Johannes Kepler Universität Linz
Institut für Regelungstechnik und Prozessautomatisierung

Schriftliche Prüfung aus Automatisierungstechnik 1 Übung,

am 23. Juni 2016

2. Teilklausur – Gruppe **A**

Name: Matr.Nr.:

Vorname(n): SKZ:

Aufgabe	1	2	3	$\sum$
erreichbare Punkte	16	16	16	48
erreichte Punkte				

Note:

Allgemeine Hinweise:

- Begründen Sie alle Aussagen ausführlich (JA/NEIN-Antworten gelten nicht als begründet!).
- Der erste Punkt bedeutet insbesondere, dass der Lösungsweg (inklusive aller Nebenrechnungen) eindeutig erkennbar sein muss. Punkte für den Lösungsweg - auch bei Fehlern in den Berechnungsschritten - können nur gegeben werden, wenn alle Teilschritte nachvollziehbar sind.
- Beginnen Sie jedes Beispiel auf einem eigenen Zettel und sortieren Sie die Zettel bei der Abgabe.
- Beschriften Sie alle Diagramme.
- Beantworten Sie die Fragen in ganzen Sätzen!
- Als Prüfungsunterlagen sind nur die mathematischen Formelsammlungen [Bartsch], [Bronstein], [Springer] und die Skripten der Vorlesung Automatisierungstechnik mit Tabellen von unserem Server zugelassen. Es sind keine Ergänzungen (durchgerechnete Übungsbeispiele, Übungsunterlagen, Veränderungen der Tabellen, etc.) erlaubt.

Viel Erfolg!

[Bartsch] Bartsch: Taschenbuch mathematischer Formeln, Fachbuchverlag Leipzig – Köln.

[Bronstein] Bronstein et al.: Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main.

[Springer] Rade und Westergren: Springers mathematische Formeln, Springer Verlag.

1. **Liapunovstabilität und Linearisierung**

   (a) Betrachten Sie das System

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 x_2 - 2x_1^2 \\ -5x_1^2 + 2x_1 - x_2 + 2x_1 x_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

   mit der Ruhelage $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$. Mit der Liapunovfunktion

$$V(x_1, x_2) = \tfrac{5}{2}x_1^2 - 2x_1x_2 + \tfrac{1}{2}x_2^2 \tag{2}$$

   erhält man

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -4x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2\,. \tag{3}$$

   i. Welche Stabilitätsaussage können Sie für die Ruhelage $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ anhand des um die Ruhelage linearisierten Systems treffen? *Begründung!*

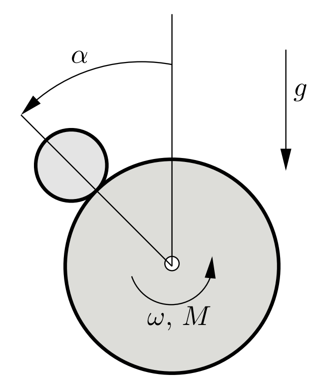
   ii. Welche Stabilitätsaussage können Sie für die Ruhelage $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ machen, wenn Sie nur die Funktionen (2) und (3) betrachten? *Begründung! HINWEIS: Sie können davon ausgehen, dass $V(x_1, x_2)$ positiv definit ist.*

   iii. Bestimmen Sie die Menge $S = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \dot{V}(x_1, x_2) = 0\right\}$ und skizzieren Sie diese in der (x_1, x_2)-Ebene.

   iv. Zeigen oder widerlegen Sie unter Zuhilfenahme Ihrer Skizze, dass die größte gegenüber dem Fluss des Systems (1) positiv invariante Menge in S die Ruhelage $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ ist.

   v. Welche Aussage können Sie mit dem Ergebnis von Punkt (iv) über die Stabilität der Ruhelage $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ machen?

