

Einführung in das Wissenschaftliche Rechnen

Praktikumsblatt 4

Aufgabe 6 (Sedimentation)

Lena Hilpp Matr.Nr.1941997
Jan Frithjof Fleischhammer Matr.Nr.2115491

26.05.2020

Problemstellung

In dieser Aufgabe betrachtet man eine Menge von $N = 16$ sedimentierenden Partikeln. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ sind jeweils $N/2 = 8$ Partikel gleichverteilt auf zwei Kreisen $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ und $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \times \{1\}$ angeordnet.

Für den zeitlichen Verlauf der Schwerpunkte $x^\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{I} := 1, \dots, N$ gelte folgendes Differentialgleichungssystem

$$\partial_t x^\alpha = -\frac{5}{8N} \sum_{\beta \in \mathbb{I}, \beta \neq \alpha} K(x^\alpha - x^\beta) e_3 \quad (1)$$

für alle $\alpha \in \mathbb{I}$ mit $e_3 = [0, 0, 1]^T$ und der *Kernfunktion* oder *Greenschen Funktion*

$$K(z) = \frac{1}{|z|} \left(\mathbf{Id} + \frac{z \otimes z}{|z|^2} \right).$$

Bis zur Zeit $T = 100$ soll dieses System von Differentialgleichungen (1), das die Bewegung der Partikel beschreibt, gelöst und graphisch dargestellt werden.

Ergebnis

Die Lösungen von (1) wurden mithilfe des MATLAB-Lösers *ode45* berechnet. Der Löser arbeitet mit einer automatischen Schrittweitensteuerung und legt deshalb selbst fest in wieviele Zeitschritte das Zeitintervall $[t_0, T]$ unterteilt wird. Die Zeitschritte sind nicht mehr äquidistant, als minimale Schrittweite wird hier 0,015162 und als maximale Schrittweite 0,41260 verwendet.

Anschließend wird die Lösung auf ein Gitter mit 100 Zeitschritten interpoliert und der zeitliche Verlauf der Partikel als Animation geplottet. In *Abbildung 1* ist die Position der Partikel für 4 verschiedene Zeitpunkte abgebildet.

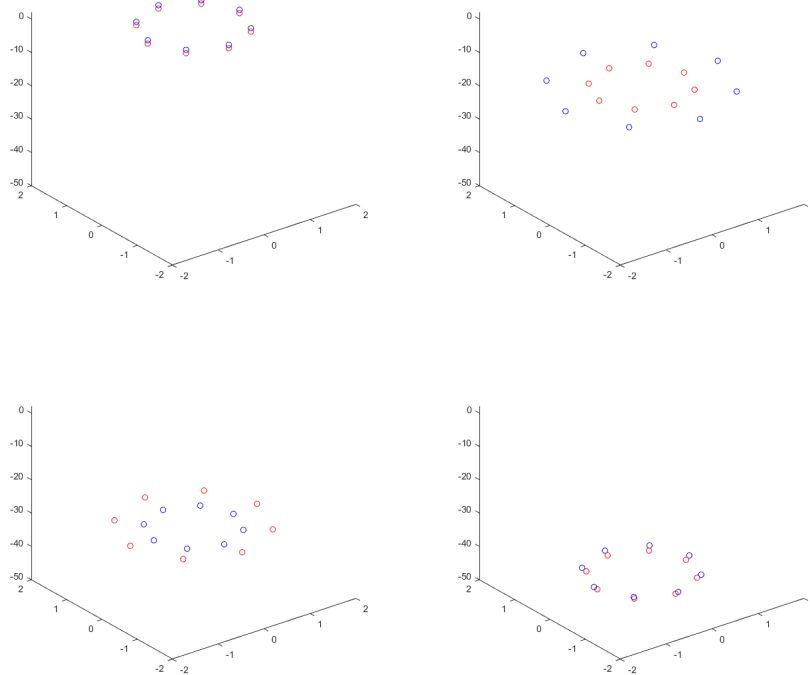


Abbildung 1: Zeitlicher Verlauf der Partikel zum Zeitpunkt $t=0/30/70/100$

In *Abbildung 2* sieht man zusätzlich die Positionen der Partikel zu allen Zeitpunkten. In blau die Partikel, die ihren Startpunkt auf dem oberen Kreis hatten und in rot die Partikel, mit Startpunkt auf dem unteren Kreis. Es ist zuerkennen, dass sich alle 8 Partikel auf dem oberen bzw. unteren Kreis gleich bewegen.

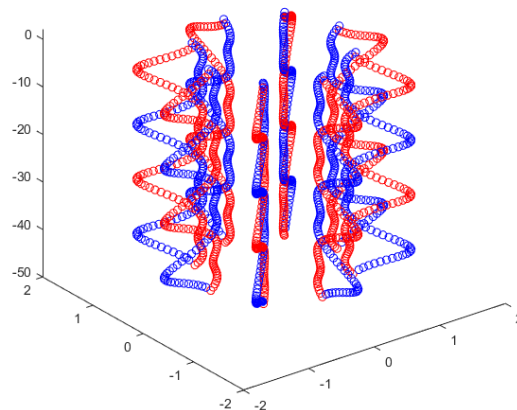


Abbildung 2: Zeitlicher Verlauf der Partikel für $t=0$ bis $t=100$

Um die Partikel mit unterschiedlicher Startposition besser vergleichen zu können wurde anschließend die Bewegung zweier anfangs übereinanderliegender Partikel als 2D-Projektion geplottet. Man erkennt in *Abbildung 3* deutlich, dass sich die Partikel periodisch versetzt zueinander abwärts bewegen.

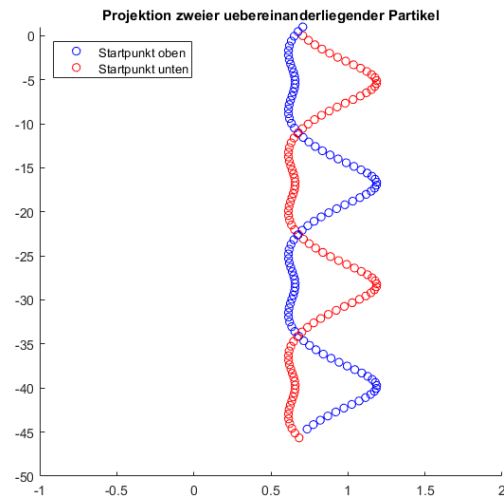


Abbildung 3: Trajektorie zweier sedimentierender Partikel