带 * 表示难度较大或者不方便设置待填空白的知识点。

数学软件：

网页版：GeoGebra(https://www.geogebra.org/)

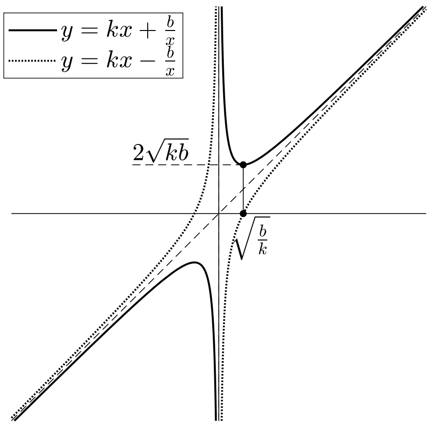
Desmos(https://www.desmos.com).

App：MathStudio.

1 函数

1. 求 $y=\dfrac{Ax+B}{Cx+D}$ $(AD-BC\neq 0)$ 的值域：
$$y=\frac{A}{C}\cdot\frac{x+\frac{D}{C}-\frac{D}{C}+\frac{B}{A}}{x+\frac{D}{C}}=\frac{A}{C}\cdot\left(1+\frac{-\frac{D}{C}+\frac{B}{A}}{x+\frac{D}{C}}\right).$$

2. 设 $k>0$，$b>0$，则 $y=kx+\dfrac{b}{x}$ 与 $y=kx-\dfrac{b}{x}$ 的图像如下，这两种函数都是双曲线，



当 $x>0$ 时，$y=kx+\dfrac{b}{x}$ 在 $x=\sqrt{\dfrac{b}{k}}$ 处取得极小值 $2\sqrt{kb}$；$y=kx-\dfrac{b}{x}$ 的零点是 $x=\sqrt{\dfrac{b}{k}}$.

3. 求 $y=\dfrac{x^2+Ax+B}{x+C}$ ①或 $y=\dfrac{x+C}{x^2+Ax+B}$ ②的值域(若分子或分母的最高次项系数不为 1，则先将系数提取出来)，方法一：换元 $t=x+C$；
方法二：判别式，以①式为例写出主要过程：
$$y(x+C)=x^2+Ax+B$$
$$x^2+(A-y)x+B-yC=0$$
$$\Delta=(A-y)^2-4(B-yC)\geqslant 0$$
要绘制①或②的图像,可以先绘制 $y=(x^2+Ax+B)(x+C)$ 的图像,因为这个三次函数的正负号与①或②式的正负号是一致的。

4. 求 $y=\dfrac{\sqrt{Ax^2+B}}{Cx^2+D}$ 的值域，先提取系数，
$y=\dfrac{\sqrt{A}}{C}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+\frac{B}{A}}}{x^2+\frac{D}{C}}$，换元，$t=\sqrt{x^2+\dfrac{B}{A}}$，那么
$x^2=t^2-\dfrac{B}{A}$,
$$y=\frac{\sqrt{A}}{C}\cdot\frac{t}{t^2-\frac{B}{A}+\frac{D}{C}}=\frac{\sqrt{A}}{C}\cdot\frac{1}{t+\left(\frac{D}{C}-\frac{B}{A}\right)\frac{1}{t}}$$

5. 给定 4 个实数 x_1,x_2,x_3,x_4，其中任意两个都不相等，设 $y_i=\dfrac{Ax_i+B}{Cx_i+D}$，$(AD-BC\neq 0,\ i=1,2,3,4)$，那么，
$$\frac{(y_1-y_3)(y_2-y_4)}{(y_1-y_4)(y_2-y_3)}=\frac{(x_1-x_3)(x_2-x_4)}{(x_1-x_4)(x_2-x_3)}$$

6. $y=|x-b_1|+|x-b_2|+\cdots+|x-b_n|$，假设 $b_1<b_2<\cdots<b_n$,如果 n 是偶数,那么最小值在区间 $[b_{\frac{n}{2}},b_{\frac{n}{2}+1}]$ 内取得；如果 n 是奇数，那么最小值在 $x=b_{\frac{n+1}{2}}$ 处取得。

7. 恒成立问题或有解问题 (∃ 表示存在，∀ 表示任意。$f(x)_{\max},f(x)_{\min}$ 分别表示 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上的最大值、最小值。)
$$\exists\, x_0\in(a,b),\ f(x_0)>m\ \Rightarrow\ f(x)_{\max}>m$$
$$\exists\, x_0\in(a,b),\ f(x_0)<m\ \Rightarrow\ f(x)_{\min}<m$$
$$\forall\, x\in(a,b),\ f(x)<m\ \Rightarrow\ f(x)_{\max}<m$$
$$\forall\, x\in(a,b),\ f(x)>m\ \Rightarrow\ f(x)_{\min}>m$$

8. 对数运算法则：
$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$.
$\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$.
$\log_a M^n=n\log_a M$，　$\log_{a^n}M=\dfrac{1}{n}\log_a M$.
换底公式：$\log_a M=\dfrac{\log_b M}{\log_b a}$.

9. 常见函数方程：

$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$	kx
$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$	$kx+b$
$f(x_1x_2)=f(x_1)f(x_2)$	x^α
$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$	a^x
$f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$	$\log_a x$
$f(x_1x_2)=x_2f(x_1)+x_1f(x_2)$	$x\log_a x$
$f(x_1+x_2)+f(x_1-x_2)=2\lambda f(x_1)f(x_2)$	$\frac{1}{\lambda}\cos x$
$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)+2\lambda x_1x_2$	$\lambda x^2+\mu x$

10. * $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 或 $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$，则
$$f(x_1)+f(x_2)=f\left(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right)$$

11. $\arctan x_1+\arctan x_2=\arctan\dfrac{x_1+x_2}{1-x_1x_2}$.

12. 函数凹凸性，填“<”或“>”，请结合图像记忆。

$x_1,x_2\in(0,\pi)$，$x_1\neq x_2$，
$$\frac{1}{2}(\sin x_1+\sin x_2)\underline{\ <\ }\sin\frac{x_1+x_2}{2}$$
$x_1,x_2\in(0,\frac{\pi}{2})$，$x_1\neq x_2$，
$$\frac{1}{2}(\tan x_1+\tan x_2)\underline{\ >\ }\tan\frac{x_1+x_2}{2}$$
$x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$x_1\neq x_2$，
$$\frac{\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_2}}{2}\underline{\ >\ }\mathrm{e}^{\frac{x_1+x_2}{2}}$$
$x_1,x_2\in(0,+\infty)$，$x_1\neq x_2$，
$$\frac{\ln x_1+\ln x_2}{2}\underline{\ <\ }\ln\frac{x_1+x_2}{2}$$
$x_1,x_2\in(0,+\infty)$，$x_1\neq x_2$，$\alpha\in\mathbf{R}$，$\alpha>1$，
$$\frac{x_1^\alpha+x_2^\alpha}{2}\underline{\ >\ }\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^\alpha$$

13. 若 $f(x)$ 满足 $f(x)=\pm\frac{1}{f(x+a)}$，那么 $f(x)$ 的一个周期是 $\underline{2a}$.

14. 若 $f(x)$ 满足 $f(x+a)=f(b-x)$，则 $f(x)$ 的一条对称轴是 $\underline{x=\frac{a+b}{2}}$.

15. 如果 $f(x)$ 同时具有对称轴 $x=a$ 和对称中心 (b,c)，且 $a\neq b$，那么 $f(x)$ 具有周期 $T=\underline{4|a-b|}$.

16. 三变量均值不等式：设 $a,b,c\geqslant 0$，则 $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\underline{\sqrt[3]{abc}}$.

17. 设 $a,b>0,x>0$，利用上面的三变量均值不等式，有：
$$ax^2+\frac{b}{x}=ax^2+\frac{b}{2x}+\frac{b}{2x}\geqslant\underline{3\sqrt[3]{\frac{ab^2}{4}}};$$
$$ax+\frac{b}{x^2}=\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}ax+\frac{b}{x^2}\geqslant\underline{3\sqrt[3]{\frac{a^2b}{4}}}.$$

18. 零点存在定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，且 $f(a)\cdot f(b)\underline{<0}$，则一定存在 $x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)=0$. 此定理为二分法找函数零点的理论基础。

19. * 记 $f_0(x)=x$，$f_1(x)=f(x)$，$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$. 称 $f_n(x)$ 为函数 $f(x)$ 的 n 次迭代 (用数学归纳法证明) 。

$f(x)$	$f_n(x)$
$x+2\sqrt{x}+1$	$(\sqrt{x}+n)^2$
$\frac{x}{a+bx}$	$\frac{x}{a^n+\frac{1-a^n}{1-a}bx}$
$\sqrt[k]{ax^k+b}$	$\sqrt[k]{a^nx^k+\frac{1-a^n}{1-a}b}$
x^2+2x	$(x+1)^{2^n}-1$
$\frac{x^2}{2x-1}$	$\frac{x^{2^n}}{x^{2^n}-(x-1)^{2^n}}$

20. $f_1(x)=f(x)=\frac{1+x}{1-x}$，$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$，$n\in\mathbf{N}^+$，$k\in\mathbf{N}$，则 $f_{4k+1}(x)=\underline{\frac{1+x}{1-x}}$，$f_{4k+2}(x)=\underline{-\frac{1}{x}}$，$f_{4k+3}(x)=\underline{\frac{x-1}{x+1}}$，$f_{4k+4}(x)=\underline{x}$.

