**Johannes Kepler Universität Linz**
**Institut für Regelungstechnik und Prozessautomatisierung**

Schriftliche Prüfung aus Automatisierungstechnik 1 Übung,

am 23. Juni 2016

2. Teilklausur – Gruppe **A**

Name: Matr.Nr.:

Vorname(n): SKZ:

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|
| erreichbare Punkte | 16 | 16 | 16 | 48 |
| erreichte Punkte | | | | |

Note:

**Allgemeine Hinweise:**

- Begründen Sie alle Aussagen ausführlich (JA/NEIN-Antworten gelten nicht als begründet!).
- Der erste Punkt bedeutet insbesondere, dass der Lösungsweg (inklusive aller Nebenrechnungen) eindeutig erkennbar sein muss. Punkte für den Lösungsweg - auch bei Fehlern in den Berechnungsschritten - können nur gegeben werden, wenn alle Teilschritte nachvollziehbar sind.
- Beginnen Sie jedes Beispiel auf einem eigenen Zettel und sortieren Sie die Zettel bei der Abgabe.
- Beschriften Sie alle Diagramme.
- Beantworten Sie die Fragen in ganzen Sätzen!
- Als Prüfungsunterlagen sind nur die mathematischen Formelsammlungen [Bartsch], [Bronstein], [Springer] und die Skripten der Vorlesung Automatisierungstechnik mit Tabellen von unserem Server zugelassen. Es sind keine Ergänzungen (durchgerechnete Übungsbeispiele, Übungsunterlagen, Veränderungen der Tabellen, etc.) erlaubt.

Viel Erfolg!


[Bartsch] Bartsch: Taschenbuch mathematischer Formeln, Fachbuchverlag Leipzig – Köln.

[Bronstein] Bronstein et al.: Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main.

[Springer] Rade und Westergren: Springers mathematische Formeln, Springer Verlag.

1. **Liapunovstabilität und Linearisierung**

   (a) Betrachten Sie das System

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 x_2 - 2x_1^2 \\ -5x_1^2 + 2x_1 - x_2 + 2x_1 x_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

   mit der Ruhelage $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$. Mit der Liapunovfunktion

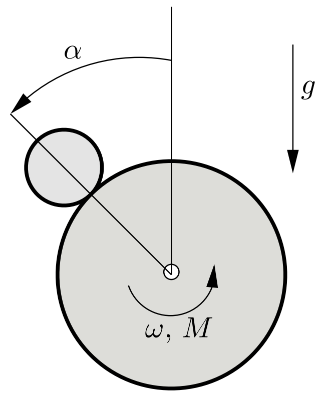
$$V(x_1, x_2) = \tfrac{5}{2}x_1^2 - 2x_1 x_2 + \tfrac{1}{2}x_2^2 \tag{2}$$

   erhält man

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -4x_1^2 + 4x_1 x_2 - x_2^2\,. \tag{3}$$

   i. Welche Stabilitätsaussage können Sie für die Ruhelage $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ anhand des um die Ruhelage linearisierten Systems treffen? *Begründung!*
   ii. Welche Stabilitätsaussage können Sie für die Ruhelage $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ machen, wenn Sie nur die Funktionen (2) und (3) betrachten? *Begründung! HINWEIS: Sie können davon ausgehen, dass $V(x_1, x_2)$ positiv definit ist.*
   iii. Bestimmen Sie die Menge $S = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \dot{V}(x_1, x_2) = 0\right\}$ und skizzieren Sie diese in der $(x_1, x_2)$-Ebene.
   iv. Zeigen oder widerlegen Sie unter Zuhilfenahme Ihrer Skizze, dass die größte gegenüber dem Fluss des Systems (1) positiv invariante Menge in $S$ die Ruhelage $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ ist.
   v. Welche Aussage können Sie mit dem Ergebnis von Punkt (iv) über die Stabilität der Ruhelage $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ machen?

   (b) Ein Ball liege auf einem Rad. Das Rad werde durch ein Drehmoment $M$ angetrieben. Durch die Drehung des Rades soll der Ball in der oberen Ruhelage balanciert werden. Die interessierende Ausgangsgröße sei der Winkel $\alpha$, um den der Ball von der Mitte abweicht. Mit nicht physikalisch motivierten Parametern erhält man die Differentialgleichungen zweiter Ordnung




$$\begin{aligned} 3\dot{\omega} - 2\ddot{\alpha} &= M \\ -2\dot{\omega} + 3\ddot{\alpha} - \tfrac{11}{2}\sin(\alpha) &= 0\,, \end{aligned}$$

   mit Drehmoment $M$ und Winkelgeschwindigkeit $\omega$. Der Winkel des Rades wird nicht modelliert.
   *HINWEIS: Nebenstehende Skizze dient nur der Veranschaulichung. Die Bewegungsgleichungen sind gegeben.*

   i. Bringen Sie das nichtlineare System auf Zustandsdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \\ y &= g(\mathbf{x}, u)\,. \end{aligned}$$

   ii. Berechnen Sie die stationäre Stellgröße $u_s$ so, dass sich eine Ruhelage $\mathbf{x}_s$ mit $\alpha_s = 0$ einstellt und geben Sie die Ruhelage $\mathbf{x}_s$ an.
   iii. Linearisieren Sie das System um die zuvor berechnete Ruhelage und geben Sie es in Zustandsdarstellung an:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u \\ \Delta y &= \mathbf{c}^T \Delta\mathbf{x} \end{aligned}$$

   iv. Beurteilen Sie die Stabilität der Ruhelage $\mathbf{x}_s$ von Punkt (ii) anhand des linearisierten Systems.