   (b) Ein Ball liege auf einem Rad. Das Rad werde durch ein Drehmoment M angetrieben. Durch die Drehung des Rades soll der Ball in der oberen Ruhelage balanciert werden. Die interessierende Ausgangsgröße sei der Winkel α, um den der Ball von der Mitte abweicht. Mit nicht physikalisch motivierten Parametern erhält man die Differentialgleichungen zweiter Ordnung



$$\begin{aligned} 3\dot{\omega} - 2\ddot{\alpha} &= M \\ -2\dot{\omega} + 3\ddot{\alpha} - \tfrac{11}{2}\sin(\alpha) &= 0\,, \end{aligned}$$

   mit Drehmoment M und Winkelgeschwindigkeit ω. Der Winkel des Rades wird nicht modelliert.
   HINWEIS: Nebenstehende Skizze dient nur der Veranschaulichung. Die Bewegungsgleichungen sind gegeben.

   i. Bringen Sie das nichtlineare System auf Zustandsdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \\ y &= g(\mathbf{x}, u)\,. \end{aligned}$$

   ii. Berechnen Sie die stationäre Stellgröße u_s so, dass sich eine Ruhelage $\mathbf{x}_s$ mit $\alpha_s = 0$ einstellt und geben Sie die Ruhelage $\mathbf{x}_s$ an.

   iii. Linearisieren Sie das System um die zuvor berechnete Ruhelage und geben Sie es in Zustandsdarstellung an:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u \\ \Delta y &= \mathbf{c}^T\Delta\mathbf{x} \end{aligned}$$

   iv. Beurteilen Sie die Stabilität der Ruhelage $\mathbf{x}_s$ von Punkt (ii) anhand des linearisierten Systems.

2. **Erreichbarkeit und Zustandsregler**

(a) Betrachten Sie das LTI-System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u\,, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0\\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}\end{aligned}$$

mit den Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ 0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

und den Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

i. Geben Sie für die Parameterwerte $\alpha = 2$, $\beta = 1$ den erreichbaren Unterraum $\mathcal{R}$ an.

ii. Gibt es für die Parameterwerte $\alpha = 2$, $\beta = 1$ und $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ eine Steuerung $u(t) \in C^0([0,T])$ mit $T < \infty$ so, dass $\mathbf{x}(T) = [2,0,1]^T$ gilt? *Begründen Sie Ihre Aussage!*

iii. Bestimmen Sie falls möglich jenen Wertebereich der Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, für den $\dim(\mathcal{R}) = 1$ gilt. *Begründung!*

(b) Gegeben ist das LTI-System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 6\\ 3 & -3\end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2\\ 1\end{bmatrix}u\,.$$

i. Zeigen Sie, dass für die Dimension des erreichbaren Unterraums $\dim(\mathcal{R}) = 1$ gilt.

ii. Transformieren Sie das System in ein erreichbares Teilsystem und ein Restsystem. Geben Sie die Transformationsvorschrift sowie das System in transformierten Koordinaten $\mathbf{z}$ explizit an, und kennzeichnen Sie das erreichbare Teilsystem.

(c) Betrachten Sie das LTI-System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u\,, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0\\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x} + u\,.\end{aligned}$$

i. Berechnen Sie einen Zustandsregler $u = \mathbf{k}^T\mathbf{x}$ so, dass die Eigenwerte des geschlossenen Kreises bei $\{-1,-2,-2\}$ platziert werden.

ii. Nun sei ein Zustandsregler $u = -x_1 - 5x_2 - 2x_3$ gegeben, und der Anfangswert des Systems sei $\mathbf{x}_0 = [2,1,1]^T$.

A. Zeigen Sie, dass der Zustandsregler die Ruhelage $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ des geschlossenen Kreises zwar stabilisiert aber nicht asymptotisch stabilisiert.