2 排列、组合与二项式定理

21. 排列数：$P_n^k=\underline{\frac{n!}{(n-k)!}}$，或者写成 A_n^k.

22. 组合数：$C_n^k=C_n^{n-k}=\underline{\frac{n!}{k!(n-k)!}}$.
递推关系：$C_n^k+C_n^{k-1}=\underline{C_{n+1}^k}$.

23. 二项式定理：$(a+b)^n=\underline{\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^kb^{n-k}}$.

24. $(a+b+c)^2=\underline{a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)}$.
$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$ 的结果类似。

25. 杨辉三角：

$$
\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
\underline{1\quad 3\quad 3\quad 1}\\
\underline{1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1}\\
\underline{1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1}\\
\underline{1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1}
\end{array}
$$

第 $n+1$ 行的系数之和为 $\sum_{k=0}^{n}C_n^k=\underline{2^n}$.

26. * 偶数件不同物品中选出奇数件物品的方法数 C_{2n}^1,C_{2n}^3,C_{2n}^5,$\cdots$ 都是 $\underline{偶}$ 数。(填“奇”或“偶”)

27. * 组合恒等式：
$$\sum_{k=r}^{n}C_k^r=\underline{C_{n+1}^{r+1}},\quad \sum_{k=0}^{r}C_m^kC_n^{r-k}=\underline{C_{n+m}^r}$$
$$\sum_{k=1}^{n}kC_n^k=\underline{n\cdot 2^{n-1}},\quad \sum_{k=1}^{n}k^2C_n^k=\underline{n(n+1)\cdot 2^{n-2}}$$

28. * 设 n 个元素错排的方案数为 D_n，$D_1=0$，$D_2=1$，则
$$D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$$
$$D_n-nD_{n-1}=-[D_{n-1}-(n-1)D_{n-2}]=(-1)^n$$
$$\frac{D_n}{n!}-\frac{D_{n-1}}{(n-1)!}=\frac{(-1)^n}{n!}$$
$$D_n=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right]$$

29. $\left(ax^{\alpha}+bx^{\beta}\right)^n$ 展开式的通项为
$$T_{r+1}=C_n^r a^{n-r}b^r x^{(n-r)\alpha+r\beta},$$
设 $C_n^m a^{n-m}b^m$ 是最大的系数，则
$$\begin{cases} C_n^m a^{n-m}b^m \geqslant \underline{C_n^{m-1}a^{n-m+1}b^{m-1}} \\ C_n^m a^{n-m}b^m \geqslant \underline{C_n^{m+1}a^{n-m-1}b^{m+1}} \end{cases}$$

3 概率论与数理统计

30. 给定正整数集合 $S=\{k_1,k_2,\cdots,k_n\}$，定义多项式 $f(x)=(1+x^{k_1})(1+x^{k_2})\cdots(1+x^{k_n})$，则 $f(x)$ 的展开式中，$\underline{x^m\text{ 的系数}}$ 恰好等于从集合 S 中选出元素总和为 m $(m\in\mathbf{N})$ 的子集的方法数。

31. 数学期望 (或均值) 的定义：$E(X)=\underline{\sum\limits_{i=1}^{n}x_ip_i}$，
性质：$E(aX+b)=\underline{aE(X)+b}$.
方差：$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}=\underline{E(X^2)-[E(X)]^2}$，
性质：$D(aX+b)=\underline{a^2D(X)}$.

32. 伯努利大数定律：独立地重复一个伯努利试验 n 次，当 n 很大时，频率逼近$\underline{\text{概率}}$。

33. 概率加法公式：
$$P(A_1\cup A_2)=\underline{P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)}$$

34. 条件概率公式：$P(B\mid A)=\underline{\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}}$.
概率乘法公式：$P(A\cap B)=\underline{P(A)P(B|A)}$.
若 A,B 相互独立，则 $P(A\cap B)=\underline{P(A)P(B)}$.

35. 全概率公式：$P(A)=\underline{\sum\limits_{k=1}^{n}P(A\mid\Omega_k)P(\Omega_k)}$.

36. * 贝叶斯公式：
$$P(\Omega_i\mid A)=\underline{\frac{P(A\mid\Omega_i)P(\Omega_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P(A\mid\Omega_k)P(\Omega_k)}}$$

37. 二项分布 $b(n,p)$：每次实验时，事件 A 发生的概率为 p，那么在 n 次实验中事件 A 发生 k 次的概率为 $P\{X=k\}=\underline{C_n^kp^k(1-p)^{n-k}}$. 数学期望为$\underline{np}$，方差为$\underline{np(1-p)}$.

38. * 几何分布：在 n 次伯努利试验中，试验 k 次才得到第一次成功的概率，$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p$，$k\in\mathbf{N}^+$，$0<p<1$. 数学期望为 $\underline{\dfrac{1}{p}}$，方差为 $\underline{\dfrac{1-p}{p^2}}$.

39. 超几何分布：共有 N 件产品，其中有 $D(D\leqslant N)$ 件次品，从中任取 $n(n\leqslant N)$ 件，其中恰有 $k(k\leqslant D)$ 件次品的概率：$P\{X=k\}=\underline{\dfrac{C_D^kC_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}}$. 数学期望为 $\underline{\dfrac{nD}{N}}$，方差为 $\dfrac{nD}{N}\Big(1-\dfrac{D}{N}\Big)\Big(\dfrac{N-n}{N-1}\Big)$.

40. 正态分布：$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$\mu\in\mathbf{R}$，$\sigma>0$. 数学期望为 $\underline{\mu}$，方差为 $\underline{\sigma^2}$. 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim\underline{N(0,1)}$ (标准正态分布).

41. 最小二乘法，回归直线 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$.
$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$$
$$=\frac{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\Big)\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\Big)}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\Big)^2}$$
$$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$$
回归直线通过散点图的几何中心 $(\overline{x},\overline{y})$.

42. 样本相关系数
$$r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$$
$$=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2}}$$
$$=\frac{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\Big)\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\Big)}{\sqrt{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\Big)^2}\cdot\sqrt{n\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\Big)^2}}$$

4 三角函数

43. 正余弦和角、差角公式：
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\underline{\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta}$$
$$\sin(\alpha\pm\beta)=\underline{\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta}$$

44. 二倍角公式：
$$\sin 2x=\underline{2\sin x\cos x}$$
$$\cos 2x=\underline{2\cos^2x-1=1-2\sin^2x=\cos^2x-\sin^2x}$$

45. * 三倍角公式：
$$\sin 3x=\underline{-4\sin^3x+3\sin x}$$
$$\cos 3x=\underline{4\cos^3x-3\cos x}$$

46. 余弦的递推关系：

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta - \underline{\cos(n-1)\theta}$$

47. 和差化积:

$$\sin x + \sin y = \underline{2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

$$\cos x + \cos y = \underline{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

48. 积化和差:

$$\sin x\sin y = \underline{\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]}$$

$$\cos x\cos y = \underline{\frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)]}$$

$$\sin x\cos y = \underline{\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]}$$

49. 辅助角公式:

$$a\sin x + b\cos x = \underline{\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)} \qquad \left(\tan\varphi = \frac{b}{a}\right)$$

变体一:

$$a\sin x + b\cos(x+x_0) = \underline{a\sin x + b\cos x\cos x_0 - b\sin x\sin x_0}$$

变体二:

$$a\cos^2 x + b\sin^2 x + c\sin x\cos x = \underline{a\frac{\cos 2x+1}{2} + b\frac{-\cos 2x+1}{2} + \frac{c}{2}\sin 2x}$$

变体三:

$$a\sin^2 x + b\cos x = \underline{a(1-\cos^2 x) + b\cos x}$$

50. *

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \underline{\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx = \underline{\frac{-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}}$$

51. * $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \underline{\dfrac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}}$.

