Kapitel 1: Einführung

Wir beginnen in Kap. 1.1 mit der Definition zentraler Begriffe des Operations Research. In Kap. 1.2 charakterisieren und klassifizieren wir verschiedene Modelltypen, gefolgt von einer knappen Darstellung der Teilgebiete des Operations Research in Kap. 1.3. Schließlich erläutern wir in Kap. 1.4 Arten der Planung, gehen auf Anwendungsmöglichkeiten des Operations Research ein und diskutieren in Kap. 1.5 knapp den Einsatz von Standardsoftware.

Die am Ende des Kapitels angegebene Literatur kann zur Vertiefung des behandelten Stoffes dienen. Sie beschäftigt sich v.a. mit weiterführenden Aspekten der Planung, dem eng verwandten Gebiet der Entscheidungstheorie sowie der Geschichte und den Anwendungsmöglichkeiten des Operations Research.

1.1 Begriff des Operations Research

Menschliches Handeln schlechthin und wirtschaftliches Handeln im Besonderen lassen sich vielfach als zielgerichteter, rationaler Prozess beschreiben. Dieser ist in die **Phasen** *Planung (Entscheidungsvorbereitung), Entscheidung, Durchführung* und *Kontrolle* unterteilbar.

Planung kann dabei beschrieben werden als systematisch-methodische Vorgehensweise zur Analyse und Lösung von (aktuellen bzw. zukünftigen) Problemen. Die Abgrenzung zwischen Planung und Entscheidung (für eine Alternative, eine Lösung, einen bestimmten Plan) ist in der Literatur umstritten. Zumindest sind Planung und Entscheidung eng miteinander verbunden; denn während der Ausführung der einzelnen Teilprozesse der Planung sind zahlreiche (Vor-) Entscheidungen zu treffen. Die Alternative zur Planung ist Improvisation. Eine ausführliche Darstellung zu den Elementen der Planung, ihren Teilprozessen sowie den Arten der Planung und ihren Aufgaben als betriebliche Funktion findet sich z.B. in Klein und Scholl (2011, Kap. 1).

Operations Research (OR) bezeichnet einen Wissenszweig, der sich mit der Analyse von praxisnahen, komplexen Problemstellungen im Rahmen eines Planungsprozesses zum Zweck der Vorbereitung von möglichst guten Entscheidungen durch die Anwendung mathematischer Methoden beschäftigt. Die Hauptaufgaben im OR bestehen in der Abbildung eines realen *Entscheidungsproblems* durch ein *Optimierungs*- oder *Simulationsmodell* (siehe hierzu Kap. 1.2) und die Anwendung bzw. Entwicklung eines *Algorithmus* zur Lösung des Problems. Dabei spielt Software-Unterstützung eine zentrale Rolle (vgl. Kap. 1.4).

Planung allgemein und damit auch OR-gestützte Planung vollzieht sich in einem **komplexen Prozess** mit sechs Schritten, die sich wie folgt skizzieren lassen:

(1) *Erkennen und Analysieren eines Problems*: Ausgangspunkt des Prozesses ist das Auftreten von Entscheidungs- und Handlungsbedarf (z.B. in Form eines defizitären Unternehmensbereiches, eines defekten Betriebsmittels) oder das Erkennen von Entscheidungs- und

Handlungsmöglichkeiten (z.B. Einsatz neuer Fertigungstechnologien, Einführen neuer Produkte).

(2) *Bestimmen von Zielen und Handlungsmöglichkeiten*: Rationales Handeln erfordert eine Zielorientierung, d.h. die Ermittlung bzw. Vorgabe von Zielen. Alternative Möglichkeiten der Zielerreichung sind herauszuarbeiten und voneinander abzugrenzen. Da in der Regel aus den verschiedensten Gründen (begrenzter Kenntnisstand, Zeit- und/oder Budgetbeschränkungen) nicht alle Aspekte einbezogen werden können, entsteht ein vereinfachtes Abbild (deskriptives Modell) der Situation.

(3) *Mathematisches Modell*: Ausgehend vom deskriptiven Modell wird ein mathematisches Modell formuliert, das Handlungsmöglichkeiten unter Beachtung von Restriktionen ermittelt und bewertet.

(4) *Datenbeschaffung*: Für das mathematische Modell sind, ggf. unter Einsatz von Prognosemethoden, Daten zu beschaffen.

(5) *Lösungsfindung*: Mit Hilfe eines **Algorithmus** (eines **Verfahrens**, einer Rechenvorschrift) wird das mathematische Modell unter Verwendung der Daten gelöst. Als Lösung erhält man eine oder mehrere hinsichtlich der Zielsetzung(en) besonders geeignete Alternative(n).

(6) *Bewertung der Lösung*: Die erhaltene Lösung ist (auch im Hinblick auf bei der Modellbildung vernachlässigte Aspekte) zu analysieren und anschließend als akzeptabel, modifizierungsbedürftig oder unbrauchbar zu bewerten.

Diese Schritte bzw. Stufen stellen eine idealtypische Abstraktion realer Planungsprozesse unter Verwendung von OR dar; zwischen ihnen gibt es vielfältige Interdependenzen und Rückkoppelungen. Sie sind als Zyklus zu verstehen, der i. Allg. mehrmals – zumindest in Teilen – zu durchlaufen ist.

Eine ausführlichere Darstellung OR-gestützter Planungsprozesse findet man in Schneeweiß (1992), Adam (1996, Kap. 1), Domschke und Scholl (2008, Kap. 2.2) sowie Klein und Scholl (2011, Kap. 2.4).

OR im engeren Sinne wird in der Literatur primär auf die mathematische Modellierung von Entscheidungsproblemen sowie auf die Entwicklung von Algorithmen zur Anwendung und Lösung mathematischer Modelle beschränkt. Die Gliederung des vorliegenden Buches orientiert sich an dieser Definition. Fragen der Modellbildung spielen im zugehörigen Übungsbuch Domschke et al. (2015) eine wichtige Rolle.

In dem in obigem Planungsprozess beschriebenen **weiteren Sinne** gehören zu OR allerdings auch Aufgaben der Problemdefinition, -beschreibung und -abgrenzung sowie Methoden zur Datenbeschaffung und -analyse. Diese weiter gefasste Definition des OR findet man häufig unter dem Begriff **Management Science** (gelegentlich wird Management Science auch schlicht als Synonym von OR verwendet). Hierbei zeigen sich große Überschneidungen mit der in letzter Zeit in der Praxis stark an Bedeutung gewinnenden Disziplin **Analytics** (vgl. z.B. Davenport und Harris (2007), Saxena und Srinivasan (2013) sowie Watson und Nelson (2014)). Zu einer Abgrenzung der Begriffe sowie zum Zusammenspiel zwischen den Disziplinen verweisen wir z.B. auf Liberatore und Luo (2010) sowie Mortenson et al. (2015). Aus Sicht des OR wichtig ist die Unterscheidung zwischen den Teilgebieten *Predictive Analytics* und *Prescriptive Analytics*. Das erste der beiden beschäftigt sich vor allem mit der Datenanalyse zu Prognosezwecken, das zweite umfasst letztlich sämtliche Aspekte des OR.