B. Berechnen Sie den Wert der Ausgangsgröße $y(t)$ des geschlossenen Kreises für den Zeitpunkt $t = 0$.

3. **Beobachtbarkeit und Beobachterentwurf**

(a) Gegeben ist das LTI-System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} - 3u\,. \end{aligned} \tag{4}$$

i. Zeigen Sie, dass das System vollständig beobachtbar ist, und entwerfen Sie einen vollständigen Beobachter so, dass die Eigenwerte des Fehlersystems bei $\{-2, -3\}$ liegen.

ii. Welche Größen des Systems (4) müssen Sie kennen, um den Beobachter aus Punkt (i) einsetzen zu können? *Begründung!*

(b) Betrachten Sie das LTI-System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{aligned}$$

mit den Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 5 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & -2 & -\gamma^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

und den Parametern $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

i. Zeigen Sie, dass der Unterraum $\mathcal{O} \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$ unabhängig von den Parametern α, β, γ ist. Geben Sie sowohl $\mathcal{O}$ als auch den nicht beobachtbaren Unterraum $\mathcal{O}^\perp \subseteq \mathbb{R}^3$ an.

ii. Existieren Parameterwerte α, β, γ so, dass es möglich ist für das System einen vollständigen Beobachter mit asymptotisch stabiler Fehlerdynamik zu entwerfen? Falls JA geben Sie den entsprechenden Parameterbereich an. *Begründen Sie Ihr Ergebnis ausführlich!*

(c) Zur Regelung des LTI-Systems

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u\,, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned} \tag{5}$$

wird ein trivialer Beobachter zusammen mit dem Zustandsregler

$$u = \mathbf{k}^T \hat{\mathbf{x}} + v = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + v$$

verwendet.

i. Geben Sie das Fehlersystem des trivialen Beobachters an, und berechnen Sie die Eigenwerte des Fehlersystems.

ii. Der Anfangswert des Systems (5) sei nun $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix}^T$, und der triviale Beobachter wird mit $\mathbf{z}(0) = \mathbf{0}$ initialisiert. Berechnen Sie den Fehler $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)$ für den Zeitpunkt $t = 1\,\mathrm{s}$.

iii. Formulieren Sie den Zustandsregler zusammen mit dem Beobachter als ein dynamisches System der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \bar{\mathbf{b}}v \\ u &= \bar{\mathbf{c}}^T \mathbf{z} + \bar{d}v \end{aligned}$$

mit dem Eingang v und dem Ausgang u, und geben Sie die Matrizen $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}^T$ und $\bar{d}$ explizit an.

Achtung: Dies ist keine offizielle Musterlösung für den Übungstest sondern nur eine Ausarbeitung, dieses Dokument ist also sicherlich nicht fehlerfrei. Die Latex-Files befinden sich hier, wer Fehler findet darf sie gerne ausbessern, die Files neu kompilieren und die neue Version hochladen.

Angabe 1: Liapunovstabilität und Linearisierung

Betrachten Sie das System

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 x_2 - 2x_1^2 \\ -5x_1^2 + 2x_1 - x_2 + 2x_1 x_2 \end{bmatrix}$$

mit der Ruhelage $x_s = 0$. Mit der Liapunovfunktion

$$V(x_1, x_2) = \frac{5}{2}x_1^2 - 2x_1 x_2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

erhält man

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -4x_1^2 + 4x_1 x_2 - x_2^2$$

i Welche Stabilitätsaussage können Sie für die Ruhelage $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ anhand des um die Ruhelage linearisierten Systems treffen? Begrüündung!

Berechnung der linearisierten **A**-Matrix:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_s)}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte dieser Matrix:

$$\det(\mathbf{A} - \mathbf{E}\lambda) = -\lambda(-1 - \lambda) = \lambda^2 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1$$

Alle Eigenwerte liegen in der linken Halbebene, jedoch existiert ein Eigenwert mit Realanteil $= 0$, damit lässt sich laut Satz 7.4 aus dem Übungsskriptum keine Aussage über die Stabilität des nichtlinearen Systems treffen.

ii Welche Stabilitätsaussage können Sie für die Ruhelage $\mathbf{x}_s = 0$ machen, wenn Sie nur die Funktionen V und $\dot{V}$ betrachten? *Begründung! HINWEIS: Sie können davon ausgehen, dass $V(x_1, x_2)$ positiv definit ist.*

Es muss die Definitheit von $\dot{V}$ bestimmt werden:

$$0 \geq -\underbrace{(-2x_1 + x_2)^2}_{\text{immer } \geq 0} = -\left(4x_1^2 - 4x_1 x_2 + x_2^2\right) = \dot{V}$$

$\dot{V}$ kann als binomischer Term mit negativen Vorzeichen geschrieben werden. $\dot{V}$ ist also negativ semidefinit. Hiermit kann gezeigt werden, dass die betrachtete Ruhelage stabil ist, über die asymptotische Stabilität kann keine Aussage gemacht werden.

iii Bestimmen Sie die Menge $S = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \dot{V}(x_1, x_2) = 0\right\}$ und skizzieren Sie diese in der (x_1, x_2) - Ebene.