52. * ΔABC 中的恒等式 $(A+B+C=\pi)$:

$$\sin A + \sin B + \sin C = \underline{4\cos\left(\tfrac{A}{2}\right)\cos\left(\tfrac{B}{2}\right)\cos\left(\tfrac{C}{2}\right)}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = \underline{1 + 4\sin\left(\tfrac{A}{2}\right)\sin\left(\tfrac{B}{2}\right)\sin\left(\tfrac{C}{2}\right)}$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \underline{\tan A\tan B\tan C}$$

$$\tan\left(\tfrac{A}{2}\right)\tan\left(\tfrac{B}{2}\right) + \tan\left(\tfrac{B}{2}\right)\tan\left(\tfrac{C}{2}\right) + \tan\left(\tfrac{A}{2}\right)\tan\left(\tfrac{C}{2}\right) = \underline{1}$$

53. 对于 ΔABC，考虑 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 的特殊情形，以及两个角趋近于 0，第三个角趋近于 π 时的极限 (或者一个角趋近于 0，剩余两个角趋近于 $\frac{\pi}{2}$)，有

$$\underline{0} < \sin A + \sin B + \sin C \leqslant \underline{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

$$\underline{0} < \sin A\sin B\sin C \leqslant \underline{\frac{3\sqrt{3}}{8}}$$

$$\underline{1} < \cos A + \cos B + \cos C \leqslant \underline{\frac{3}{2}}$$

$$\underline{-1} < \cos A\cos B\cos C \leqslant \underline{\frac{1}{8}}$$

54. 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin x > \frac{2}{\pi}x$，$\cos x > 1-\frac{2}{\pi}x$.
对于锐角三角形 ABC，有

$$\sin A + \sin B + \sin C > \underline{\frac{2}{\pi}(A+B+C) = 2}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C > \underline{3 - \frac{2}{\pi}(A+B+C) = 1}$$

$$\tan A + \tan B + \tan C \geqslant \underline{3\tan\frac{A+B+C}{3} = 3\sqrt{3}}$$

55. * 参数方程 $\begin{cases} x = A\cos(\omega t + a) \\ y = B\cos(\omega t + b) \end{cases}$, $AB \neq 0$，消去参数 t 可得:

$$\underline{\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos(a-b) = \sin^2(a-b)}$$

56. * 双曲正弦函数 $\sinh x = \underline{\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}}$,
反双曲正弦函数 $\operatorname{arcsinh} x = \underline{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}$；
双曲余弦函数 $\cosh x = \underline{\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}}$,
反双曲余弦函数 $\operatorname{arccosh} x = \underline{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}$.
求导：$(\sinh x)' = \underline{\cosh x}$；$(\cosh x)' = \underline{\sinh x}$.
$(\operatorname{arcsinh}x)' = \underline{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$；$(\operatorname{arccosh}x)' = \underline{\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$.
平方差关系：$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = \underline{1}$.

5 复数

57. 虚数单位 i 的整数次幂的周期性:
$i^{4n} = \underline{1}$，$i^{4n+1} = \underline{i}$，$i^{4n+2} = \underline{-1}$，$i^{4n+3} = \underline{-i}$.

58. 共轭复数的性质:
$\overline{\overline{z}} = \underline{z}$，$\overline{z_1 \pm z_2} = \underline{\overline{z_1} \pm \overline{z_2}}$,
$\overline{z_1 \cdot z_2} = \underline{\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}}$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \underline{\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}}$.

59. 复数的模的性质:
$|z| = \underline{|\overline{z}|}$，$z\overline{z} = \underline{|z|^2 = |\overline{z}|^2}$,
$|z_1 z_2| = \underline{|z_1||z_2|}$，$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \underline{\dfrac{|z_1|}{|z_2|}}$,
$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = \underline{2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)}$.

60. 三角不等式：$\underline{||z_1|-|z_2||} \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant \underline{|z_1|+|z_2|}$.

61. 去掉 $\sqrt{A+B\sqrt{C}}$ $(A>0, C>0)$ 的外层根号的方法：设 $\sqrt{A+B\sqrt{C}} = x+y\sqrt{C}$，两边平方，然后比较左右两边 $\sqrt{C}$ 的系数和另一项，可得到两个方程：$\underline{A=x^2+y^2C,\ B=2xy}$. 根据基本不等式，$A \geqslant \underline{|B|\sqrt{C}}$ 是可以去掉外层根号的必要不充分条件。

62. 去掉 $\sqrt{a+b\mathrm{i}}$ 的根号的方法：设 $\sqrt{a+b\mathrm{i}}=x+y\mathrm{i}$，两边平方，然后比较左右两边的实部和虚部，可得到两个方程：$\underline{a=x^2-y^2,\ b=2xy}$.

63. 欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \underline{\cos x + \mathrm{i}\sin x}$.

64. * 自然对数的底数 $\mathrm{e}=2.718281828\cdots$ 的定义：
$$\mathrm{e} = \underline{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

65. $\cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta) = (\underline{\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta})^n$，
将等号右边用二项式定理展开后，比较左右两边的实部和虚部，即可得到任意的 n 倍角公式。

66. 若 $x^n=1$，$n\in\mathbf{N}^+$，则称 x 为 n 次单位根，复数范围内，x 共有 n 个不同的值，分别是
$\underline{\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}/n},\ k=0,1,2,\cdots,n-1}$.

67. $(x+\mathrm{i}y)(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$
$= \underline{(x\cos\theta-y\sin\theta)+\mathrm{i}(x\sin\theta+y\cos\theta)}$ (坐标旋转公式).

6 向量

68. 零向量具有任意方向。

69. $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，两者的数量积（“点乘”）定义为
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \underline{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$$
$\vec{a},\vec{b}$ 的夹角的余弦为
$$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \underline{\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}}$$

70. 二阶行列式：$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \underline{a_1b_2-a_2b_1}$.

71. * $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，这两者的向量积（“叉乘”）定义为
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$
$$= \underline{(a_2b_3-a_3b_2, a_3b_1-a_1b_3, a_1b_2-a_2b_1)}$$
$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 分别是 x,y,z 轴正方向的单位向量。向量积的结果仍然是向量。向量积不满足交换律，即 $\vec{a}\times\vec{b} \neq \vec{b}\times\vec{a}$. $\quad |\vec{a}\times\vec{b}| = \underline{|\vec{a}||\vec{b}|\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}$.

72. 当 $a_3=b_3=0$ 时，$|\vec{a}\times\vec{b}| = \underline{|a_1b_2-a_2b_1|}$，代表以 $\vec{a},\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积，除以 2 就得到以 $\vec{a},\vec{b}$ 为两条边的三角形的面积。
$$\begin{aligned}&(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\\ &=(a_1b_1+a_2b_2)^2+\underline{(a_1b_2-a_2b_1)^2}\end{aligned}$$
$\vec{a}\perp\vec{b}$ 的充要条件是 $\underline{a_1b_1+a_2b_2=0}$.
$\vec{a}/\!/\vec{b}$ 的充要条件是 $\underline{a_1b_2-a_2b_1=0}$.

73. 向量基本定理：如果 $\vec{e_1}$ 与 $\vec{e_2}$ 是平面上两个不平行的向量，那么该平面上的任意向量 $\vec{a}$，都可唯一地表示为 $\vec{e_1}$ 与 $\vec{e_2}$ 的线性组合，即存在唯一的一对实数 λ 与 μ，使得 $\underline{\vec{a}=\lambda\vec{e_1}+\mu\vec{e_2}}$.

74. 平面上有不同的四点 O,P,Q,R，设 $\overrightarrow{OR}=\lambda\overrightarrow{OP}+\mu\overrightarrow{OQ}$，则 P,Q,R 三点共线的充要条件是 $\underline{\lambda+\mu=1}$.

7 解三角形

75. 外心：三条 <u>中垂</u> 线的交点；
内心：三条 <u>角平分</u> 线的交点；
重心：三条 <u>中</u> 线的交点；
垂心：三条 <u>垂</u> 线的交点。

76. 对于 ΔABC，重心 G 分割中线的比例为 $\underline{1:2}$.
设 O 为空间中的任意一点，则
$$\overrightarrow{OG} = \underline{\frac{1}{3}}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

77. 正弦定理：
$$\underline{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R}$$
R 为三角形外接圆半径。

78. 余弦定理：
$$\begin{aligned}c^2 &= a^2+b^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}\\ &= \underline{a^2+b^2-2ab\cos C}\end{aligned}$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \underline{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}$$
$$\cos C = \underline{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$$

79. 对任意三角形，“大边”是”大角”的充要条件。

80. * 对于 ΔABC，

$$a+b+c \geqslant 2(a\cos A+b\cos B+c\cos C)$$

将三个余弦定理的式子相加可得：

$$a^2+b^2+c^2=2bc\cos A+2ac\cos B+2ab\cos C$$

将上式中的 a,b,c 换成任意实数 x,y,z，同时保持 $A+B+C=\pi$，那么有嵌入不等式

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant \underline{2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C}$$

81. $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(\underline{a^2+b^2})^2$，具有勾股定理的形式。让 $a,b(a\neq b)$ 取正整数，就能得到勾股数，比如 $(3,4,5)$，$(5,12,13)$，$(7,24,25)$，$(8,15,17)$，$(9,40,41)$，$(11,60,61)$，$(20,21,29)$.

