

带 \* 表示难度较大或者不方便设置待填空白的知识点。

数学软件:

网页版: GeoGebra(<https://www.geogebra.org/>)

Desmos(<https://www.desmos.com>).

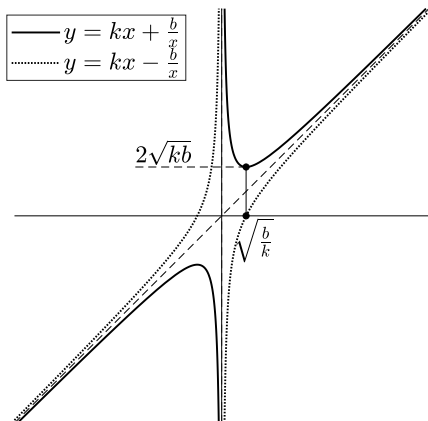
App: MathStudio.

## 1 函数

1. 求  $y = \frac{Ax+B}{Cx+D}$  ( $AD-BC \neq 0$ ) 的值域:

$$y = \frac{A}{C} \cdot \frac{x + \frac{D}{C} - \frac{D}{C} + \frac{B}{A}}{x + \frac{D}{C}} = \frac{A}{C} \cdot \left( 1 + \frac{-\frac{D}{C} + \frac{B}{A}}{x + \frac{D}{C}} \right).$$

2. 设  $k > 0, b > 0$ , 则  $y = kx + \frac{b}{x}$  与  $y = kx - \frac{b}{x}$  的图像如下, 这两种函数都是双曲线,



当  $x > 0$  时,  $y = kx + \frac{b}{x}$  在  $x = \sqrt{\frac{b}{k}}$  处取得极小值  $2\sqrt{kb}$ ;  $y = kx - \frac{b}{x}$  的零点是  $x = \sqrt{\frac{b}{k}}$ .

3. 求  $y = \frac{x^2 + Ax + B}{x + C}$  ①或  $y = \frac{x + C}{x^2 + Ax + B}$  ②的值域 (若分子或分母的最高次项系数不为 1, 则先将系数提取出来), 方法一: 换元  $t = x + C$ ; 方法二: 判别式, 以①式为例写出主要过程:

$$\begin{aligned} y(x+C) &= x^2 + Ax + B \\ x^2 + (A-y)x + B-yC &= 0 \\ \Delta &= (A-y)^2 - 4(B-yC) \geq 0 \end{aligned}$$

要绘制①或②的图像, 可以先绘制  $y = (x^2 + Ax + B)(x + C)$  的图像, 因为这个三次函数的正负号与①或②式的正负号是一致的。

4. 求  $y = \frac{\sqrt{Ax^2+B}}{Cx^2+D}$  的值域, 先提取系数,

$$y = \frac{\sqrt{A}}{C} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + \frac{B}{A}}}{x^2 + \frac{D}{C}}, \text{ 换元, } t = \sqrt{x^2 + \frac{B}{A}}, \text{ 那么}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= t^2 - \frac{B}{A}, \\ y &= \frac{\sqrt{A}}{C} \cdot \frac{t}{t^2 - \frac{B}{A} + \frac{D}{C}} = \frac{\sqrt{A}}{C} \cdot \frac{1}{t + \left( \frac{D}{C} - \frac{B}{A} \right) \frac{1}{t}} \end{aligned}$$

5. 给定 4 个实数  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , 其中任意两个都不相等, 设  $y_i = \frac{Ax_i+B}{Cx_i+D}$ , ( $AD-BC \neq 0, i=1, 2, 3, 4$ ), 那么,

$$\frac{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)}{(y_1 - y_4)(y_2 - y_3)} = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)}$$

6.  $y = |x - b_1| + |x - b_2| + \dots + |x - b_n|$ , 假设  $b_1 < b_2 < \dots < b_n$ , 如果  $n$  是偶数, 那么最小值在区间  $[b_{\frac{n}{2}}, b_{\frac{n}{2}+1}]$  内取得; 如果  $n$  是奇数, 那么最小值在  $x = b_{\frac{n+1}{2}}$  处取得。

7. 恒成立问题或有解问题 ( $\exists$  表示存在,  $\forall$  表示任意。  $f(x)_{\max}, f(x)_{\min}$  分别表示  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  上的最大值、最小值。)

$$\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) > m \Rightarrow \underline{f(x)_{\max} > m}$$

$$\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) < m \Rightarrow \underline{f(x)_{\min} < m}$$

$$\forall x \in (a, b), f(x) < m \Rightarrow \underline{f(x)_{\max} < m}$$

$$\forall x \in (a, b), f(x) > m \Rightarrow \underline{f(x)_{\min} > m}$$

8. 对数运算法则:

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N.$$

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N.$$

$$\log_a M^n = n \log_a M, \quad \log_{a^n} M = \frac{1}{n} \log_a M.$$

$$\text{换底公式: } \log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}.$$

9. 常见函数方程:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \underline{kx}$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad \underline{kx + b}$$

$$f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2) \quad \underline{x^\alpha}$$

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) f(x_2) \quad \underline{a^x}$$

$$f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \underline{\log_a x}$$

$$f(x_1 x_2) = x_2 f(x_1) + x_1 f(x_2) \quad \underline{x \log_a x}$$

$$f(x_1 + x_2) + f(x_1 - x_2) = 2\lambda f(x_1) f(x_2) \quad \underline{\frac{1}{\lambda} \cos x}$$

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) + 2\lambda x_1 x_2 \quad \underline{\lambda x^2 + \mu x}$$

10. \*  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$  或  $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$ , 则

$$f(x_1) + f(x_2) = f\left(\frac{x_1 + x_2}{1 + x_1 x_2}\right)$$

11.  $\arctan x_1 + \arctan x_2 = \arctan \frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 x_2}.$

12. 函数凹凸性, 填 “<” 或 “>”, 请结合图像记忆。

$$x_1, x_2 \in (0, \pi), x_1 \neq x_2,$$

$$\frac{1}{2}(\sin x_1 + \sin x_2) < \sin \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_1, x_2 \in (0, \frac{\pi}{2}), x_1 \neq x_2,$$

$$\frac{1}{2}(\tan x_1 + \tan x_2) > \tan \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 \neq x_2,$$

$$\frac{e^{x_1} + e^{x_2}}{2} \geq e^{\frac{x_1 + x_2}{2}}$$

$$x_1, x_2 \in (0, +\infty), x_1 \neq x_2,$$

$$\frac{\ln x_1 + \ln x_2}{2} \leq \ln \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_1, x_2 \in (0, +\infty), x_1 \neq x_2, \alpha \in \mathbf{R}, \alpha > 1,$$

$$\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha}{2} \geq \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^\alpha$$

13. 若  $f(x)$  满足  $f(x) = \pm \frac{1}{f(x+a)}$ , 那么  $f(x)$  的一个周期是  $2a$ .

14. 若  $f(x)$  满足  $f(x+a) = f(b-x)$ , 则  $f(x)$  的一条对称轴是  $x = \frac{a+b}{2}$ .

15. 如果  $f(x)$  同时具有对称轴  $x = a$  和对称中心  $(b, c)$ , 且  $a \neq b$ , 那么  $f(x)$  具有周期  $T = 4|a-b|$ .

16. 三变量均值不等式: 设  $a, b, c \geq 0$ , 则  $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ .

17. 设  $a, b > 0, x > 0$ , 利用上面的三变量均值不等式, 有:

$$ax^2 + \frac{b}{x} = ax^2 + \frac{b}{2x} + \frac{b}{2x} \geq 3\sqrt[3]{\frac{ab^2}{4}};$$

$$ax + \frac{b}{x^2} = \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ax + \frac{b}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2b}{4}}.$$

18. 零点存在定理: 若函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  连续, 且  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , 则一定存在  $x_0 \in (a, b)$ , 使  $f(x_0) = 0$ . 此定理为二分法找函数零点的理论基础。

19. \* 记  $f_0(x) = x$ ,  $f_1(x) = f(x)$ ,  $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$ . 称  $f_n(x)$  为函数  $f(x)$  的  $n$  次迭代 (用数学归纳法证明)。

$f(x)$	$f_n(x)$
$x + 2\sqrt{x} + 1$	$(\sqrt{x} + n)^2$
$\frac{x}{a+bx}$	$\frac{x}{a^n + \frac{1-a^n}{1-a}bx}$
$\sqrt[k]{ax^k + b}$	$\sqrt[k]{a^n x^k + \frac{1-a^n}{1-a}b}$
$x^2 + 2x$	$(x+1)^{2^n} - 1$
$\frac{x^2}{2x-1}$	$\frac{x^{2^n}}{x^{2^n} - (x-1)^{2^n}}$

$$20. f_1(x) = f(x) = \frac{1+x}{1-x}, f_{n+1}(x) = f(f_n(x)), n \in \mathbf{N}^+,$$

$$k \in \mathbf{N}, \text{ 则 } f_{4k+1}(x) = \frac{1+x}{1-x}, f_{4k+2}(x) = -\frac{1}{x},$$

$$f_{4k+3}(x) = \frac{x-1}{x+1}, f_{4k+4}(x) = x.$$

## 2 排列、组合与二项式定理

$$21. \text{ 排列数: } P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \text{ 或者写成 } A_n^k.$$

$$22. \text{ 组合数: } C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$\text{递推关系: } C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k.$$

$$23. \text{ 二项式定理: } (a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}.$$

$$24. (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc).$$

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 \text{ 的结果类似.}$$

25. 杨辉三角:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 \\ & & 1 & & 1 & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & & & & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \end{array}$$

$$\text{第 } n+1 \text{ 行的系数之和为 } \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n.$$

26. \* 偶数件不同物品中选出奇数件物品的方法数  $C_{2n}^1, C_{2n}^3, C_{2n}^5, \dots$  都是 偶 数。

27. \* 组合恒等式:

$$\sum_{k=r}^n C_k^r = C_{n+1}^{r+1}, \quad \sum_{k=0}^r C_m^k C_n^{r-k} = C_{n+m}^r$$

$$\sum_{k=1}^n k C_n^k = n \cdot 2^{n-1}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 C_n^k = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$$

28. \* 设  $n$  个元素错排的方案数为  $D_n$ ,  $D_1 = 0$ ,  $D_2 = 1$ , 则

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

$$D_n - nD_{n-1} = -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}] = (-1)^n$$

$$\frac{D_n}{n!} - \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$D_n = n! \left[ 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right]$$

29.  $(ax^\alpha + bx^\beta)^n$  展开式的通项为

$$T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r x^{(n-r)\alpha + r\beta},$$

设  $C_n^m a^{n-m} b^m$  是最大的系数, 则

$$\begin{cases} C_n^m a^{n-m} b^m \geq \frac{C_n^{m-1} a^{n-m+1} b^{m-1}}{C_n^{m+1} a^{n-m-1} b^{m+1}} \\ C_n^m a^{n-m} b^m \geq \frac{C_n^{m+1} a^{n-m-1} b^{m+1}}{C_n^{m-1} a^{n-m+1} b^{m-1}} \end{cases}$$

### 3 概率论与数理统计

30. 给定正整数集合  $S = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ , 定义多项式  $f(x) = (1 + x^{k_1})(1 + x^{k_2}) \cdots (1 + x^{k_n})$ , 则  $f(x)$  的展开式中,  $x^m$  的系数恰好等于从集合  $S$  中选出元素总和为  $m$  ( $m \in \mathbf{N}$ ) 的子集的方法数。

31. 数学期望 (或均值) 的定义:  $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$ ,

性质:  $E(aX + b) = aE(X) + b$ .

方差:  $D(X) = E\{[X - E(X)]^2\} = \frac{E(X^2) - [E(X)]^2}{}$ ,

性质:  $D(aX + b) = a^2 D(X)$ .

32. 伯努利大数定律: 独立地重复一个伯努利试验  $n$  次, 当  $n$  很大时, 频率逼近概率。

33. 概率加法公式:

$$P(A_1 \cup A_2) = \frac{P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)}{}$$

34. 条件概率公式:  $P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ .

概率乘法公式:  $P(A \cap B) = \frac{P(A)P(B|A)}{}$ .

若  $A, B$  相互独立, 则  $P(A \cap B) = \frac{P(A)P(B)}{}$ .

35. 全概率公式:  $P(A) = \sum_{k=1}^n P(A | \Omega_k) P(\Omega_k)$ .

36. \* 贝叶斯公式:

$$P(\Omega_i | A) = \frac{P(A | \Omega_i) P(\Omega_i)}{\sum_{k=1}^n P(A | \Omega_k) P(\Omega_k)}$$

37. 二项分布  $b(n, p)$ : 每次实验时, 事件  $A$  发生的概率为  $p$ , 那么在  $n$  次实验中事件  $A$  发生  $k$  次的概率为  $P\{X = k\} = \frac{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}{}$ . 数学期望为  $np$ , 方差为  $np(1-p)$ .

38. \* 几何分布: 在  $n$  次伯努利试验中, 试验  $k$  次才得到第一次成功的概率,  $P\{X = k\} = (1-p)^{k-1} p$ ,  $k \in \mathbf{N}^+$ ,  $0 < p < 1$ . 数学期望为  $\frac{1}{p}$ , 方差为  $\frac{1-p}{p^2}$ .

39. 超几何分布: 共有  $N$  件产品, 其中有  $D$  ( $D \leq N$ ) 件次品, 从中任取  $n$  ( $n \leq N$ ) 件, 其中恰有  $k$  ( $k \leq D$ ) 件次品的概率:  $P\{X = k\} = \frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$ . 数学期望为  $\frac{nD}{N}$ , 方差为  $\frac{nD}{N} \left(1 - \frac{D}{N}\right) \frac{(N-n)}{(N-1)}$ .

40. 正态分布:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ,  $\mu \in \mathbf{R}$ ,  $\sigma > 0$ . 数学期望为  $\mu$ , 方差为  $\sigma^2$ . 若  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$  (标准正态分布).

41. 最小二乘法, 回归直线  $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ .

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \\ &= \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \end{aligned}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

回归直线通过散点图的几何中心  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

42. 样本相关系数

$$\begin{aligned} r &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2}} \\ &= \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \cdot \sqrt{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2}} \end{aligned}$$

### 4 三角函数

43. 正余弦和角、差角公式:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

44. 二倍角公式:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

45. \* 三倍角公式:

$$\sin 3x = \frac{-4 \sin^3 x + 3 \sin x}{}$$

$$\cos 3x = \frac{4 \cos^3 x - 3 \cos x}{}$$

46. 余弦的递推关系:

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta$$

47. 和差化积:

$$\sin x + \sin y = \frac{2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2}$$

$$\cos x + \cos y = \frac{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2}$$

48. 积化和差:

$$\sin x \sin y = \frac{\frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]}{2}$$

$$\cos x \cos y = \frac{\frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]}{2}$$

$$\sin x \cos y = \frac{\frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]}{2}$$

49. 辅助角公式:

$$\begin{aligned} & a\sin x + b\cos x \\ &= \frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)}{\left(\tan\varphi = \frac{b}{a}\right)} \end{aligned}$$

变体一:

$$\begin{aligned} & a\sin x + b\cos(x+x_0) \\ &= \frac{a\sin x + b\cos x\cos x_0 - b\sin x\sin x_0}{2} \end{aligned}$$

变体二:

$$\begin{aligned} & a\cos^2 x + b\sin^2 x + c\sin x\cos x \\ &= \frac{a\cos 2x + 1}{2} + b\frac{-\cos 2x + 1}{2} + \frac{c}{2}\sin 2x \end{aligned}$$

变体三:

$$a\sin^2 x + b\cos x = \frac{a(1-\cos^2 x) + b\cos x}{2}$$

50. \*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos kx &= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \\ \sum_{k=1}^n \sin kx &= \frac{-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

$$51. * \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}.$$

52. \*  $\triangle ABC$  中的恒等式 ( $A+B+C=\pi$ ):

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{4\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)}{2}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{1 + 4\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)}{2}$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \frac{\tan A \tan B \tan C}{1}$$

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{B}{2}\right) + \tan\left(\frac{B}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right) +$$

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right) = 1$$

53. 对于  $\triangle ABC$ , 考虑  $A=B=C=\frac{\pi}{3}$  的特殊情形, 以及两个角趋近于 0, 第三个角趋近于  $\pi$  时的极限 (或者一个角趋近于 0, 剩余两个角趋近于  $\frac{\pi}{2}$ ), 有

$$\underline{0} < \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\underline{0} < \sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\underline{1} < \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

$$\underline{-1} < \cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$$

54. 当  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  时,  $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ ,  $\cos x > 1 - \frac{2}{\pi}x$ .

