Johannes Kepler Universität Linz
Institut für Regelungstechnik und Prozessautomatisierung

Schriftliche Prüfung aus Automatisierungstechnik 1 Übung,

am 29. Juni 2017

2. Teilklausur – Gruppe **A**

Name: Matr.Nr.:

Vorname(n): SKZ:

Aufgabe	1	2	3	$\sum$
erreichbare Punkte	16	16	16	48
erreichte Punkte				

Note:

Allgemeine Hinweise:

- Begründen Sie alle Aussagen ausführlich (JA/NEIN-Antworten gelten nicht als begründet!).
- Der erste Punkt bedeutet insbesondere, dass der Lösungsweg (inklusive aller Nebenrechnungen) eindeutig erkennbar sein muss. Punkte für den Lösungsweg - auch bei Fehlern in den Berechnungsschritten - können nur gegeben werden, wenn alle Teilschritte nachvollziehbar sind.
- Beginnen Sie jedes Beispiel auf einem eigenen Zettel und sortieren Sie die Zettel bei der Abgabe.
- Beschriften Sie alle Diagramme.
- Beantworten Sie die Fragen in ganzen Sätzen!
- Kennzeichnen Sie die Ergebnisse eindeutig und streichen Sie, falls ein Beispiel mehrmals gerechnet wurde, die falsche Rechnung durch.
- Als Prüfungsunterlage ist nur die vom Institut zur Verfügung gestellte mathematische Formelsammlung zur Übung zugelassen. Es sind keinerlei Ergänzungen erlaubt.

Viel Erfolg!

1. **Stabilität und Linearisierung**

   (a) Gegeben ist das stark vereinfachte Modell eines Hydraulikzylinders mit Proportionalventil

   $$\begin{aligned}\dot{x} &= v\\ \dot{v} &= \frac{1}{m}\left(Ap - dv - F\right)\\ \dot{p} &= \frac{\beta}{Ax}\left(Q_N\sqrt{\frac{p_s - p}{p_N}}u - Av\right)\,,\end{aligned}$$

   mit dem Zustand $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & v & p \end{bmatrix}^\top$, dem Eingang u und positiven Konstanten m, A, d, F, β, Q_N, p_N, $p_s > 0$. Weiters gelte $p_s - p > 0$.

   i. Linearisieren Sie das System um die Ruhelage $\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & \frac{F}{A} \end{bmatrix}^\top$, $u_s = 0$.
   ii. Treffen Sie anhand der Eigenwerte des linearisierten Systems eine Aussage über dessen Stabilität. (Es gelte $x_0 > 0$)
   iii. Treffen Sie anhand der Eigenwerte des linearisierten Systems eine Aussage über die Stabilität des nichtlinearen Systems. (Es gelte $x_0 > 0$)

   (b) Betrachten Sie das System

   $$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\alpha x_1 - x_1 x_2\\ \dot{x}_2 &= \beta x_1^2\end{aligned}$$

   mit $\alpha, \beta > 0$.

   i. Zeigen Sie die Stabilität der Ruhelage $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ anhand der Lyapunovfunktion

   $$V\left(x_1, x_2\right) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2\beta}x_2^2\,.$$

   ii. Bestimmen Sie die Menge $S = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \dot{V}\left(x_1, x_2\right) = 0\right\}$ und skizzieren Sie diese in der (x_1, x_2)-Ebene.
   iii. Treffen Sie eine Stabilitätsaussage mit Hilfe des Invarianzprinzips von LaSalle. *Begründung!*

2. **Erreichbarkeit und Zustandsregler**

(a) Betrachten Sie das LTI-System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u\,, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \end{aligned}$$

mit den Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^\top = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

i. Zeigen Sie, dass das System vollständig erreichbar ist.

ii. Berechnen Sie mit Hilfe der Formel von Ackermann einen Zustandsregler so, dass die Eigenwerte des geschlossenen Kreises bei $\{-2,\ -2\}$ liegen.

iii. Geben Sie den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} x_1(t)$ für den geschlossenen Kreis mit $\mathbf{x}_0 = [2, -1]^\top$ an.

(b) Gegeben ist das System der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x} \end{aligned}$$

i. Bestimmen Sie den Wertebereich für α_1, α_2, β_1, β_2 so, dass die Dimension des erreichbaren Unterraums $\dim(\mathcal{R}) = 1$ gilt.

ii. Es gelte nun $\dim(\mathcal{R}) = 1$, $\alpha_2 = 2$ und $\beta_1 = \beta_2 = 1$.

A. Bestimmen Sie α_1 und transformieren Sie das System in ein erreichbares Teilsystem und ein Restsystem. Geben Sie die Transformationsvorschrift sowie das System in transformierten Koordinaten $\mathbf{z}$ explizit an.

B. Ist das System stabilisierbar? *Begründung!*

3. **Beobachtbarkeit und Beobachterentwurf**

(a) Für das LTI-System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u \\ y &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} - 3u\end{aligned}$$

soll ein vollständiger Beobachter entworfen werden. Bearbeiten Sie dazu folgende Unterpunkte.

i. Können die Eigenwerte des Fehlersystems durch geeignete Wahl von $\hat{\mathbf{k}}$ beliebig platziert werden? Falls NEIN, geben Sie die nicht beeinflussbaren Eigenwerte des Fehlersystems an. *Begründung!*

ii. Geben Sie das Fehlersystem für die Wahl $\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix}^\top$ an.

iii. Der Beobachter wird als dynamisches System der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}_B\mathbf{z} + \mathbf{B}_B\mathbf{w} \\ \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{C}_B\mathbf{z} + \mathbf{D}_B\mathbf{w}\end{aligned}$$

mit dem Zustand $\mathbf{z}$ und dem Eingang $\mathbf{w}$ implementiert. Geben Sie $\mathbf{w}$ sowie die Matrizen $\mathbf{A}_B$, $\mathbf{B}_B$, $\mathbf{C}_B$ und $\mathbf{D}_B$ unter Verwendung von $\hat{\mathbf{k}}$ aus Punkt (ii) explizit an.

(b) Betrachten Sie das LTI-System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^\top\mathbf{x}\end{aligned}$$

mit den Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

i. Bestimmen Sie den nichtbeobachtbaren Unterraum $\mathcal{O}^\perp \subseteq \mathbb{R}^3$

ii. Prüfen Sie, welche der Transformationen $\mathbf{z} = \mathbf{M}_i\mathbf{x}$, $i = 1, 2, 3$ geeignet sind, um das System in ein nichtbeobachtbares Teilsystem und ein Restsystem zu transformieren. *Begründen Sie Ihr Auswahl ohne die Transformation explizit durchzufürhen!*

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$