82. 把上一条中的 a^2 换成 $\overrightarrow{a}$，b^2 换成 $\overrightarrow{b}$，实数乘法换成向量点乘，就得到向量的极化恒等式：

$$\underline{4\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})^2-(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})^2}$$

83. 对于 ΔABC，R 为外接圆半径，r 为内切圆半径，$p=\dfrac{a+b+c}{2}$ 为三角形周长的一半，三角形的面积公式有：
两边夹角：$\underline{\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B}$.
只含 R,A,B,C：$\underline{2R^2\sin A\sin B\sin C}$.
只含 R,a,b,c：$\underline{\dfrac{abc}{4R}}$.
只含 p,r：$\underline{pr}$.
只含 p,a,b,c：$\underline{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$.

84. r 为内切圆半径，则 $r=\underline{\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}}$.

85. * 对于 ΔABC，外森比克不等式：

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant \underline{4\sqrt{3}}\,S_{\Delta ABC}$$

86. * ΔABC 的费马点：分别以 AB,BC,AC 为边，在 ΔABC 外部 (或内部) 作三个等边三角形，这三个等边三角形的外接圆会交于同一点，即费马点。当三角形的最大内角小于 120° 时，费马点位于三角形内部，设费马点与三个顶点连线长度分别为 x,y,z，则

$$xy+yz+zx=\frac{4}{\sqrt{3}}S_{\Delta ABC}\leqslant\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

87. * 三角形的内心和外心的距离为 $\sqrt{R(R-2r)}$.
任意三角形的外接圆半径大于等于 2 倍内切圆半径 $(R\geqslant 2r)$.

88. * ΔABC 内部有任意一点 O，记 ΔAOB，ΔBOC，ΔCOA 的面积分别为 S_C,S_A,S_B，那么有：

$$S_A\cdot\underline{\overrightarrow{OA}}+S_B\cdot\underline{\overrightarrow{OB}}+S_C\cdot\underline{\overrightarrow{OC}}=\overrightarrow{0}$$

◇ 当 O 是 ΔABC 的重心时，

$$S_A:S_B:S_C=\underline{1:1:1}$$

◇ 当 O 是 ΔABC 的垂心时，

$$S_A:S_B:S_C=\underline{\tan A:\tan B:\tan C}$$

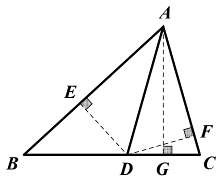
◇ 当 O 是 ΔABC 的内心时，

$$S_A:S_B:S_C=\underline{a:b:c}$$

◇ 当 O 是 ΔABC 的外心时，

$$S_A:S_B:S_C=\underline{\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C}$$

89. D 是 ΔABC 的 BC 边上的一点，则 $\dfrac{|AB|}{|AC|}=\dfrac{|BD|}{|CD|}$ 的充分必要条件是：AD 是 $\underline{\angle BAC \text{ 的角平分线}}$。



8 导数与积分

90. 基本初等函数的导数公式：
$(x^\alpha)'=\underline{\alpha x^{\alpha-1}}$，$(\ln x)'=\underline{\frac{1}{x}}$，
$(a^x)'=\underline{(\ln a)a^x}$，$(\mathrm{e}^x)'=\underline{\mathrm{e}^x}$，
$(\sin x)'=\underline{\cos x}$，$(\cos x)'=\underline{-\sin x}$，
$(\tan x)'=\underline{\dfrac{1}{\cos^2 x}}$.

91. 导数运算法则：

$$[c_1f(x)+c_2g(x)]'=\underline{c_1f'(x)+c_2g'(x)}$$

$$[f(x)\cdot g(x)]'=\underline{f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)}$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\underline{\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}}$$

92.

$$[f(x)\cdot x^n]'=\underline{x^nf'(x)+nx^{n-1}f(x)}$$

$$\left[\frac{f(x)}{x^n}\right]'=\underline{\frac{xf'(x)-nf(x)}{x^{n+1}}}$$

93. 复合函数求导法则：$[g(f(x))]'=g'(u)f'(x)$，再将 u 换回 $f(x)$. 比如 $[\ln f(x)]'=\underline{\dfrac{f'(x)}{f(x)}}$.

94. 设 $f(x)=(x-x_0)^ng(x)$，两边取自然对数，有

$$\ln f(x)=n\ln(x-x_0)+\ln g(x)$$

两边求导，有

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\underline{\frac{n}{x-x_0}+\frac{g'(x)}{g(x)}}$$

95. 可导奇函数的导函数是<u>偶</u>函数；
可导偶函数的导函数是<u>奇</u>函数。

96. 牛顿-莱布尼茨公式 (微积分基本公式)：
$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = \underline{f(b)-f(a)}$$

97. * 罗必塔 (L'Hospital) 法则：当 $x \to x_0$ 时，如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均趋于 0 或 $\pm\infty$，那么
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
特别地，$\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = \underline{0}$.

98. 把 $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$ 中的 x 换成 $x-1$，有 $\mathrm{e}^{x-1} \geqslant x$，两边同乘 e，有 $\underline{\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}x}$.

99. 把 $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$ 中的 x 换成 $-x$，有 $\mathrm{e}^{-x} \geqslant -x+1$，当 $x<1$ 时，两边同时取倒数，有 $\mathrm{e}^x \leqslant \underline{\dfrac{1}{1-x}}$.

100. x 换成 $\alpha x(\alpha>0)$，有 $\mathrm{e}^{\alpha x} \geqslant \alpha x+1$，当 $1+\alpha x>0$ 时，两边同时开 α 次方，有 $\mathrm{e}^x \geqslant \underline{(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}}$.

101. * e 是自然对数的底数，$n\in\mathbf{N}^+$，则
$$2 \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

102. 对于三次函数 $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，对称中心的坐标为 $\underline{\left(-\dfrac{b}{3a}, f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)}$，对称中心也是三次函数的拐点 (二阶导数为 0，且二阶导数在此点左右异号)。

103. * 对任意 n 次首一多项式 $P(x)$(最高次项系数为 1 的多项式)，设 M 代表 $|P(x)|$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值，那么无论其它项的系数怎么变化 (保持首一)，M 总是大于等于 $\underline{\dfrac{1}{2^{n-1}}}$.

104. * 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒 (Taylor) 级数
$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$
$$+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$
当 $x_0=0$ 时，
$$\mathrm{e}^x = \underline{1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}}+\cdots$$
$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$
$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$
$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\cdots$$
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$
$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(\underline{x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}}+\cdots\right)$$

105. 当 $|x|<0.2$ 时，$\sqrt{1+x}\approx 1+\dfrac{1}{2}x$ (x 可正可负). 而且 $|x|$ 越小，这个估算公式越精确。
$\sqrt{1.1}=1.048808\cdots\approx 1+\dfrac{1}{2}\times 0.1=1.05$,
$\sqrt{73}=8.544003\cdots=\sqrt{64+9}=\sqrt{64\left(1+\dfrac{9}{64}\right)}=\underline{8\sqrt{1+\dfrac{9}{64}}\approx 8\left(1+\dfrac{9}{2\times 64}\right)=8+\dfrac{9}{2\times 8}=8\dfrac{9}{16}}$.

