

带 * 表示难度较大或者不方便设置待填空白的知识点。

数学软件:

网页版: GeoGebra(<https://www.geogebra.org/>)

Desmos(<https://www.desmos.com/>).

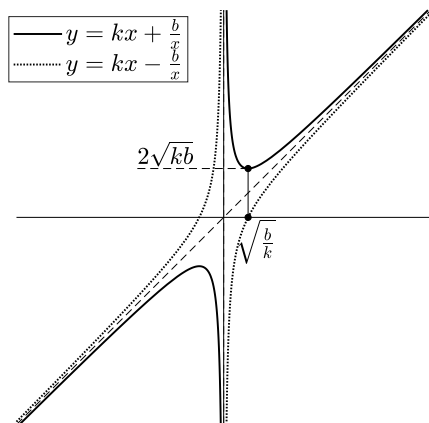
App: MathStudio.

1 函数

1. 求 $y = \frac{Ax+B}{Cx+D}$ ($AD-BC \neq 0$) 的值域 (只需写出计算方法, 无需具体结果):

_____.

2. 设 $k > 0, b > 0$, 则 $y = kx + \frac{b}{x}$ 与 $y = kx - \frac{b}{x}$ 的图像如下, 这两种函数都是双曲线,



当 $x > 0$ 时, $y = kx + \frac{b}{x}$ 在 $x = \frac{b}{k}$ 处取得极小值 _____; $y = kx - \frac{b}{x}$ 的零点是 $x = \frac{b}{k}$.

3. 求 $y = \frac{x^2 + Ax + B}{x + C}$ ①或 $y = \frac{x + C}{x^2 + Ax + B}$ ②的值域 (若分子或分母的最高次项系数不为 1, 则先将系数提取出来), 方法一: 换元 _____;
方法二: _____, 以①式为例写出主要过程: 要绘

制①或②的图像, 可以先绘制 $y = (x^2 + Ax + B)(x + C)$ 的图像, 因为这个三次函数的正负号与①或②式的正负号是一致的。

4. 求 $y = \frac{\sqrt{Ax^2+B}}{Cx^2+D}$ 的值域, 先提取系数,
 $y = \frac{\sqrt{A}}{C} \cdot \frac{\sqrt{x^2+\frac{B}{A}}}{x^2+\frac{D}{C}}$, 换元, $t = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{B}{A}}}$, 那么

$$x^2 = t^2 - \frac{B}{A},$$
$$y = \frac{\sqrt{A}}{C} \cdot \frac{t}{t^2 - \frac{B}{A} + \frac{D}{C}} = \frac{\sqrt{A}}{C} \cdot \frac{1}{t + \left(\frac{D}{C} - \frac{B}{A}\right) \frac{1}{t}}$$

5. 给定 4 个实数 x_1, x_2, x_3, x_4 , 其中任意两个都不相等, 设 $y_i = \frac{Ax_i+B}{Cx_i+D}$, ($AD-BC \neq 0, i=1,2,3,4$), 那么,

$$\frac{(y_1-y_3)(y_2-y_4)}{(y_1-y_4)(y_2-y_3)} = \frac{(x_1-x_3)(x_2-x_4)}{(x_1-x_4)(x_2-x_3)}$$

6. $y = |x-b_1| + |x-b_2| + \dots + |x-b_n|$, 假设 $b_1 < b_2 < \dots < b_n$, 如果 n 是偶数, 那么最小值在区间 _____ 内取得; 如果 n 是奇数, 那么最小值在 _____ 处取得。

7. 恒成立问题或有解问题 (\exists 表示存在, \forall 表示任意. $f(x)_{\max}, f(x)_{\min}$ 分别表示 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上的最大值、最小值。)

$$\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) > m \Rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) < m \Rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\forall x \in (a, b), f(x) < m \Rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\forall x \in (a, b), f(x) > m \Rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$$

8. 对数运算法则:

$$\log_a(MN) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\log_a M^n = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \log_{a^n} M = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\text{换底公式: } \log_a M = \underline{\hspace{2cm}}.$$

9. 常见函数方程 (写出符合以下等式的函数):

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2) \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) f(x_2) \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(x_1 x_2) = x_2 f(x_1) + x_1 f(x_2) \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(x_1 + x_2) + f(x_1 - x_2) = 2\lambda f(x_1) f(x_2) \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) + 2\lambda x_1 x_2 \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

10. * $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ 或 $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$, 则

$$f(x_1) + f(x_2) = f(\underline{\hspace{2cm}})$$

11. $\arctan x_1 + \arctan x_2 = \underline{\hspace{2cm}}.$

12. 函数凹凸性, 填 “<” 或 “>”, 请结合图像记忆。

$$x_1, x_2 \in (0, \pi), x_1 \neq x_2,$$

$$\frac{1}{2}(\sin x_1 + \sin x_2) \underline{\hspace{1cm}} \sin \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_1, x_2 \in (0, \frac{\pi}{2}), x_1 \neq x_2,$$

$$\frac{1}{2}(\tan x_1 + \tan x_2) \underline{\hspace{1cm}} \tan \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 \neq x_2,$$

$$\frac{e^{x_1} + e^{x_2}}{2} \underline{\hspace{1cm}} e^{\frac{x_1 + x_2}{2}}$$

$$x_1, x_2 \in (0, +\infty), x_1 \neq x_2,$$

$$\frac{\ln x_1 + \ln x_2}{2} \underline{\hspace{1cm}} \ln \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_1, x_2 \in (0, +\infty), x_1 \neq x_2, \alpha \in \mathbf{R}, \alpha > 1,$$

$$\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha}{2} \underline{\hspace{1cm}} \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^\alpha$$

13. 若 $f(x)$ 满足 $f(x) = \pm \frac{1}{f(x+a)}$, 那么 $f(x)$ 的一个周期是_____。

14. 若 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = f(b-x)$, 则 $f(x)$ 的一条对称轴是_____。

15. 如果 $f(x)$ 同时具有对称轴 $x=a$ 和对称中心 (b, c) , 且 $a \neq b$, 那么 $f(x)$ 具有周期 $T =$ _____。

16. 三变量均值不等式: 设 $a, b, c \geq 0$, 则 $\frac{a+b+c}{3} \geq$ _____。

17. 设 $a, b > 0, x > 0$, 利用上面的三变量均值不等式, 有:

$$ax^2 + \frac{b}{x} = ax^2 + \frac{b}{2x} + \frac{b}{2x} \geq \underline{\hspace{2cm}};$$

$$ax + \frac{b}{x^2} = \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ax + \frac{b}{x^2} \geq \underline{\hspace{2cm}}.$$

18. 零点存在定理: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 连续, 且 $f(a) \cdot f(b) \underline{\hspace{1cm}}$, 则一定存在 $x_0 \in (a, b)$, 使 $f(x_0) = 0$. 此定理为二分法找函数零点的理论基础。

19. * 记 $f_0(x) = x, f_1(x) = f(x), f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$. 称 $f_n(x)$ 为函数 $f(x)$ 的 n 次迭代。

$f(x)$	$f_n(x)$
$x + 2\sqrt{x} + 1$	
$\frac{x}{a+bx}$	
$\sqrt[k]{ax^k + b}$	
$x^2 + 2x$	
$\frac{x^2}{2x-1}$	$\frac{x^{2^n}}{x^{2^n} - (x-1)^{2^n}}$

20. $f_1(x) = f(x) = \frac{1+x}{1-x}, f_{n+1}(x) = f(f_n(x)), n \in \mathbf{N}^+, k \in \mathbf{N}$, 则 $f_{4k+1}(x) =$ _____, $f_{4k+2}(x) =$ _____, $f_{4k+3}(x) =$ _____, $f_{4k+4}(x) =$ _____。

2 排列、组合与二项式定理

21. 排列数: $P_n^k =$ _____, 或者写成 A_n^k .

