

# 上海交通大学

上海交通大学  
课程报告



计算固体力学

学生姓名: 吴进兴

学 号: 519021910919

指导老师: 陶昉敏

# 有限元分析实验报告

## 1 实验目的

1. 对所学习的固体力学有限元知识进行系统性归纳总结
2. 利用有限元知识解决简单的实际问题
3. 通过编程实践，强化提高编写和调试代码的能力

## 2 实验内容

1. 二维杆问题求解
2. 三维杆问题求解
3. 平面三角形单元问题求解

## 3 程序功能

本项目为线弹性静力问题有限元程序。程序针对一、二、三维的空间桁架结构以及平板结构，分别采用对应维度的杆单元以及平面三角形单元划分单元求解。其中矩阵方程采用 Cholesky 法求解，系数矩阵采用一维的半带宽存储形式。

## 4 编程环境

- python3
- numpy 1.20.3

## 5 程序原理

### 5.1 程序框图

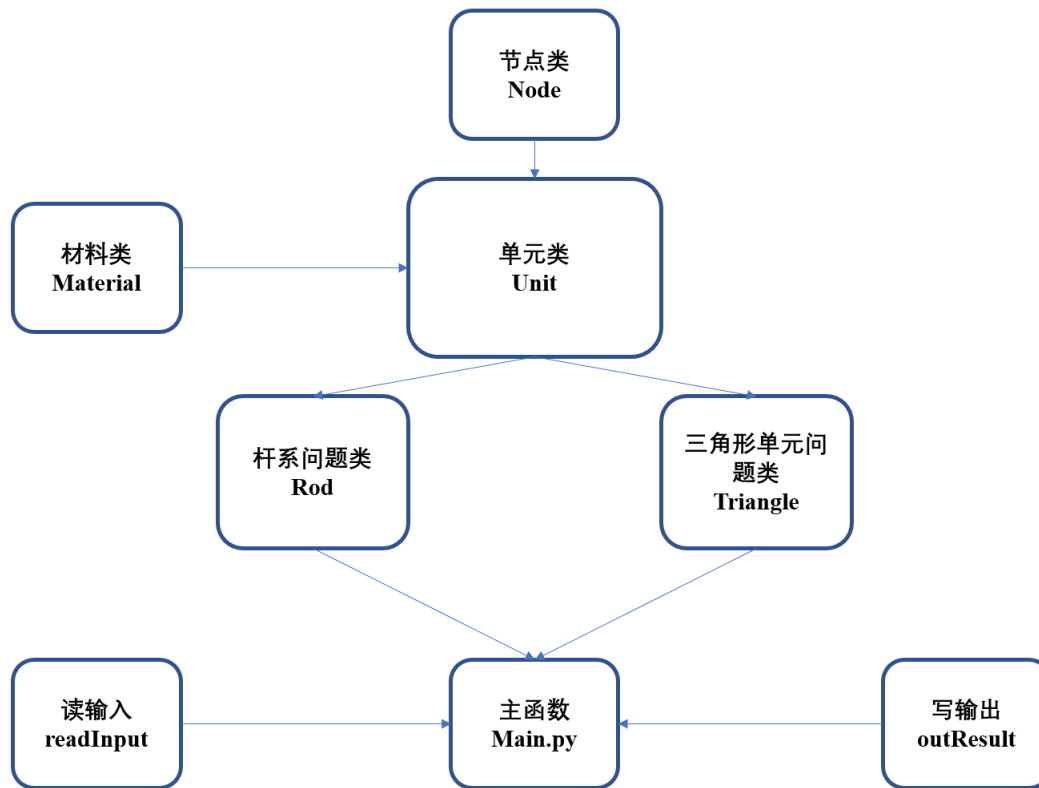


图 1: 程序结构框图

### 5.2 单元类型

如前所述，单元类型包括

- 一维杆单元
- 二维杆单元
- 三维杆单元
- 平面三角形单元

### 5.3 约束处理方式

约束处理采用的是主角元置大数法 [1]。

设节点位移  $i$  项的  $\delta_i$  是已知的位移  $d_0$ ，将刚度矩阵  $\mathbf{K}$  中的第  $i$  行的主对角元  $K_{ii}$  置一个相当大的数  $\bar{K}_{ii}$ ，同时将右端载荷列阵中的  $P_i$  改为  $\bar{K}_{ii}d_0$ ，这样平衡方程中第  $i$  个方程就变为