106. 拉格朗日中值定理：如果函数 $f(x)$ 满足：(1) 在闭区间 $[x_1,x_2]$ 上连续；(2) 在开区间 (x_1,x_2) 内可导。
那么至少存在一点 $\xi \in (x_1,x_2)$，使得 $f'(\xi) = \underline{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}$. (至少能作出一条和割线斜率相等的切线)。

107. * 厄米特-哈达玛 (Hermite-Hadamard) 不等式：$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且可积，$\forall x_1,x_2\in[a,b]$，$x_1<x_2$，如果 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$(等价于 $f''(x)>0$)，那么有
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

108. * 小于等于 n 的全部正整数的 $1\sim 5$ 次方的求和结果：
$$1^1+2^1+3^1+\cdots+n^1=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$$
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}$$
$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$$
$$1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5=\frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+\frac{5n^4}{12}-\frac{n^2}{12}$$
$1\sim n$ 的 k 次方求和结果是关于 n 的 $k+1$ 次多项式，多项式的系数从高次项到低次项依次为
$$\frac{1}{k+1},\ \frac{1}{2},\ \frac{k}{12},\ 0,\ -\frac{k(k-1)(k-2)}{720},\cdots$$
以上这些求和公式可以写成如下通式，
$$1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$$
$$=\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}C_{k+1}^{j}B_j n^{k+1-j}+n^k \qquad (1)$$
$$=\frac{1}{k+1}n^{k+1}+\frac{1}{2}n^k+\frac{k}{12}n^{k-1}+\cdots \qquad (2)$$
B_j 为伯努利数，$B_0=1, B_1=-\dfrac{1}{2}$，$B_2=\dfrac{1}{6}, B_3=0, B_4=-\dfrac{1}{30}, B_5=0, B_6=\dfrac{1}{42}\cdots$ 伯努利数满足递推关系：$0=\sum\limits_{j=0}^{n-1}C_n^j B_j$ ($n\geqslant 2$). (1) 式实际上是欧拉-麦克劳林求和公式的一个特例。

109. 黎曼 zeta 函数：$\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\ (s>1)$，

$\zeta(2)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\underline{\frac{\pi^2}{6}}$.

110. 非整数次幂求和 (只有近似公式，没有精确公式)：

$$\sum_{l=1}^{n}l^{-1/2}\leqslant\underline{2n^{1/2}-1}$$

$$\sum_{l=1}^{n}l^{-1/3}\leqslant\underline{\frac{3}{2}n^{2/3}-\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{l=1}^{n}l^{1/3}\leqslant\underline{\frac{3}{4}n^{4/3}+\frac{1}{2}n^{1/3}-\frac{1}{4}}$$

$$\sum_{l=1}^{n}l^{1/2}\leqslant\underline{\frac{2}{3}n^{3/2}+\frac{1}{2}n^{1/2}-\frac{1}{6}}$$

系数同样满足第108条中 (2) 式的规律，只是其中的 k 不是正整数，同时不要出现**负幂项**。常数项的作用是提高近似公式的精度，可通过令 $n=1$ 来确定常数项。

9 不等式

111. 糖水不等式：若 $0<b<a, c>0$，则 $\frac{b}{a}<\underline{\frac{b+c}{a+c}}$.

$$\frac{1}{a^k-1}\leqslant\underline{\frac{1+1}{a^k-1+1}=\frac{2}{a^k}}$$

112. 设 a,b,c,d 均大于 0，且 $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$，那么 $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$.

113. 设 $a>1$，当 $k\geqslant 1$ 时，$a^k-1\geqslant a^k-a^{k-1}=(a-1)a^{k-1}$，所以

$$\frac{1}{a^k-1}\leqslant\underline{\frac{1}{(a-1)a^{k-1}}}$$

114. 伯努利不等式：当 $x>-1$ 时，

- 若 $\alpha>1$，则 $(1+x)^\alpha\underline{\geqslant}1+\alpha x$；
- 若 $0<\alpha<1$，则 $(1+x)^\alpha\underline{\leqslant}1+\alpha x$.

用数学归纳法或求导证明。

115. * 广义伯努利不等式：

若 $x_1,x_2,\cdots x_n>0, n\geqslant 2$，则

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)$$
$$>1+(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

若 $x_1,x_2,\cdots x_n\in(0,1), n\geqslant 2$，则

$$(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)$$
$$>1-(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

用数学归纳法证明。

116. $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

$$\underline{\frac{2}{\pi}x}<\sin x<\underline{x}<$$

$$x+\frac{x^3}{3}<\frac{3x}{3-x^2}<\tan x<\frac{x}{1-\frac{2}{\pi}x}$$

117. * $x\in(0,1)$，

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}<\frac{x}{\sqrt{1+\frac{2}{3}x^2}}<\sin x<\frac{x}{\sqrt{1+\frac{1}{3}x^2}}<x$$

$$<\frac{x}{\sqrt{1-\frac{1}{3}x^2}}<\tan x<\frac{x}{\sqrt{1-\frac{2}{3}x^2}}<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

118. $x\in\mathbf{R}$，$\cos x\geqslant\underline{1-\frac{1}{2}x^2}$ (泰勒级数取前两项).

$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\cos x<1-\frac{4x^2}{\pi^2}$.

119. $x\in(0,1)$，$\mathrm{e}^{2x}<\frac{1+x}{1-x}$.

两边取自然对数，有 $2x<\underline{\ln\frac{1+x}{1-x}}$.

令 $t=\frac{1+x}{1-x}\in(1,+\infty)$，则 $x=\underline{\frac{t-1}{t+1}}$，上面的不等式变为 $\underline{\frac{2(t-1)}{t+1}<\ln t}$.

120. $t\in(1,+\infty)$，$\ln t<\underline{\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}}$.

121. 对任意两个不等的正实数 x_1,x_2，有

$$\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}<\frac{x_1+x_2}{2}$$

$\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}$ 称为对数平均值。把上式中的 x_1 换成 e^{x_1}，x_2 换成 e^{x_2}，可得：

$$\underline{\mathrm{e}^{\frac{x_1+x_2}{2}}<\frac{\mathrm{e}^{x_2}-\mathrm{e}^{x_1}}{x_2-x_1}<\frac{\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_2}}{2}}$$

122. 两变量均值不等式：

$$\underline{\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}$$

123. * 将上式推广到 n 变量情形：

调和均值 $(H_n)\leqslant$ 几何均值 $(G_n)\leqslant$

算术均值 $(A_n)\leqslant$ 平方均值 (Q_n)

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant$$

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leqslant\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

其中，$a_1,a_2,\cdots a_n$ 均非负。

124. 给定 $\lambda a+\mu b=C$，求 ab 的最大值和 $\frac{k_1}{a}+\frac{k_2}{b}$ 的最小值。其中，λ,μ,C,k_1,k_2 为正的常数，a,b 为正的变量。

$$ab=\frac{1}{\lambda\mu}(\lambda a\cdot\mu b)\leqslant\underline{\frac{1}{\lambda\mu}\left(\frac{\lambda a+\mu b}{2}\right)^2=\frac{C^2}{4\lambda\mu}}$$

$$\begin{aligned}\frac{k_1}{a}+\frac{k_2}{b}&=\left(\frac{k_1}{a}+\frac{k_2}{b}\right)\cdot\frac{1}{C}(\lambda a+\mu b)\\&=\underline{\frac{1}{C}\left(k_1\lambda+k_2\mu+k_1\mu\frac{b}{a}+k_2\lambda\frac{a}{b}\right)}\end{aligned}$$

125. 若 $x\in\mathbf{R}$，则 $\sqrt{x^2+4}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}\geqslant\underline{\dfrac{5}{2}}$.

126. * 加权算术-几何均值不等式：正数 λ_k 满足 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$，且 $x_k\geqslant 0$，那么

$$x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}\leqslant\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n$$

127. 柯西不等式：
$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，那么

$$|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}||\cos\theta|\leqslant|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$$
$$|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|^2\leqslant|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2$$

把上式转化为坐标表示：

$$\underline{\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)}$$

128. $a,b,c\in\mathbf{R}$，因为 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0$，所以，$a^2+b^2+c^2\geqslant\underline{ab+bc+ca}$.

129. * 赫尔德 (Hölder) 不等式：$p>1,q>1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，$a_k\geqslant 0,b_k\geqslant 0,k=1,2\cdots n$，那么

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

等号成立的条件是：存在非 0 实数 λ，对任意 $k=1,2\cdots n$ 都有 $\lambda a_k=b_k$. 当 $p=q=2$ 时，就变成柯西不等式。

130. * 闵可夫斯基 (Minkowski) 不等式：$r>0,r\neq 1,a_k>0,b_k>0$，那么

$$\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^r\right]^{\frac{1}{r}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^r\right)^{\frac{1}{r}}\quad(r>1)$$
$$\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^r\right]^{\frac{1}{r}}\geqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^r\right)^{\frac{1}{r}}\quad(r<1)$$

以上两式等号成立的条件都是：存在非 0 实数 λ，对任意 $k=1,2\cdots n$ 都有 $\lambda a_k=b_k$.