22. 组合数: $C_n^k = C_n^{n-k} =$ _____。

递推关系: $C_n^k + C_n^{k-1} =$ _____。

23. 二项式定理: $(a+b)^n =$ _____。

24. $(a+b+c)^2 =$ _____。
 $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$ 的结果类似。

25. 杨辉三角:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & 1 & 2 & 1 & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array}$$

第 $n+1$ 行的系数之和为 $\sum_{k=0}^n C_n^k =$ _____。

26. * 偶数件不同物品中选出奇数件物品的方法数 $C_{2n}^1, C_{2n}^3, C_{2n}^5, \dots$ 都是 _____ 数。(填 “奇” 或 “偶”)

27. * 组合恒等式:

$$\sum_{k=r}^n C_k^r = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \sum_{k=0}^r C_m^k C_n^{r-k} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sum_{k=1}^n k C_n^k = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 C_n^k = \underline{\hspace{2cm}}$$

28. * 设 n 个元素错排的方案数为 D_n , $D_1 = 0, D_2 = 1$, 则

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

$$D_n - nD_{n-1} = -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}] = (-1)^n$$

$$\frac{D_n}{n!} - \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$D_n = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right]$$

29. $(ax^\alpha + bx^\beta)^n$ 展开式的通项为

$$T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r x^{(n-r)\alpha + r\beta},$$

设 $C_n^m a^{n-m} b^m$ 是最大的系数, 则

$$\begin{cases} C_n^m a^{n-m} b^m \geq \underline{\hspace{2cm}} \\ C_n^m a^{n-m} b^m \geq \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

3 概率论与数理统计

30. 给定正整数集合 $S = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$, 定义多项式 $f(x) = (1 + x^{k_1})(1 + x^{k_2}) \cdots (1 + x^{k_n})$, 则 $f(x)$ 的展开式中, $\underline{\hspace{2cm}}$ 恰好等于从集合 S 中选出元素总和为 m ($m \in \mathbf{N}$) 的子集的方法数。

31. 数学期望 (或均值) 的定义: $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$,
性质: $E(aX + b) = \underline{\hspace{2cm}}$.
方差: $D(X) = E\{[X - E(X)]^2\} = \underline{\hspace{2cm}}$,
性质: $D(aX + b) = \underline{\hspace{2cm}}$.

32. 伯努利大数定律: 独立地重复一个伯努利试验 n 次, 当 n 很大时, 频率逼近概率。

33. 概率加法公式:

$$P(A_1 \cup A_2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

34. 条件概率公式: $P(B | A) = \underline{\hspace{2cm}}$.
概率乘法公式: $P(A \cap B) = \underline{\hspace{2cm}}$.
若 A, B 相互独立, 则 $P(A \cap B) = \underline{\hspace{2cm}}$.

35. 全概率公式: $P(A) = \underline{\hspace{2cm}}$.

36. * 贝叶斯公式:

$$P(\Omega_i | A) = \underline{\hspace{2cm}}$$

37. 二项分布 $b(n, p)$: 每次实验时, 事件 A 发生的概率为 p , 那么在 n 次实验中事件 A 发生 k 次的概率为 $P\{X = k\} = \underline{\hspace{2cm}}$. 数学期望为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 方差为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

38. * 几何分布: 在 n 次伯努利试验中, 试验 k 次才得到第一次成功的概率, $P\{X = k\} = (1-p)^{k-1}p$, $k \in \mathbf{N}^+$, $0 < p < 1$. 数学期望为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 方差为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

39. 超几何分布: 共有 N 件产品, 其中有 D ($D \leq N$) 件次品, 从中任取 n ($n \leq N$) 件, 其中恰有 k ($k \leq D$) 件次品的概率: $P\{X = k\} = \underline{\hspace{2cm}}$. 数学期望为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 方差为 $\frac{nD}{N} \left(1 - \frac{D}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$.

40. 正态分布: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $\mu \in \mathbf{R}$, $\sigma > 0$. 数学期望为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 方差为 $\underline{\hspace{2cm}}$. 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \underline{\hspace{2cm}}$ (标准正态分布).

41. 最小二乘法, 回归直线 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$.

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \\ &= \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \end{aligned}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

回归直线通过散点图的几何中心 (\bar{x}, \bar{y}) .

42. 样本相关系数

$$\begin{aligned} r &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2}} \\ &= \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \cdot \sqrt{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2}} \end{aligned}$$

4 三角函数

43. 正余弦和角、差角公式:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

44. 二倍角公式:

$$\sin 2x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos 2x = \underline{\hspace{2cm}}$$

(余弦二倍角需写出三种形式)

45. * 三倍角公式:

$$\sin 3x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos 3x = \underline{\hspace{2cm}}$$

46. 余弦的递推关系:

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta - \underline{\hspace{2cm}}$$

47. 和差化积:

$$\sin x + \sin y = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos x + \cos y = \underline{\hspace{2cm}}$$

48. 积化和差:

$$\sin x \sin y = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos x \cos y = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sin x \cos y = \underline{\hspace{2cm}}$$

49. 辅助角公式:

$$\begin{aligned} a \sin x + b \cos x \\ = \underline{\hspace{2cm}} \quad \left(\tan \varphi = \frac{b}{a} \right) \end{aligned}$$

变体一:

$$\begin{aligned} a \sin x + b \cos(x + x_0) \\ = \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

变体二:

$$\begin{aligned} a \cos^2 x + b \sin^2 x + c \sin x \cos x \\ = \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

变体三:

$$a \sin^2 x + b \cos x = \underline{\hspace{2cm}}$$

50. *

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos kx &= \underline{\hspace{2cm}} \\ \sum_{k=1}^n \sin kx &= \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

51. * $\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \underline{\hspace{2cm}}.$

52. * $\triangle ABC$ 中的恒等式 ($A + B + C = \pi$):

$$\sin A + \sin B + \sin C = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right) \tan\left(\frac{B}{2}\right) + \tan\left(\frac{B}{2}\right) \tan\left(\frac{C}{2}\right) +$$

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right) \tan\left(\frac{C}{2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

53. 对于 $\triangle ABC$, 考虑 $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ 的特殊情形, 以及两个角趋近于 0, 第三个角趋近于 π 时的极限 (或者一个角趋近于 0, 剩余两个角趋近于 $\frac{\pi}{2}$), 有

$$\underline{\hspace{2cm}} < \sin A + \sin B + \sin C \leq \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\underline{\hspace{2cm}} < \sin A \sin B \sin C \leq \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\underline{\hspace{2cm}} < \cos A + \cos B + \cos C \leq \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\underline{\hspace{2cm}} < \cos A \cos B \cos C \leq \underline{\hspace{2cm}}$$

54. 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $\sin x > \frac{2}{\pi}x$, $\cos x > 1 - \frac{2}{\pi}x$.
对于锐角三角形 ABC , 有

$$\sin A + \sin B + \sin C > \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C > \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq \underline{\hspace{2cm}}$$