$$K_{i1}\delta_1 + K_{i2}\delta_2 + \cdots + K_{in}\delta_n = d_0\bar{K}_{ii} \quad (1)$$

注意到  $\bar{K}_{ii}$  是大数，则可化简为

$$\delta_i = d_0 \quad (2)$$

需要注意的是，在本项目中一般  $d_0$  均取为 0。若要求固定位移，则需修改内置函数。

### 5.4 解方程方法

解方程采用的是 Chelosky 法，又称改进平方根法。

结构刚度矩阵在约束处理后，若是一个对称正定矩阵，可以分解为

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T \quad (3)$$

其中， $\mathbf{L}$  为单位下三角矩阵， $\mathbf{D}$  为对角矩阵。其中的元素用下列迭代公式进行求解

$$l_{i1} = k_{i1}/d_{11} \quad (4)$$

$$l_{ij} = (k_{ij} - \sum_{t=1}^{j-1} l_{it}d_{tt}l_{jt})/d_{jj} \quad (i = 2, 3, \dots, n, j = 2, 3, \dots, i-1) \quad (5)$$

$$d_{11} = k_{11} \quad (6)$$

$$d_{ii} = k_{ii} - \sum_{t=1}^{i-1} l_{it}^2 d_{tt} \quad (i = 2, 3, \dots, n) \quad (7)$$

此时，平衡方程可写为

$$LDL^T \delta = P \quad (8)$$

令

$$LD = C \quad L^T \delta = R \quad (9)$$

可改写为

$$CR = P \quad (10)$$

可知

$$r_i = (P_i - \sum_{j=m_i}^{i-1} c_{ij}r_j)/d_{ii} \quad (11)$$

最后回代求解

$$\delta_j = r_j - \sum_{i=j+1, j \geq m_i}^n l_{ij}\delta_i \quad (12)$$

## 5.5 刚度矩阵存储方式

为节约存储空间，采用半带宽的一维数组存储结构刚度矩阵。

从某行中最左非零元素到该行主角元之间（包括自身）的个数，称为该行的半带宽。带宽外的零元素在解方程时不起作用，所以这些零元素不予存储。同时考虑到刚度矩阵的对称性，因此只要存储结构刚度矩阵中半带宽的元素，就可以完全确定该矩阵 [2]。示例如下。 $\mathbf{A}$  为刚度阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 2.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2.3 & 0 & 9.2 & 29 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 29 & 8 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.7 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 6 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad (13)$$

对应的半带宽存储的一维数组为

$$[1, 2, 3, 1.3, 5, 7, 2.3, 0, 9.2, 29, 8, 6.7, 5, 7, 6, 3, 9, 6, 5, 7] \quad (14)$$

## 5.6 输入输出

考虑到输入的便捷性（希望实现一次性将解题所需数据全部输入）以及输出结果的易读性，本项目采用两个 txt 文件实现数据的输入以及结果的输出。其中输入数据保存在 **Input** 文件夹，输出数据保存在 **Output** 文件夹。现就两者的结构进行以下介绍

输入数据 **Input.txt** 包括（以二维杆系问题为例）

- `node_dof = data[0][0]` 节点自由度数
- `node_num = data[1][0]` 节点个数
- `uni_num = data[2][0]` 单元个数
- `kind_ma = data[3][0]` 单元的种类数
- `X = data[4]` 节点 x 坐标
- `Y = data[5]` 节点 y 坐标