Als *Gründungszeit des OR* gelten die Jahre kurz vor und während des 2. Weltkrieges. Ab 1936/37 arbeiteten in Großbritannien Wissenschaftler und Militärs an der Entwicklung von Radar zur Abwehr feindlicher Flugzeuge. In Großbritannien und den USA wurden später Möglichkeiten der optimalen Zusammenstellung von Schiffskonvois, die den Atlantik überqueren sollten, untersucht. Diese Forschungen wurden in Großbritannien als „Operational Research“, in den USA als „Operations Research“ bezeichnet. Heute überwiegen ökonomische und ingenieurwissenschaftliche Anwendungen in vielen Bereichen, z.B. Produktion, Logistik und Verkehr, Projektplanung, Gesundheitswesen, Umweltschutz.
Einzelne Fragestellungen des OR wurden jedoch bereits wesentlich früher betrachtet. Beispiele sind spezielle mathematische und stochastische Grundlagen, erste Ansätze zu Transport- und Tourenplanungsproblemen, zur Standort- oder zur Losgrößenplanung. Einen guten Überblick über die Entwicklung vom 16. bis zum 21. Jahrhundert liefern Gass und Assad (2005).

Im deutschen Sprachraum gibt es weitere *Bezeichnungen für OR*, von denen sich jedoch keine nachhaltig durchgesetzt hat: Unternehmensforschung, mathematische Planungsrechnung, Operationsforschung, Optimierungsrechnung.

Es gibt zahlreiche *nationale* und *internationale OR-Gesellschaften*, z.B.:

GOR	Gesellschaft für Operations Research e.V., seit 1998, entstanden durch Fusion der DGOR (Deutsche Gesellschaft für Operations Research) und GMÖOR (Gesellschaft für Mathematik, Ökonomie und Operations Research)
INFORMS	Institute for Operations Research and the Management Sciences (USA)
IFORS	International Federation of OR-Societies

Ebenso existieren zahlreiche *Fachzeitschriften*; als Beispiele seien genannt:

> Annals of OR, European Journal of OR, Interfaces, Journal of the Operational Research Society, Management Science, Mathematical Programming, Operations Research, OR Spectrum, Mathematical Methods of OR.

1.2 Modelle im Operations Research

Modelle spielen im OR eine zentrale Rolle. Wir charakterisieren zunächst verschiedene Modelltypen in Bezug auf ihren Einsatzzweck und beschäftigen uns anschließend v.a. mit Optimierungsmodellen. Eine ausführlichere Unterteilung von Modellen findet sich in Klein und Scholl (2011, Kap. 2.1).

1.2.1 Charakterisierung verschiedener Modelltypen

Ein **Modell** ist ein vereinfachtes (isomorphes oder homomorphes) Abbild eines realen Systems oder Problems. OR verwendet im Wesentlichen Entscheidungs- bzw. Optimierungs- sowie Simulationsmodelle.

Ein **Entscheidungs-** bzw. **Optimierungsmodell** ist eine formale Darstellung eines Entscheidungs- oder Planungsproblems, das in seiner einfachsten Form mindestens eine Alternativenmenge und eine diese bewertende Zielfunktion enthält. Es wird entwickelt, um mit geeigneten Verfahren optimale oder suboptimale Lösungsvorschläge ermitteln zu können. **Simulationsmodelle** sind häufig sehr komplexe Optimierungsmodelle, für die keine analytischen Lösungsverfahren existieren. Sie dienen dem Zweck, die Konsequenzen einzelner Alternativen zu bestimmen (zu untersuchen, „durchzuspielen").

Während OR unmittelbar von Optimierungs- oder Simulationsmodellen ausgeht, dienen ihm Beschreibungs-, Erklärungs- sowie Prognosemodelle zur Informationsgewinnung. **Beschreibungsmodelle** beschreiben Elemente und deren Beziehungen in realen Systemen. Sie enthalten jedoch keine Hypothesen über reale Wirkungszusammenhänge und erlauben daher keine Erklärung oder Prognose realer Vorgänge. Ein Beispiel für ein Beschreibungsmodell ist die Buchhaltung. **Erklärungsmodelle** werten empirische Gesetzmäßigkeiten oder Hypothesen zur Erklärung von Sachverhalten aus; Produktionsfunktionen sind Beispiele für Erklärungsmodelle (vgl. z.B. Dyckhoff und Spengler (2010, Kap. 7.2)). **Prognosemodelle** werden in der Regel zur Gruppe der Erklärungsmodelle gezählt; sie dienen der Vorhersage von zukünftigen Entwicklungen, z.B. des zukünftigen Verbrauchs eines Produktionsfaktors.

1.2.2 Optimierungsmodelle

1.2.2.1 Formulierung eines allgemeinen Optimierungsmodells

Ein Optimierungsmodell lässt sich allgemein wie folgt aufschreiben:

$$\text{Maximiere (oder Minimiere)} \quad z = F(\mathbf{x}) \tag{1.1}$$

unter den Nebenbedingungen

$$g_i(\mathbf{x}) \left\{ \begin{matrix} \geq \\ = \\ \leq \end{matrix} \right\} 0 \qquad \text{für } i = 1,...,m \tag{1.2}$$

$$\mathbf{x} \in W_1 \times W_2 \times \ldots \times W_n, \quad W_j \in \{\mathbb{R}_+, \mathbb{Z}_+, \mathbb{B}\}, \text{ für } j = 1,...,n \tag{1.3}$$

Dabei haben die verwendeten Symbole folgende Bedeutung:

$\mathbf{x}$	Variablenvektor[1] mit n Komponenten $x_1, ..., x_n$
$F, F(\mathbf{x})$	Zielfunktion bzw. Zielfunktionswert[2] für den Variablenvektor $\mathbf{x}$
$x_j \in \mathbb{R}_+$	Nichtnegativitätsbedingung (nichtnegative kontinuierliche Variable)

1 Ein gegebener Vektor **x**, bei dem alle Variablenwerte (Komponenten) fixiert sind, entspricht einer Alternative im Sinne von Kap. 1.2.1. Das Restriktionensystem (1.2) beschreibt damit in Verbindung mit (1.3) alle zulässigen Handlungsalternativen.

