Einführung in das Wissenschaftliche Rechnen
Praktikumsblatt 2
Aufgabe 2 (Konvergenzordnung)

Lena Hilpp Matr.Nr.: 1941997
Jan Frithjof Fleischhammer Matr.Nr.: 2115491

06.05.2020

Problemstellung

In dieser Aufgabe habe wird das Konvergenzverhalten des θ-Euler-Verfahren

$$y^{i+1} = y^i + \tau((1-\theta)f(t_i, y^i) + \theta f(t_{i+1}, y^{i+1}) \text{ für } \theta \in [0,1],\ i = 0, 1, ...$$

untersucht. Dabei wurden folgende Verfahren verwendet:

- explizites Eulerverfahren $(\theta = 0)$
- Crank-Nicolson-Verfahren $(\theta = 0.5)$
- implizites Eulerverfahren $(\theta = 1)$

Ziel ist es, die experimentelle Konvergenzordnung (eoc = experimental order of convergence) zu bestimmen und mit theoretisch berechneten Werten zu vergleichen. Verwendet wurde das Anfangswertproblem des *Verhulst*-Modells zur Modellierung der Weltbevölkerung

$$y' = y(d - ay) \tag{Verhulst}$$

mit Parametern $d = 2.9 * 10^{-2}$ und $a = 2.941 * 10^{-3}$.
Die exakte Lösung ist dabei gegeben durch

$$y(t) = \frac{d/a}{1 - Cexp(-d(t - t_0))} \tag{1}$$

mit $C \approx -2.25$ und $t_0 = 1960$ für $t \geq 1960$.

Da die exakte Lösung bekannt ist, kann man den Fehler leicht bestimmen.

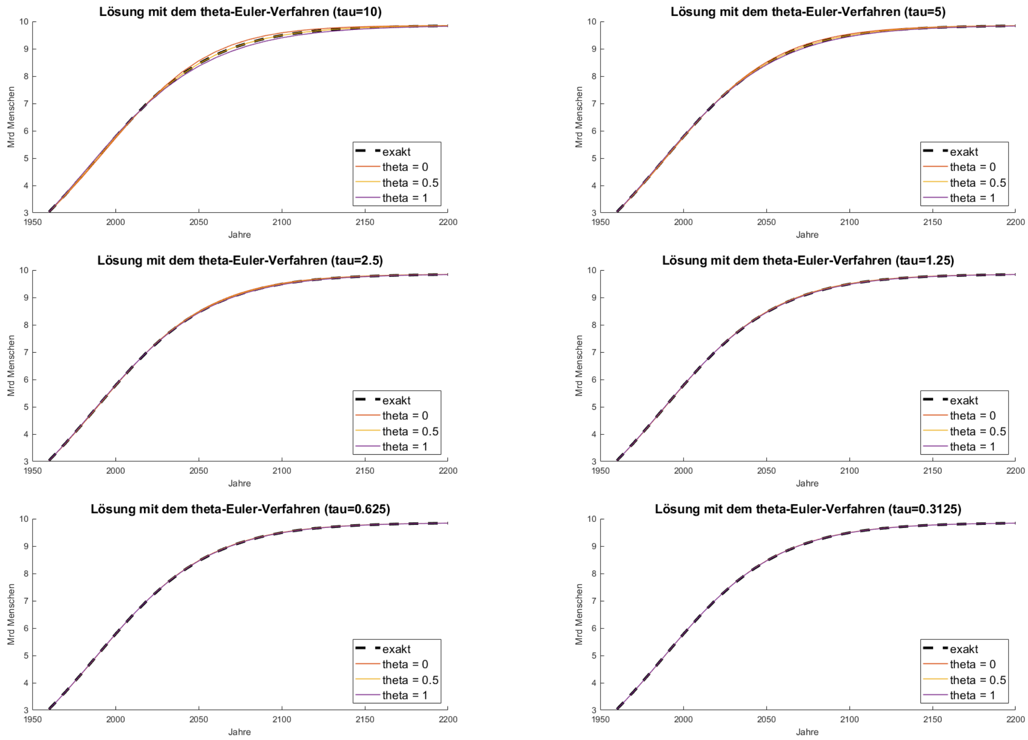

Abbildung 1: Lösungsverlauf für unterschiedliche Schrittweiten

Ergebnis

In Abbildung 1 sieht man den Verlauf der numerischen Lösungen im Vergleich zur exakten Lösung für unterschiedliche Schrittweiten τ. Es ist erkennbar, dass mit kleiner werdender Schrittweite τ der Fehler zwischen exakter Lösung und Approximation kleiner wird.