55. * 参数方程 $\begin{cases} x = A \cos(\omega t + a) \\ y = B \cos(\omega t + b) \end{cases}, AB \neq 0$, 消去参数 t 可得:

$$\underline{\hspace{2cm}}$$

56. * 双曲正弦函数 $\sinh x = \underline{\hspace{2cm}},$

反双曲正弦函数 $\operatorname{arcsinh} x = \underline{\hspace{2cm}};$

双曲余弦函数 $\cosh x = \underline{\hspace{2cm}},$

反双曲余弦函数 $\operatorname{arccosh} x = \underline{\hspace{2cm}}.$

求导: $(\sinh x)' = \underline{\hspace{2cm}}; (\cosh x)' = \underline{\hspace{2cm}}.$

$(\operatorname{arcsinh} x)' = \underline{\hspace{2cm}}; (\operatorname{arccosh} x)' = \underline{\hspace{2cm}}.$

平方差关系: $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$

5 复数

57. 虚数单位 i 的整数次幂的周期性:

$$i^{4n} = \underline{\hspace{2cm}}, i^{4n+1} = \underline{\hspace{2cm}}, i^{4n+2} = \underline{\hspace{2cm}}, i^{4n+3} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

58. 共轭复数的性质:

$$\overline{\overline{z}} = \underline{\hspace{2cm}}, \overline{z_1 \pm z_2} = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \underline{\hspace{2cm}}, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

59. 复数的模的性质:

$$|z| = \underline{\hspace{2cm}}, z\overline{z} = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$|z_1 z_2| = \underline{\hspace{2cm}}, \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

60. 三角不等式: $\underline{\hspace{2cm}} \leq |z_1 \pm z_2| \leq \underline{\hspace{2cm}}.$

61. 去掉 $\sqrt{A + B\sqrt{C}}$ ($A > 0, C > 0$) 的外层根号的方法:
设 $\sqrt{A + B\sqrt{C}} = x + y\sqrt{C}$, 两边平方, 然后比较左右两边 \sqrt{C} 的系数和另一项, 可得到两个方程:
 $\underline{\hspace{2cm}}.$ 根据基本不等式, $A \geq \underline{\hspace{2cm}}$ 是可以去掉外层根号的必要不充分条件.

62. 去掉 $\sqrt{a + bi}$ 的根号的方法: 设 $\sqrt{a + bi} = x + yi$, 两边平方, 然后比较左右两边的实部和虚部, 可得到两个方程: $\underline{\hspace{2cm}}.$

63. 欧拉公式 $e^{ix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

64. * 自然对数的底数 $e = 2.718281828 \dots$ 的定义:

$$e = \underline{\hspace{2cm}}$$

65. $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\underline{\hspace{2cm}})^n$,

将等号右边用二项式定理展开后, 比较左右两边的实部和虚部, 即可得到任意的 n 倍角公式。

66. 若 $x^n = 1, n \in \mathbf{N}^+$, 则称 x 为 n 次单位根, 复数范围内, x 共有 n 个不同的值, 分别是

$\underline{\hspace{2cm}}$.

67. $(x + iy)(\cos \theta + i\sin \theta)$

$= \underline{\hspace{2cm}}$ (坐标旋转公式).

6 向量

68. 零向量具有任意方向。

69. $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 两者的数量积 (“点乘”) 定义为

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \underline{\hspace{2cm}}$$

\vec{a}, \vec{b} 的夹角的余弦为

$$\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \underline{\hspace{2cm}}$$

70. 二阶行列式: $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

71. * $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 这两者的向量积 (“叉乘”) 定义为

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$= \underline{\hspace{2cm}}$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 分别是 x, y, z 轴正方向的单位向量。向量积的结果仍然是向量。向量积不满足交换律, 即 $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$. $|\vec{a} \times \vec{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$. (用向量的模和夹角表示)

72. 当 $a_3 = b_3 = 0$ 时, $|\vec{a} \times \vec{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$ (用坐标表示), 代表以 \vec{a}, \vec{b} 为邻边的平行四边形的面积, 除以 2 就得到以 \vec{a}, \vec{b} 为两条边的三角形的面积。

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

$$= (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 + \underline{\hspace{2cm}}$$

$\vec{a} \perp \vec{b}$ 的充要条件是 $\underline{\hspace{2cm}}$ (用坐标表示).

$\vec{a} // \vec{b}$ 的充要条件是 $\underline{\hspace{2cm}}$ (用坐标表示).

73. 向量基本定理: 如果 \vec{e}_1 与 \vec{e}_2 是平面上两个不平行的向量, 那么该平面上的任意向量 \vec{a} , 都可唯一地表示为 \vec{e}_1 与 \vec{e}_2 的线性组合, 即存在唯一的一对实数 λ 与 μ , 使得 $\underline{\hspace{2cm}}$.

74. 平面上有不同的四点 O, P, Q, R , 设 $\vec{OR} = \lambda \vec{OP} + \mu \vec{OQ}$, 则 P, Q, R 三点共线的充要条件是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

7 解三角形

75. 外心: 三条 $\underline{\hspace{2cm}}$ 线的交点;

内心: 三条 $\underline{\hspace{2cm}}$ 线的交点;

重心: 三条 $\underline{\hspace{2cm}}$ 线的交点;

垂心: 三条 $\underline{\hspace{2cm}}$ 线的交点。

76. 对于 $\triangle ABC$, 重心 G 分割中线的比例为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

设 O 为空间中的任意一点, 则

$$\vec{OG} = \underline{\hspace{2cm}} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

77. 正弦定理:

$\underline{\hspace{2cm}}$

R 为三角形外接圆半径。

78. 余弦定理:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$= \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos C = \underline{\hspace{2cm}}$$

79. 对任意三角形, “大边” 是 “大角” 的充要条件。

80. * 对于 $\triangle ABC$,

$$a + b + c \geq 2(a \cos A + b \cos B + c \cos C)$$

将三个余弦定理的式子相加可得:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2bc \cos A + 2ac \cos B + 2ab \cos C$$

将上式中的 a, b, c 换成任意实数 x, y, z , 同时保持 $A + B + C = \pi$, 那么有嵌入不等式

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \underline{\hspace{2cm}}$$

81. $(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (\underline{\hspace{2cm}})^2$, 具有勾股定理的形式。

让 $a, b (a \neq b)$ 取正整数, 就能得到勾股数, 比如

$(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (8, 15, 17), (9, 40, 41), (11, 60, 61), (20, 21, 29)$.

82. 把上一条中的 a^2 换成 \vec{a} , b^2 换成 \vec{b} , 实数乘法换成向量点乘, 就得到向量的极化恒等式:

83. 对于 $\triangle ABC$, R 为外接圆半径, r 为内切圆半径, $p = \frac{a+b+c}{2}$ 为三角形周长的一半, 三角形的面积公式有: 两边夹角: _____.

只含 R, A, B, C : _____.

只含 R, a, b, c : _____.

只含 p, r : _____.

只含 p, a, b, c : _____.

84. r 为内切圆半径, 则 $r =$ _____ (用 p, a, b, c 表示).