2 Zur Verdeutlichung der Abhängigkeit der Zielfunktion von $\mathbf{x}$ verwenden wir häufig auch dann die Notation $F(\mathbf{x})$, wenn wir nicht den Zielfunktionswert, sondern die Zielfunktion als Gesamtes beschreiben.

$x_j \in \mathbb{Z}_+$ Ganzzahligkeitsbedingung (nichtnegative ganzzahlige Variable)

$x_j \in \mathbb{B}$ Binärbedingung (binäre Variable)

(1.1) entspricht einer Zielfunktion, die maximiert oder minimiert werden soll. Bei zu *maximierenden* Größen kann es sich z.B. um den Absatz, den Umsatz oder den Gesamtdeckungsbeitrag handeln, der seitens eines Unternehmens mit einem Produktvektor zu erzielen ist. Verallgemeinernd sprechen wir gelegentlich von zu maximierendem **Nutzen**. Bei zu *minimierenden* Größen handelt es sich um Distanzen in Verkehrsnetzen, Projektdauern in Netzplänen, zumeist aber um **Kosten**.

(1.2) ist ein System von m Gleichungen und/oder Ungleichungen (Nebenbedingungs- oder Restriktionensystem).

(1.3) legt den Wertebereich der Entscheidungsvariablen fest. Jede Variable hat einen kontinuierlichen, ganzzahligen oder binären Wertebereich. Über unsere Formulierung hinaus ist es möglich, dass einige Variablen im Vorzeichen nicht beschränkt sind ($x_j \in \mathbb{R}$ oder $x_j \in \mathbb{Z}$).

(1.1) – (1.3) ist insofern sehr allgemein, als sich fast alle von uns in den folgenden Kapiteln behandelten Modelle daraus ableiten lassen. Nicht abgedeckt sind davon Modelle mit mehrfacher Zielsetzung, wie wir sie in Kap. 2.7 behandeln, sowie Simulationsmodelle, die sich zumeist nicht in dieser einfachen Form darstellen lassen.

Bemerkung 1.1 (*Problem – Modell*): Während wir in Kap. 1 konsequent von Optimierungsmodellen sprechen, verwenden wir in den folgenden Kapiteln fast ausschließlich den Begriff Optimierungsproblem. Ein Grund hierfür besteht darin, dass es in der Literatur üblicher ist, von zueinander dualen Problemen und nicht von zueinander dualen Modellen, von Transportproblemen und nicht von Transportmodellen etc. zu sprechen. Außerdem drückt der Begriff Optimierungsproblem aus, dass die Optimierungsaufgabe als solche nicht von einer bestimmten Art der Modellierung abhängig ist und dass es ja letztlich das Problem ist, welches gelöst werden soll.

1.2.2.2 Beispiele für Optimierungsmodelle

Wir betrachten zwei spezielle Beispiele zu obigem Modell, ein lineares Modell mit kontinuierlichen Variablen und ein lineares Modell mit binären Variablen.

Beispiel 1: Ein Modell der Produktionsprogrammplanung

Gegeben seien die Preise p_j, die variablen Kosten k_j und damit die Deckungsbeiträge $db_j = p_j - k_j$ von n Produkten $(j = 1, \ldots, n)$ sowie die technischen Produktionskoeffizienten a_{ij}, die den Verbrauch an Kapazität von Maschine i für die Herstellung einer Einheit von Produkt j angeben. Maschine $i\ (= 1, \ldots, m)$ möge eine Kapazität von b_i Kapazitätseinheiten besitzen. Gesucht sei das Produktionsprogramm mit maximalem Deckungsbeitrag.

Bezeichnen wir die von Produkt j zu fertigenden Mengeneinheiten (ME) mit x_j, so ist das folgende mathematische Modell zu lösen (vgl. auch das Beispiel in Kap. 2.4.1.2):

$$\text{Maximiere } F(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} db_j \cdot x_j \tag{1.4}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i \qquad \text{für } i = 1, ..., m \tag{1.5}$$

$$x_j \ge 0 \qquad \text{für } j = 1, ..., n \tag{1.6}$$

(1.4) fordert die Maximierung der Deckungsbeiträge für alle Produkte. (1.5) stellt sicher, dass die vorhandenen Maschinenkapazitäten zur Fertigung des zu bestimmenden Produktionsprogramms auch tatsächlich ausreichend sind. (1.6) verlangt, dass nichtnegative (nicht notwendig ganzzahlige) „Stückzahlen" gefertigt werden sollen.

Verfahren zur Lösung linearer Optimierungsmodelle mit kontinuierlichen Variablen behandeln wir in Kap. 2.

Bemerkung 1.2: Gibt man für ein Modell einen konkreten Datensatz vor, so spricht man von einer **Modell-** oder **Probleminstanz**. Beim Modell der Produktionsprogrammplanung zählen zu den Daten die Werte für die **Parameter** n und m sowie für alle db_j, b_i und a_{ij}.

Bemerkung 1.3: Das Nebenbedingungssystem eines Optimierungsmodells stellt i. Allg. ein Erklärungsmodell dar. In (1.5) und (1.6) wird z.B. unterstellt, dass der Produktionsprozess des betrachteten Unternehmens durch eine linear-limitationale Produktionsfunktion (Leontief-Produktionsfunktion) beschrieben, d.h. dass der Faktorverbrauch durch diese Funktion *erklärt*, werden kann.

Beispiel 2: Ein binäres Optimierungsmodell, das Knapsack-Problem

Ein Wanderer kann in seinem Rucksack unterschiedlich nützliche Gegenstände (Güter) verschiedenen Gewichts mitnehmen. Welche soll er auswählen, so dass bei einem einzuhaltenden Höchstgewicht maximaler Nutzen erzielt wird?

Allgemein stehen n Gegenstände $(j = 1, \dots, n)$ mit den Nutzen c_j und den Gewichten w_j zur Wahl. Das Höchstgewicht der mitnehmbaren Gegenstände sei b. Verwenden wir für Gut j die Binärvariable x_j (= 1, falls das Gut mitzunehmen ist, und 0 sonst), so lässt sich das Modell mathematisch wie folgt formulieren:

$$\text{Maximiere } F(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \tag{1.7}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} w_j \cdot x_j \le b \tag{1.8}$$

$$x_j \in \{0, 1\} \qquad \text{für } j = 1, ..., n \tag{1.9}$$

Verfahren zur Lösung linearer Optimierungsmodelle mit binären Variablen behandeln wir in Kap. 6 und 7. Praktische Anwendungen des Knapsack-Problems und seiner Verallgemeinerungen finden sich z.B. in der Investitions- und Finanzplanung sowie in der Verschnittoptimierung. Allgemein stellt die Verwendung von Binärvariablen ein wichtiges Instrument dar, um logische Bedingungen, Reihenfolgebeziehungen oder Fixkosteneffekte zu modellieren.