- `node_uni = [data[6], data[7]]` 每个单元对应节点编号
- `constraints = data[8]` 受约束的位移分量编号
- `material[i] = [data[9][i], data[10][i]]` 特征类
- `uni_ma = data[11]` 每个单元对应的特征数编号
- `force = data[12]` 载荷数据

输出数据 `Result.txt` 包括（以二维杆系问题为例）

- 节点位移
- 单元节点位移 (局部坐标)
- 单元节点位移（整体坐标）
- 单元内力
- 单元应力
- 单元节点力
- 结构节点力
- 约束反力

需要注意的是，不同的问题需要的输入数据不同，需要对具体问题做出适当调整。

## 6 变量函数说明

以下对程序中变量与函数进行必要的说明。

## 6.1 node.py

- Node 节点类
  - node\_id 节点编号
  - dof 节点自由度。根据不同节点自由度确定节点需要几个坐标
  - node\_coord 节点坐标列表

## 6.2 unit.py

- Material 材料类
  - E 弹性模量
  - A 杆横截面积
  - mu 三角形单元泊松比
- Unit 单元类
  - id 单元编号
  - node\_i 节点 1
  - node\_j 节点 2
  - node\_k 节点 3（三角形单元）
  - type 单元类型
  - material 单元材料类
  - dof 单元节点自由度
  - Length() 获取单元长度
  - triangle\_area() 获取三角形单元面积
  - triangle\_B() 获取三角形单元  $\mathbf{B}$  矩阵
  - D() 获取三角形单元  $\mathbf{D}$  矩阵
  - Stiffness\_u() 获取单元刚度阵（局部坐标）



- TransforMatrix() 计算坐标变换矩阵
- TransforMatrixT() 计算坐标变换阵的转置矩阵
- Stiffness\_g() 计算单元刚度阵（总体坐标）

### 6.3 rod.py

- Rod 杆系问题类
  - force 外力载荷
  - constraints 受约束的位移编号
  - node\_dof 节点自由度
  - uni\_num 单元个数
  - node\_num 节点个数
  - node\_unit 记录单元与节点的对应关系
  - node\_ma 记录单元对应的材料常数
  - nodes 记录问题中的所有节点信息
  - units 记录问题中的所有单元信息
  - x 节点位移
  - s\_change() 实现单元中节点位移编号与整体节点位移编号之间的转换
  - ID\_diag() 存储主角元在一位数组中的编号
  - AK\_g() 合成结构刚度矩阵
  - constraints\_handling() 约束处理
  - cholesky() cholesky 解方程
  - Output() 生成输出数据

## 6.4 main.py

- readInput() 获取 Input
- dataoper() 对获取数据进行预处理
- out\_result() 输出结果

## 7 算例

本次实验中，主要选取了二维杆系问题、三维杆系问题以及平面三角形单元问题进行求解以验证程序的正确性。以下展示的结果均与有限元的精确解相符，一定程度上证明了程序的可行性。具体的结果呈现如下。

