Einführung in das Wissenschaftliche Rechnen
Praktikumsblatt 4
Aufgabe 7 (Krankheitsausbreitung)

Lena Hilpp Matr.Nr.: 1941997
Jan Frithjof Fleischhammer Matr.Nr.: 2115491

27.05.2020

Problemstellung

In dieser Aufgabe sollte ein SIR-Modell (**S**usceptible-**I**nfected-**R**ecovered) verwendet werden, um die Ausbreitung einer Krankheit zu modellieren.

Die Bevölkerung wird dabei in Anfällige (S), Infizierte (I) und Erholte (R) unterteilt. Dabei gibt es zwei Zustandänderungen:

- Infektion: Eine Person geht von S nach I über. Die Infektionsrate wird durch β beschrieben.
- Heilung / Tod: Eine infizierte Person geht von I nach R. Diese Rate wird durch γ beschrieben.

Es wird dabei als Modell-Bevölkerung Karlsruhe gewählt. Die Bevölkerung wird in 27 Bezirke unterteilt und eine Matrix Φ gegeben. Φ_{ij} gibt dabei den Bevölkerungsanteil des Stadtteils i an, der vorrangig in den Stadtteil j pendelt.

Wenn durch N_i der Bevölkerungszahl von Stadtteil i gegeben ist, beschreibt

$$N_i^{tot} = \sum_{m=1}^{27} \Phi_{mi} N_m$$

die Anzahl der Personen, die im Stadtteil i arbeiten.
Damit erhält man vollendes Differenzialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}
\partial_t S_i(t) &= -\sum_{j=1}^{27}\sum_{k=1}^{27} \beta \Phi_{ij} S_i(t) \frac{\Phi_{kj} I_k(t)}{N_j^{tot}} \\
\partial_t I_i(t) &= \sum_{j=1}^{27}\sum_{k=1}^{27} \beta \Phi_{ij} S_i(t) \frac{\Phi_{kj} I_k(t)}{N_j^{tot}} - \gamma I_i(t) \\
\partial_t R_i(t) &= \gamma I_i(t)
\end{aligned}$$

Dabei beschreibt der Term $\Phi_{ij}S_i(t)$ die Zahl der anfälligen Personen aus Stadtteil i, die in Stadtteil j arbeiten und der Term $\Phi_{kj}I_k(t)$ die Zahl der infizierten Personen aus Stadtteil k, die in Stadtteil j arbeiten.

Ergebnis

Zunächst wurde eine Krankheit mit $\beta = 0.5$ und $\gamma = 0.25$ betrachtet.
Zum Lösen wird das explizite Eulerverfahren mit Schrittweite 1.

In Abbildung 1 sieht man den Verlauf der Lösung, wobei $I = \sum_{i=1}^{27} I_i$, S und R analog.

In Abbildung 2 ist der räumliche Verlauf der Krankheit dargestellt.

Man sieht, dass die Zahl der Gesamtbevölkerung konstant bleibt, was Sinn macht, denn durch Zusammenaddieren des Differentialgleichungssystems erhält man

$$\partial_t N(t) = \partial_t S_i(t) + \partial_t I_i(t) + \partial_t R_i(t) = 0$$

wobei $N(t)$ die Gesamtbevölkerungszahl ist.

Nun betrachtet man einen anderen Krankheitserreger mit $\beta = 3.75$ und $\gamma = 0.25$ (etwa Masern ohne Impfungen). Unter Verwendung der gleichen Mathode erhält man Abbildung 3.

Die Infiziertenzahl wird schnell stark negativ, was nicht dem Modell entspricht. Dies liegt daran, dass es sich um ein steifes Problem handelt und ein expliziter Löser verwendet wurde. Um dieses Problem zu beheben könnte man entweder einen impliziten Löser verwenden, oder die Schrittweite verkleinern. Das Ergebnis mit Schrittweite 0.1 sieht man in Abbildung 4.