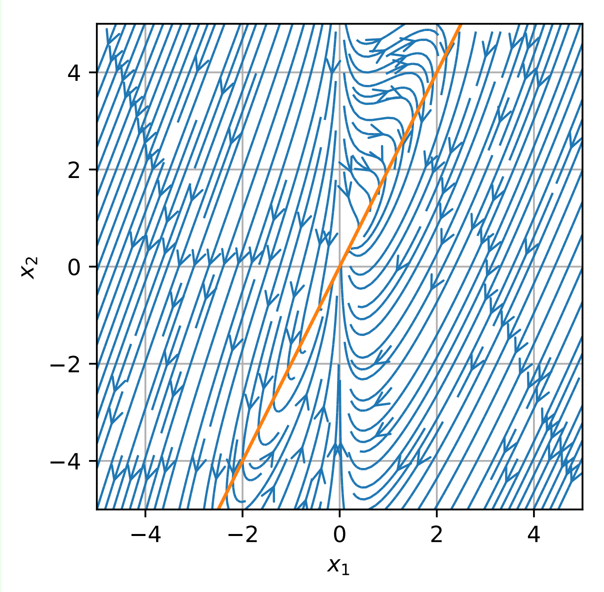
Aus der vorherigen Zeile kann erkannt werden das S die Menge an Tupeln ist, welche die Gleichung

$$-2x_1 + x_2 = 0$$

erfüllt. In der x_1-x_2-Ebene ist das offensichtlich eine Linie durch den Ursprung.

iv Zeigen oder widerlegen Sie unter Zuhilfenahme Ihrer Skizze, dass die größte gegenüber dem Fluss des Systems (1) positiv invariante Menge in S die Ruhelage $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ ist.

Wenn man die Trajektorien und die Invariante Menge S in einer gemeinsamen Skizze zeichnet erkennt man, dass nur die stationäre Trajektorie $\mathbf{x_s} = \mathbf{0}$ vollständig in dieser Menge enthalten ist:



In der Menge S gilt: $x_2 = 2x_1$, wenn man diesen Zusammenhang in die Systemgleichung einsetzt erhält man folgendes (entspricht dem Tangentialvektor der Trajektorien an der orangen Linie):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1^2 \end{bmatrix}$$

Wie in der Skizze schon zu erahnen bestätigt sich hier, dass alle von $\mathbf{0}$ verschiedenen Trajektorien die Menge S immer von "oben nach unten" schneiden und nicht in der Menge bleiben.

v Welche Aussage können Sie mit dem Ergebnis von Punkt (iv) über die Stabilität der Ruhelage $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ machen?

Mit dem Invarianzprinzip von LaSalle konnte die asymptotische Stabilität der Ruhelage gezeigt werden.

Angabe 1: Stabilität und Linearisierung

Ein Ball liege auf einem Rad. Das Rad werde durch ein Drehmoment M angetrieben. Durch die Drehung des Rades soll der Ball in der oberen Ruhelage balanciert werden. Die interessierende Ausgangsgröße sei der Winkel α, um den der Ball von der Mitte abweicht. Mit nicht physikalisch motivierten Parametern erhält man die Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$
\begin{aligned}
3\dot{\omega} - 2\ddot{\alpha} &= M \\
-2\dot{\omega} + 3\ddot{\alpha} - \frac{11}{2}\sin(\alpha) &= 0
\end{aligned}
$$

mit Drehmoment M und Winkelgeschwindigkeit ω. Der Winkel des Rades wird nicht modelliert. *HINWEIS: Nebenstehende Skizze dient nur der Veranschaulichung. Die Bewegungsgleichungen sind gegeben.*

i Bringen Sie das nichtlineare System auf Zustandsdarstellung

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \\
y &= g(\mathbf{x}, u)
\end{aligned}
$$

