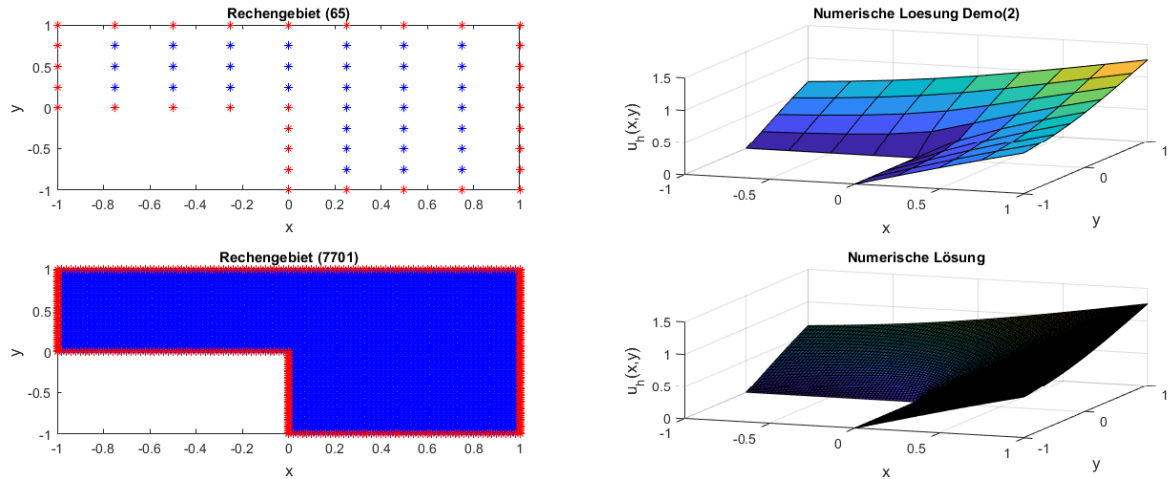


Abbildung 1: unterschiedlich feine Gitter \mathcal{G}_h und numerische Lösung u_h

Für $N = [10; 20; 40; 60; 80; 100]$ (Anzahl an Punkten pro Dimension für jeden Durchlauf) sieht man in *Abbildung 2* die experimentelle Konvergenzordnung und die Rechenzeit mit dem 5- und 9-Punkte-Stern.

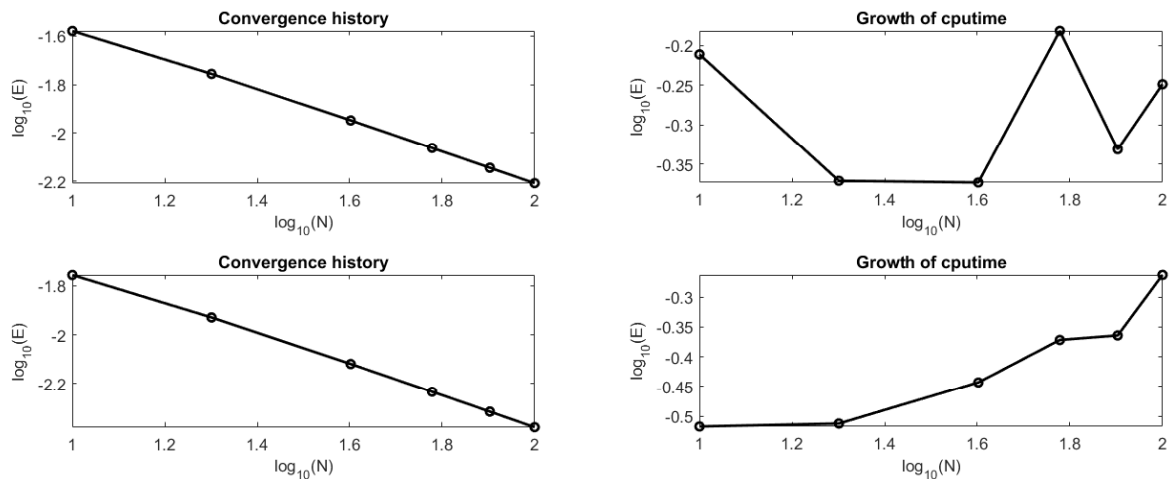


Abbildung 2: Konvergenzordnung mit dem 5- und 9-Punkte-Stern

Der geschätzte Fehler beim 5-Punkte-Stern liegt bei $E = 1.25 \times 10^{-1} * h^{0.65}$ und beim 9-Punkte-Stern bei $E = 8.37 \times 10^{-2} * h^{0.65}$. Erwartet haben wir allerdings etwas anderes. In der Theorie sollte der 5-Punkte-Stern Ordnung 2 besitzen und der 9-Punkte-Stern Ordnung 6. Diese beobachteten Konvergenzordnungen stehen trotzdem nicht im Widerspruch zur theoretischen Fehlerschranke der Finite-Differenzen-Methode, da wir hier ein L-Gebiet betrachten und in solchen Gebieten entstehen typischerweise Lösungen mit einer Singularität in der einspringenden Ecke, etwa von der Ordnung $\mathcal{O}(|(x,y)|^{2/3})$, was hier auch der Fall ist. Die Rechenzeit beim 5-Punkte-Stern beträgt $T = 8.56 \times 10^1 * N^{0.31}$ und beim 9-Punkte-Stern $T = 3.03 \times 10^{-1} * N^{0.52}$.