# Einführung in das Wissenschaftliche Rechnen
# Praktikumsblatt 3
# Aufgabe 5 (Von der Erde zum Mond)

Lena Hilpp Matr.Nr.: 1941997
Jan Frithjof Fleischhammer Matr.Nr.: 2115491

13.05.2020

## Problemstellung

In dieser Aufgabe wurde der Flug einer Rakete von der Erde zum Mond nach *Jules Verne* modelliert und numerisch berechnet.

Dabei wird die Rakete mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ mit dem Abschusswinkel $\theta$ von der Erdoberfläche abgeschossen. Dabei wird nur das Gravitationsfeld der Erde und des Mondes beachtet.
Mit dem *zweiten Newtonschen Gesetz* ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$) ergibt sich eine gewöhnliche Differenzialgleichung zweiter Ordnung für die Bewegung der Rakete.
Da die Bewegung in einer Ebene stattfindet, kann man durch Rechnen in zwei Dimensionen Rechenaufwand sparen.

Dabei beschreibt

$$V(x) = -\gamma(\frac{m_E}{dist_E(x)} + \frac{m_M}{dist_M(x)})$$

das Gravitationspotential der Erde und des Mondes. $dist_E(\cdot)$ bzw. $dist_M(\cdot)$ ist dabei der Abstand zum Erdmittelpunkt bzw. Mondmittelpunkt.

Die Gravitationsfeldstärke ist dann definiert durch

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}(x) = -\nabla V(x)$$

Daraus ergibt sich das Anfangswertproblem: Finde $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, sodass

$$\begin{cases} \mathbf{x}'' = \boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(\mathbf{0}) = \mathbf{x_0}, \\ \mathbf{v}(\mathbf{0}) = \mathbf{v_0}, \end{cases} \tag{1}$$

mit der Startposition $\mathbf{x_0} = [R_E, 0]$ auf der Erdoberfläche und der Abschussgeschwindigkeit $\mathbf{v_0} = v_0[cos(\theta), sin(\theta)]$.

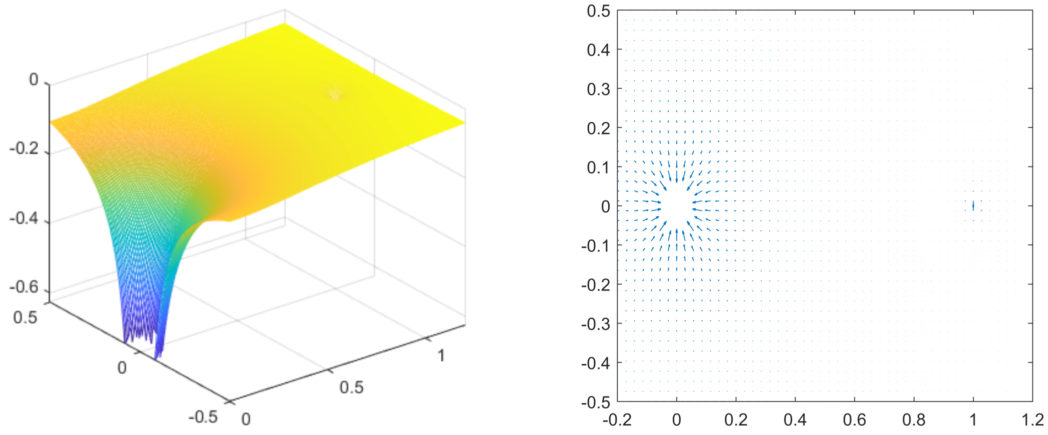

Abbildung 1: Verlauf des Gravitationspotential (links) und der Gravitationsfeldstärke (rechts)

## Ergebnis

In *Abbildung 1* sind die Verläufe des Gravitationspotentials und der Gravitationsfeldstärke aufgezeichnet. Dabei wurden die Raumkoordinaten entdimensioniert mit dem Referenzwert $x_{ref} = 3.844 \times 10^8 m$, was dem Abstand von der Erde zum Mond entspricht. Somit liegt die Erde im Ursprung und der Mond in $(1, 0)$.

In *Abbildung 2* ist der Verlauf der numerischen Lösung, der zeitliche Verlauf der x-Koordinate, der Geschwindigkeit in x-Richtung sowie des Abstands zur Erde aufgetragen.

Die Rakete ist dabei nach $6.6466$ Tage wieder auf der Erde.

In diesem Model hat die Rakete einen Minimalabstand zur Mondoberfläche von $-9.404551 \times 10^5 m$, kollidiert also mit der Mondoberfläche.