85. * 对于 $\triangle ABC$, 外森比克不等式:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \text{_____} S_{\triangle ABC}$$

86. * $\triangle ABC$ 的费马点: 分别以 AB, BC, AC 为边, 在 $\triangle ABC$ 外部 (或内部) 作三个等边三角形, 这三个等边三角形的外接圆会交于同一点, 即费马点。当三角形的最大内角小于 120° 时, 费马点位于三角形内部, 设费马点与三个顶点连线长度分别为 x, y, z , 则

$$xy + yz + zx = \frac{4}{\sqrt{3}} S_{\triangle ABC} \leq \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2)$$

87. * 三角形的内心和外心的距离为 $\sqrt{R(R-2r)}$.

任意三角形的外接圆半径大于等于 2 倍内切圆半径 ($R \geq 2r$).

88. * $\triangle ABC$ 内部有任意一点 O , 记 $\triangle AOB, \triangle BOC, \triangle COA$ 的面积分别为 S_C, S_A, S_B , 那么有:

$$S_A \cdot \text{_____} + S_B \cdot \text{_____} + S_C \cdot \text{_____} = \vec{0}$$

◇ 当 O 是 $\triangle ABC$ 的重心时,

$$S_A : S_B : S_C = \text{_____}$$

◇ 当 O 是 $\triangle ABC$ 的垂心时,

$$S_A : S_B : S_C = \text{_____}$$

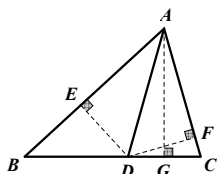
◇ 当 O 是 $\triangle ABC$ 的内心时,

$$S_A : S_B : S_C = \text{_____}$$

◇ 当 O 是 $\triangle ABC$ 的外心时,

$$S_A : S_B : S_C = \text{_____}$$

89. D 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的一点, 则 $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CD|}$ 的充分必要条件是: AD 是 _____。



8 导数与积分

90. 基本初等函数的导数公式:

$$(x^\alpha)' = \text{_____}, (\ln x)' = \text{_____},$$

$$(a^x)' = \text{_____}, (e^x)' = \text{_____},$$

$$(\sin x)' = \text{_____}, (\cos x)' = \text{_____},$$

$$(\tan x)' = \text{_____}.$$

91. 导数运算法则:

$$[c_1 f(x) + c_2 g(x)]' = \text{_____}$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = \text{_____}$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \text{_____}$$

92.

$$[f(x) \cdot x^n]' = \text{_____}$$

$$\left[\frac{f(x)}{x^n} \right]' = \text{_____}$$

93. 复合函数求导法则: $[g(f(x))]' = g'(u)f'(x)$, 再将 u 换回 $f(x)$. 比如 $[\ln f(x)]' = \text{_____}$.

94. 设 $f(x) = (x - x_0)^n g(x)$, 两边取自然对数, 有

$$\ln f(x) = n \ln(x - x_0) + \ln g(x)$$

两边求导, 有

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \text{_____}$$

95. 可导奇函数的导函数是 _____ 函数 (填“奇”或“偶”); 可导偶函数的导函数是 _____ 函数。

96. 牛顿-莱布尼茨公式 (微积分基本公式):

$$\int_a^b f'(x) dx = \text{_____}$$

97. * 罗必塔 (L'Hospital) 法则: 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均趋于 0 或 $\pm\infty$, 那么

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

特别地, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \text{_____}$.

98. 把 $e^x \geq x + 1$ 中的 x 换成 $x - 1$, 有 $e^{x-1} \geq x$, 两边同乘 e , 有 _____.

99. 把 $e^x \geq x + 1$ 中的 x 换成 $-x$, 有 $e^{-x} \geq -x + 1$, 当 $x < 1$ 时, 两边同时取倒数, 有 $e^x \leq \text{_____}$.

100. x 换成 $\alpha x (\alpha > 0)$, 有 $e^{\alpha x} \geq \alpha x + 1$, 当 $1 + \alpha x > 0$ 时, 两边同时开 α 次方, 有 $e^x \geq$ _____.

101. * e 是自然对数的底数, $n \in \mathbf{N}^+$, 则

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

102. 对于三次函数 $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, 对称中心的坐标为 _____, 对称中心也是三次函数的拐点 (二阶导数为 0, 且二阶导数在此点左右异号)。

103. * 对任意 n 次首一多项式 $P(x)$ (最高次项系数为 1 的多项式), 设 M 代表 $|P(x)|$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值, 那么无论其它项的系数怎么变化 (保持首一), M 总是大于等于 _____.

104. * 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的泰勒 (Taylor) 级数

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

当 $x_0 = 0$ 时,

$$e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \cdots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(\frac{x}{1-x} + \frac{x^3}{3(1-x)^3} + \cdots \right)$$

105. 当 $|x| < 0.2$ 时, $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ (x 可正可负). 而且 $|x|$ 越小, 这个估算公式越精确。

$$\sqrt{1.1} = 1.048808 \cdots \approx 1 + \frac{1}{2} \times 0.1 = 1.05,$$

$$\sqrt{73} = 8.544003 \cdots = \sqrt{64+9} = \sqrt{64 \left(1 + \frac{9}{64}\right)} =$$

$$8 \sqrt{1 + \frac{9}{64}} \approx 8 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{64}\right) = 8.55$$

106. 拉格朗日中值定理: 如果函数 $f(x)$ 满足: (1) 在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上连续; (2) 在开区间 (x_1, x_2) 内可导。

那么至少存在一点 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. (至少能作出一条和割线斜率相等的切线)。

107. * 厄米特-哈达玛 (Hermite-Hadamard) 不等式: $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续且可积, $\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2$, 如

果 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$ (等价于 $f''(x) > 0$), 那么有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{1}{x_2-x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

108. * 小于等于 n 的全部正整数的 $1 \sim 5$ 次方的求和结果:

$$1^1 + 2^1 + 3^1 + \cdots + n^1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}$$

$1 \sim n$ 的 k 次方求和结果是关于 n 的 $k+1$ 次多项式, 多项式的系数从高次项到低次项依次为

$$\frac{1}{k+1}, \frac{1}{2}, \frac{k}{12}, 0, -\frac{k(k-1)(k-2)}{720}, \dots$$

以上这些求和公式可以写成如下通式,

$$1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$$

$$= \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k C_{k+1}^j B_j n^{k+1-j} + n^k \quad (1)$$

$$= \frac{1}{k+1} n^{k+1} + \frac{1}{2} n^k + \frac{k}{12} n^{k-1} + \cdots \quad (2)$$

B_j 为伯努利数, $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42} \cdots$ 伯努利数满足递推关系: $0 = \sum_{j=0}^{n-1} C_n^j B_j$ ($n \geq 2$). (1) 式实际上是欧拉-麦克劳林求和公式的一个特例。

109. 黎曼 zeta 函数: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ($s > 1$),

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

110. 非整数次幂求和 (只有近似公式, 没有精确公式):

$$\sum_{l=1}^n l^{-1/2} \leq \frac{2}{\sqrt{2n+1}}$$

$$\sum_{l=1}^n l^{-1/3} \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{\sqrt[3]{2n+1}} + 1 \right)$$

$$\sum_{l=1}^n l^{1/3} \leq \frac{3}{4} \left(\frac{4}{\sqrt[3]{2n+1}} + 1 \right)^2$$

$$\sum_{l=1}^n l^{1/2} \leq \frac{2}{3} \left(\frac{3}{\sqrt{2n+1}} + 1 \right)^3$$