对于锐角三角形  $ABC$ , 有

$$\sin A + \sin B + \sin C > \frac{2}{\pi}(A+B+C) = 2$$

$$\cos A + \cos B + \cos C > 3 - \frac{2}{\pi}(A+B+C) = 1$$

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3 \tan \frac{A+B+C}{3} = 3\sqrt{3}$$

55. \* 参数方程  $\begin{cases} x = A\cos(\omega t + a) \\ y = B\cos(\omega t + b) \end{cases}$ ,  $AB \neq 0$ , 消去参数  $t$

可得:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos(a-b) = \sin^2(a-b)$$

56. \* 双曲正弦函数  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ,

反双曲正弦函数  $\operatorname{arcsinh} x = \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{1}$ ;

双曲余弦函数  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ,

反双曲余弦函数  $\operatorname{arccosh} x = \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{1}$ .

求导:  $(\sinh x)' = \cosh x$ ;  $(\cosh x)' = \sinh x$ .

$(\operatorname{arcsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ ;  $(\operatorname{arccosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ .

平方差关系:  $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$ .

## 5 复数

57. 虚数单位  $i$  的整数次幂的周期性:

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

58. 共轭复数的性质:

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2},$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

59. 复数的模的性质:

$$|z| = |\overline{z}|, \quad z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2,$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

60. 三角不等式:  $\|z_1\| - \|z_2\| \leq \|z_1 \pm z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|$ .

61. 去掉  $\sqrt{A+B\sqrt{C}}$  ( $A>0, C>0$ ) 的外层根号的方法:  
 设  $\sqrt{A+B\sqrt{C}} = x + y\sqrt{C}$ , 两边平方, 然后比较左右两边  $\sqrt{C}$  的系数和另一项, 可得到两个方程:  
 $A = x^2 + y^2C, B = 2xy$ . 根据基本不等式,  $A \geq |B|\sqrt{C}$  是可以去掉外层根号的必要不充分条件.

62. 去掉  $\sqrt{a+bi}$  的根号的方法: 设  $\sqrt{a+bi} = x + yi$ , 两边平方, 然后比较左右两边的实部和虚部, 可得到两个方程:  $a = x^2 - y^2, b = 2xy$ .

63. 欧拉公式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ .

64. \* 自然对数的底数  $e = 2.718281828 \dots$  的定义:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

65.  $\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$ ,  
 将等号右边用二项式定理展开后, 比较左右两边的实部和虚部, 即可得到任意的  $n$  倍角公式.

66. 若  $x^n = 1, n \in \mathbf{N}^+$ , 则称  $x$  为  $n$  次单位根, 复数范围内,  $x$  共有  $n$  个不同的值, 分别是  
 $e^{2k\pi i/n}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

67.  $(x + iy)(\cos \theta + i \sin \theta)$   
 $= (x \cos \theta - y \sin \theta) + i(x \sin \theta + y \cos \theta)$  (坐标旋转公式).

## 6 向量

68. 零向量具有任意方向.

69.  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ , 两者的数量积 (“点乘”) 定义为

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$\vec{a}, \vec{b}$  的夹角的余弦为

$$\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

70. 二阶行列式:  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$ .

71. \*  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ , 这两者的向量积 (“叉乘”) 定义为

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  分别是  $x, y, z$  轴正方向的单位向量. 向量积的结果仍然是向量. 向量积不满足交换律, 即  $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$ .  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ .

72. 当  $a_3 = b_3 = 0$  时,  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$ , 代表以  $\vec{a}, \vec{b}$  为邻边的平行四边形的面积, 除以 2 就得到以  $\vec{a}, \vec{b}$  为两条边的三角形的面积.

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

$$= (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

$\vec{a} \perp \vec{b}$  的充要条件是  $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$ .

$\vec{a} // \vec{b}$  的充要条件是  $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ .

73. 向量基本定理: 如果  $\vec{e}_1$  与  $\vec{e}_2$  是平面上两个不平行的向量, 那么该平面上的任意向量  $\vec{a}$ , 都可唯一地表示为  $\vec{e}_1$  与  $\vec{e}_2$  的线性组合, 即存在唯一的一对实数  $\lambda$  与  $\mu$ , 使得  $\vec{a} = \lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2$ .

74. 平面上有不同的四点  $O, P, Q, R$ , 设  $\vec{OR} = \lambda \vec{OP} + \mu \vec{OQ}$ , 则  $P, Q, R$  三点共线的充要条件是  $\lambda + \mu = 1$ .

## 7 解三角形

75. 外心: 三条中垂线的交点;

内心: 三条角平分线的交点;

重心: 三条中线的交点;

垂心: 三条垂线的交点.

76. 对于  $\triangle ABC$ , 重心  $G$  分割中线的比例为  $1:2$ .

设  $O$  为空间中的任意一点, 则

$$\vec{OG} = \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

77. 正弦定理:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$R$  为三角形外接圆半径.

78. 余弦定理:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

79. 对任意三角形, “大边” 是 “大角” 的充要条件.

80. \* 对于  $\triangle ABC$ ,

$$a + b + c \geq 2(a \cos A + b \cos B + c \cos C)$$

将三个余弦定理的式子相加可得:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2bc \cos A + 2ac \cos B + 2ab \cos C$$

将上式中的  $a, b, c$  换成任意实数  $x, y, z$ , 同时保持  $A + B + C = \pi$ , 那么有嵌入不等式

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{2yz \cos A + 2zx \cos B + 2xy \cos C}{\cos A + \cos B + \cos C}$$

81.  $(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2$ , 具有勾股定理的形式。让  $a, b (a \neq b)$  取正整数, 就能得到勾股数, 比如  $(3, 4, 5)$ ,  $(5, 12, 13)$ ,  $(7, 24, 25)$ ,  $(8, 15, 17)$ ,  $(9, 40, 41)$ ,  $(11, 60, 61)$ ,  $(20, 21, 29)$ .

82. 把上一条中的  $a^2$  换成  $\vec{a}^2$ ,  $b^2$  换成  $\vec{b}^2$ , 实数乘法换成向量点乘, 就得到向量的极化恒等式:

$$4\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2$$

83. 对于  $\triangle ABC$ ,  $R$  为外接圆半径,  $r$  为内切圆半径,  $p = \frac{a+b+c}{2}$  为三角形周长的一半, 三角形的面积公式有:

$$\text{两边夹角: } \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B.$$

$$\text{只含 } R, A, B, C: \frac{2R^2 \sin A \sin B \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}.$$

$$\text{只含 } R, a, b, c: \frac{abc}{4R}.$$

$$\text{只含 } p, r: pr.$$

$$\text{只含 } p, a, b, c: \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

84.  $r$  为内切圆半径, 则  $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$

85. \* 对于  $\triangle ABC$ , 外森比克不等式:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} S_{\triangle ABC}$$

86. \*  $\triangle ABC$  的费马点: 分别以  $AB, BC, AC$  为边, 在  $\triangle ABC$  外部 (或内部) 作三个等边三角形, 这三个等边三角形的外接圆会交于同一点, 即费马点。当三角形的最大内角小于  $120^\circ$  时, 费马点位于三角形内部, 设费马点与三个顶点连线长度分别为  $x, y, z$ , 则

$$xy + yz + zx = \frac{4}{\sqrt{3}} S_{\triangle ABC} \leq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

87. \* 三角形的内心和外心的距离为  $\sqrt{R(R-2r)}.$

任意三角形的外接圆半径大于等于 2 倍内切圆半径 ( $R \geq 2r$ ).