Da α der Ausgang des Systems sein soll, muss es jedenfalls im Zustandsvektor $\mathbf{x}$ vorkommen. Es müssen die beiden gegebenen Gleichungen nach $\ddot{\alpha}$ und $\dot{\omega}$ aufgelöst werden.

$$
\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \dot{\alpha} \\ \omega \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \ddot{\alpha} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \frac{33}{10}\sin\alpha + \frac{2}{5}M \\ \frac{11}{5}\sin\alpha + \frac{3}{5}M \end{pmatrix}
$$

ii Berechnen Sie die stationäre Stellgröbe u_s so, dass sich eine Ruhelage $\mathbf{x}_s$ mit $\alpha_s = 0$ einstellt und geben Sie die Ruhelage $\mathbf{x}_s$ an.

$$
\mathbf{x}_s = \begin{pmatrix} \alpha_s \\ \dot{\alpha_s} \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}_s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{33}{10}\sin 0 + \frac{2}{5}M \\ \frac{11}{5}\sin 0 + \frac{3}{5}M \end{pmatrix} \rightarrow M = 0
$$

iii Linearisieren Sie das System um die zuvor berechnete Ruhelage und geben Sie es in Zustandsdarstellung an:

$$
\begin{aligned}
\Delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u \\
\Delta y &= \mathbf{c}^T\Delta\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{33}{10} & 0 & 0 \\ \frac{11}{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

iv Beurteilen Sie die Stabilität der Ruhelage $\mathbf{x}_s$ von Punkt (ii) anhand des linearisierten Systems.

$$
\operatorname{Det}(\mathbf{A} - \mathbf{E}\lambda) = -\lambda^3 + \lambda\frac{33}{10} \rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{33}{10}}
$$

Es existiert mindestens ein Eigenwert mit positiven Realteil, somit ist das System instabil.

Angabe 2: Erreichbarkeit und Zustandsregler

Betrachten Sie das LTI-System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}\end{aligned}$$

mit den Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und den Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

i Geben Sie für die Parameterwerte $\alpha = 2, \beta = 1$ den erreichbaren Unterraum $\mathcal{R}$ an.

$$\mathcal{R} = \operatorname{span}\left\{\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b},\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

ii Gibt es für die Parameterwerte $\alpha = 2, \beta = 1$ und $\mathbf{x}_0 = 0$ eine Steuerung $u(t) \in C^0([0,T])$ mit $T < \infty$ so, dass $\mathbf{x}(T) = [2, 0, 1]^T$ gilt? Begründen Sie Ihre Aussage!

Es ist zu überprüfen ob $\mathbf{x}(T) = [2, 0, 1]^T \in \mathcal{R}$ ist:

$$\det\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\1 & -1 & 0\\0 & -1 & 1\end{pmatrix} = -2 - 2 - (2) = -2$$

Der Vektor $\mathbf{x}(T) = [2, 0, 1]^T$ ist linear unabhängig von den Basisvektoren von $\mathcal{R}$ und liegt somit nicht im Vektorraum der erreichbaren Zustände. Dieser Zustand kann durch keine Steuerung erreicht werden.

iii Bestimmen Sie falls möglich jenen Wertebereich der Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, für den $\dim(\mathcal{R}) = 1$ gilt. Begründung!

Dies ist erreicht, wenn $\mathbf{b}$ ein rechtseigenvektor von $\mathbf{A}$ ist.

Eigenwerte von $\mathbf{A}$: $\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\0 & -1-\lambda & 0\\0 & -1 & 1-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(-1-\lambda) = 0, \quad \lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = -1$

Eigenvektor zu $\lambda = 1$:

$$\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & -1 & 0\end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Für ein beliebiges α und $\beta = 0$ wird $\mathbf{b}$ also zum rechtseigenvektor von $\mathbf{A}$ und der erreichbare Unterraum $\mathcal{R}$ wird ein eindimesnionaler Vektorraum.