131. 含根号的缩放：

$$\underline{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}>2\sqrt{k}>\underline{\sqrt{k+\frac{1}{2}}+\sqrt{k-\frac{1}{2}}}>$$
$$\underline{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}}>\underline{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$$

以上各项除 $2\sqrt{k}$ 外，取倒数后均可裂项。

132. 含平方的缩放：

$$\underline{k(k+1)}\geqslant k^2+1>k^2>\underline{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)}$$
$$>\underline{(k-1)(k+1)}\geqslant\underline{k(k-1)}$$

以上各项除 k^2+1 和 k^2 外，取倒数后均可裂项。

133. 正整数倒数求和缩放：

$$\underline{\ln(n+1)}<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<\underline{1+\ln n}$$

10 数列

134. 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，S_n 是其前 n 项和，

- 若 $m+n=s+t$，则 $a_m+a_n=\underline{a_s+a_t}$；
- $S_{m+n}=S_m+S_n+\underline{mnd}$；
- $\dfrac{S_{2n-1}}{a_n}=\underline{2n-1}$；
- $m\neq n$，$\dfrac{S_m-S_n}{m-n}=\dfrac{S_{m+n}}{m+n}=\underline{\dfrac{d}{2}(m+n)+(a_1-\dfrac{d}{2})}$；
- $S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}\cdots$ 是公差为 $\underline{n^2d}$ 的等差数列；
- 在前 $2n$ 项中，$\dfrac{\text{奇数项之和}}{\text{偶数项之和}}=\dfrac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}=\underline{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}}$；
- 在前 $2n+1$ 项中，$\dfrac{\text{奇数项之和}}{\text{偶数项之和}}=\dfrac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n+1}}{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}=\underline{\dfrac{n+1}{n}}$；

135. 等比数列 $a_n=a_1x^{n-1}$ 的求和公式：当 $x\neq 1$ 时，$S_n=\underline{\dfrac{a_1(1-x^n)}{1-x}=\dfrac{a_1-a_{n+1}}{1-x}}$. 若 $|x|<1$，则 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\underline{\dfrac{1}{1-x}}$.

136. 等差乘以等比型数列求和 $(x\neq 1)$：

$$\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$$

当 $|x|<1$ 时，

$$\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\underline{\frac{1}{(1-x)^2}}$$

对上式求导，

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}=\underline{\frac{2}{(1-x)^3}}$$

因为 $k^2x^{k-1}=x\cdot k(k-1)x^{k-2}+kx^{k-1}$，所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2x^{k-1}=\underline{\frac{1+x}{(1-x)^3}}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2x^k=\underline{\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}}$$

137. 常见裂项方法:

$$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+k}}=\frac{1}{k}(\sqrt{n+k}-\sqrt{n})$$

$$\frac{a^n}{(a^n+1)(a^{n+1}+1)}=\frac{1}{a-1}\left(\frac{1}{a^n+1}-\frac{1}{a^{n+1}+1}\right)$$

138. * 阿贝尔 (Abel) 求和公式：数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n,B_n，那么

$$\sum_{k=1}^{n}A_kb_k+\sum_{k=1}^{n-1}a_{k+1}B_k=A_nB_n \tag{3}$$

139. 如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足下列 2 个条件, 则称 $f(x)$ 为一个压缩函数。

(1) 任意 $x\in[a,b]$，有 $f(x)\in[a,b]$;

(2) 任意 $x,y\in[a,b]$，存在常数 $L\in(0,1)$，使得 $|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$.

140. 压缩映像原理：如果 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的压缩函数，那么必定存在唯一的 $X\in[a,b]$, 满足方程 $X=f(X)$ ，X 被称为 $f(x)$ 的不动点。

141. $A>0,B>0$，记 $f(x)=\sqrt{Ax+B}$，$g(x)=A+\dfrac{B}{x}$，数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1>0,a_{n+1}=f(a_n)=\sqrt{Aa_n+B}$，数列 $\{b_n\}$ 满足：$b_1>0,b_{n+1}=g(b_n)=A+\dfrac{B}{b_n}$，那么数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的不动点均为 $\dfrac{A+\sqrt{A^2+4B}}{2}$.

142. 对于一阶线性递推数列 $a_{n+1}=Aa_n+B$ $(A\neq1)$, 先解方程 $x=Ax+B$，然后递推公式两边减去 x，$a_{n+1}-x=A(a_n-x)$，这样就转化成了等比数列。

143. $a_{n+1}=Aa_n+Bq^n$. 两边同除 q^n，有 $\dfrac{a_{n+1}}{q^n}=\dfrac{A}{q}\dfrac{a_n}{q^{n-1}}+B$ ，这样就转化成了上一条中的一阶线性递推数列。

144. $a_{n+1}=Aa_n^2$，则 $Aa_{n+1}=(Aa_n)^2=\cdots=(Aa_1)^{2^n}$.

145. $a_{n+1}=a_n^2+2a_n$. 两边同时加 1, $a_{n+1}+1=(a_n+1)^2$.

146. $a_{n+1}=a_n^2-2a_n+2$. 两边同时减 1，$a_{n+1}-1=(a_n-1)^2$.

147. $a_{n+1}=\dfrac{Aa_n}{Ca_n+D}$，两边取倒数，$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{D}{A}\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{C}{A}$ ，那么 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 为一阶线性递推数列。

148. * 设 $p>1,a<0$，当 $x\to0$ 时，$f(x)\approx x+ax^p$，定义数列 $a_{n+1}=f(a_n)$，如果对任意的正整数 n，都有 $a_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，那么

$$\lim_{n\to\infty}na_n^{p-1}=\frac{1}{a(1-p)}$$

如果 $a_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，那么可以做倒代换 $b_n=\dfrac{1}{a_n}$，然后对 b_n 应用上式。

149. 对于二阶线性递推数列 $a_{n+2}=Aa_{n+1}+Ba_n$，先解特征方程 $x^2=Ax+B$，假设有两个不等的根 x_1,x_2(可以为复数)，那么

$$\begin{aligned}a_{n+2}-x_2a_{n+1}&=x_1(a_{n+1}-x_2a_n)=\cdots\\&=x_1^n(a_2-x_2a_1)\\a_{n+2}-x_1a_{n+1}&=x_2(a_{n+1}-x_1a_n)=\cdots\\&=x_2^n(a_2-x_1a_1)\end{aligned}$$

150. 分式线性递推数列 $a_{n+1}=\dfrac{Aa_n+B}{Ca_n+D}$，先解方程 $x=\dfrac{Ax+B}{Cx+D}$ ，假设有两个不等的根 x_1,x_2 (可以为复数)，那么

$$\begin{aligned}a_{n+1}-\alpha&=\frac{Aa_n+B-\alpha(Ca_n+D)}{Ca_n+D}\\&=\frac{(A-C\alpha)(a_n-\alpha)}{Ca_n+D}\\a_{n+1}-\beta&=\frac{Aa_n+B-\beta(Ca_n+D)}{Ca_n+D}\\&=\frac{(A-C\beta)(a_n-\beta)}{Ca_n+D}\end{aligned}$$

两式相除可得:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}&=\left(\frac{A-C\alpha}{A-C\beta}\right)\cdot\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=\cdots\\&=\left(\frac{A-C\alpha}{A-C\beta}\right)^n\cdot\frac{a_1-\alpha}{a_1-\beta}\end{aligned}$$

151. * 分式非线性递推数列，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{A^2}{a_n}\right)$，假设 $a_1\neq\pm A$,

$$a_{n+1}-A=\frac{a_n^2+A^2-2Aa_n}{2a_n}=\frac{(a_n-A)^2}{2a_n}$$

$$a_{n+1}+A=\frac{a_n^2+A^2+2Aa_n}{2a_n}=\frac{(a_n+A)^2}{2a_n}$$

$$\frac{a_{n+1}-A}{a_{n+1}+A}=\frac{(a_n-A)^2}{(a_n+A)^2}=\cdots=\frac{(a_1-A)^{2^n}}{(a_1+A)^{2^n}}$$

11　解析几何

152. 直线的方程：

一般式方程：$Ax+By+C=0$；

点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$；

斜截式方程：$y=kx+b$；

点斜式方程：$y-y_0=k(x-x_0)$；

截距式方程：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$；

两点式方程：$\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

153. 直线的参数方程：$\begin{cases}x=x_0+t\cos\phi\\ y=y_0+t\sin\phi\end{cases}$，$\phi$ 是直线的倾斜角，$|t|$ 表示直线上任一点到 (x_0,y_0) 的距离。更一般地，可以写成 $\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\end{cases}$，若 $a^2+b^2\neq 1$，则此时的 $|t|$ 不再表示距离，这一点需要注意。

154. 点 (x_0,y_0) 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离公式：$\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

155. 两条平行直线 $Ax+By+C_1=0$ 和 $Ax+By+C_2=0$ 的距离公式：$\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

156. 平面的方程：

一般式方程：$Ax+By+Cz+D=0$；

点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$；

截距式方程：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

157. 点 (x_0,y_0,z_0) 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式：$\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

158. 设二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 x_1,x_2，判别式为 Δ，则 $|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$，$x_1^2+x_2^2=\dfrac{b^2-2ac}{a^2}$.