### 7.1 二维杆系问题求解

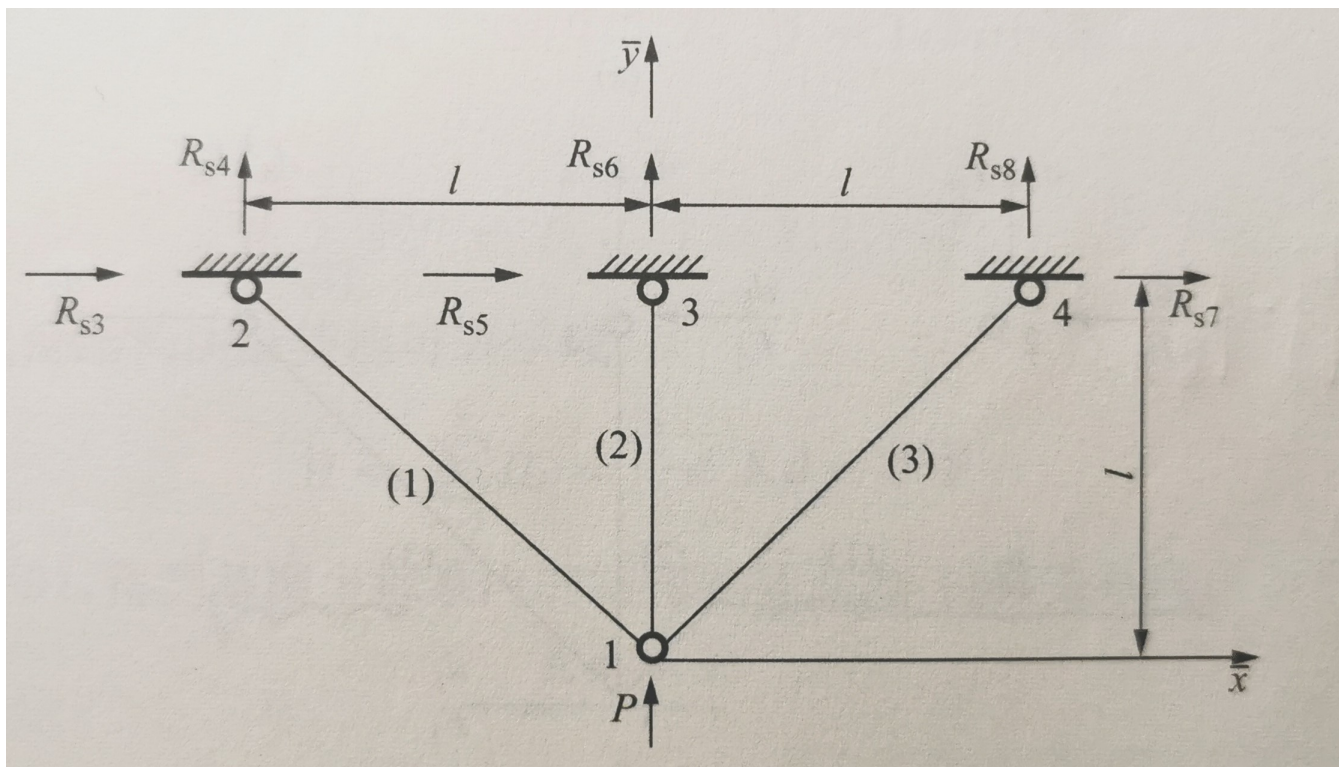


图 2: 二维杆系问题 1

2							
4							
3							
1							
0	-1	0	1				
0	1	1	1				
1	1	1					
2	3	4					
3	4	5	6	7	8		
1							
1							
1	1	1					
0	2	0	0	0	0	0	0

图 3: 二维杆系问题 1 输入

节点位移							
0.0	1.1716	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
单元节点位移(局部坐标系)							
0.8284	0.0						
1.1716	0.0						
0.8284	0.0						
单元节点位移(整体坐标系)							
0.0	1.1716	0.0	0.0				
0.0	1.1716	0.0	0.0				
0.0	1.1716	0.0	0.0				
单元内力							
0.5858	-0.5858						
1.1716	-1.1716						
0.5858	-0.5858						
单元应力							
-0.586	-1.172	-0.586					
单元节点力							
-0.4142	0.4142	0.4142	-0.4142				
0.0	1.1716	0.0	-1.1716				
0.4142	0.4142	-0.4142	-0.4142				
结构节点力							
0.0	2.0	0.4142	-0.4142	0.0	-1.1716	-0.4142	-0.4142
约束反力							
0.0	0.0	0.4142	-0.4142	0.0	-1.1716	-0.4142	-0.4142