1.2.2.3 Klassifikation von Optimierungsmodellen

Optimierungsmodelle sind v.a. nach folgenden Gesichtspunkten unterteilbar:

(1) Hinsichtlich des **Informationsgrades** in deterministische und stochastische Modelle. Bei **deterministischen** Modellen werden die Parameter der Zielfunktion(en) wie der Nebenbedingungen (im obigen Beispiel 1 die Parameter m und n sowie alle p_j, k_j, a_{ij} und b_i) als bekannt vorausgesetzt; ist jedoch mindestens ein Parameter als Zufallszahl (bzw. Zufallsvariable) zu interpretieren, so liegt ein **stochastisches** Modell vor. Deterministische Modelle dienen der *Entscheidungsfindung bei Sicherheit*, stochastische Modelle der *Entscheidungsfindung bei Risiko*.
Wir beschäftigen uns vorwiegend mit deterministischen Modellen. Ein stochastisches Modell wird im Rahmen der dynamischen Optimierung in Kap. 7.4 betrachtet. Auch den Ausführungen zur Simulation in Kap. 10 liegen primär stochastische Modelle zu Grunde.

(2) In Modelle mit **einer** und solche mit **mehreren Zielfunktionen**: Bei letzteren Modellen kann i. Allg. erst dann „optimiert“ werden, wenn zusätzlich zu den Zielfunktionen und zum Nebenbedingungssystem **Effizienzkriterien** (Beurteilungsmaßstäbe für den Grad der Erreichung der einzelnen Ziele) angegeben werden können.
Wir beschäftigen uns nahezu ausschließlich mit Modellen mit einer Zielfunktion. Mehrfachzielsetzungen behandeln wir nur im Rahmen der linearen Optimierung in Kap. 2.7.

(3) Hinsichtlich des **Typs der Zielfunktion(en) und Nebenbedingungen** in lineare Modelle mit reellen Variablen, lineare Modelle mit ganzzahligen oder Binärvariablen, nichtlineare Modelle usw. (vgl. Kap. 1.3).

(4) Bezüglich der **Lösbarkeit** unterteilt man die Modelle (bzw. genauer die zugrundeliegenden Probleme) in solche, die in Abhängigkeit ihrer Größe mit **polynominalem** Rechenaufwand lösbar sind, und solche, für die bislang kein Verfahren angebbar ist, das jede Probleminstanz beliebiger Größe mit polynomialem Aufwand zu lösen gestattet. Unter dem Aufwand wird dabei grundsätzlich die Anzahl an notwendigen elementaren Rechenoperationen verstanden. Beispiele für die Größe eines Problems oder Modells: n und m beschreiben die Größe des Modells (1.4) – (1.6), n ist die Größe des Modells (1.7) – (1.9). Zur ersten Gruppe gehören nahezu alle von uns in Kap. 2 bis 5 beschriebenen Probleme. Probleme der zweiten Gruppe werden als **NP-schwer** bezeichnet; mit ihnen beschäftigen wir uns v.a. in Kap. 6.

1.2.3 Bedeutung einer effizienten Modellierung

Wie oben ausgeführt, kann es eklatante Unterschiede bzgl. des Schwierigkeitsgrades der Lösbarkeit von Modellen geben. Sofern mehrere Modellformulierungen existieren, die dasselbe Problem abbilden, ist es daher wichtig, der Konstruktion eines geeigneten Modells – also der *effizienten Modellierung* – ein besonderes Augenmerk zu widmen. Ziel ist es, Modelle so zu formulieren, dass zugehörige Instanzen mit Hilfe existierender Algorithmen im Vergleich zu anderen Modellen mit gleicher optimaler Lösung (durchschnittlich oder für eine bestimmte Gruppe von Instanzen) mit geringerem Rechenaufwand lösbar sind.

Von besonderer Bedeutung ist die effiziente Modellierung, wenn ganzzahlige lineare Optimierungsmodelle mit Standardsoftware gelöst werden sollen, wie dies bei praktischen Fragestellungen häufig der Fall ist (vgl. Kap. 1.4). Von solchen Modellen weiß man, dass deren Lösung i.d.R. hohen Rechenaufwand erfordert. Ausnahmen gibt es beispielsweise dann, wenn die mathematische Modellformulierung so gewählt werden kann, dass Standardsoftware trotz Vernachlässigung der Ganzzahligkeitsforderung für die Variablen stets eine ganzzahlige optimale Lösung liefert. Man spricht in diesem Fall von einer idealen oder perfekten Modellformulierung (vgl. Bertsimas und Weismantel (2005, Kap. 3) sowie Conforti et al. (2014, Kap. 4)). Beispiele für derartige Modelle sind das klassische Transportproblem und das lineare Zuordnungsproblem, die wir in Kap. 4 behandeln. Ein weiteres Beispiel ist das von Domschke et al. (2002) betrachtete Problem der Koordination von Kommunikationsstandards.

Empfehlenswerte Bücher zu Fragen der effizienten Modellierung sind Voß und Woodruff (2006), Kallrath (2013) sowie Williams (2013). Zu einer kompakten Darstellung grundlegender Modellierungstechniken vgl. auch Klein und Scholl (2011, Kap. 4.3).

1.3 Teilgebiete des Operations Research

OR im (in Kap. 1.1 definierten) engeren Sinne wird nach dem Typ des jeweils zugrunde liegenden Optimierungsmodells v.a. in die nachfolgend skizzierten Gebiete unterteilt.

(1) **Lineare Optimierung** oder **lineare Programmierung** (abgekürzt LP, gelegentlich auch als lineare Planungsrechnung bezeichnet; siehe Kap. 2 und 4): Die Modelle bestehen aus einer oder mehreren linearen Zielfunktion(en) und zumeist einer Vielzahl von linearen Nebenbedingungen; die Variablen dürfen (zumeist nur nichtnegative) reelle Werte annehmen.
Die lineare Optimierung wurde bereits in den verschiedensten Funktionsbereichen von Unternehmen angewendet und besitzt ihre größte Bedeutung im Bereich der Fertigungsplanung (Produktionsprogramm-, Mischungs-, Verschnittoptimierung; siehe Beispiel 1 in Kap. 1.2.2.2).
„Allgemeine“ lineare Optimierungsmodelle behandeln wir in Kap. 2. Als wichtigstes Verfahren beschreiben wir dort den **Simplex-Algorithmus**. Für lineare Optimierungsmodelle mit spezieller Struktur (wie Transport-, Umlade- oder Netzwerkflussprobleme) wurden diese Struktur ausnutzende, effizientere Verfahren entwickelt; siehe dazu Kap. 4.