88. \*  $\triangle ABC$  内部有任意一点  $O$ , 记  $\triangle AOB, \triangle BOC, \triangle COA$  的面积分别为  $S_C, S_A, S_B$ , 那么有:

$$S_A \cdot \vec{OA} + S_B \cdot \vec{OB} + S_C \cdot \vec{OC} = \vec{0}$$

◇ 当  $O$  是  $\triangle ABC$  的重心时,

$$S_A : S_B : S_C = 1 : 1 : 1$$

◇ 当  $O$  是  $\triangle ABC$  的垂心时,

$$S_A : S_B : S_C = \tan A : \tan B : \tan C$$

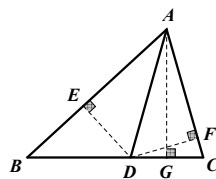
◇ 当  $O$  是  $\triangle ABC$  的内心时,

$$S_A : S_B : S_C = a : b : c$$

◇ 当  $O$  是  $\triangle ABC$  的外心时,

$$S_A : S_B : S_C = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$$

89.  $D$  是  $\triangle ABC$  的  $BC$  边上的一点, 则  $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CD|}$  的充分必要条件是:  $AD$  是  $\angle BAC$  的角平分线。



## 8 导数与积分

90. 基本初等函数的导数公式:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$(a^x)' = (\ln a)a^x, (e^x)' = e^x,$$

$$(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

91. 导数运算法则:

$$[c_1 f(x) + c_2 g(x)]' = c_1 f'(x) + c_2 g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

92.

$$[f(x) \cdot x^n]' = x^n f'(x) + n x^{n-1} f(x)$$

$$\left[ \frac{f(x)}{x^n} \right]' = \frac{x f'(x) - n f(x)}{x^{n+1}}$$

93. 复合函数求导法则:  $[g(f(x))]' = g'(u) f'(x)$ , 再将  $u$  换回  $f(x)$ . 比如  $[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$

94. 设  $f(x) = (x - x_0)^n g(x)$ , 两边取自然对数, 有

$$\ln f(x) = n \ln(x - x_0) + \ln g(x)$$

两边求导, 有

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{n}{x - x_0} + \frac{g'(x)}{g(x)}$$

95. 可导奇函数的导函数是偶函数;

可导偶函数的导函数是奇函数。

96. 牛顿-莱布尼茨公式 (微积分基本公式):

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

97. \* 罗必塔 (L'Hospital) 法则: 当  $x \rightarrow x_0$  时, 如果  $f(x)$  和  $g(x)$  均趋于 0 或  $\pm\infty$ , 那么

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

特别地,  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ .

98. 把  $e^x \geq x + 1$  中的  $x$  换成  $x - 1$ , 有  $e^{x-1} \geq x$ , 两边同乘  $e$ , 有  $e^x \geq ex$ .

99. 把  $e^x \geq x + 1$  中的  $x$  换成  $-x$ , 有  $e^{-x} \geq -x + 1$ , 当  $x < 1$  时, 两边同时取倒数, 有  $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ .

100.  $x$  换成  $\alpha x (\alpha > 0)$ , 有  $e^{\alpha x} \geq \alpha x + 1$ , 当  $1 + \alpha x > 0$  时, 两边同时开  $\alpha$  次方, 有  $e^x \geq (1 + \alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}$ .

101. \*  $e$  是自然对数的底数,  $n \in \mathbf{N}^+$ , 则

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

102. 对于三次函数  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , 对称中心的坐标为  $\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$ , 对称中心也是三次函数的拐点 (二阶导数为 0, 且二阶导数在此点左右异号)。

103. \* 对任意  $n$  次首一多项式  $P(x)$  (最高次项系数为 1 的多项式), 设  $M$  代表  $|P(x)|$  在区间  $[-1, 1]$  上的最大值, 那么无论其它项的系数怎么变化 (保持首一),  $M$  总是大于等于  $\frac{1}{2^{n-1}}$ .

104. \* 函数  $f(x)$  在  $x = x_0$  处的泰勒 (Taylor) 级数

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

当  $x_0 = 0$  时,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \cdots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \right)$$

105. 当  $|x| < 0.2$  时,  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$  ( $x$  可正可负). 而且  $|x|$  越小, 这个估算公式越精确。

$$\sqrt{1.1} = 1.048808 \cdots \approx 1 + \frac{1}{2} \times 0.1 = 1.05,$$

$$\sqrt{73} = 8.544003 \cdots = \sqrt{64+9} = \sqrt{64 \left(1 + \frac{9}{64}\right)} = 8\sqrt{1 + \frac{9}{64}} \approx 8 \left(1 + \frac{9}{2 \times 64}\right) = 8 + \frac{9}{2 \times 8} = 8\frac{9}{16}.$$

106. 拉格朗日中值定理: 如果函数  $f(x)$  满足: (1) 在闭区间  $[x_1, x_2]$  上连续; (2) 在开区间  $(x_1, x_2)$  内可导。

那么至少存在一点  $\xi \in (x_1, x_2)$ , 使得  $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ . (至少能作出一条和割线斜率相等的切线)。

107. \* 厄米特-哈达玛 (Hermite-Hadamard) 不等式:  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续且可积,  $\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2$ , 如果  $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$  (等价于  $f''(x) > 0$ ), 那么有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{1}{x_2-x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

108. \* 小于等于  $n$  的全部正整数的  $1 \sim 5$  次方的求和结果:

$$1^1 + 2^1 + 3^1 + \cdots + n^1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}$$

$1 \sim n$  的  $k$  次方求和结果是关于  $n$  的  $k+1$  次多项式, 多项式的系数从高次项到低次项依次为

$$\frac{1}{k+1}, \frac{1}{2}, \frac{k}{12}, 0, -\frac{k(k-1)(k-2)}{720}, \dots$$

以上这些求和公式可以写成如下通式,

$$1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k C_{k+1}^j B_j n^{k+1-j} + n^k \quad (1)$$

$$= \frac{1}{k+1} n^{k+1} + \frac{1}{2} n^k + \frac{k}{12} n^{k-1} + \cdots \quad (2)$$

$B_j$  为伯努利数,  $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42} \cdots$  伯努利数满足递推关系:  $0 = \sum_{j=0}^{n-1} C_n^j B_j (n \geq 2)$ . (1) 式实际上是欧拉-麦克劳林求和公式的一个特例。

109. 黎曼 zeta 函数:  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \ (s > 1),$   
 $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

110. 非整数次幂求和 (只有近似公式, 没有精确公式):

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^n l^{-1/2} &\leq \frac{2n^{1/2} - 1}{1} \\ \sum_{l=1}^n l^{-1/3} &\leq \frac{\frac{3}{2}n^{2/3} - \frac{1}{2}}{1} \\ \sum_{l=1}^n l^{1/3} &\leq \frac{\frac{3}{4}n^{4/3} + \frac{1}{2}n^{1/3} - \frac{1}{4}}{1} \\ \sum_{l=1}^n l^{1/2} &\leq \frac{\frac{2}{3}n^{3/2} + \frac{1}{2}n^{1/2} - \frac{1}{6}}{1}\end{aligned}$$

系数同样满足第108条中 (2) 式的规律, 只是其中的  $k$  不是正整数, 同时不要出现**负幂项**. 常数项的作用是提  
高近似公式的精度, 可通过令  $n = 1$  来确定常数项。

## 9 不等式

111. 糖水不等式: 若  $0 < b < a, c > 0$ , 则  $\frac{b}{a} < \frac{b+c}{a+c}.$

$$\frac{1}{a^k - 1} \leq \frac{1+1}{a^k - 1 + 1} = \frac{2}{a^k}$$

112. 设  $a, b, c, d$  均大于 0, 且  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ , 那么  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$

113. 设  $a > 1$ , 当  $k \geq 1$  时,  $a^k - 1 \geq a^k - a^{k-1} = (a-1)a^{k-1}$ ,  
所以

$$\frac{1}{a^k - 1} \leq \frac{1}{(a-1)a^{k-1}}$$

114. 伯努利不等式: 当  $x > -1$  时,

- 若  $\alpha > 1$ , 则  $(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x$ ;
- 若  $0 < \alpha < 1$ , 则  $(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x$ .