图 4: 二维杆系问题 1 结果

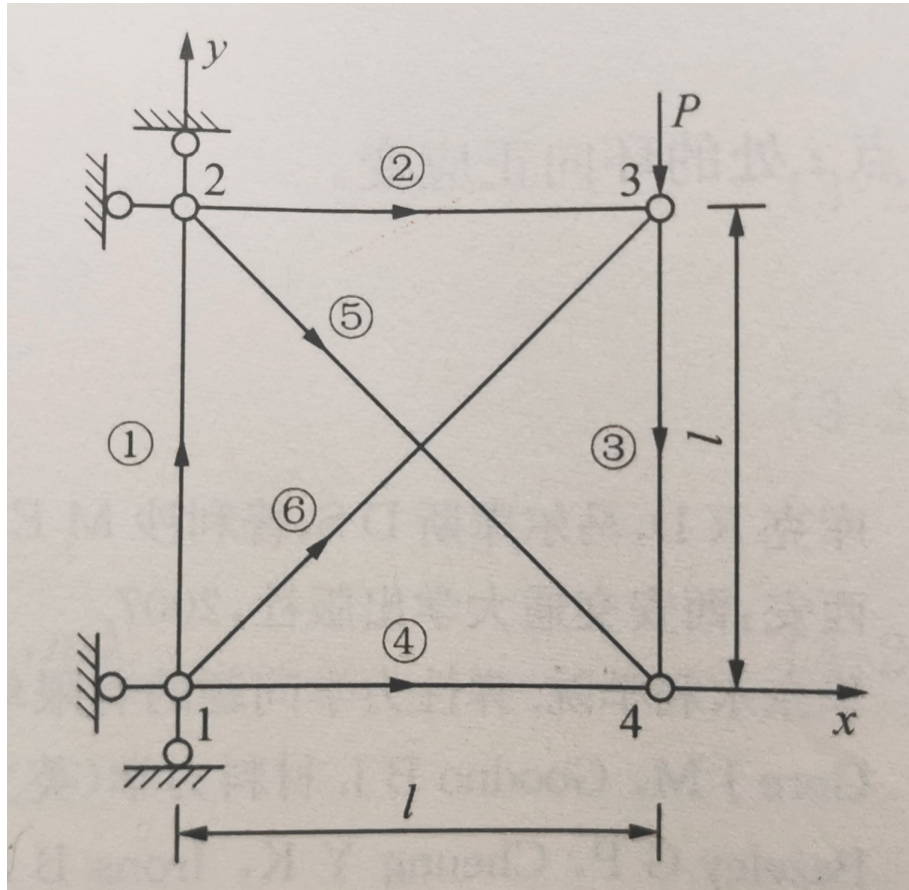


图 5: 二维杆系问题 2

2								
4								
3								
1								
0	-1	0	1					
0	1	1	1					
1	1	1						
2	3	4						
3	4	5	6	7	8			
1								
1								
1	1	1						
0	2	0	0	0	0	0	0	0

图 6: 二维杆系问题 2 输入

节点位移

0.0      1.1716    0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0

单元节点位移(局部坐标系)

0.8284    0.0

1.1716    0.0

0.8284    0.0

单元节点位移(整体坐标系)