系数同样满足第108条中 (2) 式的规律, 只是其中的 k 不是正整数, 同时不要出现负幂项。常数项的作用是提高近似公式的精度, 可通过令 $n = 1$ 来确定常数项。

9 不等式

111. 糖水不等式: 若 $0 < b < a, c > 0$, 则 $\frac{b}{a} < \frac{b+c}{a+c}$.

$$\frac{1}{a^k - 1} \leq \frac{1}{a^k}$$

112. 设 a, b, c, d 均大于 0, 且 $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, 那么 $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

113. 设 $a > 1$, 当 $k \geq 1$ 时, $a^k - 1 \geq a^k - a^{k-1} = (a-1)a^{k-1}$, 所以

$$\frac{1}{a^k - 1} \leq \frac{1}{(a-1)a^{k-1}}$$

114. 伯努利不等式: 当 $x > -1$ 时,

- 若 $\alpha > 1$, 则 $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$;
 - 若 $0 < \alpha < 1$, 则 $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$.
- 用数学归纳法或求导证明。

115. * 广义伯努利不等式:

若 $x_1, x_2, \dots, x_n > 0, n \geq 2$, 则

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) > 1 + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

若 $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, 1), n \geq 2$, 则

$$(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n) > 1 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

用数学归纳法证明。

116. $x \in (0, \frac{\pi}{2})$,

$$\frac{x}{2} < \sin x < x < \frac{x}{\cos x} < \frac{x}{1 - \frac{x^2}{2}}$$

117. * $x \in (0, 1)$,

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \frac{x}{\sqrt{1+\frac{2}{3}x^2}} < \sin x < \frac{x}{\sqrt{1+\frac{1}{3}x^2}} < x < \frac{x}{\sqrt{1-\frac{1}{3}x^2}} < \tan x < \frac{x}{\sqrt{1-\frac{2}{3}x^2}} < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

118. $x \in \mathbf{R}$, $\cos x \geq \frac{1-x^2}{2}$ (泰勒级数取前两项).

$$x \in (0, \frac{\pi}{2}), \cos x < 1 - \frac{4x^2}{\pi^2}.$$

119. $x \in (0, 1)$, $e^{2x} < \frac{1+x}{1-x}$.

两边取自然对数, 有 $2x < \frac{1+x}{1-x}$.

令 $t = \frac{1+x}{1-x} \in (1, +\infty)$, 则 $x = \frac{t-1}{t+1}$, 上面的不等式变为 $\ln t < \frac{t-1}{t+1}$.

120. $t \in (1, +\infty)$, $\ln t < \frac{t-1}{t+1}$ (含 \sqrt{t}).

121. 对任意两个不等的正实数 x_1, x_2 , 有

$$\sqrt{x_1 x_2} < \frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} < \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$\frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1}$ 称为对数平均值。把上式中的 x_1 换成 e^{x_1} , x_2 换成 e^{x_2} , 可得:

122. 两变量均值不等式 (包含 4 种均值):

123. * 将上式推广到 n 变量情形:

$$\text{调和均值 } (H_n) \leq \text{几何均值 } (G_n) \leq \text{算术均值 } (A_n) \leq \text{平方均值 } (Q_n)$$

$$\frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

其中, a_1, a_2, \dots, a_n 均非负。

124. 给定 $\lambda a + \mu b = C$, 求 ab 的最大值和 $\frac{k_1}{a} + \frac{k_2}{b}$ 的最小值。其中, $\lambda, \mu, C, k_1, k_2$ 为正的常数, a, b 为正的变量。

$$ab = \frac{1}{\lambda \mu} (\lambda a \cdot \mu b) \leq \frac{1}{\lambda \mu} \left(\frac{\lambda a}{\lambda} + \frac{\mu b}{\mu} \right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{C^2}{4\lambda\mu}$$
$$\frac{k_1}{a} + \frac{k_2}{b} = \left(\frac{k_1}{a} + \frac{k_2}{b} \right) \cdot \frac{1}{C} (\lambda a + \mu b) = \frac{k_1 \lambda + k_2 \mu}{C}$$

125. 若 $x \in \mathbf{R}$, 则 $\sqrt{x^2 + 4} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \geq 2$.

126. * 加权算术-几何均值不等式: 正数 λ_k 满足 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$, 且 $x_k \geq 0$, 那么

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$$

127. 柯西不等式:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n), \text{ 那么}$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\cos \theta| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 \leq |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

把上式转化为坐标表示:

128. $a, b, c \in \mathbf{R}$, 因为 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$, 所以, $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

129. * 赫尔德 (Hölder) 不等式: $p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a_k \geq 0, b_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, n$, 那么

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

等号成立的条件是: 存在非 0 实数 λ , 对任意 $k = 1, 2, \dots, n$ 都有 $\lambda a_k = b_k$. 当 $p = q = 2$ 时, 就变成柯西不等式。

130. * 闵可夫斯基 (Minkowski) 不等式: $r > 0, r \neq 1, a_k > 0, b_k > 0$, 那么
- $$\left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^r \right]^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^r \right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^r \right)^{\frac{1}{r}} \quad (r > 1)$$
- $$\left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^r \right]^{\frac{1}{r}} \geq \left(\sum_{k=1}^n a_k^r \right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^r \right)^{\frac{1}{r}} \quad (r < 1)$$
- 以上两式等号成立的条件都是: 存在非 0 实数 λ , 对任意 $k = 1, 2 \cdots n$ 都有 $\lambda a_k = b_k$.

131. 含根号的缩放:

$$\frac{1}{2\sqrt{k}} > 2\sqrt{k} > \frac{1}{2\sqrt{k+1}} > \frac{1}{2\sqrt{k+2}}$$

以上各项除 $2\sqrt{k}$ 外, 取倒数后均可裂项。

132. 含平方的缩放:

$$\frac{1}{k^2 + 1} \geq k^2 + 1 > k^2 > \frac{1}{k^2 + 2} \geq \frac{1}{k^2 + 3}$$

以上各项除 $k^2 + 1$ 和 k^2 外, 取倒数后均可裂项。

133. 正整数倒数求和缩放:

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} < \frac{1}{n-2}$$

10 数列

134. 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, S_n 是其前 n 项和,

- 若 $m + n = s + t$, 则 $a_m + a_n = a_s + a_t$;
- $S_{m+n} = S_m + S_n + \frac{m+n-1}{2}d$;
- $\frac{S_{2n-1}}{a_n} = \frac{S_{2n-1}}{a_n}$;
- $m \neq n, \frac{S_m - S_n}{m - n} = \frac{S_{m+n}}{m + n} = \frac{S_{m+n}}{m + n}$;
- $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n} \cdots$ 是公差为 $\frac{d}{2}$ 的等差数列;
- 在前 $2n$ 项中, $\frac{\text{奇数项之和}}{\text{偶数项之和}} = \frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}}{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}} = \frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}}{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}}$;
- 在前 $2n+1$ 项中, $\frac{\text{奇数项之和}}{\text{偶数项之和}} = \frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1}}{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}} = \frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1}}{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}}$;

135. 等比数列 $a_n = a_1 x^{n-1}$ 的求和公式: 当 $x \neq 1$ 时,
- $$S_n = \frac{a_1(1-x^n)}{1-x}$$
- 若 $|x| < 1$, 则
- $$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

136. 等差乘以等比型数列求和 ($x \neq 1$):