Angabe 3

Gegeben ist das LTI-System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

i Zeigen Sie, dass für die Dimension des erreichbaren Unterraums $\dim(\mathcal{R}) = 1$ gilt.

$$\mathcal{R} = \operatorname{span}\{\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\mathbf{b}$ und $\mathbf{Ab}$ sind linear abhängig, wird also nur von einem Vektor aufgespannt und besitzt damit die Dimension 1.

ii Transformieren Sie das System in ein erreichbares Teilsystem und ein Restsystem. Geben Sie die Transformationsvorschrift sowie das System in transformierten Koordinaten $\mathbf{z}$ explizit an, und kennzeichnen Sie das erreichbare Teilsystem.

Transformationsvorschrift: $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{z}, \; \mathbf{z} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}$

In der Transformationsmatrix ist der Basisvektor des erreichbaren Unterraums und ein Komplementärvektor enthalten:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{V}^{-1}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{z} + \mathbf{V}^{-1}\mathbf{b}u$$

In transformierten Koordinaten ergibt sich das System dann zu:

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{z} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

Das erreichbare Teilsystem befindet sich in der ersten Zeile und lässt sich durch den Eingang u beeinflussen. Das nicht-erreichbare Teilsystem befindet sich in der zweiten Zeile und lässt sich weder indirekt durch den ersten Zustand, noch direkt durch den Eingang u beeinflussen (autonome DGL).

Angabe 4: Beobachtbarkeit und Beobachterentwurf

Betrachten Sie das LTI-System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + u$$

i Berechnen Sie einen Zustandsregler $u = \mathbf{k}^T\mathbf{x}$ so, die Eigenwerte des geschlossenen Kreises bei $\{-1, -2, -2\}$ platziert werden.

Das gewünschte charakteristische Polynom lautet:

$$p(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2)^2 = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 8\lambda + 4$$

Die Koeffizienten dieses Polynoms lauten: $\alpha_0 = 4, \alpha_1 = 8, \alpha_2 = 5$

$$\mathbf{e}_3^T = \mathbf{t}_1^T\mathbf{M}_R \ = \mathbf{t}_1^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{t}_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Einsetzen in die Formel nach Ackermann:

$$\mathbf{k}^T = -\alpha_0\mathbf{t}_1^T - \alpha_1\mathbf{t}_1^T\mathbf{A} - \alpha_2\mathbf{t}_1^T\mathbf{A}^2 - \mathbf{t}_1^T\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} -5 & -10 & -4 \end{pmatrix}$$

Ergebnis wurde durch Berechnen der Eigenwerte von $\mathbf{A} + \mathbf{k}^T\mathbf{b}$ bestätigt.

ii Nun sei ein Zustandsregler $u = -x_1 - 5x_2 - 2x_3$ gegeben, und der Anfangswert des Systems sei $\mathbf{x}_0 = [2, 1, 1]^T$.

A Zeigen Sie, dass der Zustandsregler die Ruhelage $\mathbf{x}_s = 0$ des geschlossenen Kreises zwar stabilisiert aber nicht asymptotisch stabilisiert.

Dynamikmatrix des geschlossenen Kreises:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte der Matrix $\overline{\mathbf{A}}$ um die Stabilität beurteilen zu können:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -3 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(-3-\lambda) - 3\lambda = 0, \quad \lambda_1 = 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 3 = 0 \rightarrow \lambda_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-12}}{2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Die Realteile aller Eigenwerte sind ≤ 0 aber nicht < 0, somit ist die Ruhelage stabil, aber nicht asymptotisch stabil.

B Berechnen Sie den Wert der Ausgangsgröße $y(t)$ des geschlossenen Kreises für den Zeitpunkt $t = 0$.

