Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Лабораторная работа No.3
«Методы численного интегрирования функций»

Выполнил: студент группы k6–361
Рыбников Виталий.
Вариант : 6 / 2

Май — 2013

Цель работы:

Изучение численных методов вычисления определённых интегралов.

Постановка задачи

Задан интеграл $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$
Необходимо вычислить значение интеграла:

- методом Симпсона
- методом Гаусса для трёх точек на интервале $[0; 1]$

Погрешность вычисления $\varepsilon = 1e - 4$

Результаты аппроксимации

Заданная функция $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ непрерывна на отрезке $[0;1]$.

Метод Симпсона

Введем на отрезке $[0;1]$ равномерную сетку x_i. Оценим шаг $h_{\text{пр}}$, используя априорную формулу погрешности ограничения $|R_{\text{огр}}| \leqslant \frac{h^4}{180}(b-a)\underset{[a;b]}{max}|f^{IV}(\xi_i)|$.

$$f^{IV}(\xi_i) = \frac{384\,e^{9\,x}}{(e^{2\,x}+1)^5} - \frac{768\,e^{7\,x}}{(e^{2\,x}+1)^4} + \frac{464\,e^{5\,x}}{(e^{2\,x}+1)^3} - \frac{80\,e^{3\,x}}{(e^{2\,x}+1)^2} + \frac{e^x}{e^{2\,x}+1}$$

Анализ $f^{IV}(x)$ (см. рисунок 1) показывает, что $\underset{[0;1]}{max}|f^{IV}(\xi_i)| = 2.5$

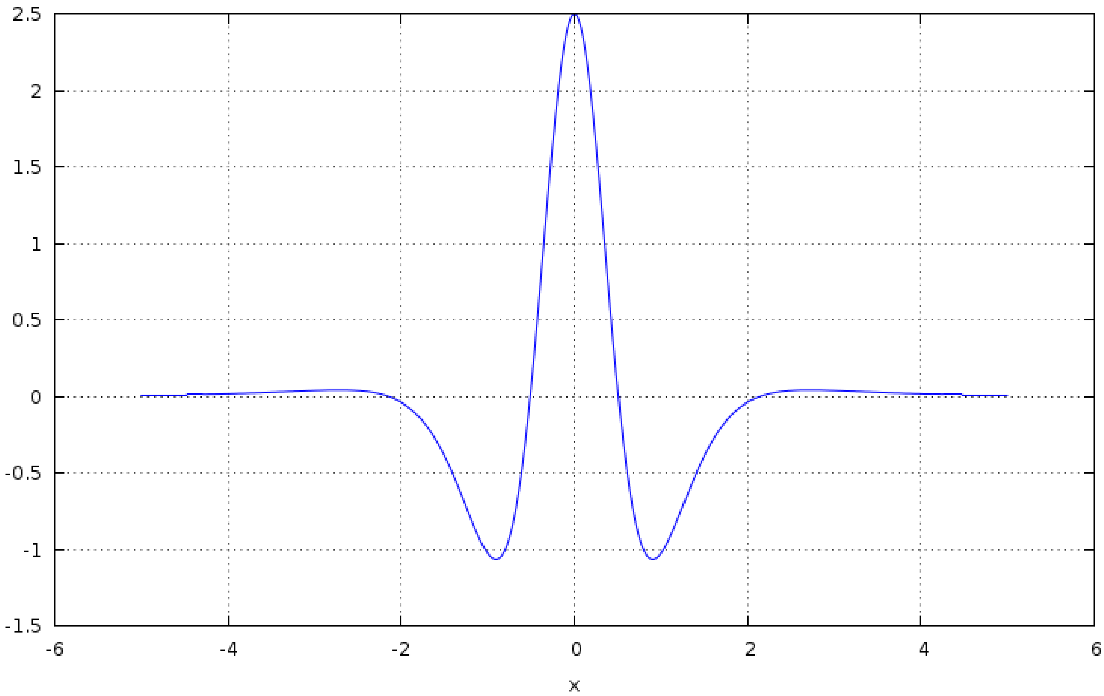

Рис. 1: График $f^{IV}(\xi_i)$

$|R_{\text{огр}}| < \varepsilon$ — из этой оценки получаем начальный шаг $h_{\text{пр}} = 0.0071429$.