(2) **Graphentheorie** und **Netzplantechnik** (Kap. 3 und 5): Mit Hilfsmitteln der *Graphentheorie* lassen sich z.B. Organisationsstrukturen oder Projektabläufe graphisch anschaulich darstellen. Zu nennen sind ferner Modelle und Verfahren zur Bestimmung kürzester Wege sowie maximaler und kostenminimaler Flüsse in Graphen. Die *Netzplantechnik* ist eine der in der Praxis am häufigsten eingesetzten Methoden der *Planung*; sie dient zugleich der *Überwachung und Kontrolle* von betrieblichen Abläufen und Projekten.

(3) **Ganzzahlige (lineare) und kombinatorische Optimierung** (Kap. 6): Bei der ganzzahligen (linearen) Optimierung dürfen die (oder einige der) Variablen nur ganze Zahlen oder Binärzahlen (0 bzw. 1) annehmen; siehe Beispiel 2 in Kap. 1.2.2.2.
Modelle dieser Art spielen z.B. bei der Investitionsprogrammplanung eine Rolle. Darüber hinaus werden durch Modelle der kombinatorischen Optimierung **Zuordnungsprobleme** (z.B. Zuordnung von Maschinen zu Plätzen, so dass bei Werkstattfertigung minimale Kosten für Transporte zwischen den Maschinen entstehen), **Reihenfolgeprobleme** (z.B. Bearbeitungsreihenfolge von Aufträgen auf einer Maschine), **Gruppierungsprobleme** (z.B. Bildung von hinsichtlich eines Maßes möglichst ähnlichen Kundengruppen) und/ oder **Auswahlprobleme** (etwa Set Partitioning-Probleme, z.B. Auswahl einer kostenminimalen Menge von Auslieferungstouren unter einer großen Anzahl möglicher Touren) abgebildet.
Viele kombinatorische Optimierungsprobleme lassen sich mathematisch als ganzzahlige oder binäre (lineare) Optimierungsprobleme formulieren. Die in diesem Teilgebiet des OR betrachteten Modelle sind wesentlich schwieriger lösbar als lineare Optimierungsmodelle mit kontinuierlichen Variablen.

(4) **Dynamische Optimierung** (Kap. 7): Hier werden Modelle betrachtet, die in einzelne Stufen (z.B. Zeitabschnitte) zerlegt werden können, so dass die Gesamtoptimierung durch eine stufenweise, rekursive Optimierung ersetzbar ist. Anwendungen findet man u.a. bei der Bestellmengen- und Losgrößenplanung. Lösungsverfahren für dynamische Optimierungsmodelle basieren auf dem **Bellman'schen Optimalitätsprinzip**.

(5) **Nichtlineare Optimierung** (Kap. 8): Die betrachteten Modelle besitzen eine nichtlineare Zielfunktion und/oder mindestens eine nichtlineare Nebenbedingung. In der Realität sind viele Zusammenhänge nichtlinear (z.B. Transportkosten in Abhängigkeit von der zu transportierenden Menge und der zurückzulegenden Entfernung). Versucht man, derartige Zusammenhänge exakt in Form nichtlinearer (anstatt linearer) Modelle abzubilden, so erkauft man dies i. Allg. durch wesentlich höheren Rechenaufwand zu deren Lösung.

(6) **Warteschlangentheorie** (Kap. 9): Sie dient v.a. der Untersuchung des Abfertigungsverhaltens von Service- und Bedienungsstationen. Beispiele für Stationen sind Bankschalter oder Maschinen, vor denen sich Aufträge stauen können. Ein Optimierungsproblem entsteht z.B. dadurch, dass das Vorhalten von zu hoher Maschinenkapazität zu überhöhten Kapitalbindungskosten im Anlagevermögen und von zu geringer Maschinenkapazität zu überhöhten Kapitalbindungskosten im Umlaufvermögen führt.

(7) **Simulation** (Kap. 10): Sie eignet sich v.a. zur Untersuchung (dem „Durchspielen") von einzelnen Alternativen bzw. von Systemvarianten im Rahmen komplexer stochastischer (Optimierungs-) Modelle. Anwendungsbeispiele: Warteschlangensysteme, Auswertung stochastischer Netzpläne, Analyse von Lagerhaltungs- und Materialflusssystemen. Zur benutzerfreundlichen Handhabung und möglichst einfachen Modellierung der komplexen Systeme wurden spezielle Simulationssprachen entwickelt.

Abb. 1.1 gibt einen Überblick über wesentliche Beziehungen zwischen den einzelnen Kapiteln des Buches. Ein voll ausgezeichneter Pfeil von A nach B bedeutet dabei, dass wesentliche Teile von A zum Verständnis von B erforderlich sind. Ein gestrichelter Pfeil deutet an, dass nur an einzelnen Stellen von B auf A verwiesen wird.

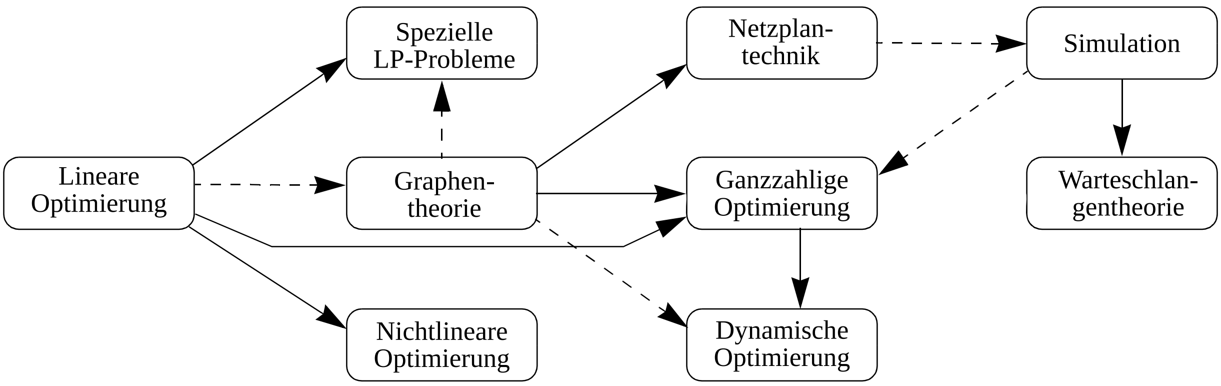

Abb. 1.1: Beziehungen zwischen den Kapiteln

Die (im vorliegenden Buch behandelten) Teilgebiete des OR lassen sich folgendermaßen den **zentralen Fragestellungen der Entscheidungstheorie** zuordnen:[3]

- **Entscheidungen bei Sicherheit**
  - *mit einer Zielfunktion*: Alle in den folgenden Kapiteln behandelten Problemstellungen sind (bis auf Kap. 2.7, Kap. 7.4 und Kap. 10) dieser Kategorie zuzuordnen.
  - *mit mehreren Zielfunktionen*: Lediglich in Kap. 2.7 beschäftigen wir uns mit deterministischen multikriteriellen Optimierungsproblemen.
- **Entscheidungen bei Risiko:** Stochastische Modelle betrachten wir lediglich in Kap. 7.4 und in Kap. 10. Vgl. zu Modellen und Lösungsmöglichkeiten der *stochastischen linearen Optimierung* z.B. Dinkelbach und Kleine (1996), Scholl (2001) oder Kall und Mayer (2011), allgemein zur stochastischen Optimierung Kall und Wallace (1994).

