

# Algorithme de Christofides

L'**algorithme de Christofides** est un algorithme d'approximation pour le problème du voyageur de commerce, dans le cas métrique, c'est-à-dire quand l'inégalité triangulaire est respectée. L'analyse de cet algorithme est due à Nicos Christofides.

## Sommaire

- Problème du voyageur de commerce métrique
- Algorithme
  - Pseudo-code
  - Exemple
  - Facteur d'approximation dans le cas métrique
  - Complexité de l'algorithme
- Variantes
- Contexte et historique
- Notes et références
- Bibliographie
- Liens externes

## Problème du voyageur de commerce métrique

Le problème du voyageur de commerce (dans sa version optimisation<sup>1</sup>) est le problème suivant : étant donné un ensemble de villes reliées entre elles par des routes, trouver l'itinéraire le plus court passant par chaque ville une et une seule fois. En termes de graphe, on cherche le cycle hamiltonien le plus court. C'est un problème d'optimisation NP-difficile classique<sup>2</sup>.

Plusieurs cas particuliers ont été étudiés, notamment le cas dit «métrique» où les arêtes respectent l'inégalité triangulaire c'est-à-dire que pour tout triplet de sommet *u*, *v*, *w*, on a *w(u, v) + w(v, w) ≥ w(u, w)*.

## Algorithme

Dans le cas général, cet algorithme est en fait une heuristique, cependant dans le cas métrique, on peut montrer que la solution est au plus 3/2 fois plus longue que l'optimal. On dit que le facteur d'approximation est de 3/2.

L'algorithme résout deux sous-problèmes considérés «faciles», car appartenant à la classe P : le problème de arbre couvrant de poids minimal<sup>3</sup> et celui du couplage de poids minimum<sup>4</sup>.

### Pseudo-code

En pseudo-code<sup>5</sup> :

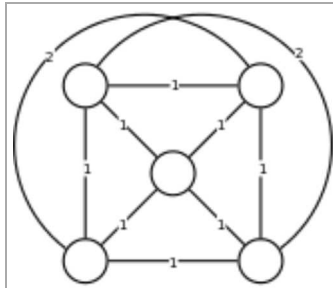


Un exemple de tournée du voyageur de commerce en Allemagne.

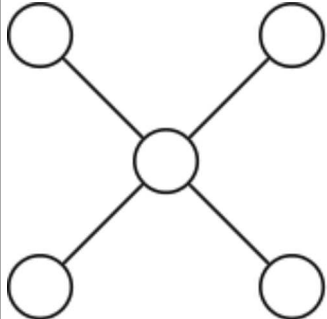
1. Calculer un arbre couvrant de poids minimal  $T$  de  $G$  ;
2. Soit  $I$  l'ensemble des sommets de degré impair dans  $T$ , calculer un couplage parfait  $M$  de poids minimum dans le sous-graphe induit par les sommets de  $I$  ;
3. On définit un multigraphe  $H$  à partir des arêtes issues de  $M$  et  $T$  ;
4. Trouver un cycle eulérien dans  $H$  ( $H$  est eulérien car il est connexe et tous les sommets sont de degrés pairs) ;
5. Transformer le cycle eulérien en un cycle hamiltonien en supprimant les éventuels passage en double sur certains sommets.

## Exemple

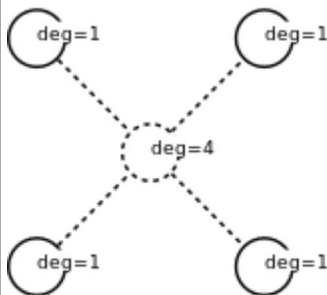
---



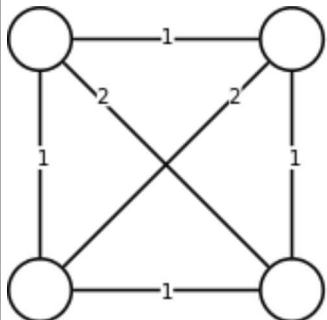
Étant donné un graphe  $G = (V, E)$  dont les poids respectent l'inégalité triangulaire.



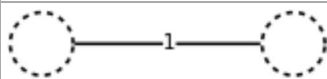
Calculer un arbre couvrant de poids minimum  $T$ .



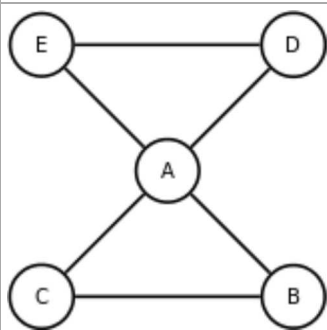
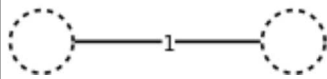
Calculer l'ensemble  $I$  des sommets de degrés impairs dans  $T$ .