In *Abbildung 3* sieht man der Verlauf des Gravitationspotential der Rakete.

Verwendet wurde dabei der *matlab*-Löser *ode45*, mit *ode15s* und *ode23s* erhält man Ähnliche Ergebnisse.

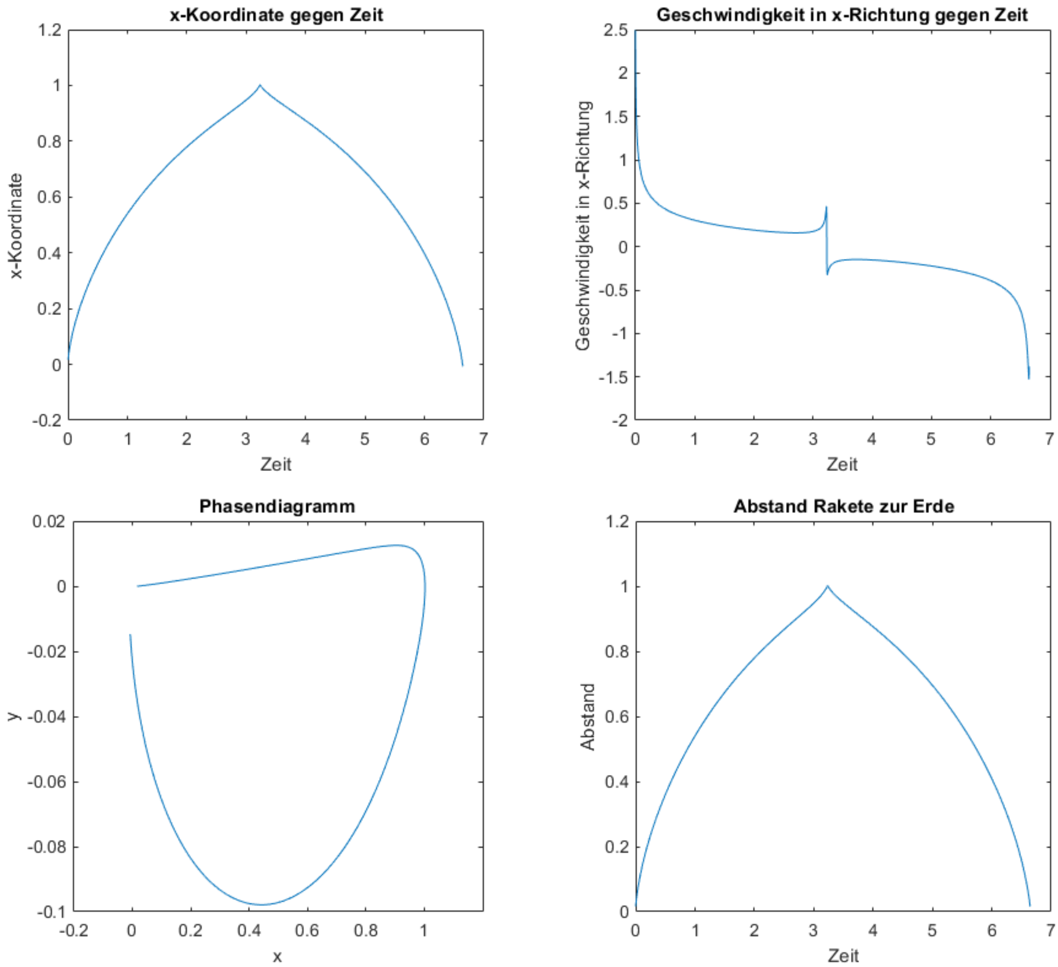


Abbildung 2: Verlauf der numerischen Lösung

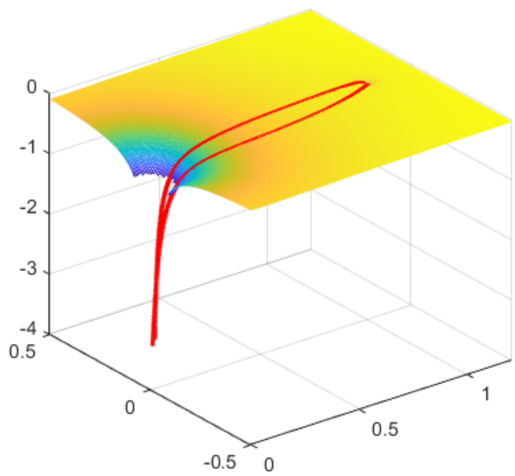

Abbildung 3: Gravitationspotential der Rakete