1.4 Arten der Planung und Anwendungsmöglichkeiten des OR

Für eine Differenzierung einzelner Arten von Planung bieten sich mehrere Gliederungsgesichtspunkte an. Hinsichtlich der Anwendungsmöglichkeiten des OR bedeutsame Unterscheidungen sind (vgl. z.B. Klein und Scholl (2011, Kap. 1.4)):

(1) Nach den **betrieblichen Funktionsbereichen**: Beschaffungs-, Produktions-, Absatz- sowie Investitions- und Finanzierungsplanung.

(2) Nach dem **Planungsinhalt**: Ziel-, Maßnahmen-, Durchführungs- oder Ablaufplanung.

(3) Nach der **Fristigkeit** (zeitlichen Reichweite): Lang-, mittel- oder kurzfristige (strategische, taktische oder operative) Planung.

(4) Nach dem **Umfang**: Teil- oder Gesamtplanung, wobei die Gesamtplanung wiederum als sukzessive Teil- oder als simultane Gesamtplanung erfolgen kann.

3 Vgl. hierzu beispielsweise Dinkelbach und Kleine (1996), Eisenführ et al. (2010), Klein und Scholl (2011), Bamberg et al. (2012b) sowie Laux et al. (2014).

Wichtige **Voraussetzung für die Anwendung von OR** ist die Verfügbarkeit der erforderlichen Daten. Für jeden deterministischen Parameter des Modells muss ein Wert und für jeden stochastischen Parameter eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ermittelt werden. Im deterministischen Modell (1.4) – (1.6) beispielsweise werden Werte (= Daten) für die Produktionskoeffizienten a_{ij}, die Maschinenkapazitäten b_i sowie für die Deckungsbeiträge db_j benötigt. Es stellt sich die Frage, woher diese Daten in einem konkreten Anwendungsfall stammen. Drei grundsätzliche Möglichkeiten kommen hier in Frage:

(1) Durch fortlaufende Erfassung anfallender Daten des Produktionsbereichs im Rahmen der so genannten **Betriebsdatenerfassung** können insbesondere die Produktionskoeffizienten a_{ij} (Bearbeitungszeit für die Fertigung einer Einheit von Produkt j auf Maschine i) und die Maschinenkapazitäten b_i (Nominalkapazität von Maschine i, vermindert um ihre Ausfall- und Wartungszeiten) erfasst werden.
Wir gehen auf Methoden der *unternehmensinternen* Datenerfassung und -pflege im Rahmen von modernen betrieblichen Informationssystemen nicht näher ein und verweisen hierzu z.B. auf Mertens und Meier (2009) sowie Mertens (2013).

(2) Darüber hinaus gewinnt die Einbindung *unternehmensexterner* Daten unter dem Schlagwort **Big Data** seit gut zehn Jahren zunehmend an Bedeutung. Hauptquelle solcher Daten ist das World Wide Web. So lassen sich dort Zahlungsbereitschaften für Produkte messen, die zur Ermittlung von optimalen Produktpreisen p_j und daraus abgeleiteten Deckungsbeiträgen db_j erforderlich sind. Zum Begriff Big Data sowie zu Bezügen zu den Disziplinen Analytics und OR verweisen wir auf Chen et al. (2012) und Buhl et al. (2013).

(3) Liegen zwar vergangenheitsbezogene Daten vor, hat sich jedoch seit deren Erfassung die Situation so stark verändert, dass die Daten nicht unmittelbar verwendet werden können, so sind entweder geeignete Korrekturen vorzunehmen oder völlig neue Prognosen zu erstellen.
Auch auf **Prognosemethoden** gehen wir hier nicht näher ein und verweisen diesbezüglich auf Makridakis et al. (1998), Schlittgen und Streitberg (2001), Domschke und Scholl (2008) sowie Klein und Scholl (2011, Kap. 6).

In vielen praktischen Fällen ist es erforderlich, dass unmittelbar gehandelt wird, obwohl kaum Informationen über künftige Entwicklungen vorliegen. Als Beispiel sei die Steuerung von Aufzügen genannt. Hier fragen Kunden auf einer oder mehreren Etagen Transportleistung nach. Es ist sofort zu entscheiden, welcher Aufzug (im Falle des Vorhandenseins mehrerer) von welcher aktuellen Position aus startet, um die angeforderte Fahrt auszuführen. Zu derartigen Fragen der **Online-Optimierung**, die wir im vorliegenden Buch nicht näher behandeln, sei auf Grötschel et al. (2001) verwiesen.

OR kann grundsätzlich in jedem betrieblichen Funktionsbereich Anwendung finden. Es dient eher der Durchführungs- und Ablauf- als der Ziel- und Maßnahmenplanung. Es überwiegt ihr Einsatz bei der taktischen und v.a. der operativen Planung (vgl. dazu auch Klein und Scholl (2011, Kap. 1.4)). Optimierungsrechnungen betreffen vorwiegend Teilplanungen, bei Gesamtplanungen kann die Simulation häufig nützlicher sein.

Mit Fragestellungen der Optimierung haben sich Menschen schon sehr frühzeitig beschäftigt; siehe unser Beispiel am Ende dieses Kapitels.

