Прудников А.М.

Текст лекций по курсу

Методы оптимизации

Версия: 0.1

Москва, 2012

Оглавление

Глава 1

Понятие математической оптимизации

1.1 Исследование операций и место методов оптимизации в данной дисциплине

Исследование операций – математическая дисциплина, занимающаяся построением, разработкой и применением математических моделей принятия оптимальных решений во всех областях человеческой деятельности.

Операция – это всякое мероприятие (система действий), объединенное единым замыслом и направленное к достижению какой-то цели.

Пусть необходимо выполнить какое-либо мероприятие для достижения определенной цели (**операцию**). Обычно существует свобода выбора в том, как это мероприятие организовать (например, выбор техники, распределение ресурсов и т.д.). «**Решение**» – это какой-то выбор из ряда допустимых возможностей.

Краеугольным камнем исследования операций является **математическое моделирование**. Данные, полученные при исследовании математических моделей являются основой для принятия решений. Но общих способов построения математических моделей и методов их решения не существует. В каждом конкретном случае модель выбирается исходя из вида операции, ее целевой направленности, с учетом задачи исследования.

Наиболее известными методами исследования операций (являющимися, зачастую, самостоятельными математическими дисциплинами), являются:

- Математическое программирование – теория и методы решения задач о нахождении экстремумов функций на множествах векторного пространства, определяемых линейными и нелинейными ограничениями (равенствами и неравенствами). (Присутствие в названии термина «программирование» объясняется тем, что первые исследования оптимизационных задач были в сфере экономики, а в английском языке слово «programming» означает планирование, составление планов или программ).

- Сетевые модели – решение оптимизационных задач с использованием графов.

- Марковские процессы – метод решения стохастических задач, где процесс принятия решений можно представить конечным числом состояний.

- Теория игр – методы изучения оптимальных стратегий в играх. Теория игр помогает выбрать лучшие стратегии с учётом представлений о других участниках, их ресурсах и их возможных поступках.
- Теория массового обслуживания (теория очередей) – раздел теории вероятностей, целью исследований которого является рациональный выбор структуры системы обслуживания и процесса обслуживания на основе изучения потоков требований на обслуживание, длительности ожидания и длины очередей.
- Имитационное моделирование – метод исследования, при котором изучаемая система заменяется компьютерной моделью, с достаточной точностью описывающей реальную систему, и с ней проводятся эксперименты с целью получения информации об этой системе. Экспериментирование с моделью называют имитацией.

В данном курсе будет изучаться математическое программирование, методы которого и являются так называемыми **методами оптимизации**.

1.2 Общий вид однокритериальной оптимизационной задачи

В общем виде задача математического программирования ставится следующим образом: найти максимум (минимум) функции

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(\bar{x}) \tag{1.1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le b_i, i = \overline{1, m} \\ x_j \ge 0, j = \overline{1, n} \end{cases} \tag{1.2}$$

Здесь:

- $f(\bar{x})$ - целевая функция;
- система неравенств и условия неотрицательности переменных (1.2) - система ограничений.

Всякое решение задачи с учетом системы ограничений называется **допустимым решением**. Допустимое решение, максимизирующее (минимизирующее) целевую функцию, называется **оптимальным решением**. Таким образом, задача математического программирования заключается в нахождении оптимального решения, которое по определению обеспечивает максимальное (минимальное) значение целевой функции с учетом заданных ограничений.

1.3 Особенности задачи математического программирования

1. Если требуется найти минимум $f(\bar{x})$, то это эквивалентно поиску максимума $-f(\bar{x})$.
2. В любом случае можно добиться условия неотрицательности переменных, то есть, если задано ограничение $x_j \geq x_{j\_min}$, то можно сделать замену переменных $x_j^{'} = x_j - x_{j\_min} \geq 0$.
3. Если заданы ограничения вида $g_i(\bar{x}) \geq b_i$, то простой заменой знака приходим к первоначальной форме $-g_i(\bar{x}) \leq -b_i$.
4. Функция $f(\bar{x})$ может иметь несколько экстремумов, а именно локальные экстремумы и глобальный экстремум. Функция $f(\bar{x})$, определенная на области D, достигает на ней глобального максимума $\bar{x}^* \in D$, если неравенство $f(\bar{x}) \leq f(\bar{x}^*)$ справедливо для любой точки $\bar{x} \in D$. Функция $f(\bar{x})$, определенная на области D, достигает на ней локального максимума $\bar{x}^* \in D$, если неравенство $f(\bar{x}) \leq f(\bar{x}^*)$ справедливо для точек из некоторой окрестности $\bar{x}^*$.
5. В математическом анализе для нахождения экстремумов функций используются производные (это классические методы оптимизации). Такие методы применяют лишь для сравнительно простых задач из-за следующих недостатков:
   - для использования таких методов нужно, чтобы функции $f(\bar{x})$ и $g_i(\bar{x})$ были непрерывны и имели частные производные по крайней мере до 2-го порядка;
   - с помощью классических методов можно найти экстремум только внутри области; если оптимальная точка находится на границе области, то эти методы бессильны;
   - на переменные x_j не должны быть наложены условия целочисленности.

1.4 Классификация задач математического программирования

В зависимости от вида функций, входящих в критерий оптимальности и систему ограничений, а также допустимой области изменения переменных, задачи математического программирования разделяются на следующие классы:

1. Линейное программирование - целевая функция и ограничения являются линейными. Область допустимых значений - многогранник, а оптимальное решение находится в одной из его вершин.

2. Нелинейное программирование - или целевая функция, или какое-либо ограничение содержит нелинейную зависимость.

3. Дискретное программирование - переменные могут принимать только целочисленные значения.

Глава 2

Нелинейное программирование

Глава 3

Линейное программирование

Глава 4

Кобинаторная оптимизация

Глава 5

Стохастическая оптимизация

Литература