Die Ausgangsgröße $y(t)$ hängt nur vom Zustandsvektor $\mathbf{x}$ zum Zeitpunkt t ab, da der Eingang u im geschlossenem Kreis auch eine Funktion von $\mathbf{x}$ ist. $\mathbf{x}(t=0)$ ist bekannt, somit ergibt sich $y(t=0)$:

$$y(t=0) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t=0) + u = \left(\mathbf{c}^T + \mathbf{k}^T\right)\mathbf{x}(t=0) = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -6$$

Angabe 5

Gegeben ist das LTI-System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} - 3u$$

i Zeigen Sie, dass das System vollständig beobachtbar ist, und entwerfen Sie einen vollständigen Beobachter so, dass die Eigenwerte des Fehlersystems bei $\{-2, -3\}$ liegen.

Prüfen ob das System vollständig beobachtbar ist, ob $\mathcal{O}$ den ganzen $\mathbb{R}^2$ aufspannt:

$$\mathcal{O} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$$

Berechnen der Koeffizienten des gewünschten charakteristischen Polynoms:

$$p(s) = (s+3)(s+2) = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 = s^2 + 5s + 6 \to \alpha_0 = 6,\ \alpha_1 = 5$$

Berechnen des Vektors $\hat{\mathbf{t}}_1$:

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{M}_O \hat{\mathbf{t}}_1 = \begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 2 \\ 2 & 6\end{pmatrix} \hat{\mathbf{t}}_1 \to \hat{\mathbf{t}}_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} \\ 0\end{pmatrix}$$

Berechnung von $\hat{\mathbf{k}}$:

$$\hat{\mathbf{k}} = -\alpha_0 \hat{\mathbf{t}}_1 - \alpha_1 \mathbf{A} \hat{\mathbf{t}}_1 - \mathbf{A}^2 \hat{\mathbf{t}}_1 = \begin{pmatrix}1 \\ -\frac{7}{2}\end{pmatrix}$$

Damit kann der vollständige Beobachter berechnet werden:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \left(\mathbf{A} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T\right)\mathbf{z} + (\mathbf{b} + \hat{\mathbf{k}}d)u - \hat{\mathbf{k}}y \\ \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{E}\mathbf{z} \end{aligned} \quad \to \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \begin{pmatrix}-1 & -2 \\ 1 & -4\end{pmatrix}\mathbf{z} + \begin{pmatrix}0 \\ \frac{19}{2}\end{pmatrix} u - \begin{pmatrix}1 \\ -\frac{7}{2}\end{pmatrix} y \\ \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{E}\mathbf{z} \end{aligned}$$

ii Welche Gröben des Systems müssen Sie kennen, um den Beobachter aus Punkt (i) einsetzen zu können? Begründung!

Der Eingang u und der Ausgang y der Strecke sind Eingänge des Beobachters, müssen also bekannt sein. Zur Berechnung des Beobachters müssen $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T$ und d bekannt sein. Also muss jede Größe des Beobachters bekannt sein, außer die Zustände $\mathbf{x}$ der Strecke.

Angabe 6

Betrachten Sie das LTI-System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$
$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

Mit den Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 5 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & -2 & -\gamma^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

und den Parametern $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

i Zeigen Sie, dass der Unterraum $\mathcal{O} \subseteq \left(\mathbb{R}^3\right)^*$ unabhängig von Parametern α, β, γ ist. Geben Sie sowohl $\mathcal{O}$ als auch den nicht beobachtbaren Unterraum $\mathcal{O}^\perp \subseteq \mathbb{R}^3$ an.

> $$\mathcal{O} = \operatorname{span}\left\{\mathbf{c}, \mathbf{c}^T\mathbf{A}, \mathbf{c}^T\mathbf{A}^2\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -4 & -2\gamma^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -4\beta + 4\gamma^2 & 2\gamma^4\end{pmatrix}\right\}$$
>
> Es handelt sich um 3 Vektoren, von denen keiner einen Eintrag im ersten Element hat $\rightarrow$ Sie müssen linear abhängig sein. Unabhängig von der Wahl der Parameter kann immer dieser Vektorraum aufgespannt werden:
>
> $$\mathcal{O} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$
>
> Der Kern von $\mathbf{M}_O$ ergibt sich damit automatisch zu:
>
> $$\mathcal{O}^\perp = \operatorname{Ker}(\mathbf{M}_O) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}\right\}$$

ii Existieren Parameterwerte α, β, γ so, dass es möglich ist für das System einen vollständigen Beobachter mit asymptotisch stabiler Fehlerdynamik zu entwerfen? Falls JA geben Sie den entsprechenden Parameterbereich an. *Begründen Sie Ihr Ergebnis ausführlich!*