用数学归纳法或求导证明。

115. \* 广义伯努利不等式:

若  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0, n \geq 2$ , 则

$$\begin{aligned}(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \\ > 1 + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\end{aligned}$$

若  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, 1), n \geq 2$ , 则

$$\begin{aligned}(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n) \\ > 1 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\end{aligned}$$

用数学归纳法证明。

116.  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < \frac{x}{1 - \frac{2}{\pi}x} < x + \frac{x^3}{3} < \frac{3x}{3-x^2} < \tan x < \frac{x}{1 - \frac{2}{\pi}x}$$

117. \*  $x \in (0, 1),$

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} &< \frac{x}{\sqrt{1+\frac{2}{3}x^2}} < \sin x < \frac{x}{\sqrt{1+\frac{1}{3}x^2}} < x \\ &< \frac{x}{\sqrt{1-\frac{1}{3}x^2}} < \tan x < \frac{x}{\sqrt{1-\frac{2}{3}x^2}} < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

118.  $x \in \mathbf{R}, \cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$  (泰勒级数取前两项).

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \cos x < 1 - \frac{4x^2}{\pi^2}.$$

119.  $x \in (0, 1), e^{2x} < \frac{1+x}{1-x}.$

两边取自然对数, 有  $2x < \ln \frac{1+x}{1-x}.$

令  $t = \frac{1+x}{1-x} \in (1, +\infty)$ , 则  $x = \frac{t-1}{t+1}$ , 上面的不等式变为  $\frac{2(t-1)}{t+1} < \ln t.$

120.  $t \in (1, +\infty), \ln t < \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}.$

121. 对任意两个不等的正实数  $x_1, x_2$ , 有

$$\sqrt{x_1 x_2} < \frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} < \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$\frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1}$  称为对数平均值。把上式中的  $x_1$  换成  $e^{x_1}$ ,  $x_2$  换成  $e^{x_2}$ , 可得:

$$e^{\frac{x_1+x_2}{2}} < \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1} < \frac{e^{x_1} + e^{x_2}}{2}$$

122. 两变量均值不等式:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

123. \* 将上式推广到  $n$  变量情形:

调和均值 ( $H_n$ )  $\leq$  几何均值 ( $G_n$ )  $\leq$

算术均值 ( $A_n$ )  $\leq$  平方均值 ( $Q_n$ )

$$\begin{aligned}\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} &\leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \\ \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} &\leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}\end{aligned}$$

其中,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  均非负。

124. 给定  $\lambda a + \mu b = C$ , 求  $ab$  的最大值和  $\frac{k_1}{a} + \frac{k_2}{b}$  的最小值。其中,  $\lambda, \mu, C, k_1, k_2$  为正的常数,  $a, b$  为正的变量。

$$ab = \frac{1}{\lambda\mu}(\lambda a \cdot \mu b) \leq \frac{1}{\lambda\mu} \left( \frac{\lambda a + \mu b}{2} \right)^2 = \frac{C^2}{4\lambda\mu}$$



$$\begin{aligned}\frac{k_1}{a} + \frac{k_2}{b} &= \left( \frac{k_1}{a} + \frac{k_2}{b} \right) \cdot \frac{1}{C} (\lambda a + \mu b) \\ &= \frac{1}{C} \left( k_1 \lambda + k_2 \mu + k_1 \mu \frac{b}{a} + k_2 \lambda \frac{a}{b} \right)\end{aligned}$$

125. 若  $x \in \mathbf{R}$ , 则  $\sqrt{x^2+4} + \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \geq \frac{5}{2}$ .

126. \* 加权算术-几何均值不等式: 正数  $\lambda_k$  满足  $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$ , 且  $x_k \geq 0$ , 那么

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$$

127. 柯西不等式:

$\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ , 那么

$$\begin{aligned}|\vec{a} \cdot \vec{b}| &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \\ |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 &\leq |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2\end{aligned}$$

把上式转化为坐标表示:

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 \right)$$

128.  $a, b, c \in \mathbf{R}$ , 因为  $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$ , 所以,  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ .

129. \* 赫尔德 (Hölder) 不等式:  $p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $a_k \geq 0, b_k \geq 0, k = 1, 2 \cdots n$ , 那么

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

等号成立的条件是: 存在非 0 实数  $\lambda$ , 对任意  $k = 1, 2 \cdots n$  都有  $\lambda a_k = b_k$ . 当  $p = q = 2$  时, 就变成柯西不等式。

130. \* 闵可夫斯基 (Minkowski) 不等式:  $r > 0, r \neq 1, a_k > 0, b_k > 0$ , 那么

$$\begin{aligned}\left[ \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^r \right]^{\frac{1}{r}} &\leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^r \right)^{\frac{1}{r}} + \left( \sum_{k=1}^n b_k^r \right)^{\frac{1}{r}} \quad (r > 1) \\ \left[ \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^r \right]^{\frac{1}{r}} &\geq \left( \sum_{k=1}^n a_k^r \right)^{\frac{1}{r}} + \left( \sum_{k=1}^n b_k^r \right)^{\frac{1}{r}} \quad (r < 1)\end{aligned}$$

以上两式等号成立的条件都是: 存在非 0 实数  $\lambda$ , 对任意  $k = 1, 2 \cdots n$  都有  $\lambda a_k = b_k$ .

131. 含根号的缩放:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}{2\sqrt{k}} &> \frac{\sqrt{k+\frac{1}{2}} + \sqrt{k-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{k}} > \\ \frac{\sqrt{k+1} + \sqrt{k-1}}{2\sqrt{k}} &> \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}{2\sqrt{k}}\end{aligned}$$

以上各项除  $2\sqrt{k}$  外, 取倒数后均可裂项。

132. 含平方的缩放:

$$\begin{aligned}\frac{k(k+1)}{k^2+1} &\geq k^2+1 > k^2 > \frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)}{(k-1)(k+1)} \\ &\geq \frac{k(k-1)}{(k-1)(k+1)}\end{aligned}$$

以上各项除  $k^2+1$  和  $k^2$  外, 取倒数后均可裂项。

133. 正整数倒数求和缩放:

$$\frac{\ln(n+1)}{1} < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < \frac{1+\ln n}{n}$$

## 10 数列

134. 设  $\{a_n\}$  是公差为  $d$  的等差数列,  $S_n$  是其前  $n$  项和,

- 若  $m+n=s+t$ , 则  $a_m+a_n = a_s+a_t$ ;
- $S_{m+n} = S_m + S_n + mnd$ ;
- $\frac{S_{2n-1}}{a_n} = \frac{2n-1}{1}$ ;
- $m \neq n$ ,  $\frac{S_m - S_n}{m-n} = \frac{S_{m+n}}{m+n} = \frac{d}{2}(m+n) + (a_1 - \frac{d}{2})$ ;
- $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n} \cdots$  是公差为  $n^2d$  的等差数列;
- 在前  $2n$  项中,  $\frac{\text{奇数项之和}}{\text{偶数项之和}} = \frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}}{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ ;
- 在前  $2n+1$  项中,  $\frac{\text{奇数项之和}}{\text{偶数项之和}} = \frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1}}{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}} = \frac{n+1}{n}$ ;

135. 等比数列  $a_n = a_1 x^{n-1}$  的求和公式: 当  $x \neq 1$  时,  $S_n = \frac{a_1(1-x^n)}{1-x} = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-x}$ . 若  $|x| < 1$ , 则  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ .

136. 等差乘以等比型数列求和 ( $x \neq 1$ ):

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

当  $|x| < 1$  时,

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

对上式求导,

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

因为  $k^2 x^{k-1} = x \cdot k(k-1)x^{k-2} + kx^{k-1}$ , 所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1} &= \frac{1+x}{(1-x)^3} \\ \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}\end{aligned}$$

137. 常见裂项方法:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n(n+k)} &= \frac{1}{k} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right) \\ \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] \\ \frac{1}{4n^2-1} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+k}} &= \frac{1}{k} (\sqrt{n+k} - \sqrt{n}) \\ \frac{a^n}{(a^n+1)(a^{n+1}+1)} &= \frac{1}{a-1} \left( \frac{1}{a^n+1} - \frac{1}{a^{n+1}+1} \right)\end{aligned}$$

138. \* 阿贝尔 (Abel) 求和公式: 数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  的前  $n$  项和分别为  $A_n, B_n$ , 那么

$$\sum_{k=1}^n A_k b_k + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} B_k = A_n B_n \quad (3)$$

139. 如果  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上满足下列 2 个条件, 则称  $f(x)$  为一个压缩函数。

(1) 任意  $x \in [a, b]$ , 有  $f(x) \in [a, b]$ ;

(2) 任意  $x, y \in [a, b]$ , 存在常数  $L \in (0, 1)$ , 使得  $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ .

140. 压缩映像原理: 如果  $f(x)$  是区间  $[a, b]$  上的压缩函数, 那么必定存在唯一的  $X \in [a, b]$ , 满足方程  $X = f(X)$ ,  $X$  被称为  $f(x)$  的不动点。

141.  $A > 0, B > 0$ , 记  $f(x) = \sqrt{Ax + B}$ ,  $g(x) = A + \frac{B}{x}$ , 数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1 > 0, a_{n+1} = f(a_n) = \sqrt{Aa_n + B}$ , 数列  $\{b_n\}$  满足:  $b_1 > 0, b_{n+1} = g(b_n) = A + \frac{B}{b_n}$ , 那么数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  的不动点均为  $\frac{A + \sqrt{A^2 + 4B}}{2}$ .

142. 对于一阶线性递推数列  $a_{n+1} = Aa_n + B$  ( $A \neq 1$ ), 先解方程  $x = Ax + B$ , 然后递推公式两边减去  $x$ ,  $a_{n+1} - x = A(a_n - x)$ , 这样就转化成了等比数列。

143.  $a_{n+1} = Aa_n + Bq^n$ . 两边同除  $q^n$ , 有  $\frac{a_{n+1}}{q^n} = \frac{A}{q} \frac{a_n}{q^{n-1}} + B$ , 这样就转化成了上一条中的一阶线性递推数列。

144.  $a_{n+1} = Aa_n^2$ , 则  $Aa_{n+1} = (Aa_n)^2 = \dots = (Aa_1)^{2^n}$ .

145.  $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$ . 两边同时加 1,  $a_{n+1} + 1 = (a_n + 1)^2$ .

146.  $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2$ . 两边同时减 1,  $a_{n+1} - 1 = (a_n - 1)^2$ .

147.  $a_{n+1} = \frac{Aa_n}{Ca_n + D}$ , 两边取倒数,  $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{D}{A} \frac{1}{a_n} + \frac{C}{A}$ , 那么  $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$  为一阶线性递推数列。

148. \* 设  $p > 1, a < 0$ , 当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) \approx x + ax^p$ , 定义数列  $a_{n+1} = f(a_n)$ , 如果对任意的正整数  $n$ , 都有  $a_n > 0$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n^{p-1} = \frac{1}{a(1-p)}$$

如果  $a_n > 0$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , 那么可以做倒代换  $b_n = \frac{1}{a_n}$ , 然后对  $b_n$  应用上式。

149. 对于二阶线性递推数列  $a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n$ , 先解特征方程  $x^2 = Ax + B$ , 假设有两个不等的根  $x_1, x_2$  (可以为复数), 那么

$$\begin{aligned}a_{n+2} - x_2 a_{n+1} &= x_1 (a_{n+1} - x_2 a_n) = \dots \\ &= x_1^n (a_2 - x_2 a_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{n+2} - x_1 a_{n+1} &= x_2 (a_{n+1} - x_1 a_n) = \dots \\ &= x_2^n (a_2 - x_1 a_1)\end{aligned}$$

150. 分式线性递推数列  $a_{n+1} = \frac{Aa_n + B}{Ca_n + D}$ , 先解方程  $x = \frac{Ax + B}{Cx + D}$ , 假设有两个不等的根  $x_1, x_2$  (可以为复数), 那么

$$\begin{aligned}a_{n+1} - \alpha &= \frac{Aa_n + B - \alpha(Ca_n + D)}{Ca_n + D} \\ &= \frac{(A - C\alpha)(a_n - \alpha)}{Ca_n + D} \\ a_{n+1} - \beta &= \frac{Aa_n + B - \beta(Ca_n + D)}{Ca_n + D} \\ &= \frac{(A - C\beta)(a_n - \beta)}{Ca_n + D}\end{aligned}$$

两式相除可得:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1} - \alpha}{a_{n+1} - \beta} &= \left( \frac{A - C\alpha}{A - C\beta} \right) \cdot \frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta} = \dots \\ &= \left( \frac{A - C\alpha}{A - C\beta} \right)^n \cdot \frac{a_1 - \alpha}{a_1 - \beta}\end{aligned}$$

151. \* 分式非线性递推数列,  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{A^2}{a_n} \right)$ , 假设  $a_1 \neq \pm A$ ,

$$\begin{aligned}a_{n+1} - A &= \frac{a_n^2 + A^2 - 2Aa_n}{2a_n} = \frac{(a_n - A)^2}{2a_n} \\ a_{n+1} + A &= \frac{a_n^2 + A^2 + 2Aa_n}{2a_n} = \frac{(a_n + A)^2}{2a_n} \\ \frac{a_{n+1} - A}{a_{n+1} + A} &= \frac{(a_n - A)^2}{(a_n + A)^2} = \dots = \frac{(a_1 - A)^{2^n}}{(a_1 + A)^{2^n}}\end{aligned}$$

## 11 解析几何

152. 直线的方程:

一般式方程:  $Ax + By + C = 0$  ;点法式方程:  $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$  ;斜截式方程:  $y = kx + b$  ;点斜式方程:  $y - y_0 = k(x - x_0)$  ;截距式方程:  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  ;两点式方程:  $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  .153. 直线的参数方程:  $\begin{cases} x = x_0 + t \cos \phi \\ y = y_0 + t \sin \phi \end{cases}$ ,  $\phi$  是直线的倾斜角,  $|t|$  表示直线上任一点到  $(x_0, y_0)$  的距离. 更一般地,可以写成  $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ , 若  $a^2 + b^2 \neq 1$ , 则此时的  $|t|$ 

不再表示距离, 这一点需要注意.

154. 点  $(x_0, y_0)$  到直线  $Ax + By + C = 0$  的距离公式:  $\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$  .155. 两条平行直线  $Ax + By + C_1 = 0$  和  $Ax + By + C_2 = 0$  的距离公式:  $\frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$  .

156. 平面的方程:

一般式方程:  $Ax + By + Cz + D = 0$  ;点法式方程:  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$  ;截距式方程:  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  .157. 点  $(x_0, y_0, z_0)$  到平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  的距离公式:  $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$  .158. 设二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的两根为  $x_1, x_2$ , 判别式为  $\Delta$ , 则  $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ ,  $x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$  .159. 椭圆和双曲线的准线方程是  $x = \pm \frac{a^2}{c}$  .160. 点差法, 在椭圆上取不同的两点  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ , 则

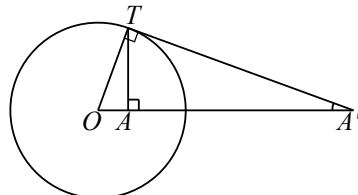
$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

两式相减, 有  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)}$  .如果是双曲线, 则  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)}$  .161. 圆锥曲线 (不包括圆) 的统一极坐标方程:  $\rho = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}$  .  $p$  代表焦点到准线的距离.  $e$  是离心率. 椭圆:  $0 < e < 1$ ; 抛物线:  $e = 1$ ; 双曲线:  $e > 1$ .过焦点且倾斜角为  $\theta$  的弦的长度为  $\frac{2ep}{1 - e^2 \cos^2 \theta}$  .162. 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的参数方程:  $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$  .163. \* 椭圆的顶投影参数方程, 设椭圆的上顶点为  $N(0, b)$ , 在  $x$  轴上任取一点  $U(u, 0)$ , 过  $N, U$  两点的直线与椭圆的除  $N$  以外的交点为  $P(x, y)$ , 则

$$\begin{cases} x = a \cdot \frac{2au}{u^2 + a^2} \\ y = b \cdot \frac{u^2 - a^2}{u^2 + a^2} \end{cases}$$

