Johannes Kepler Universität Linz
Institut für Regelungstechnik und Prozessautomatisierung

Schriftliche Prüfung aus Automatisierungstechnik 1 Übung,

am 27. Juni 2019

2. Übungstest – Gruppe **A**

Name:	Matr.Nr.:
Vorname(n):	SKZ:

Aufgabe	1	2	3	$\sum$
erreichbare Punkte	16	16	16	48
erreichte Punkte				

Note:

Allgemeine Hinweise:

- Begründen Sie alle Aussagen ausführlich (JA/NEIN-Antworten gelten nicht als begründet!).
- Der erste Punkt bedeutet insbesondere, dass der Lösungsweg (inklusive aller Nebenrechnungen) eindeutig erkennbar sein muss. Punkte für den Lösungsweg - auch bei Fehlern in den Berechnungsschritten - können nur gegeben werden, wenn alle Teilschritte nachvollziehbar sind.
- Beginnen Sie jedes Beispiel auf einem eigenen Zettel und sortieren Sie die Zettel bei der Abgabe.
- Beschriften Sie alle Diagramme.
- Beantworten Sie die Fragen in ganzen Sätzen!
- Als Prüfungsunterlage ist nur die vom Institut zur Verfügung gestellte mathematische Formelsammlung zur Übung zugelassen. Es sind keinerlei Ergänzungen erlaubt.

Viel Erfolg!

1. **Liapunovstabilität und Linearisierung**

(a) Betrachten Sie das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -(x_2-1)\left(x_1^2+1\right)+1+u \\ \dot{x}_2 &= (x_1-x_2)\left(x_1^2+1\right) .\end{aligned} \tag{1}$$

i. (1 Punkte) Berechnen Sie die stationäre Eingangsgröße $u = u_s$ so, dass das System die Ruhelage $\mathbf{x}_s = \left[\,1\;1\,\right]^T$ aufweist.

ii. (3 Punkte) Linearisieren Sie das System um die Ruhelage aus Punkt i und untersuchen Sie die Stabilität der Ruhelage anhand des linearisierten Systems.

iii. (3,5 Punkte) Zur Untersuchung der Stabilität der Ruhelage aus Punkt i ist die Liapunovfunktion

$$V(z_1,z_2) = \frac{1}{2}(z_1^2+z_2^2)$$

gegeben, die bereits in geeigneten Koordinaten vorliegt. Bestimmen Sie die Menge $S = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 | \dot{V}\left(z_1,z_2\right)=0\right\}$ und veranschaulichen Sie diese in der (z_1,z_2)-Ebene.

iv. (2,5 Punkte) Zeigen Sie, dass $\dot{V}\left(z_1,z_2\right) \leq 0$ gilt und beurteilen Sie unter Verwendung der Ergebnisse aus Punkt iii die Stabilität der Ruhelage des nichtlinearen Systems (1).

(b) Betrachten Sie das System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}\left(\mathbf{x},u\right) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 u \end{bmatrix} \\ y &= g\left(\mathbf{x},u\right) = x_1\end{aligned}$$

i. (3 Punkte) Bestimmen Sie den Anfangswert $\mathbf{x}\left(0\right)$ sowie die Eingangsgröße $u\left(t\right)$ so, dass sich die Trajektorie $y\left(t\right) = \sin\left(t\right)$ einstellt.

ii. (3 Punkte) Linearisieren Sie das System entlang der Trajektorie aus Punkt i und geben Sie die Systemgleichungen des linearisierten Systems explizit an.

2. **Erreichbarkeit und Zustandsregler**

(a) Gegeben ist das LTI-System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \,.$$

i. (2,5 Punkte) Bestimmen Sie einen Zustandsregler $u = \mathbf{k}^T \mathbf{x}$ so, dass die Eigenwerte des geschlossenen Kreises bei $\{-1, -2\}$ liegen.

ii. (2 Punkte) Geben Sie den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t)$ für den Anfangszustand $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ für den geschlossenen Kreis an.

iii. (2 Punkte) Beantworten Sie folgende Aussage mit WAHR oder FALSCH und begründen Sie ausführlich: *Ein stabilisierbares System ist automatisch immer steuerbar.*

(b) Gegeben ist das bereits in ein erreichbares Teilsystem und ein Restsystem zerlegte LTI-System

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \,.$$

i. (2 Punkte) Ist das System stabilisierbar? Begründung!

ii. (4 Punkte) Entwerfen Sie einen Zustandsregler so, dass alle beeinflussbaren Eigenwerte bei -1 liegen.

iii. (3,5 Punkte) Ist es möglich, eine Transformation zu finden, die das erreichbare Teilsystem vom Restsystem **vollständig entkoppelt**? Wenn ja, geben Sie diese explizit an (Sie müssen die Transformation nicht durchführen!) und argumentieren Sie ausführlich falls nicht.

3. **Beobachtbarkeit und Beobachterentwurf**

(a) Das LTI-System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \beta \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} \gamma & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}$$

hängt von den Parametern $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ab.

i. (4,5 Punkte) Untersuchen Sie, für welche Werte von α, β und γ das System beobachtbar ist. Geben Sie Ihre Lösungen jeweils als Tupel $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ an.

ii. (3 Punkte) Für $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ist das System nicht beobachtbar. Welche der Mengen

$$M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad M_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

ist in diesem Fall eine Basis des nicht-beobachtbaren Unterraums? Diskutieren Sie für alle Mengen, ob es sich um eine Basis handelt oder nicht.

(b) Betrachtet wird das beobachtbare System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}\,.\end{aligned}$$

i. (3 Punkte) Ermitteln Sie jene Zustandstransformation $\mathbf{z} = \mathbf{T}_A \mathbf{x}$ oder $\mathbf{x} = \mathbf{T}_B \mathbf{z}$, die das System in Beobachtbarkeitsnormalform überführt.
Hinweis: Die Transformation muss nicht durchgeführt werden.

ii. (3 Punkte) Es soll ein vollständiger Beobachter so entworfen werden, dass die Eigenwerte der Beobachterfehlerdynamik bei -2 und -3 liegen. Ermitteln Sie dafür die entsprechende Beobachterverstärkung $\hat{\mathbf{k}}$ mit Hilfe der Formel von Ackermann.

iii. (2,5 Punkte) Der zuvor entworfene vollständige Beobachter liefert den Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}$ für die Zustandsrückführung $u = \begin{bmatrix} -6 & -4 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}$. Geben Sie alle Eigenwerte des geschlossenen Kreises an.
Hinweis: In der Zustandsrückführung wird der Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}$ und nicht der Zustand $\mathbf{x}$ verwendet.