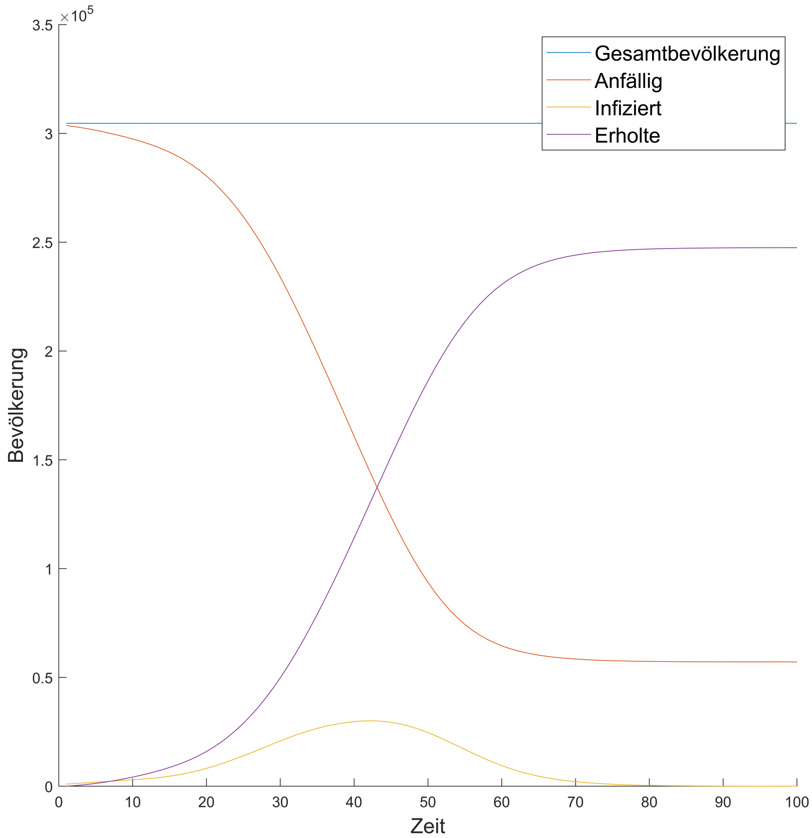

Abbildung 1: Verlauf der Lösung

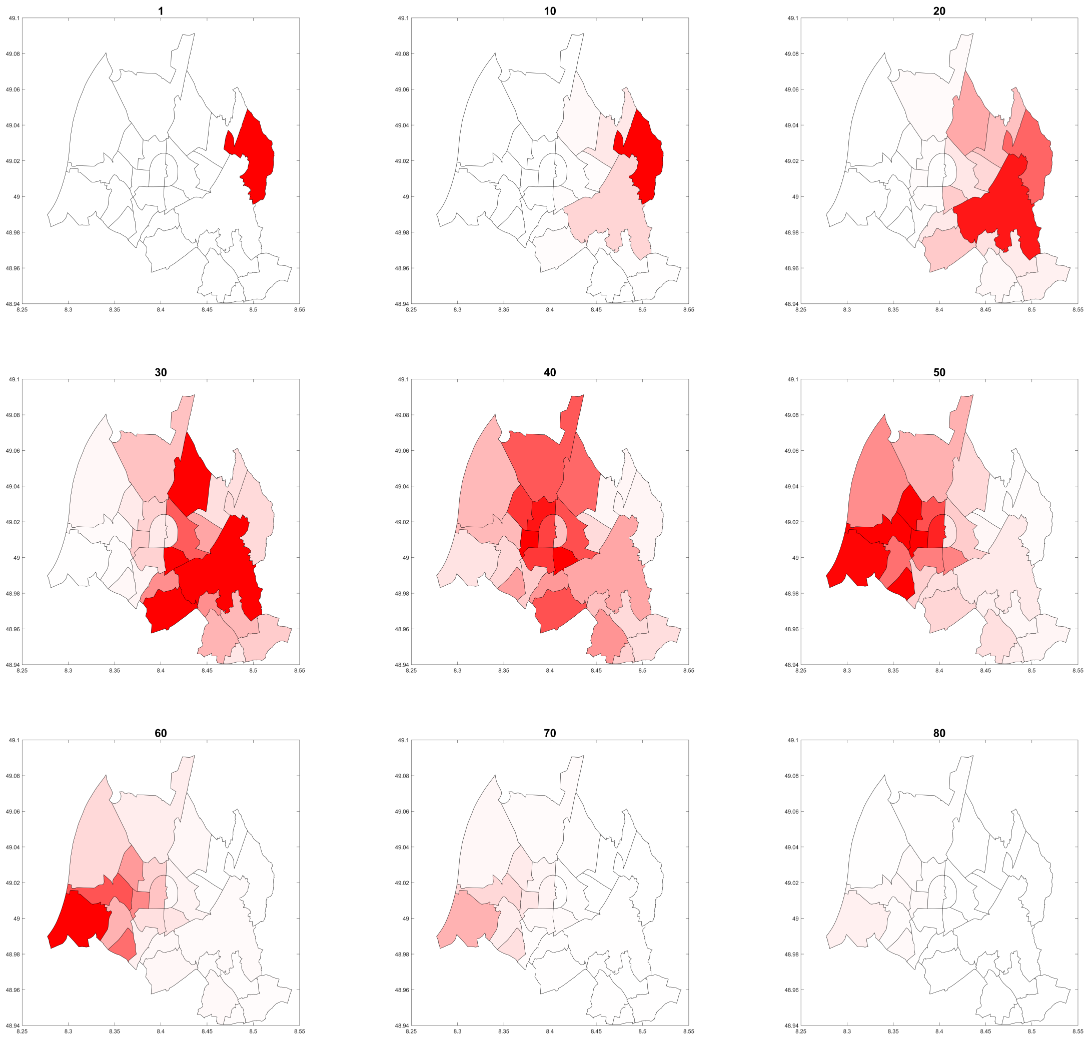

Abbildung 2: Verlauf der Krankheit zu gewählten Zeitschritten