Das Maximum über den Fehler aller Zeitschritte wird berechnet durch

$$|E|_\infty := \max_{i=1,\dots,N} |E_i|$$

wobei

$$E_i := y(t_i) - y^i$$

der Fehler zwischen der Approximation $(y^i)_i$ und der exakten Lösung y ist.

Um die Konvergenzordnung zu bestimmen benötigt man die Abschätzung

$$|E|_\infty \leq C\tau^p$$

wobei p die Konvergenzordnung ist, τ die Schrittweite und C eine Konstante ist, die nur von dem Intervall $I = [0, T]$, der Lipschitz-Konstanten L_f der rechten Seite der DGL und der zweiten Ableitung der exakten Lösung abhängt.

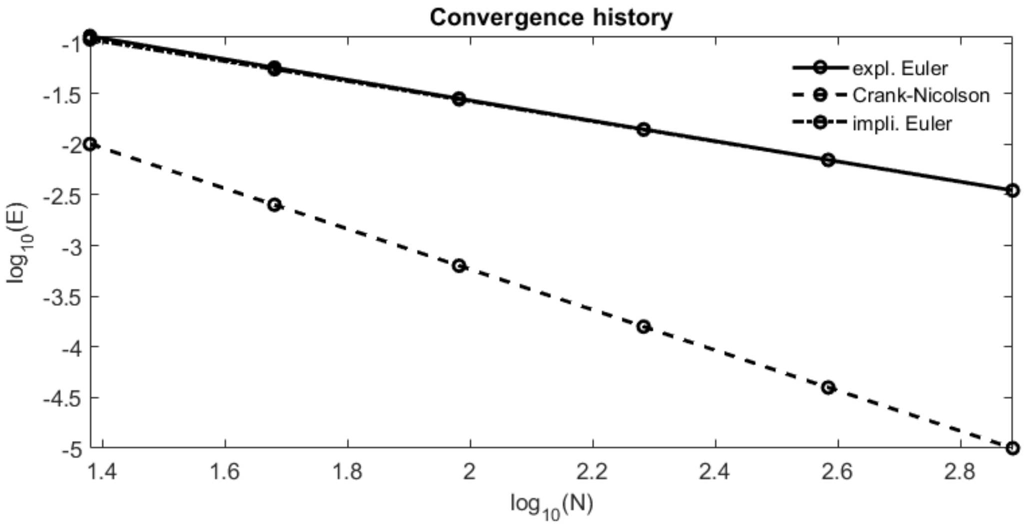

Abbildung 2: Graphische Ausgabe des eoctool angewandt auf den Fehler

Das Berechnungstool *eoctool* lieft eine solche Abschätzung.

eoctool angewendet auf den Fehler ergibt die Werte aus Tabelle 1, welche in Abbildung 2 graphisch dargestellt sind.

N	expl. Euler	eoc	Crank-Nicolson	eoc	impli. Euler	eoc
24	1.17_{-1}		1.00_{-2}		1.08_{-1}	
48	5.71_{-2}	1.03_{0}	2.52_{-3}	1.99_{0}	5.50_{-2}	0.98_{0}
96	2.83_{-2}	1.02_{0}	6.31_{-4}	2.00_{0}	2.77_{-2}	0.99_{0}
192	1.41_{-2}	1.01_{0}	1.58_{-4}	2.00_{0}	1.39_{-2}	0.99_{0}
384	7.01_{-3}	1.00_{0}	3.96_{-5}	2.00_{0}	6.98_{-3}	1.00_{0}
768	3.50_{-3}	1.00_{0}	9.96_{-6}	1.99_{0}	3.50_{-3}	1.00_{0}

Tabelle 1: eoctool-Auswertung des Fehlers

Mit Durchschnittbildung erhält man folgende Fehlerabschätzungen:

- explizites Eulerverfahren: $E = 2.80 * \tau^{1.01}$
- Crank-Nicolson-Verfahren: $E = 5.70 * \tau^{2.00}$
- implizites Eulerverfahren: $E = 2.60 * \tau^{0.99}$

Theoretisch erhält man für das θ-Euler-Verfahren Konvergenzordnung 2 für $\theta = 1/2$ und Konvergenzordnung 1 für $\theta \neq 1/2$ (siehe Skript). Dies wird durch dieses Ergebnis bestätigt.

eoctool kann man auch auf die Rechenzeit anwenden. Dabei erhält man die Werte aus Tabelle 2, die in Abbildung 3 visualisiert werden.