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

当 $|x| < 1$ 时,

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

对上式求导,

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

因为 $k^2 x^{k-1} = x \cdot k(k-1)x^{k-2} + kx^{k-1}$, 所以

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1} = \frac{x}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k = \frac{x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}$$

137. 常见裂项方法:

$$\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right)$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

$$\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+k}} = \frac{\sqrt{n+k} - \sqrt{n}}{k}$$

$$\frac{a^n}{(a^n + 1)(a^{n+1} + 1)} = \frac{1}{a-1} \left(\frac{1}{a^n + 1} - \frac{1}{a^{n+1} + 1} \right)$$

138. * 阿贝尔 (Abel) 求和公式: 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n, B_n , 那么

$$\sum_{k=1}^n A_k b_k + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} B_k = A_n B_n \quad (3)$$

139. 如果 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上满足下列 2 个条件, 则称 $f(x)$ 为一个压缩函数。

(1) 任意 $x \in [a, b]$, 有 $f(x) \in [a, b]$;

(2) 任意 $x, y \in [a, b]$, 存在常数 $L \in (0, 1)$, 使得 $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ 。

140. 压缩映像原理: 如果 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的压缩函数, 那么必定存在唯一的 $X \in [a, b]$, 满足方程 $f(X) = X$, X 被称为 $f(x)$ 的不动点。

141. $A > 0, B > 0$, 记 $f(x) = \sqrt{Ax + B}$, $g(x) = A + \frac{B}{x}$, 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 > 0, a_{n+1} = f(a_n) = \sqrt{Aa_n + B}$, 数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_1 > 0, b_{n+1} = g(b_n) = A + \frac{B}{b_n}$, 那么数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的不动点均为 $\frac{A \pm \sqrt{A^2 + 4B}}{2}$ 。

142. 对于一阶线性递推数列 $a_{n+1} = Aa_n + B$ ($A \neq 1$), 先解方程 $x = Ax + B$, 然后递推公式两边减去 x , $a_{n+1} - x = A(a_n - x)$, 这样就转化成了等比数列。

143. $a_{n+1} = Aa_n + Bq^n$. 两边同除 q^n , 有 $\frac{a_{n+1}}{q^n} =$ _____, 这样就转化成了上一条中的一阶线性递推数列。

144. $a_{n+1} = Aa_n^2$, 则 $Aa_{n+1} =$ _____ $= \cdots =$ _____.

145. $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$. 两边同时加 1, $a_{n+1} + 1 =$ _____.

146. $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2$. 两边同时减 1, $a_{n+1} - 1 =$ _____.

147. $a_{n+1} = \frac{Aa_n}{Ca_n + D}$, 两边取倒数, $\frac{1}{a_{n+1}} =$ _____, 那么 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 为一阶线性递推数列。

148. * 设 $p > 1, a < 0$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \approx x + ax^p$, 定义数列 $a_{n+1} = f(a_n)$, 如果对任意的正整数 n , 都有 $a_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n^{p-1} = \frac{1}{a(1-p)}$$

如果 $a_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, 那么可以做倒代换 $b_n = \frac{1}{a_n}$, 然后对 b_n 应用上式。

149. 对于二阶线性递推数列 $a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n$, 先解特征方程 _____, 假设有两个不等的根 x_1, x_2 (可以为复数), 那么

$$\begin{aligned} a_{n+2} - x_2 a_{n+1} &= x_1 (a_{n+1} - x_2 a_n) = \cdots \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{n+2} - x_1 a_{n+1} &= x_2 (a_{n+1} - x_1 a_n) = \cdots \\ &= \end{aligned}$$

150. 分式线性递推数列 $a_{n+1} = \frac{Aa_n + B}{Ca_n + D}$, 先解方程 _____, 假设有两个不等的根 x_1, x_2 (可以为复数), 那么

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha &= \frac{Aa_n + B - \alpha(Ca_n + D)}{Ca_n + D} \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \beta &= \frac{Aa_n + B - \beta(Ca_n + D)}{Ca_n + D} \\ &= \end{aligned}$$

两式相除可得:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1} - \alpha}{a_{n+1} - \beta} &= \left(\frac{A - C\alpha}{A - C\beta} \right) \cdot \frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta} = \cdots \\ &= \end{aligned}$$

151. * 分式非线性递推数列, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{A^2}{a_n} \right)$, 假设 $a_1 \neq \pm A$,

$$a_{n+1} - A = \frac{a_n^2 + A^2 - 2Aa_n}{2a_n} = \frac{(a_n - A)^2}{2a_n}$$

$$a_{n+1} + A = \frac{a_n^2 + A^2 + 2Aa_n}{2a_n} = \frac{(a_n + A)^2}{2a_n}$$

$$\frac{a_{n+1} - A}{a_{n+1} + A} = \frac{(a_n - A)^2}{(a_n + A)^2} = \cdots = \frac{(a_1 - A)^{2^n}}{(a_1 + A)^{2^n}}$$

11 解析几何

152. 直线的方程:

一般式方程: _____;

点法式方程: _____;

斜截式方程: _____;

点斜式方程: _____;

截距式方程: _____;

两点式方程: _____.

153. 直线的参数方程: $\begin{cases} x = \text{_____} \\ y = \text{_____} \end{cases}$, ϕ 是直线的倾斜角, $|t|$ 表示直线上任一点到 (x_0, y_0) 的距离。更一般地, 可以写成 $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$, 若 $a^2 + b^2 \neq 1$, 则此时的 $|t|$ 不再表示距离, 这一点需要注意。

154. 点 (x_0, y_0) 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离公式: _____.

155. 两条平行直线 $Ax + By + C_1 = 0$ 和 $Ax + By + C_2 = 0$ 的距离公式: _____.

156. 平面的方程:

一般式方程: _____;

点法式方程: _____;

截距式方程: _____.

157. 点 (x_0, y_0, z_0) 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离公式: _____.

158. 设二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根为 x_1, x_2 , 判别式为 Δ , 则 $|x_1 - x_2| =$ _____, $x_1^2 + x_2^2 =$ _____.

159. 椭圆和双曲线的准线方程是 _____.

160. 点差法, 在椭圆上取不同的两点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 则

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

两式相减, 有 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

如果是双曲线, 则 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

161. 圆锥曲线 (不包括圆) 的统一极坐标方程: $\rho = \underline{\hspace{2cm}}$. p 代表焦点到准线的距离. e 是离心率. 椭圆: $0 < e < 1$; 抛物线: $e = 1$; 双曲线: $e > 1$. 过焦点且倾斜角为 θ 的弦的长度为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

162. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的参数方程: $\begin{cases} x = \underline{\hspace{2cm}} \\ y = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$.

163. * 椭圆的顶投影参数方程, 设椭圆的上顶点为 $N(0, b)$, 在 x 轴上任取一点 $U(u, 0)$, 过 N, U 两点的直线与椭圆的除 N 以外的交点为 $P(x, y)$, 则

$$\begin{cases} x = a \cdot \frac{2au}{u^2 + a^2} \\ y = b \cdot \frac{u^2 - a^2}{u^2 + a^2} \end{cases}$$

164. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的参数方程: $\begin{cases} x = \underline{\hspace{2cm}} \\ y = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$.

165. 抛物线 $y^2 = 2px$ 的参数方程: $\begin{cases} x = \underline{\hspace{2cm}} \\ y = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$.