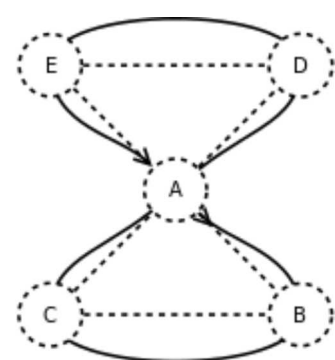
Considérer le graphe induit par  $I$  ( $G|_I$ ).



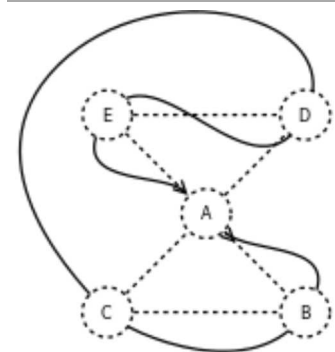
Calculer un couplage de poids minimum  $M$  dans  $G|_I$ .



Faire l'union du couplage et de l'arbre couvrant ( $T \cup M$ ).



Calculer le tour eulérien sur  $T \cup M$  : (A-B-C-A-D-E-A).



Enlever les sommets qui apparaissent deux fois : (A-B-C-D-E-A). Ce cycle est la sortie de l'algorithme.

## Facteur d'approximation dans le cas métrique

Soit  $U$  le cycle hamiltonien de poids minimum, et  $c(U)$  son poids.

L'arbre couvrant de poids minimum  $T$  est de poids inférieur ou égal au poids de  $U$  (c'est-à-dire  $c(T) \leq c(U)$ ), car en enlevant une arête au cycle on obtient un arbre couvrant.

Le couplage trouvé par l'algorithme est de poids inférieur ou égal à  $0.5c(U)$ . En effet, si on considère le cycle hamiltonien de poids minimum sur le sous graphe induit par des sommets de degré impair, on a un poids inférieur à  $c(U)$  du fait de l'inégalité triangulaire, et en prenant une arête sur deux de ce cycle<sup>6</sup> on obtient un couplage qui est de poids inférieur à la moitié du poids du cycle (si ce n'est pas le cas on peut prendre le complémentaire).

D'où un poids final majoré par  $c(T) + 0,5c(U) \leq 3/2c(U)$ .

## Complexité de l'algorithme

L'algorithme a une complexité cubique<sup>7</sup>.

## Variantes

Pour le problème du chemin hamiltonien (*Path TSP*), qui est la variante du problème du voyageur de commerce où un départ et une arrivée sont imposées, des variantes de l'algorithme de Christofides sont utilisées pour obtenir de bonnes approximations<sup>8,9</sup>.

## Contexte et historique

Le problème dans le cas métrique est APX-difficile, même avec des poids 1 ou 2<sup>10</sup>, ce qui empêche l'existence d'un schéma d'approximation en temps polynomial. Le facteur de 3/2 est en fait le meilleur facteur connu<sup>11</sup>.

Dans son article, Christofides a amélioré le facteur d'approximation du problème de 2 à 3/2<sup>7</sup>. Il a en fait

affiné l'algorithme précédent qui consistait à construire un arbre couvrant minimal et à le parcourir<sup>12</sup>.

Depuis les années de 2010, une nouvelle approche basées sur l'algorithme, appelée *best-of-many*, a permis de faire avancer certains cas particuliers et se révèle plus efficace dans la pratique<sup>13</sup>. Elle consiste schématiquement à utiliser l'algorithme de Christofides, sur plusieurs instances définies à partir d'une solution à la relaxation de Held et Karp<sup>14</sup>.

## Notes et références

- (en) Cet article est partiellement ou en totalité issu de l’article de Wikipédia en anglais intitulé « Christofides algorithm » ([https://en.wikipedia.org/wiki/Christofides\\_algorithm?oldid=593879139](https://en.wikipedia.org/wiki/Christofides_algorithm?oldid=593879139)) » (voir la liste des auteurs ([https://en.wikipedia.org/wiki/Christofides\\_algorithm?action=history](https://en.wikipedia.org/wiki/Christofides_algorithm?action=history))).