> Wie in Punkt (i) gezeigt, ist das System unabhängig von der Wahl der Parameter *nicht* vollständig beobachtbar. Eine asymptotische Fehlerdynamik ist also nur möglich, wenn das System detektierbar ist.
>
> Zerlegung in beobachtbares und nicht-beobachtbares Teilsystem:
>
> $$\mathbf{z} = \mathbf{V}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{z}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$
>
> $$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{V}\mathbf{A}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{V}\mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{z} \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \begin{pmatrix}\gamma^2 & -2 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 5 & \alpha^2\end{pmatrix}\mathbf{z} + \begin{pmatrix}-4 \\ 0 \\ 4\end{pmatrix}u \\ y &= \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\end{pmatrix}\mathbf{z} \end{aligned}$$
>
> In dieser Transformation wurden die Zeilen der Gleichungen nur umsortiert. Nach dieser Umsortierung sieht man das der nicht-beobachtbare Zustand in der dritten Zeile steht. Gemessen wird nur der erste Zustand, der Zweite wirkt sich auf den Ersten aus. Der dritte Zustand hat jedoch keinerlei Einfluss auf den Ausgang und ist somit nicht beobachtbar. Dies könnte man auch schon ohne Transformation aus dem gegebenem System sehen.
>
> Um Detektierbarkeit zu erfüllen müsste α^2 eine (eindimensionale) Hurwitz-Matrix sein, also negativ. Da $\alpha \in \mathbb{R}$ ist, kann es kein α geben, dass diese Bedingung erfüllt.

Angabe 7

Zur Regelung des LTI-Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$
$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

wird ein trivialer Beobachter zusammen mit dem Zustandsregler

$$u = \mathbf{k}^T \hat{\mathbf{x}} + v = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + v$$

verwendet

i Geben Sie das Fehlersystem des trivialen Beobachters an, und berechnen Sie die Eigenwerte des Fehlersystems.

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e}$$

Eigenwerte der Systemmatrix $\mathbf{A}$:

$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)^2 + 1 = 2 + 2\lambda + \lambda^2 \to \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

ii Der Anfangswert des Systems sei nun $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix}^T$, und der triviale Beobachter wird mit $\mathbf{z}(0) = \mathbf{0}$ initialisiert. Berechnen Sie den Fehler $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)$ für den Zeitpunkt $t = 1\mathrm{s}$.

Fragestellung: Wie klingt der anfängliche Fehler ab? Diese Frage ist vom Eingang u unabhängig und deshalb ist dieser auch nicht angeführt.

Aufstellen der Transitionsmatrix:

$$\Phi(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}(t=1) = \Phi(1)\ \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.596 \\ -0.928 \end{pmatrix}$$

iii Formulieren Sie den Zustandsregler zusammen mit dem Beobachter als ein dynamisches System der Form

$$\dot{\mathbf{z}} = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \overline{\mathbf{b}}v$$
$$u = \overline{\mathbf{c}}^T \mathbf{z} + \overline{d}v$$

mit dem Eingang v und dem Ausgang u, und geben Sie die Matrizen $\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}^T$ und $\overline{d}$ explizit an.

Der triviale Beobachter ist lediglich eine Kopie der Strecke, der einzige Eingang entspricht dem Eingang der Strecke $\to v = u$. Da es sich nur um eine Kopie handelt, werden die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{b}$ natürlich übernommmen. In der Ausgangsgleichung wird der Zustandsregler realisiert.

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}, \quad \overline{\mathbf{b}} = \mathbf{b}, \quad \overline{\mathbf{c}}^T = \mathbf{k}^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \overline{d} = 0$$