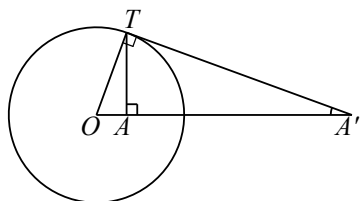
166. * 平摆线参数方程: $\begin{cases} x = R(\theta - \sin \theta) \\ y = R(1 - \cos \theta) \end{cases}$.

167. * 圆的渐开线参数方程: $\begin{cases} x = R(\cos \theta + \theta \sin \theta) \\ y = R(\sin \theta - \theta \cos \theta) \end{cases}$.

168. 椭圆面积公式为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 而不是 $\frac{1}{2}\pi(a^2 + b^2)$; 椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的体积公式为 $\frac{4}{3}\pi abc$, 而不是 $\frac{4}{9}\pi(a^3 + b^3 + c^3)$.

169. 到平面上两定点的距离之比为不等于 1 的定值的点的轨迹是圆 (称为“阿波罗尼奥斯圆”).

170. $\odot O$ 的半径是 R , 且 O, A, A' 三点共线, 如果 $|OA| \cdot |OA'| = \underline{\hspace{2cm}}$, 则 A 点与 A' 点互为“反演点”.

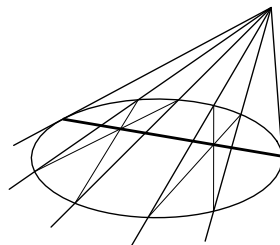


171. 椭圆上一点 (x_0, y_0) 的切线斜率为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$ (换一半).

172. 双曲线上一点 (x_0, y_0) 的切线斜率为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$ (换一半).

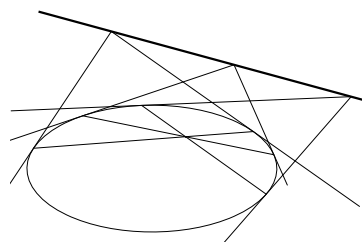
173. 抛物线 $y^2 = 2px$ 上一点 (x_0, y_0) 的切线斜率为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$ (换一半).

174. 当点 (x_0, y_0) 在椭圆外部时, 直线 $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ 表示椭圆的切点弦, 即从点 (x_0, y_0) 向椭圆作两条切线, 连接两个切点得到的弦.

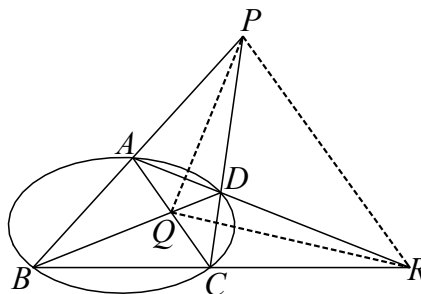


从点 (x_0, y_0) 出发作椭圆的两条割线, 与椭圆有 4 个交点, 那么以这 4 个交点为顶点的四边形的对角线交点也在切点弦上.

175. 当点 (x_0, y_0) 在椭圆内部时, 直线 $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ 与椭圆相离, 从直线 $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ 上的点向椭圆作两条切线, 则切点弦过定点 (x_0, y_0) .



176. 椭圆上有不同的四点 A, B, C, D , 假设 AB 与 CD 所在的直线交于 P 点, AD 与 BC 所在的直线交于 R 点, AC 与 BD 交于 Q 点, 则 P 点的极线是 QR , Q 点的极线是 PR , R 点的极线是 PQ , $\triangle PQR$ 称为自极三角形.



177. 判断直线 $l: Ax + By + C = 0$ 与椭圆的位置关系, 将直线方程变形为

$$\frac{\left(-\frac{Aa^2}{C}\right)x}{a^2} + \frac{\left(-\frac{Bb^2}{C}\right)y}{b^2} = 1$$

设 $P\left(-\frac{Aa^2}{C}, -\frac{Bb^2}{C}\right)$, 当 P 点在椭圆内部时 (即 $A^2a^2 + B^2b^2 < C^2$), 直线 l 与椭圆相离; 当 P 点在椭圆上时, 直线 l 与椭圆相切; 当 P 点在椭圆外部时, 直线 l 与椭圆相交。

178. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的性质:

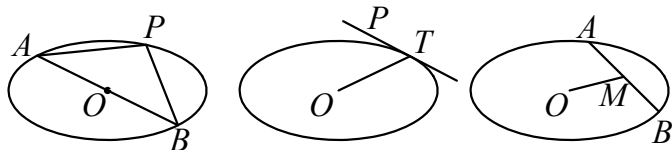
- 在椭圆外一点向椭圆做两条切线, 切线夹角保持为 $\frac{\pi}{2}$ 时, 切线交点的轨迹方程为 _____ (蒙日圆, 外准圆)
- 从椭圆中心 O 引出两条相互垂直的向径, 与椭圆分别交于 P, Q 两点, 从 O 点向 PQ 作垂线, 垂足为 H , 那么 H 点的轨迹也是一个圆 (内准圆), 圆的方程为 _____。斜边长度 $|PQ|$ 的取值范围是:

$$\text{_____} \leq |PQ| \leq \text{_____}$$

$\triangle OPQ$ 的面积的取值范围是:

$$\text{_____} \leq S_{\triangle OPQ} \leq \text{_____}$$

- 以下三种情形, 斜率之积为定值。



$$k_{AP} \cdot k_{BP} = k_{OT} \cdot k_{PT} = k_{OM} \cdot k_{AB} = \text{_____}.$$

- AB, CD 是椭圆的两条相交弦, 交点为 P , 且 AB, CD 的斜率互为相反数, 则 $|PA| \cdot |PB| = \text{_____}$ 。
- * 椭圆上任意一点 $P(x_0, y_0)$, 过 P 点作两条相互垂直的直线, 这两条直线与椭圆的除 P 点之外的交点分别是 Q, R , 那么线段 QR 过定点

$$\left(\frac{(a^2 - b^2)x_0}{a^2 + b^2}, -\frac{(a^2 - b^2)y_0}{a^2 + b^2} \right)$$

- * 过椭圆内部一点 $M(x_0, y_0)$ 作椭圆的两条垂直弦 PQ, RS , 弦 PQ, RS 的中点分别为 K, L , 那么线段 KL 过定点

$$\left(\frac{a^2x_0}{a^2 + b^2}, \frac{b^2y_0}{a^2 + b^2} \right)$$

- 椭圆上任意一点 $P(x_0, y_0)$, 过 P 点作两条斜率互为相反数的直线, 这两条直线与椭圆的除 P 点之外的交点分别是 Q, R , 那么直线 QR 的斜率是定值, 且与过 P 的切线的斜率互为 _____。
- 在椭圆的长轴 AB 上有一定点 $M(m, 0)$, 过点 M 作椭圆的弦 CD , 记直线 AC, BD 的斜率分别为 k_1, k_2 , 则
① $\frac{k_1}{k_2}$ 是定值;

② AC, BD 延长线的交点的轨迹方程是 _____, 即点 M 关于椭圆的极线;