Количество разбиений заданного отрезка $n = 140$.

Используя в качестве оценки погрешности вычисления интеграла метод двойного пересчёта (оценка по Рунге), сделано 0 итераций, для достижения погрешности ε. Значение полученного шага $h = 0.0071429$, что совпадает с шагом, рассчитанным по априорной формуле.

Значение интеграла, рассчитанное по формуле метода Симпсона $I = 0.4328847$.

Таблица 1: Зависимость значения интеграла I от числа разбиений N

N	14	140	1 390	13 890	138 890
I	0.43288	0.43288	0.43288	0.43288	0.43288

По таблице построен график 2.

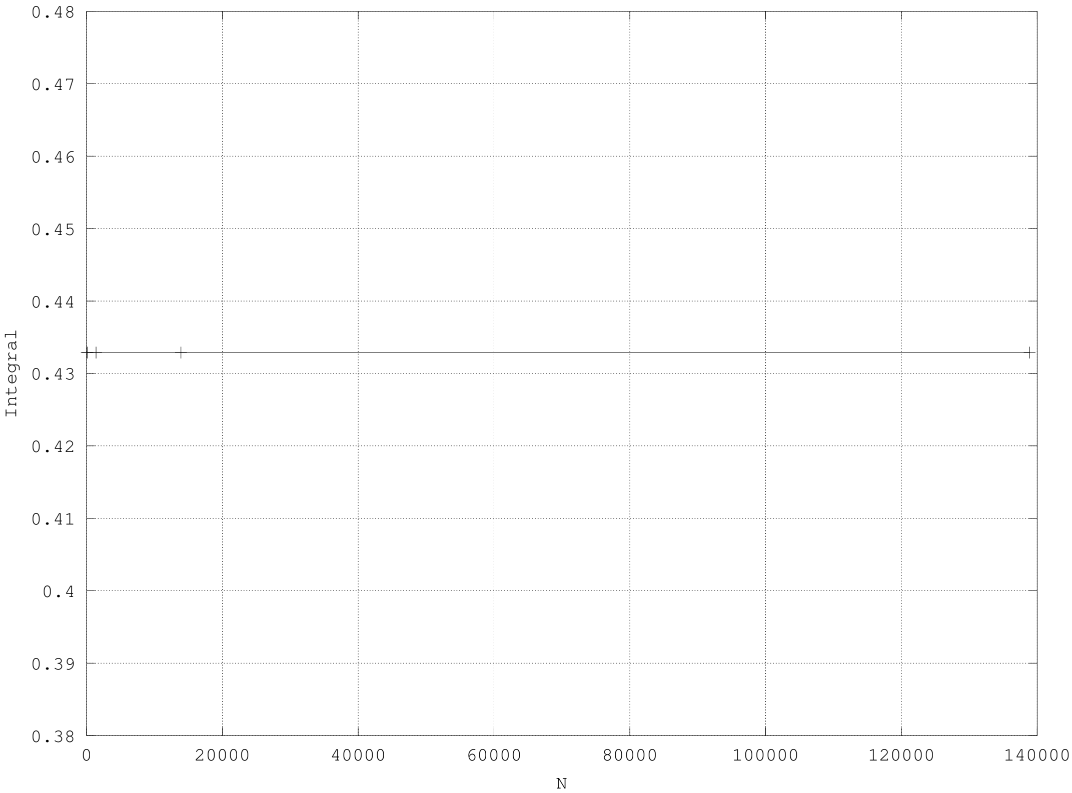

Рис. 2: Зависимость значения интеграла I от числа разбиений N

Метод Гаусса

На отрезке $[0; 1]$ задано 3 точки.
Вычисление интеграла происходит по формуле $I = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{3} A_i f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_i)$, где $\mathrm{A}_1 = A_3 = 5/9$, $A_2 = 8/9$
$t_1 = -0.774597, t_3 = 0.774597$, $t_2 = 0$
Значение интеграла: $I = 0.4328802$
Вычисленная погрешность метода Гаусса $R_{3,gauss} = \frac{f^{VI}}{15\,750} = 0.00191$