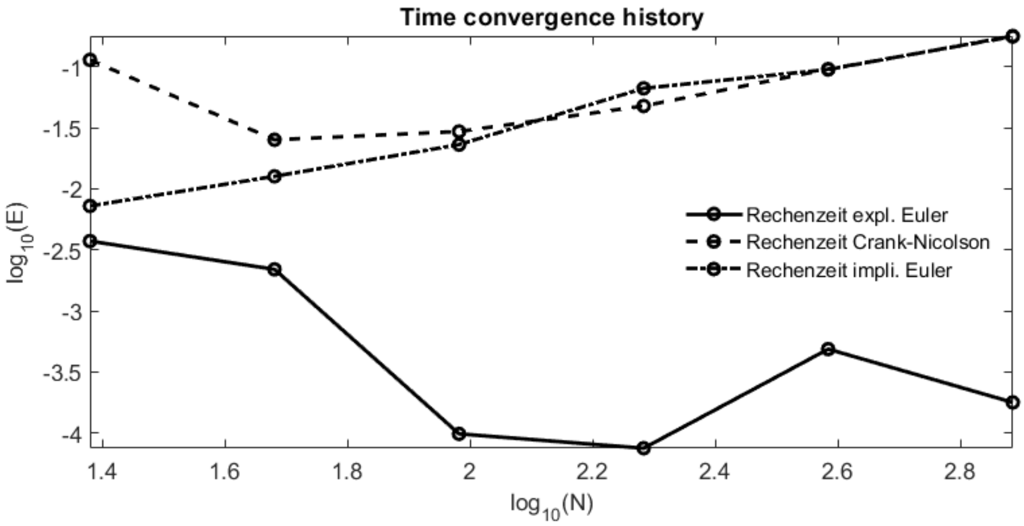

Abbildung 3: Graphische Ausgabe des eoctool angewandt auf die Rechenzeit

N	expl. Euler	eoc	Crank-Nicolson	eoc	impli. Euler	eoc
24	7.25_{-4}		8.20_{-3}		6.51_{-3}	
48	2.01_{-4}	1.85_{0}	1.22_{-2}	-0.57_{0}	1.13_{-2}	-0.79_{0}
96	3.93_{-5}	2.35_{0}	2.32_{-2}	-0.93_{0}	2.27_{-2}	-1.01_{0}
192	4.50_{-5}	-0.20_{0}	4.63_{-2}	-0.99_{0}	4.36_{-2}	-0.94_{0}
384	6.00_{-5}	-0.42_{0}	8.64_{-2}	-0.90_{0}	9.07_{-2}	-1.06_{0}
768	8.37_{-5}	-0.48_{0}	1.75_{-1}	-1.02_{0}	1.73_{-1}	-0.93_{0}

Tabelle 2: eoctool-Auswertung für die Rechenzeit

Wenn man wieder den Durchschnitt über diese Daten bildet ergibt sich das folgende Rechenzeitverhalten:

- explizites Eulerverfahren: $E = 1.85 * 10^4 * \tau^{0.91}$
- Crank-Nicolson-Verfahren: $E = 3.13 * 10^{-3} * \tau^{-0.70}$
- implizites Eulerverfahren: $E = 1.35 * 10^{-3} * \tau^{-0.95}$

Laut diesen Daten ist die Rechenzeit des expliziten Eulerverfahrens proportional zur Schrittweite, also je kleiner die Schrittweite, desto kürzer die Rechenzeit, was nicht stimmt.

Wenn man die Werte der Tabelle aber genauer ansieht, sieht man, dass sie anfangs sehr groß sind und dann negativ werden. Dies kann man dadurch erklären, dass bei kurzen Berechnungen programmunabhängige Berechnungen einen größeren Einfluss haben, wie zum Beispiel die Zeitmessung selbst.

Insgesamt erwartet man, dass die Zeitberechnung aller Verfahren proportional zu τ^{-1} bzw zu der Anzahl der Schritt $N \approx \frac{1}{\tau}$ ist, da für jeden Schritt die selbe Berechnung durchgeführt werden muss, welche unabhängig von der Schrittweite ist. Das ist bei dem impliziten Eulerverfahren und dem Crank-Nicolson-Verfahren erkennbar.