Die Zeitschrift *Interfaces* ist ein auf Anwendungsberichte des OR spezialisiertes Publikationsorgan. Einen nach Funktionsbereichen gegliederten, umfassenden **Überblick über Anwendungsmöglichkeiten des OR** mit zahlreichen Literaturhinweisen findet man in Assad et al. (1992). Ausführliche Darstellungen von Optimierungsanwendungen enthalten ferner Sashihara (2011) und Kallrath (2013). Exemplarisch seien im Folgenden einige *neuere Anwendungsberichte* aus der Praxis skizziert:

- Desrosiers et al. (2000) verwenden Methoden der linearen Optimierung (Kap. 2) zur Unterstützung von Managemententscheidungen einer Fluggesellschaft (Flugrouten, Zusammenstellung der Crews etc.). Generell gilt, dass OR im Bereich des **Luftverkehrs** ein breites Anwendungsspektrum aufweist. Dementsprechend widmen sich mittlerweile mehrere Bücher diesem Gebiet; vgl. z.B. Yu (2002).
- Chang und Chung (2013) stellen dar, wie mit Methoden der linearen Optimierung (Kap. 2) Prozesse in der Produktionsplanung von Bildschirmen bei einem bekannten Hersteller von Unterhaltungselektronik verbessert werden können. Ziel ist dabei eine Verringerung der Lagerbestände bei gleichzeitiger Erfüllung aller Kundennachfragen.
- Thomas et al. (2013) beschäftigen sich mit dem Bettenmanagement in Krankenhäusern. Die optimale Zuordnung von Patienten zu Krankenhausbetten wird dabei durch die Lösung eines Optimierungsproblems bei mehrfacher Zielsetzung (Kap. 2.7) bestimmt.
- Ferrand et al. (2011) verwenden Methoden der ganzzahligen Optimierung (Kap. 6), um die langfristige Schichtplanung von Ärzten zu verbessern. Dabei werden nicht nur arbeitgeberseitige Restriktionen, sondern auch individuelle Präferenzen der Ärzte wie z.B. Urlaubswünsche und eine Anpassung der Arbeitszeiten an den Schlafrhythmus nach Nachtschichten berücksichtigt.
- Jütte et al. (2011) nutzen Methoden der gemischt-ganzzahligen Optimierung (Kap. 6) für die Einsatzplanung von Eisenbahnpersonal im Frachtbereich der Deutschen Bahn.
- Trick et al. (2012) beschäftigen sich mit der Zuordnung von Schiedsrichtern zu Spielen in der amerikanischen Baseball-Liga. Das so entstehende ganzzahlige Optimierungsproblem lässt sich mittels unterschiedlicher Heuristiken (Kap. 6.6.1) lösen.
- Tang et al. (2014) modellieren Planungsprobleme in der Stahlindustrie mittels Methoden der gemischt-ganzzahligen Optimierung. Aufgrund der komplexen Struktur der Probleme wird zur Lösung ein modifiziertes Branch-and-Bound-Verfahren (vgl. hierzu auch Kap. 6.4) verwendet.
- Westphal (2014) beschreibt, wie mit Hilfe von Ansätzen aus der Graphentheorie (Kap. 3) und Methoden der gemischt-ganzzahligen Optimierung (Kap. 6.4) optimale Spielpläne für die deutsche Basketball-Bundesliga erstellt werden können.
- Baur et al. (2014) stellen verschiedene gemischt-ganzzahlige Modelle (Kap. 6) zur Entscheidungsunterstützung bei der Bestimmung von Katalogpreisen für einen großen deutschen Reiseveranstalter vor. Diese Modelle ergeben sich aus der geeigneten Linearisierung ursprünglich nicht-linearer Modelle (Kap. 8), welche die Auswirkungen der Preissetzungen auf das Buchungsverhalten von Pauschalreisenden beschreiben.

- Rash und Kempf (2012) verwenden eine Kombination aus Heuristiken (Kap. 6.6.1) und mathematischer Optimierung, u.a. dynamischer Optimierung (Kap. 7), um die Produktlinie des weltweit größten Halbleiterherstellers zu gestalten. Zu beachten sind dabei u.a. Marktanforderungen, technische Beschränkungen und Produktionskosten.
- Eijgenraam et al. (2014) nutzen einen stochastisch dynamischen Optimierungsansatz (Kap. 7.4) für die Bewertung von Anlagen zum Hochwasserschutz und zur anschließenden Identifikation von notwendigen Aufrüstungen in den Niederlanden. Zur Lösung dieses Problems wird u.a. auf Simulation (Kap. 10) und Heuristiken (Kap. 6.6.1) zurückgegriffen.
- Brown et al. (2010) verwenden ein Netzwerk von Warteschlangen (Kap. 9) und Methoden der ganzzahligen Optimierung (Kap. 6), um die Kapazitätsplanung bei der Produktion von Halbleitern zu optimieren.
- Aleman et al. (2011) beschreiben, wie mit Hilfe von Methoden der Simulation (Kap. 10) die Ausbreitung von Infektionskrankheiten vorhergesagt werden kann. Anhand der Ergebnisse lässt sich so die Wirksamkeit von Gegenmaßnahmen beurteilen.
- Zhang et al. (2014) zeigen, wie das Bestandsmanagement eines Einzelhändlers der Pharmabranche verbessert werden kann. Dabei werden Methoden der Simulation (Kap. 10) genutzt, um Kundennachfragen vorherzusagen, die anschließend als Input für die Bestimmung des Lagerbestandes mit Hilfe von Heuristiken (Kap. 6.6.1) dienen.

Sehr erfolgreich werden Methoden des OR in (Software-) Systemen zum **Supply Chain Management** eingesetzt. Eine ausführliche Darstellung entsprechender Planungstechniken findet sich z.B. in Stadtler und Kilger (2015); vgl. auch Günther und Tempelmeier (2014, Teil A).

Entsprechendes gilt für den Bereich des **Revenue Managements**, das seinerseits Anwendung bei Fluggesellschaften, im Tourismus, im Hotelgewerbe und bei Autovermietern findet. Vgl. hierzu etwa Talluri und van Ryzin (2004), Klein und Steinhardt (2008) sowie Petrick (2009).

1.5 Algorithmen und Standardsoftware des OR

Das vorliegende Buch konzentriert sich, wie in Kap. 1.1 beschrieben, auf OR im engeren Sinne und damit die Darstellung von Algorithmen zur Anwendung und Lösung bzw. Simulation mathematischer Modelle. Solche Algorithmen lassen sich grundsätzlich in höheren Programmiersprachen wie Fortran, C oder C++ implementieren. Eine Alternative dazu stellen seit einigen Jahren Sprachen dar, die speziell für das wissenschaftliche Rechnen entwickelt wurden. Dazu zählen z.B. Numpy, R oder MATLAB. Die zweite Gruppe an Sprachen erzeugt i.d.R. Programme, die in der Ausführung mehr Zeit benötigen, dafür aufgrund kontextbezogener Sprachkomponenten etwa zur Matrixmultiplikation die einfachere Implementierung von Algorithmen erlauben.