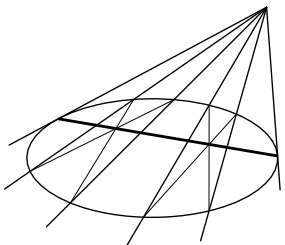
164. 双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的参数方程:  $\begin{cases} x = \frac{a}{\cos \theta} \\ y = b \tan \theta \end{cases}$  .165. 抛物线  $y^2 = 2px$  的参数方程:  $\begin{cases} x = \frac{2pt^2}{2} \\ y = 2pt \end{cases}$  .166. \* 平摆线参数方程:  $\begin{cases} x = R(\theta - \sin \theta) \\ y = R(1 - \cos \theta) \end{cases}$  .167. \* 圆的渐开线参数方程:  $\begin{cases} x = R(\cos \theta + \theta \sin \theta) \\ y = R(\sin \theta - \theta \cos \theta) \end{cases}$  .168. 椭圆面积公式为  $\pi ab$ , 而不是  $\frac{1}{2}\pi(a^2 + b^2)$ ; 椭球  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的体积公式为  $\frac{4}{3}\pi abc$ , 而不是  $\frac{4}{9}\pi(a^3 + b^3 + c^3)$ .

169. 到平面上两定点的距离之比为不等于 1 的定值的点的轨迹是圆 (称为“阿波罗尼奥斯圆”).

170.  $\odot O$  的半径是  $R$ , 且  $O, A, A'$  三点共线, 如果  $|OA| \cdot |OA'| = R^2$ , 则  $A$  点与  $A'$  点互为“反演点”.171. 椭圆上一点  $(x_0, y_0)$  的切线斜率为  $-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$ , 切线方程为  $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$  (换一半).172. 双曲线上一点  $(x_0, y_0)$  的切线斜率为  $\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$ , 切线方程为  $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$  (换一半).

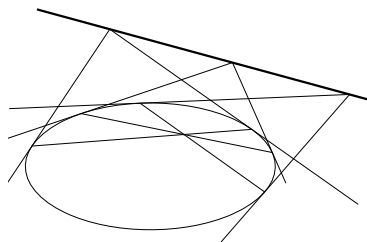
173. 抛物线  $y^2 = 2px$  上一点  $(x_0, y_0)$  的切线斜率为  $\frac{p}{y_0}$ , 切线方程为  $yy_0 = p(x + x_0)$  (换一半)。

174. 当点  $(x_0, y_0)$  在椭圆外部时, 直线  $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$  表示椭圆的切点弦, 即从点  $(x_0, y_0)$  向椭圆作两条切线, 连接两个切点得到的弦。

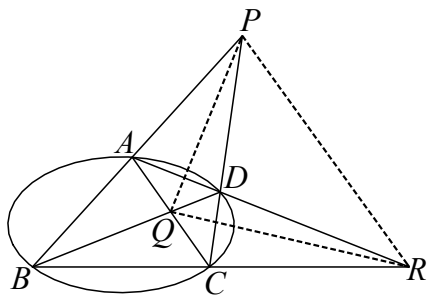


从点  $(x_0, y_0)$  出发作椭圆的两条割线, 与椭圆有 4 个交点, 那么以这 4 个交点为顶点的四边形的对角线交点也在切点弦上。

175. 当点  $(x_0, y_0)$  在椭圆内部时, 直线  $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$  与椭圆相离, 从直线  $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$  上的点向椭圆作两条切线, 则切点弦过定点  $(x_0, y_0)$ 。



176. 椭圆上有不同的四点  $A, B, C, D$ , 假设  $AB$  与  $CD$  所在的直线交于  $P$  点,  $AD$  与  $BC$  所在的直线交于  $R$  点,  $AC$  与  $BD$  交于  $Q$  点, 则  $P$  点的极线是  $QR$ ,  $Q$  点的极线是  $PR$ ,  $R$  点的极线是  $PQ$ ,  $\triangle PQR$  称为自极三角形。



177. 判断直线  $l: Ax + By + C = 0$  与椭圆的位置关系, 将直线方程变形为

$$\frac{\left(-\frac{Aa^2}{C}\right)x}{a^2} + \frac{\left(-\frac{Bb^2}{C}\right)y}{b^2} = 1$$

设  $P\left(-\frac{Aa^2}{C}, -\frac{Bb^2}{C}\right)$ , 当  $P$  点在椭圆内部时 (即  $A^2a^2 + B^2b^2 < C^2$ ), 直线  $l$  与椭圆相离; 当  $P$  点在椭圆

圆上时, 直线  $l$  与椭圆相切; 当  $P$  点在椭圆外部时, 直线  $l$  与椭圆相交。

178. 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的性质:

- 在椭圆外一点向椭圆做两条切线, 切线夹角保持为  $\frac{\pi}{2}$  时, 切线交点的轨迹方程为  $x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2$  (蒙日圆, 外准圆)

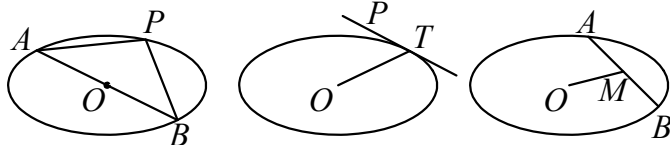
- 从椭圆中心  $O$  引出两条相互垂直的向径, 与椭圆分别交于  $P, Q$  两点, 从  $O$  点向  $PQ$  作垂线, 垂足为  $H$ , 那么  $H$  点的轨迹也是一个圆 (内准圆), 圆的方程为  $x^2 + y^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$ . 斜边长度  $|PQ|$  的取值范围是:

$$\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq |PQ| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

$\triangle OPQ$  的面积取值范围是:

$$\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \leq S_{\triangle OPQ} \leq \frac{1}{2}ab$$

- 以下三种情形, 斜率之积为定值。



$$k_{AP} \cdot k_{BP} = k_{OT} \cdot k_{PT} = k_{OM} \cdot k_{AB} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

- $AB, CD$  是椭圆的两条相交弦, 交点为  $P$ , 且  $AB, CD$  的斜率互为相反数, 则  $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$ .

- \* 椭圆上任意一点  $P(x_0, y_0)$ , 过  $P$  点作两条相互垂直的直线, 这两条直线与椭圆的除  $P$  点之外的交点分别是  $Q, R$ , 那么线段  $QR$  过定点

$$\left(\frac{(a^2 - b^2)x_0}{a^2 + b^2}, -\frac{(a^2 - b^2)y_0}{a^2 + b^2}\right)$$

- \* 过椭圆内部一点  $M(x_0, y_0)$  作椭圆的两条垂直弦  $PQ, RS$ , 弦  $PQ, RS$  的中点分别为  $K, L$ , 那么线段  $KL$  过定点

$$\left(\frac{a^2x_0}{a^2 + b^2}, \frac{b^2y_0}{a^2 + b^2}\right)$$

- 椭圆上任意一点  $P(x_0, y_0)$ , 过  $P$  点作两条斜率互为相反数的直线, 这两条直线与椭圆的除  $P$  点之外的交点分别是  $Q, R$ , 那么直线  $QR$  的斜率是定值, 且与过  $P$  的切线的斜率互为相反数。

- 在椭圆的长轴  $AB$  上有一定点  $M(m, 0)$ , 过点  $M$  作椭圆的弦  $CD$ , 记直线  $AC, BD$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ , 则

①  $\frac{k_1}{k_2}$  是定值;

②  $AC, BD$  延长线的交点的轨迹方程是  $x = \frac{a^2}{m}$ , 即点  $M$  关于椭圆的极线;