③ 设②中的极线与 AB 延长线的交点为 H , 则 CH, DH 的斜率互为 _____。

- P 为椭圆上一点, F_1, F_2 是椭圆的左右焦点, $\angle F_1PF_2 = \theta$, 则 $S_{\triangle F_1PF_2} = \text{_____}$ 。
- F_1, F_2 是椭圆的两个焦点, 椭圆上一点 P 处的切线 PT 平分 $\triangle PF_1F_2$ 在点 P 处的外角。焦点在直线 PT 上的投影点的轨迹是以长轴为直径的圆。以 PF_1 (或 PF_2) 为直径的圆必与以长轴为直径的圆 _____。
- 设椭圆的左右两个顶点为 $A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$, 与 y 轴平行的直线交椭圆于 P_1, P_2 时, A_1P_1 与 A_2P_2 的交点的轨迹方程是 _____。

179. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的性质:

- 从不在双曲线上的一点做双曲线的两条切线, 如果两条切线垂直, 那么切线交点的轨迹也是一个圆 (蒙日圆, 外准圆), 圆的方程为 _____。
- 从双曲线的中心 O 引出两条相互垂直的向径, 与双曲线分别交于 P, Q 两点, 从 O 点向 P, Q 作垂线, 垂足为 H , 那么 H 点的轨迹也是一个圆 (内准圆), 内准圆的方程是 _____。双曲线内准圆存在的充要条件是虚轴大于实轴, 即离心率大于 $\sqrt{2}$ 。
- * 双曲线上任意一点 $P(x_0, y_0)$, 过 P 点作两条相互垂直的直线, 这两条直线与双曲线的除 P 点之外的交点分别是 Q, R , 那么线段 QR 过定点。

$$\left(\frac{(a^2 + b^2)x_0}{a^2 - b^2}, -\frac{(a^2 + b^2)y_0}{a^2 - b^2} \right)$$

必须满足 $a \neq b$, 定点才存在。

- * 过平面上任意一点 $M(x_0, y_0)$ 作双曲线的两条垂直弦 PQ, RS , 弦 PQ, RS 的中点分别为 K, L , 那么线段 KL 过定点。

$$\left(\frac{a^2x_0}{a^2 - b^2}, -\frac{b^2y_0}{a^2 - b^2} \right)$$

必须满足 $a \neq b$, 定点才存在。

- 双曲线上任意一点 $P(x_0, y_0)$, 过 P 点作两条斜率互为相反数的直线, 这两条直线与双曲线的除 P 点之外的交点分别是 Q, R , 那么直线 QR 的斜率是定值, 且与过 P 的切线的斜率互为 _____。
- P 为双曲线上一点, F_1, F_2 是双曲线的左右焦点, $\angle F_1PF_2 = \theta$, 则 $S_{\triangle F_1PF_2} = \text{_____}$ 。
- 设 $k > 0$, 则等轴双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 的实半轴和虚半轴的长度均为 _____, 焦点坐标是 _____。

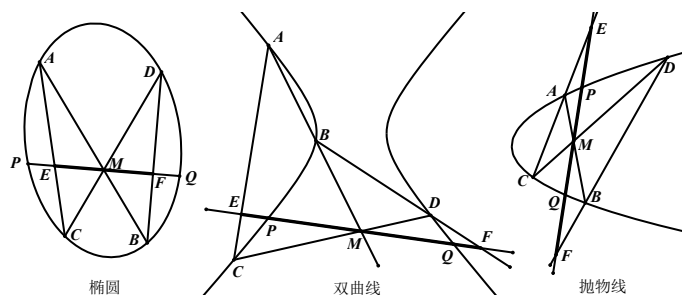
180. 抛物线 $y^2 = 2px$ 的性质:

- 抛物线的焦点为 F , 顶点为 O , 过焦点的直线与抛物线交于 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 两点, 则
 $\frac{1}{|FP|} + \frac{1}{|FQ|} = \frac{1 - \cos \theta}{p} + \frac{1 - \cos \theta}{p} = \underline{\hspace{2cm}};$
 $|FP| + |FQ| = \frac{p}{1 - \cos \theta} + \frac{p}{1 + \cos \theta} = \underline{\hspace{2cm}};$
 $y_1 y_2 = \underline{\hspace{2cm}}, x_1 x_2 = \frac{y_1^2}{2p} \cdot \frac{y_2^2}{2p} = \underline{\hspace{2cm}};$
 $S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{2} \cdot \left(\frac{2p}{\sin^2 \theta} \cdot \sin \theta \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 抛物线的对称轴上有一个固定点 $M(x_0, 0)$, 过 M 的直线与抛物线交于 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 两点, 则
 $y_1 y_2 = \underline{\hspace{2cm}}, x_1 x_2 = \frac{y_1^2}{2p} \cdot \frac{y_2^2}{2p} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 抛物线的顶点为 O, A, B 两点在抛物线上, 若 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -p^2$, 则直线 AB 过定点 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 从准线上的一点 $P\left(-\frac{p}{2}, y_0\right)$ 向抛物线作两条切线, 设切点分别为 Q, R , 则这两条切线 PQ, PR 相互 $\underline{\hspace{2cm}}$. 设抛物线焦点为 F , 那么 QR 恒过 $\underline{\hspace{2cm}}$, 且 $PF \perp \underline{\hspace{2cm}}.$
- 抛物线上任意一点 $P(x_0, y_0)$, 过 P 点作两条相互垂直的直线, 这两条直线与抛物线的除 P 点之外的交点分别是 Q, R , 那么线段 QR 过定点 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- 抛物线上任意一点 $P(x_0, y_0)$, 过 P 点作两条斜率互为相反数的直线, 这两条直线与抛物线的除 P 点之外的交点分别是 Q, R , 那么直线 QR 的斜率是定值, 且与过 P 的切线的斜率互为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

181. * 彭赛列 (Poncelet) 闭合定理: 给定两条圆锥曲线 Γ_1 和 Γ_2 , 若存在一个 n ($n \geq 3$) 边形满足: 内接于 Γ_1 且外切于 Γ_2 , 则必然存在无数个这样的 n 边形满足该性质 (同时内接和外切)。

182. * 三角形的内心和外心的距离为 $\sqrt{R(R-2r)}$, 其中 R 为外接圆半径, r 为内切圆半径. 假设一个半径为 r 的小圆位于一个半径为 R 大圆的内部 (两个圆没有交点), 若 $2r < R$ 且两个圆的圆心距恰好等于 $\sqrt{R(R-2r)}$, 那么存在无穷多个三角形, 分别以这两个圆为内切圆和外接圆。

183. * 蝴蝶定理: 在圆锥曲线中, 过弦 PQ 的中点 M 任作两条弦 AB, CD , 直线 AC, BD 交 PQ 于点 E, F , 则 $ME = EF$.



12 零散考点

184. $\pi \approx 3.141592653$ 的分数近似值:

$$\frac{22}{7} \approx 3.142857, \frac{355}{113} \approx 3.14159292.$$

185. 三次方程韦达定理: ($a \neq 0$),

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$x_1 x_2 x_3 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

186. 因式分解:

$$a^3 \pm b^3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$a^4 - b^4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$= (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a - b)(\underline{\hspace{2cm}})$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \underline{\hspace{2cm}}$$

187. 锥体 (圆锥、棱锥) 体积公式: $V = \underline{\hspace{2cm}}$,
 S 为底面积, h 为锥体高度。

188. 圆台或棱台的体积: $V = \underline{\hspace{2cm}}$,
 S, S' 为两个底面积, h 为台体高度 (两个底面间的距离)。

189. 球的表面积 $S = \underline{\hspace{2cm}}$, 球的体积 $V = \underline{\hspace{2cm}}.$