


Couplage (théorie des graphes)

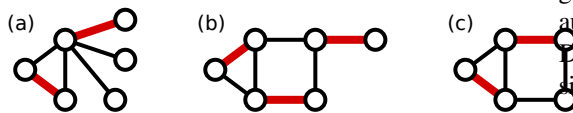
 Pour les articles homonymes, voir [Couplage](#) et [Appariement](#).

En théorie des graphes, un **couplage** ou **appariement** (en anglais *matching*) d'un graphe est un ensemble d'arêtes de ce graphe qui n'ont pas de sommets en commun.

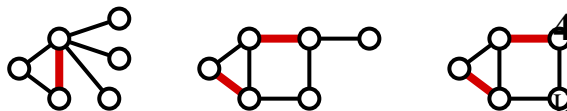
1 Définitions

Soit un **graphe simple** non orienté $G = (S, A)$ (où S est l'ensemble des sommets et A l'ensemble des arêtes, qui sont certaines paires de sommets), un couplage M est un ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes. C'est-à-dire que M est une partie de l'ensemble A des arêtes telle que $\forall (a, a') \in M^2, \quad a \neq a' \Rightarrow a \cap a' = \emptyset$.

Un **couplage maximum** est un couplage contenant le plus grand nombre possible d'arêtes. Un graphe peut posséder plusieurs couplages maximum. Les images suivantes montrent des couplages maximums.



Un **couplage maximal** est un couplage M du graphe tel que toute arête du graphe possède au moins une extrémité commune avec une arête de M . Ceci équivaut à dire dans l'ensemble des couplages du graphe, M est maximal au sens de l'inclusion, i.e. que pour toute arête a de A qui n'est pas dans M , $M \cup \{a\}$ n'est plus un couplage de G . Les images suivantes montrent des couplages maximaux.



Un **couplage parfait** ou **couplage complet** est un couplage M du graphe tel que tout sommet du graphe est incident à exactement une arête de M .

2 Propriétés et théorème

Un graphe, même fini, ne possède pas toujours de couplage parfait (en particulier, un graphe ayant un nombre

impair de sommets ne peut avoir un couplage parfait). Tout couplage parfait est maximum et tout couplage maximum est maximal (mais les réciproques sont fausses).

Le **théorème de Hall** ou lemme des mariages, donne une **condition nécessaire et suffisante** pour l'existence d'un couplage parfait dans un **graphe biparti**.

Le **théorème de König** exprime l'égalité de deux paramètres, la taille du transversal minimum (*i. e.* de la **couverture par sommets minimum**) et la taille du couplage maximum, dans le cas des **graphes bipartis**.

Le **théorème de Petersen** énonce que tout **graphe cubique** sans **isthme** possède un couplage parfait^[1].

3 Aspects algorithmiques

Il est possible de trouver un couplage de cardinal maximum en **temps polynomial** dans un graphe quelconque grâce à l'**algorithme d'Edmonds**^[2]. Le cas particulier des graphes bipartis peut être résolu en utilisant des chemins augmentants, ou par l'**algorithme d'Hopcroft-Karp** (en). Des heuristiques plus rapides et plus simples ont aussi été étudiées, avec des **ratios d'approximation** un peu meilleurs que le 1/2 obtenu pour n'importe quel couplage maximal^[3].

Étant donné un **graphe biparti** dont les arêtes sont valuées, le problème qui consiste à trouver un couplage de cardinal maximum et de poids minimum (ou couplage parfait de poids minimum) est appelé **problème d'affectation**. Il existe plusieurs algorithmes pour ce problème dont l'**algorithme hongrois**.

4 Applications

Un couplage peut être utilisé dans les problèmes d'affectation des tâches et ce pour avoir une efficacité maximale, par exemple, chaque tâche est attribuée à une seule machine ou vice versa. La recherche d'un couplage maximum dans un **graphe biparti** est d'ailleurs appelé le **problème d'affectation**.

Les couplages peuvent aussi être utilisés pour la **publicité en ligne ciblée**^[4] et pour la comparaison de structure de protéines^[5].



Un couplage peut aussi être utilisé pour résoudre ou approcher des problèmes plus complexes comme celui du

voyageur de commerce avec l'algorithme de Christofides.

5 Notes et références

- [1] (de) Julius Peter Christian Petersen, « Die Theorie der regulären Graphs », *Acta Mathematica*, n° 15, 1891, p. 193–220 (DOI 10.1007/BF02392606, lire en ligne)
- [2] Article original : Jack Edmonds, « Paths, trees, and flowers », *Canad. J. Math.*, vol. 17, 1965, p. 449–467 (DOI 10.4153/CJM-1965-045-4)
- [3] Bert Besser, « Approximation Bounds For Minimum Degree Matching », *CoRR*, vol. abs/1408.0596, 2014
- [4] Aranyak Mehta et Amin Saberi, « AdWords and generalized online matching », *Journal of the ACM*, vol. 54, n° 5, 2007.
- [5] Bonnie Berger, Rohit Singh et Jinbo Xu, « Graph algorithms for biological systems analysis », dans Proceedings of the Nineteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2008, San Francisco, California, USA, January 20-22, 2008, 2008, p. 142-151.

6 Articles connexes

- Lemme de Berge (en)
- Théorème de Petersen
-  Portail de l'informatique théorique
-  Portail des mathématiques

7 Sources, contributeurs et licences du texte et de l'image

7.1 Texte

- **Couplage (théorie des graphes)** *Source* : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Couplage_\(th%C3%A9orie_des_graphes\)?oldid=114401563](https://fr.wikipedia.org/wiki/Couplage_(th%C3%A9orie_des_graphes)?oldid=114401563) *Contributeurs* : Robbot, Mu, Anarkman, Léna, Xavoux, Cebichot, JAnDbot, Nono64, Analphabot, Le squal, Dhatier, Philippe Giabbaneli, HerculeBot, ZetudBot, ProgVal, Luckas-bot, Anne Bauval, Xqbot, LucienBOT, SimonMalenky, TobeBot, RedBot, EmausBot, ZéroBot, Dalnord, Mastergreg82, WikitanvirBot, Sbounoux, Roll-Morton, Addbot, Neggazi et Anonyme : 5

7.2 Images

- **Fichier:Disambig_colour.svg** *Source* : https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3e/Disambig_colour.svg *Licence* : Public domain *Contributeurs* : Travail personnel *Artiste d'origine* : Bub's
- **Fichier:Max-cut.svg** *Source* : <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/cf/Max-cut.svg> *Licence* : CC BY-SA 3.0 *Contributeurs* : Travail personnel *Artiste d'origine* : Miym
- **Fichier:Maximal-matching.svg** *Source* : <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e1/Maximal-matching.svg> *Licence* : CC BY-SA 3.0 *Contributeurs* : Travail personnel *Artiste d'origine* : Miym
- **Fichier:Maximum-matching-labels.svg** *Source* : <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/98/Maximum-matching-labels.svg> *Licence* : CC BY-SA 3.0 *Contributeurs* : Travail personnel *Artiste d'origine* : Miym
- **Fichier:Racine_carrée_bleue.svg** *Source* : https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1f/Racine_carr%C3%A9_bleue.svg *Licence* : LGPL *Contributeurs* : Image:Nuvola apps edu mathematics-p.svg *Artiste d'origine* : historicaïr 17 :50, 4 June 2007 (UTC)

7.3 Licence du contenu

- Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0