159. 椭圆和双曲线的准线方程是 $x=\pm\dfrac{a^2}{c}$.

160. 点差法，在椭圆上取不同的两点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，则

$$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1\\ \dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$$

两式相减，有 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\dfrac{b^2(x_2+x_1)}{y_2+y_1}$.

如果是双曲线，则 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{b^2(x_2+x_1)}{y_2+y_1}$.

161. 圆锥曲线（不包括圆）的统一极坐标方程：$\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$．$p$ 代表焦点到准线的距离。e 是离心率。椭圆：$0<e<1$；抛物线：$e=1$；双曲线：$e>1$. 过焦点且倾斜角为 θ 的弦的长度为 $\dfrac{2ep}{1-e^2\cos^2\theta}$.

162. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程：$\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$.

163. * 椭圆的顶投影参数方程，设椭圆的上顶点为 $N(0,b)$，在 x 轴上任取一点 $U(u,0)$，过 N,U 两点的直线与椭圆的除 N 以外的交点为 $P(x,y)$，则

$$\begin{cases}x=a\cdot\dfrac{2au}{u^2+a^2}\\ y=b\cdot\dfrac{u^2-a^2}{u^2+a^2}\end{cases}$$

164. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程：$\begin{cases}x=\dfrac{a}{\cos\theta}\\ y=b\tan\theta\end{cases}$.

165. 抛物线 $y^2=2px$ 的参数方程：$\begin{cases}x=2pt^2\\ y=2pt\end{cases}$.

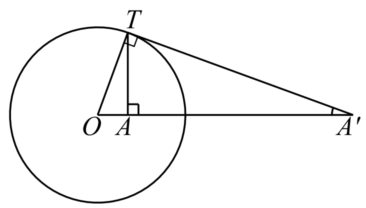
166. * 平摆线参数方程：$\begin{cases}x=R(\theta-\sin\theta)\\ y=R(1-\cos\theta)\end{cases}$.

167. * 圆的渐开线参数方程：$\begin{cases}x=R(\cos\theta+\theta\sin\theta)\\ y=R(\sin\theta-\theta\cos\theta)\end{cases}$.

168. 椭圆面积公式为 πab，而不是 $\dfrac{1}{2}\pi(a^2+b^2)$；椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的体积公式为 $\dfrac{4}{3}\pi abc$，而不是 $\dfrac{4}{9}\pi(a^3+b^3+c^3)$.

169. 到平面上两定点的距离之比为不等于 1 的定值的点的轨迹是圆 (称为“阿波罗尼奥斯圆”)。

170. $\odot O$ 的半径是 R，且 O,A,A' 三点共线，如果 $|OA|\cdot|OA'|=R^2$，则 A 点与 A' 点互为“反演点”。

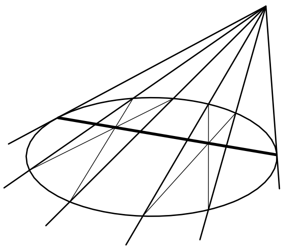


171. 椭圆上一点 (x_0,y_0) 的切线斜率为 $-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$，切线方程为 $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$ (换一半)。

172. 双曲线上一点 (x_0,y_0) 的切线斜率为 $\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$，切线方程为 $\dfrac{xx_0}{a^2}-\dfrac{yy_0}{b^2}=1$ (换一半)。

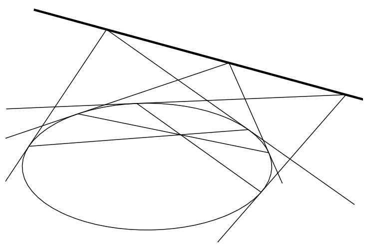
173. 抛物线 $y^2=2px$ 上一点 (x_0,y_0) 的切线斜率为 $\underline{\dfrac{p}{y_0}}$，切线方程为 $\underline{yy_0=p(x+x_0)}$ (换一半)。

174. 当点 (x_0,y_0) 在椭圆外部时，直线 $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$ 表示椭圆的切点弦，即从点 (x_0,y_0) 向椭圆作两条切线，连接两个切点得到的弦。

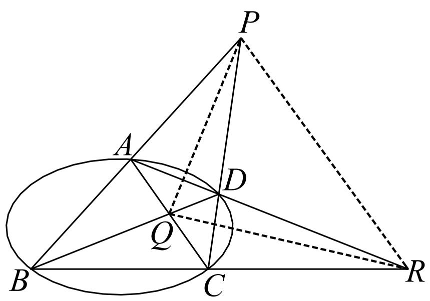


从点 (x_0,y_0) 出发作椭圆的两条割线，与椭圆有 4 个交点，那么以这 4 个交点为顶点的四边形的对角线交点也在切点弦上。

175. 当点 (x_0,y_0) 在椭圆内部时，直线 $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$ 与椭圆相离，从直线 $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$ 上的点向椭圆作两条切线，则切点弦过定点 (x_0,y_0).



176. 椭圆上有不同的四点 A,B,C,D，假设 AB 与 CD 所在的直线交于 P 点，AD 与 BC 所在的直线交于 R 点，AC 与 BD 交于 Q 点，则 P 点的极线是 QR，Q 点的极线是 PR，R 点的极线是 PQ，ΔPQR 称为自极三角形。



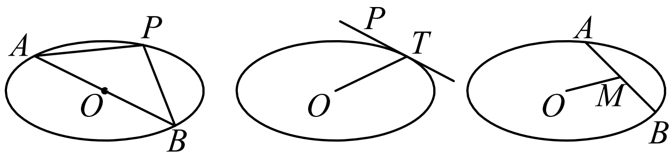
177. 判断直线 l：$Ax+By+C=0$ 与椭圆的位置关系，将直线方程变形为

$$\frac{\left(-\dfrac{Aa^2}{C}\right)x}{a^2}+\frac{\left(-\dfrac{Bb^2}{C}\right)y}{b^2}=1$$

设 $P\left(-\dfrac{Aa^2}{C},-\dfrac{Bb^2}{C}\right)$，当 P 点在椭圆内部时 (即 $A^2a^2+B^2b^2<C^2$)，直线 l 与椭圆相离；当 P 点在椭圆上时，直线 l 与椭圆相切；当 P 点在椭圆外部时，直线 l 与椭圆相交。

178. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的性质：

- 在椭圆外一点向椭圆做两条切线,切线夹角保持为 $\dfrac{\pi}{2}$ 时，切线交点的轨迹方程为 $\underline{x_0^2+y_0^2=a^2+b^2}$(蒙日圆，外准圆)
- 从椭圆中心 O 引出两条相互垂直的向径，与椭圆分别交于 P,Q 两点，从 O 点向 PQ 作垂线，垂足为 H，那么 H 点的轨迹也是一个圆 (内准圆)，圆的方程为 $\underline{x^2+y^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}}$. 斜边长度 $|PQ|$ 的取值范围是：
  $$\underline{\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}\leqslant|PQ|\leqslant\underline{\sqrt{a^2+b^2}}$$
  ΔOPQ 的面积的取值范围是：
  $$\underline{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}\leqslant S_{\Delta OPQ}\leqslant\underline{\frac{1}{2}ab}$$
- 以下三种情形，斜率之积为定值。



$k_{AP}\cdot k_{BP}=k_{OT}\cdot k_{PT}=k_{OM}\cdot k_{AB}=\underline{-\dfrac{b^2}{a^2}}$.