Erfolgt eine **eigenständige Implementierung** von Algorithmen mit Hilfe einer der genannten Programmiersprachen, so ist auf eine effiziente Umsetzung zu achten (möglichst geringe (durchschnittliche) Rechenzeit, geringer Speicherbedarf). Entsprechende Umsetzungen waren und sind daher Gegenstand eigenständiger Veröffentlichungen. Beispielhaft zu nennen sind Pan (2014) für den in Kap. 2.4 dargestellten Simplex-Algorithmus, Pape (1974) sowie Gallo und Pallottino (1988) für die in Kap. 3.2 beschriebenen Kürzeste-Wege-Verfahren, Burkard und Derigs (1980) für das in Kap. 4.2 behandelte lineare Zuordnungsproblem sowie L'Ecuyer (1999) für die in Kap. 10.3 thematisierte Generierung von (Pseudo-) Zufallszahlen.

Bei der Anwendung von Modellen und Methoden in der unternehmerischen Praxis wird jedoch zunehmend auf die eigenständige Implementierung und damit die Entwicklung von Individualsoftware verzichtet. Stattdessen erfolgt der Einsatz von **Standardsoftware**.

Im Bereich der **Optimierung** existieren hier zum einen sog. Add-Ins für Tabellenkalkulationsprogramme wie Microsoft Excel oder LibreOffice Calc (vgl. Kap. 11). Zu nennen sind hier z.B. Premium Solver Pro sowie What'sBest!. Zum anderen bieten zahlreiche Hersteller eigenständige Softwarepakete an, die sich in ihrem Funktionsumfang teils erheblich unterscheiden. Dies reicht von reinen Optimierungsalgorithmen, über Programmierumgebungen, welche die integrierte Formulierung und Lösung von Optimierungsmodellen erlauben, bis hin zu Systemen, welche die vollständige Umsetzung von Unternehmensanwendungen ermöglichen.

Weit verbreitete Softwarepakete zur linearen und gemischt-ganzzahligen Optimierung sind Gurobi, FICO Xpress Optimization Suite und IBM CPLEX Optimization Studio. Während es sich bei Gurobi letztlich nur um eine Software zur Lösung von linearen und ganzzahligen Optimierungsproblemen handelt, die über spezielle Programmierschnittstellen angesprochen werden kann, bieten die zuletzt genannten Produkte eigene Modellierungssprachen samt Entwicklungsumgebungen. Eine umfassendere Übersicht zu entsprechenden Paketen findet sich zum einen in Kap. 11 des zugehörigen Übungsbuchs Domschke et al. (2015) und zum anderen auf der begleitenden Webseite zu diesem Buch *www.operations-research.info*.

Hinweise auf Software zur Lösung von linearen und ganzzahligen Optimierungsproblemen sowie Vergleiche ausgewählter Pakete findet man u.a. bei Bixby (2002), Chen et al. (2010, Kap. 15), Fourer (2013) sowie Suhl und Mellouli (2013, Kap. 3). Auch sind die in den Paketen implementierten Algorithmen immer wieder Gegenstand von Leistungsvergleichen (vgl. z.B. Atamtürk und Savelsbergh (2005) sowie Koch et al. (2011)).

Auch im Bereich der **Simulation** existieren Add-Ins für Tabellenkalkulationsprogramme, wovon @Risk sowie Oracle Crystal Ball die bekanntesten sind und Monte Carlo-Simulationen unterstützen (vgl. Kap. 10.1.1).

Unabhängig davon wurden spezielle *Simulationssprachen* entwickelt. Sie enthalten zahlreiche Komponenten, die häufig in Simulationsprogrammen benötigt werden. Beispiele hierfür sind die Erzeugung von Standardzufallszahlen bzw. Zufallszahlen entsprechend einer vorgegebenen Dichte- oder Wahrscheinlichkeitsfunktion, die Überwachung des zeitlichen Ablaufs der Simulation, die Sammlung, Analyse und statistische Auswertung relevanter Daten/Ergebnisse sowie die Aufbereitung und Präsentation von Ergebnissen. Im ökonomischen Bereich sind sie bevorzugt konzipiert zur diskreten Simulation (vgl. Kap. 10.1.2) dynamischer Problemstellungen mit stochastischen Inputgrößen. Zu den bekanntesten Vertretern zählen etwa GPSS, SIMAN, SIMSCRIPT und SLAM. Detaillierte Ausführungen hierzu findet man beispielsweise in Hoover und Perry (1990, S. 97 ff.) sowie Law (2014, Kap. 3).

Um die Durchführung von Simulationen weiter zu vereinfachen, existieren darüber hinaus Softwarepakete, die praktisch keine Programmierung mehr erfordern. Stattdessen erfolgt hier die Modellentwicklung mit Hilfe einer graphischen Benutzeroberfläche. Dazu werden die benötigten Elemente der Simulation durch das Auswählen, Anordnen und Verknüpfen entsprechender Icons mittels Menüs und Toolbars kombiniert. Bekannte Softwarepakete dieser Art sind AnyLogic, Arena, SIMPROCESS oder WITNESS. Zu Arena vgl. insbesondere Kelton et al. (2015).

Eine Softwareübersicht zu Simulationspaketen findet sich in Swain (2009) sowie auf der begleitenden Webseite zu diesem Buch *www.operations-research.info*.

Weiterführende Literatur zu Kapitel 1

Adam (1996)
Assad et al. (1992)
Bamberg et al. (2012b)
Dinkelbach und Kleine (1996)
Domschke et al. (2015) – *Übungsbuch*
Eisenführ et al. (2010)
Gass und Assad (2005)
Kallrath (2013)
Klein und Scholl (2011)
Laux et al. (2014)
Sashihara (2011)
Scholl (2001)
Schneeweiß (1992)
Watson und Nelson (2014)
Williams (2013)

Beispiel eines frühgeschichtlichen Optimierungsproblems

Quelle: Wille (1992, S. 75)

Das skizzierte Problem lässt sich wie folgt als Modell ausdrücken:

Minimiere „Anzahl der Hopser“

unter der Nebenbedingung

Drehfähigkeit der Räder, d.h. Anzahl der Ecken ≥ 3

Beispiele für sehr anschauliche Optimierungsprobleme neueren Datums

Zum Abschluss des einführenden Kapitels sei auf das Büchlein von Gritzmann und Brandenberg (2005) hingewiesen, das eine Reihe von Problemen und Lösungsprinzipien des OR auf eher spielerische Weise – „genießbar“ für jedermann – vermittelt:

Kürzeste Wege- und Handlungsreisenden-Problem, lineares Zuordnungsproblem, Branch-and-Bound-Prinzip usw.

Ein Buch, das sehr anschaulich die Anwendungspotenziale von Optimierungsmodellen in der Praxis diskutiert, stammt von Sashihara (2011).