- Au sens de problème d'optimisation par contraste avec le problème de décision associé.
- Présent notamment dans la liste des 21 problèmes NP-complets de Karp : (en) Richard M. Karp, « Reducibility Among Combinatorial Problems », dans *Complexity of Computer Computations*, Plenum, 1972 (lire en ligne (<http://www.cs.berkeley.edu/~luca/cs172/karp.pdf>)), p. 85-103.
- Pour lequel on peut utiliser par exemple les algorithmes polynomiaux de Prim, Kruskal ou Borůvka.
- Par exemple avec l'algorithme d'Edmonds pour les couplages).
- Adapté de « Présentation et preuve de l'algorithme (par Alain Hertz) » (<http://www.gerad.ca/~alainh/Euler-Hamilton.pdf>) (consulté le 28 avril 2014).
- En enlevant éventuellement une si le cycle est de longueur impaire.
- Christofides 1976
- JA Hoogeveen,, « Analysis of Christofides' heuristic: Some paths are more difficult than cycles », *Operations Research Letters*, Elsevier, vol. 10, n<sup>o</sup> 5,‎ 1991, p. 291-295
- Hyung-Chan An, Robert Kleinberg et David B. Shmoys, « Improving christofides' algorithm for the s-t path {TSP} », dans *Proceedings of the 44th Symposium on Theory of Computing Conference (STOC) 2012, New York, NY, USA, May 19 - 22, 2012*, 2012, p. 875-886
- Voir Christos H. Papadimitriou et Mihalis Yannakakis, « The traveling salesman problem with distances one and two », *Mathematics of Operations Research*, INFORMS, vol. 18, n<sup>o</sup> 1,‎ 1993, p. 1--11. Dans le cas des poids 1-2, l'article montre aussi que l'on peut obtenir une meilleure approximation : 7/8.
- Le problème du voyageur de commerce métrique (<http://www.csc.kth.se/~viggo/wwwcompendium/node105.html#5239>) (Minimum metric traveling salesperson) sur le *Compendium of NP optimization problems* (<http://www.csc.kth.se/~viggo/wwwcompendium/>).
- Une description précise et un survey sur le TSP peuvent être trouvés dans Laporte 1992.
- Kyle Genova et David P. Williamson (de), « An Experimental Evaluation of the Best-of-Many Christofides' Algorithm for the Traveling Salesman Problem », dans *Algorithms - {ESA} 2015 - 23rd Annual European Symposium, Patras, Greece, September 14-16, 2015, Proceedings, 2015* (DOI {10.1007/978-3-662-48350-3\_48}, ([http://dx.doi.org/%7B10.1007%2F978-3-662-48350-3\\_48%7D%2C](http://dx.doi.org/%7B10.1007%2F978-3-662-48350-3_48%7D%2C)))
- Voir l'article Problème du voyageur de commerce.

## Bibliographie

- Nicos Christofides, « Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem », *Technical Report 388, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh*, 1976
- Gerhard Reinelt, *The Traveling Salesman, Computational Solutions for TSP Applications*, vol. 840, Springer, coll. « Lecture Notes in Computer Science », 1994 (ISBN 3-540-58334-3, lire en ligne ([http://f3.tiera.ru/2/Cs\\_Computer%20science/CsAl\\_Algorithms/Reinelt%20G.%20The%20traveling%20salesman%20%28Springer,%201994%29%28ISBN%203540583343%29%28230s%29\\_CsAl\\_.pdf](http://f3.tiera.ru/2/Cs_Computer%20science/CsAl_Algorithms/Reinelt%20G.%20The%20traveling%20salesman%20%28Springer,%201994%29%28ISBN%203540583343%29%28230s%29_CsAl_.pdf)))
- Gilbert Laporte, « The traveling salesman problem: An overview of exact and approximate algorithms », *European Journal of Operational Research*, vol. 59, n<sup>o</sup> 2,‎ 1992, p. 231-247

## Liens externes

- « Présentation et preuve de l'algorithme (par Alain Hertz) » (http://www.gerad.ca/~alainh/Euler-Hamilton.pdf) (consulté le 28 avril 2014)
- Le problème du voyageur de commerce métrique (http://www.csc.kth.se/~viggo/wwwcompendium/node105.html#5239) (Minimum metric traveling salesperson) sur le *Compendium of NP optimization problems* (http://www.csc.kth.se/~viggo/wwwcompendium/).

Ce document provient de « https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Algorithme\_de\_Christofides&oldid=126719643 ».

Dernière modification de cette page le 2 juin 2016, à 17:43.

Droit d'auteur : les textes sont disponibles sous licence Creative Commons attribution, partage dans les mêmes conditions ; d’autres conditions peuvent s’appliquer. Voyez les conditions d’utilisation pour plus de détails, ainsi que les crédits graphiques. En cas de réutilisation des textes de cette page, voyez comment citer les auteurs et mentionner la licence.

Wikipedia® est une marque déposée de la Wikimedia Foundation, Inc., organisation de bienfaisance régie par le paragraphe 501(c)(3) du code fiscal des États-Unis.