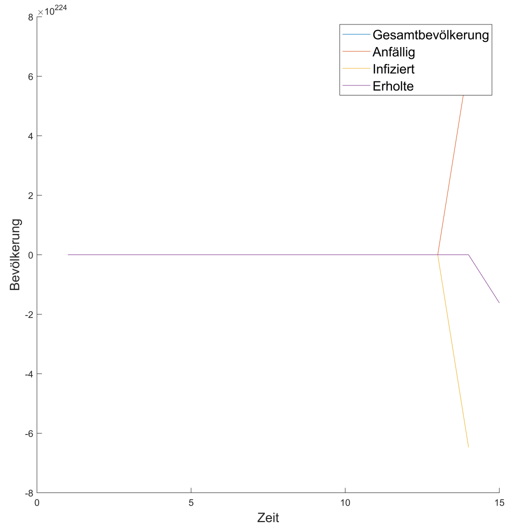

Abbildung 3: Krankheitsverlauf Masern

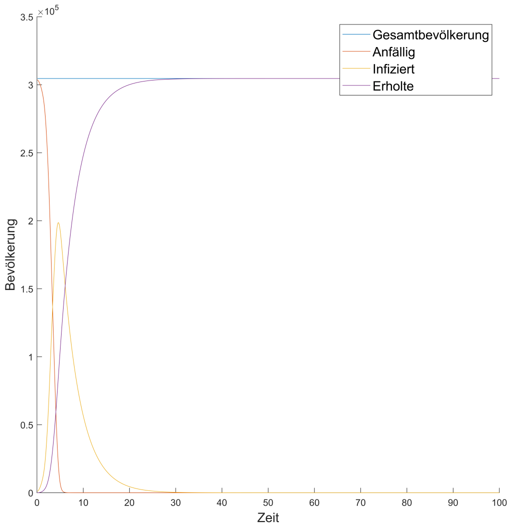

Abbildung 4: Krankheitsverlauf Masern mit Schrittweite 0.1