0.0      1.1716    0.0      0.0

0.0      1.1716    0.0      0.0

0.0      1.1716    0.0      0.0

单元内力

0.5858    -0.5858

1.1716    -1.1716

0.5858    -0.5858

单元应力

-0.586    -1.172    -0.586

单元节点力

-0.4142    0.4142    0.4142    -0.4142

0.0      1.1716    0.0      -1.1716

0.4142    0.4142    -0.4142    -0.4142

结构节点力

0.0      2.0      0.4142    -0.4142    0.0      -1.1716    -0.4142    -0.4142

约束反力

0.0      0.0      0.4142    -0.4142    0.0      -1.1716    -0.4142    -0.4142

图 7: 二维杆系问题 2 结果

## 7.2 三维杆系问题求解

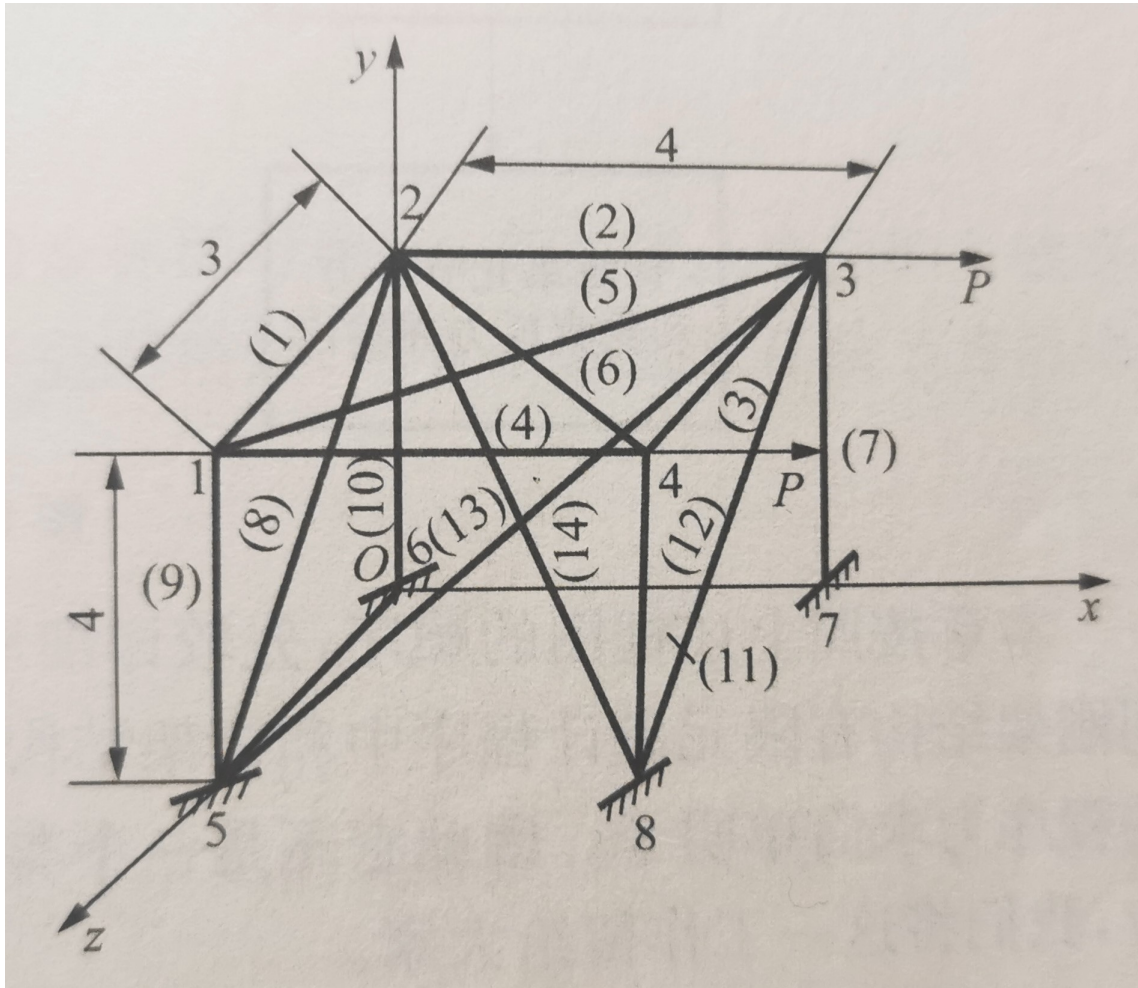


图 8: 三维杆系问题

此处三维杆系问题的输入和输出较为庞大，由于篇幅限制没有放置在报告中，可以在 Input 和 Output 文件夹中找到对应的输入和输出文件。

### 7.3 平面三角形单元问题求解

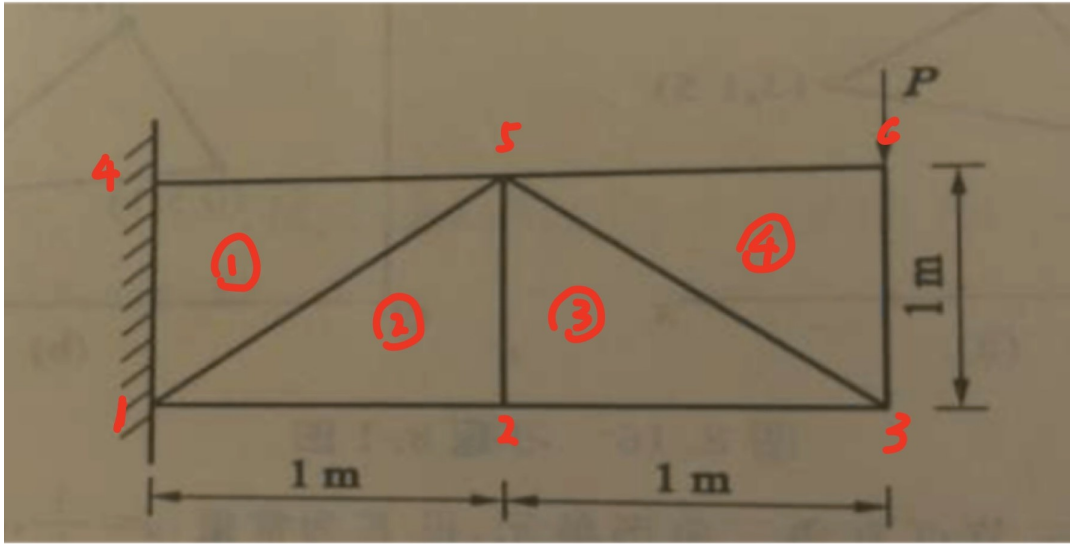


图 9: 平面三角形单元问题

```

2
6
4
1
0      1      2      0      1      2
0      0      0      1      1      1
1      5      5      3
4      2      2      6
5      1      3      5
1      2      7      8
1000
1
0.167
1      1      1      1      0      0      0      0      0      0      0      -2
0      0      0      0
    
```

图 10: 平面三角形单元问题输入



```

节点位移