2. **Erreichbarkeit und Zustandsregler**

(a) Betrachten Sie das LTI-System

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u\,, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\
y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

mit den Matrizen

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

und den Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

i. Geben Sie für die Parameterwerte $\alpha = 2$, $\beta = 1$ den erreichbaren Unterraum $\mathcal{R}$ an.

ii. Gibt es für die Parameterwerte $\alpha = 2$, $\beta = 1$ und $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ eine Steuerung $u(t) \in C^0([0,T])$ mit $T < \infty$ so, dass $\mathbf{x}(T) = [2,0,1]^T$ gilt? *Begründen Sie Ihre Aussage!*

iii. Bestimmen Sie falls möglich jenen Wertebereich der Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, für den $\dim(\mathcal{R}) = 1$ gilt. *Begründung!*

(b) Gegeben ist das LTI-System

$$
\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u\,.
$$

i. Zeigen Sie, dass für die Dimension des erreichbaren Unterraums $\dim(\mathcal{R}) = 1$ gilt.

ii. Transformieren Sie das System in ein erreichbares Teilsystem und ein Restsystem. Geben Sie die Transformationsvorschrift sowie das System in transformierten Koordinaten $\mathbf{z}$ explizit an, und kennzeichnen Sie das erreichbare Teilsystem.

(c) Betrachten Sie das LTI-System

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u\,, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + u\,.
\end{aligned}
$$

i. Berechnen Sie einen Zustandsregler $u = \mathbf{k}^T\mathbf{x}$ so, dass die Eigenwerte des geschlossenen Kreises bei $\{-1, -2, -2\}$ platziert werden.

ii. Nun sei ein Zustandsregler $u = -x_1 - 5x_2 - 2x_3$ gegeben, und der Anfangswert des Systems sei $\mathbf{x}_0 = [2,1,1]^T$.

   A. Zeigen Sie, dass der Zustandsregler die Ruhelage $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ des geschlossenen Kreises zwar stabilisiert aber nicht asymptotisch stabilisiert.

   B. Berechnen Sie den Wert der Ausgangsgröße $y(t)$ des geschlossenen Kreises für den Zeitpunkt $t = 0$.

3. **Beobachtbarkeit und Beobachterentwurf**

(a) Gegeben ist das LTI-System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} - 3u\,. \end{aligned} \tag{4}$$

i. Zeigen Sie, dass das System vollständig beobachtbar ist, und entwerfen Sie einen vollständigen Beobachter so, dass die Eigenwerte des Fehlersystems bei $\{-2, -3\}$ liegen.

ii. Welche Größen des Systems (4) müssen Sie kennen, um den Beobachter aus Punkt (i) einsetzen zu können? *Begründung!*

(b) Betrachten Sie das LTI-System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{aligned}$$

mit den Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 5 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & -2 & -\gamma^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

und den Parametern $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

i. Zeigen Sie, dass der Unterraum $\mathcal{O} \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$ unabhängig von den Parametern $\alpha, \beta, \gamma$ ist. Geben Sie sowohl $\mathcal{O}$ als auch den nicht beobachtbaren Unterraum $\mathcal{O}^\perp \subseteq \mathbb{R}^3$ an.

ii. Existieren Parameterwerte $\alpha, \beta, \gamma$ so, dass es möglich ist für das System einen vollständigen Beobachter mit asymptotisch stabiler Fehlerdynamik zu entwerfen? Falls JA geben Sie den entsprechenden Parameterbereich an. *Begründen Sie Ihr Ergebnis ausführlich!*

(c) Zur Regelung des LTI-Systems

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u\,, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned} \tag{5}$$

wird ein trivialer Beobachter zusammen mit dem Zustandsregler

$$u = \mathbf{k}^T \hat{\mathbf{x}} + v = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + v$$

verwendet.

i. Geben Sie das Fehlersystem des trivialen Beobachters an, und berechnen Sie die Eigenwerte des Fehlersystems.

ii. Der Anfangswert des Systems (5) sei nun $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix}^T$, und der triviale Beobachter wird mit $\mathbf{z}(0) = \mathbf{0}$ initialisiert. Berechnen Sie den Fehler $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)$ für den Zeitpunkt $t = 1\,\mathrm{s}$.

iii. Formulieren Sie den Zustandsregler zusammen mit dem Beobachter als ein dynamisches System der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \bar{\mathbf{b}}v \\ u &= \bar{\mathbf{c}}^T \mathbf{z} + \bar{d}v \end{aligned}$$

mit dem Eingang $v$ und dem Ausgang $u$, und geben Sie die Matrizen $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}^T$ und $\bar{d}$ explizit an.