- AB,CD 是椭圆的两条相交弦，交点为 P，且 AB，CD 的斜率互为相反数，则 $|PA|\cdot|PB|=\underline{|PC|\cdot|PD|}$.
- * 椭圆上任意一点 $P(x_0,y_0)$，过 P 点作两条相互垂直的直线，这两条直线与椭圆的除 P 点之外的交点分别是 Q,R，那么线段 QR 过定点
  $$\left(\frac{(a^2-b^2)x_0}{a^2+b^2},-\frac{(a^2-b^2)y_0}{a^2+b^2}\right)$$
- * 过椭圆内部一点 $M(x_0,y_0)$ 作椭圆的两条垂直弦 PQ,RS，弦 PQ,RS 的中点分别为 K,L，那么线段 KL 过定点
  $$\left(\frac{a^2x_0}{a^2+b^2},\frac{b^2y_0}{a^2+b^2}\right)$$
- 椭圆上任意一点 $P(x_0,y_0)$，过 P 点作两条斜率互为相反数的直线，这两条直线与椭圆的除 P 点之外的交点分别是 Q,R，那么直线 QR 的斜率是定值，且与过 P 的切线的斜率互为 $\underline{\text{相反数}}$。
- 在椭圆的长轴 AB 上有一定点 $M(m,0)$，过点 M 作椭圆的弦 CD，记直线 AC,BD 的斜率分别为 k_1,k_2，则
  ① $\dfrac{k_1}{k_2}$ 是定值；
  ② AC,BD 延长线的交点的轨迹方程是 $\underline{x=\dfrac{a^2}{m}}$，即点 M 关于椭圆的极线；
  ③ 设②中的极线与 AB 延长线的交点为 H，则 CH,DH 的斜率互为 $\underline{\text{相反数}}$。

- P 为椭圆上一点，F_1,F_2 是椭圆的左右焦点，$\angle F_1PF_2=\theta$，则 $S_{\Delta F_1PF_2}=\underline{\ b^2\tan\dfrac{\theta}{2}\ }$.
- F_1,F_2 是椭圆的两个焦点，椭圆上一点 P 处的切线 PT 平分 ΔPF_1F_2 在点 P 处的外角。焦点在直线 PT 上的投影点的轨迹是以长轴为直径的圆。以 PF_1(或 PF_2) 为直径的圆必与以长轴为直径的圆 __内切__。
- 设椭圆的左右两个顶点为 $A_1(-a,0),A_2(a,0)$，与 y 轴平行的直线交椭圆于 P_1,P_2 时，A_1P_1 与 A_2P_2 的交点的轨迹方程是 $\underline{\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ }$.

179. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的性质：

- 从不在双曲线上的一点做双曲线的两条切线，如果两条切线垂直, 那么切线交点的轨迹也是一个圆 (蒙日圆, 外准圆)，圆的方程为 $\underline{x^2+y^2=|a^2-b^2|}$.
- 从双曲线的中心 O 引出两条相互垂直的向径, 与双曲线分别交于 P,Q 两点，从 O 点向 P,Q 作垂线，垂足为 H，那么 H 点的轨迹也是一个圆 (内准圆), 内准圆的方程是 $\underline{x^2+y^2=\dfrac{a^2b^2}{b^2-a^2}}$. 双曲线内准圆存在的充要条件是虚轴大于实轴，即离心率大于 $\sqrt{2}$.
- * 双曲线上任意一点 $P(x_0,y_0)$, 过 P 点作两条相互垂直的直线, 这两条直线与双曲线的除 P 点之外的交点分别是 Q,R，那么线段 QR 过定点。
$$\left(\frac{(a^2+b^2)x_0}{a^2-b^2},-\frac{(a^2+b^2)y_0}{a^2-b^2}\right)$$
必须满足 $a\neq b$，定点才存在。
- * 过平面上任意一点 $M(x_0,y_0)$ 作双曲线的两条垂直弦 PQ,RS, 弦 PQ,RS 的中点分别为 K,L, 那么线段 KL 过定点。
$$\left(\frac{a^2x_0}{a^2-b^2},-\frac{b^2y_0}{a^2-b^2}\right)$$
必须满足 $a\neq b$，定点才存在。
- 双曲线上任意一点 $P(x_0,y_0)$，过 P 点作两条斜率互为相反数的直线, 这两条直线与双曲线的除 P 点之外的交点分别是 Q,R, 那么直线 QR 的斜率是定值，且与过 P 的切线的斜率互为 __相反数__。
- P 为双曲线上一点，F_1,F_2 是双曲线的左右焦点, $\angle F_1PF_2=\theta$，则 $S_{\Delta F_1PF_2}=\underline{\ \dfrac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}\ }$.
- 设 $k>0$，则等轴双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 的实半轴和虚半轴的长度均为 $\underline{\sqrt{2k}}$，焦点坐标是 $\underline{(\pm\sqrt{2k},\pm\sqrt{2k})}$.

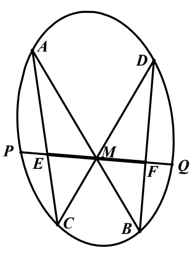
180. 抛物线 $y^2=2px$ 的性质：

- 抛物线的焦点为 F，顶点为 O，过焦点的直线与抛物线交于 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$ 两点，则
$\dfrac{1}{|FP|}+\dfrac{1}{|FQ|}=\dfrac{1-\cos\theta}{p}+\dfrac{1-\cos\theta}{p}=\underline{\ \dfrac{2}{p}\ }$；
$|FP|+|FQ|=\dfrac{p}{1-\cos\theta}+\dfrac{p}{1+\cos\theta}=\underline{\ \dfrac{2p}{\sin^2\theta}\ }$；
$y_1y_2=\underline{-p^2}$，$x_1x_2=\dfrac{y_1^2}{2p}\cdot\dfrac{y_2^2}{2p}=\underline{\ \dfrac{p^2}{4}\ }$；
$S_{\Delta OPQ}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p}{2}\cdot\left(\dfrac{2p}{\sin^2\theta}\cdot\sin\theta\right)=\underline{\ \dfrac{p^2}{2\sin\theta}\ }$.
- 抛物线的对称轴上有一个固定点 $M(x_0,0)$，过 M 的直线与抛物线交于 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$ 两点，则
$y_1y_2=\underline{-2px_0}$，$x_1x_2=\dfrac{y_1^2}{2p}\cdot\dfrac{y_2^2}{2p}=\underline{x_0^2}$.
- 抛物线的顶点为 O,A,B 两点在抛物线上,若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-p^2$，则直线 AB 过定点 $\underline{(p,0)}$.
- 从准线上的一点 $P\left(-\dfrac{p}{2},y_0\right)$ 向抛物线作两条切线, 设切点分别为 Q,R，则这两条切线 PQ,PR 相互 __垂直__。设抛物线焦点为 F，那么 QR 恒过 __焦点__，且 $PF\perp\underline{QR}$.
- 抛物线上任意一点 $P(x_0,y_0)$，过 P 点作两条相互垂直的直线, 这两条直线与抛物线的除 P 点之外的交点分别是 Q,R，那么线段 QR 过定点 $\underline{(x_0+2p,-y_0)}$.
- 抛物线上任意一点 $P(x_0,y_0)$，过 P 点作两条斜率互为相反数的直线, 这两条直线与抛物线的除 P 点之外的交点分别是 Q,R, 那么直线 QR 的斜率是定值，且与过 P 的切线的斜率互为 __相反数__。

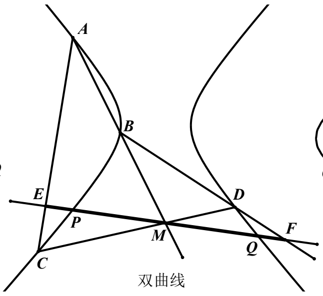
181. * 彭赛列 (Poncelet) 闭合定理：给定两条圆锥曲线 Γ_1 和 Γ_2，若存在一个 n ($n\geqslant 3$) 边形满足：内接于 Γ_1 且外切于 Γ_2，则必然存在无数个这样的 n 边形满足该性质 (同时内接和外切)。

182. * 三角形的内心和外心的距离为 $\sqrt{R(R-2r)}$，其中 R 为外接圆半径，r 为内切圆半径。假设一个半径为 r 的小圆位于一个半径为 R 大圆的内部 (两个圆没有交点)，若 $2r<R$ 且两个圆的圆心距恰好等于 $\sqrt{R(R-2r)}$，那么存在无穷多个三角形，分别以这两个圆为内切圆和外接圆。

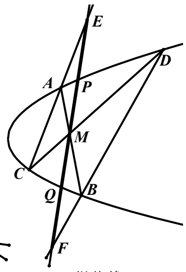
183. * 蝴蝶定理：在圆锥曲线中，过弦 PQ 的中点 M 任作两条弦 AB,CD，直线 AC,BD 交 PQ 于点 E,F，则 $ME=EF$.



椭圆



双曲线



抛物线

12 零散考点

184. $\pi \approx 3.141592653$ 的分数近似值：
$\frac{22}{7} \approx 3.142857$, $\frac{355}{113} \approx 3.14159292$.

185. 三次方程韦达定理：$(a \neq 0)$,
$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$
$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$;
$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$;
$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$.

186. 因式分解：
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$
$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$
$$= (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$
$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$$
$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

187. 锥体 (圆锥、棱锥) 体积公式：$V = \frac{1}{3}Sh$,
S 为底面积，h 为锥体高度。

188. 圆台或棱台的体积：$V = \frac{1}{3}(S + \sqrt{SS'} + S')h$,
S, S' 为两个底面积，h 为台体高度 (两个底面间的距离)。

189. 球的表面积 $S = 4\pi R^2$，球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.