0.0      0.0      -0.0044 -0.0097 -0.0065 -0.0232 0.0      0.0      0.0042 -0.0083 0.0064 -0.0256

单元节点位移
0.0      0.0      0.0      0.0      0.0042 -0.0083
0.0042   -0.0083 -0.0044 -0.0097 0.0      0.0
0.0042   -0.0083 -0.0044 -0.0097 -0.0065 -0.0232
-0.0065  -0.0232 0.0064  -0.0256 0.0042 -0.0083

单元节点力
0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0
0.8915   -4.4277 -1.7791 5.3192 0.8877 -0.8915
0.8915   -4.4277 -0.0038 3.5363 -0.8877 0.8915
-1.3925  -12.4293 3.8844 13.8219 -2.4918 -1.3925

结构节点力
0.0      0.0      -1.7829 8.8555 -1.3925 -12.4293 0.0      0.0      1.7829 -8.8555 3.8844 13.8219

约束反力
0.0      0.0      -1.7829 8.8555 -1.3925 -12.4293 0.0      0.0      1.7829 -8.8555 3.8844 15.8219

```

图 11: 平面三角形单元问题结果

## 8 讨论

从结果来看，本次实验较为成功，能够通过编程计算简单有限元问题的一般结果。同时，程序具有一定的通用性，也正因此，程序留下了许多可用的通用性接口，例如节点自由度、单元节点个数等参数的设置，为程序的进一步拓展保留了大量可能性。

同时，由于各种原因，本学期所教授的梁单元以及等参单元理论在本次作业中没有实现。希望后续能进一步完善程序，使之形成一个完整的有限元分析工具。

最后感谢陶老师对课程内容的细致讲解和悉心指导！



## 参考文献

- [1] 吴永礼 et al. 计算固体力学方法. 科学出版社, 2003.
- [2] 孙雁, 李红云, and 刘正兴. 计算固体力学 (第一版)[ $M$ ], volume 201. 上海交通大学出版社, 2019.8.