③ 设②中的极线与  $AB$  延长线的交点为  $H$ , 则  $CH, DH$  的斜率互为相反数。

- $P$  为椭圆上一点,  $F_1, F_2$  是椭圆的左右焦点,  $\angle F_1PF_2 = \theta$ , 则  $S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{b^2 \tan \frac{\theta}{2}}{2}$ .
  - $F_1, F_2$  是椭圆的两个焦点, 椭圆上一点  $P$  处的切线  $PT$  平分  $\triangle PF_1F_2$  在点  $P$  处的外角. 焦点在直线  $PT$  上的投影点的轨迹是以长轴为直径的圆. 以  $PF_1$  (或  $PF_2$ ) 为直径的圆必与以长轴为直径的圆 内切.
  - 设椭圆的左右两个顶点为  $A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$ , 与  $y$  轴平行的直线交椭圆于  $P_1, P_2$  时,  $A_1P_1$  与  $A_2P_2$  的交点的轨迹方程是  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .
179. 双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的性质:
- 从不在双曲线上的一点做双曲线的两条切线, 如果两条切线垂直, 那么切线交点的轨迹也是一个圆 (蒙日圆, 外准圆), 圆的方程为  $x^2 + y^2 = |a^2 - b^2|$ .
  - 从双曲线的中心  $O$  引出两条相互垂直的向径, 与双曲线分别交于  $P, Q$  两点, 从  $O$  点向  $P, Q$  作垂线, 垂足为  $H$ , 那么  $H$  点的轨迹也是一个圆 (内准圆), 内准圆的方程是  $x^2 + y^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 - a^2}$ . 双曲线内准圆存在的充要条件是虚轴大于实轴, 即离心率大于  $\sqrt{2}$ .
  - \* 双曲线上任意一点  $P(x_0, y_0)$ , 过  $P$  点作两条相互垂直的直线, 这两条直线与双曲线的除  $P$  点之外的交点分别是  $Q, R$ , 那么线段  $QR$  过定点.  

$$\left( \frac{(a^2 + b^2)x_0}{a^2 - b^2}, -\frac{(a^2 + b^2)y_0}{a^2 - b^2} \right)$$
必须满足  $a \neq b$ , 定点才存在.
  - \* 过平面上任意一点  $M(x_0, y_0)$  作双曲线的两条垂直弦  $PQ, RS$ , 弦  $PQ, RS$  的中点分别为  $K, L$ , 那么线段  $KL$  过定点.  

$$\left( \frac{a^2x_0}{a^2 - b^2}, -\frac{b^2y_0}{a^2 - b^2} \right)$$
必须满足  $a \neq b$ , 定点才存在.
  - 双曲线上任意一点  $P(x_0, y_0)$ , 过  $P$  点作两条斜率互为相反数的直线, 这两条直线与双曲线的除  $P$  点之外的交点分别是  $Q, R$ , 那么直线  $QR$  的斜率是定值, 且与过  $P$  的切线的斜率互为 相反数.
  - $P$  为双曲线上一点,  $F_1, F_2$  是双曲线的左右焦点,  $\angle F_1PF_2 = \theta$ , 则  $S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{b^2}{\tan \frac{\theta}{2}}$ .
  - 设  $k > 0$ , 则等轴双曲线  $y = \frac{k}{x}$  的实半轴和虚半轴的长度均为  $\sqrt{2k}$ , 焦点坐标是  $(\pm\sqrt{2k}, \pm\sqrt{2k})$ .
180. 抛物线  $y^2 = 2px$  的性质:
- 抛物线的焦点为  $F$ , 顶点为  $O$ , 过焦点的直线与抛物线交于  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$  两点, 则  

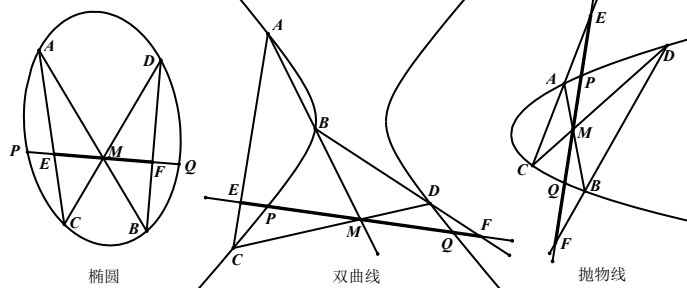
$$\frac{1}{|FP|} + \frac{1}{|FQ|} = \frac{1 - \cos \theta}{p} + \frac{1 + \cos \theta}{p} = \frac{2}{p};$$

$$|FP| + |FQ| = \frac{p}{1 - \cos \theta} + \frac{p}{1 + \cos \theta} = \frac{2p}{\sin^2 \theta};$$

$$y_1y_2 = -p^2, x_1x_2 = \frac{y_1^2}{2p} \cdot \frac{y_2^2}{2p} = \frac{p^2}{4};$$

$$S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{2} \cdot \left( \frac{2p}{\sin^2 \theta} \cdot \sin \theta \right) = \frac{p^2}{2 \sin \theta}.$$
  - 抛物线的对称轴上有一个固定点  $M(x_0, 0)$ , 过  $M$  的直线与抛物线交于  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$  两点, 则  

$$y_1y_2 = -2px_0, x_1x_2 = \frac{y_1^2}{2p} \cdot \frac{y_2^2}{2p} = x_0^2.$$
  - 抛物线的顶点为  $O, A, B$  两点在抛物线上, 若  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -p^2$ , 则直线  $AB$  过定点  $(p, 0)$ .
  - 从准线上的一点  $P\left(-\frac{p}{2}, y_0\right)$  向抛物线作两条切线, 设切点分别为  $Q, R$ , 则这两条切线  $PQ, PR$  相互 垂直. 设抛物线焦点为  $F$ , 那么  $QR$  恒过 焦点, 且  $PF \perp QR$ .
  - 抛物线上任意一点  $P(x_0, y_0)$ , 过  $P$  点作两条相互垂直的直线, 这两条直线与抛物线的除  $P$  点之外的交点分别是  $Q, R$ , 那么线段  $QR$  过定点  $(x_0 + 2p, -y_0)$ .
  - 抛物线上任意一点  $P(x_0, y_0)$ , 过  $P$  点作两条斜率互为相反数的直线, 这两条直线与抛物线的除  $P$  点之外的交点分别是  $Q, R$ , 那么直线  $QR$  的斜率是定值, 且与过  $P$  的切线的斜率互为 相反数.
181. \* 彭赛列 (Poncelet) 闭合定理: 给定两条圆锥曲线  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$ , 若存在一个  $n$  ( $n \geq 3$ ) 边形满足: 内接于  $\Gamma_1$  且外切于  $\Gamma_2$ , 则必然存在无数个这样的  $n$  边形满足该性质 (同时内接和外切).
182. \* 三角形的内心和外心的距离为  $\sqrt{R(R-2r)}$ , 其中  $R$  为外接圆半径,  $r$  为内切圆半径. 假设一个半径为  $r$  的小圆位于一个半径为  $R$  大圆的内部 (两个圆没有交点), 若  $2r < R$  且两个圆的圆心距恰好等于  $\sqrt{R(R-2r)}$ , 那么存在无穷多个三角形, 分别以这两个圆为内切圆和外接圆.
183. \* 蝴蝶定理: 在圆锥曲线中, 过弦  $PQ$  的中点  $M$  任作两条弦  $AB, CD$ , 直线  $AC, BD$  交  $PQ$  于点  $E, F$ , 则  $ME = EF$ .



## 12 零散考点

184.  $\pi \approx 3.141592653$  的分数近似值:

$$\frac{22}{7} \approx 3.142857, \quad \frac{355}{113} \approx 3.14159292.$$

185. 三次方程韦达定理: ( $a \neq 0$ ),

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a};$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a};$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

186. 因式分解:

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$= (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$$

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

187. 锥体 (圆锥、棱锥) 体积公式:  $V = \frac{1}{3}Sh$ ,  
 $S$  为底面积,  $h$  为锥体高度。

188. 圆台或棱台的体积:  $V = \frac{1}{3}(S + \sqrt{SS'} + S')h$ ,  
 $S, S'$  为两个底面积,  $h$  为台体高度 (两个底面间的距离)。

189. 球的表面积  $S = 4\pi R^2$ , 球的体积  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ .