带 * 表示难度较大或者不方便设置待填空白的知识点。

数学软件：

网页版：GeoGebra(https://www.geogebra.org/)

Desmos(https://www.desmos.com).

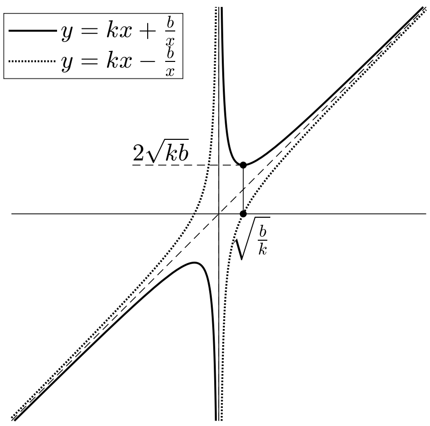
App：MathStudio.

1 函数

1. 求 $y=\dfrac{Ax+B}{Cx+D}$ $(AD-BC\neq 0)$ 的值域 (只需写出计算方法，无需具体结果)：

____.

2. 设 $k>0$, $b>0$，则 $y=kx+\dfrac{b}{x}$ 与 $y=kx-\dfrac{b}{x}$ 的图像如下，这两种函数都是双曲线，



当 $x>0$ 时，$y=kx+\dfrac{b}{x}$ 在 $x=$ ________ 处取得极小值____________；$y=kx-\dfrac{b}{x}$ 的零点是 $x=$ ________.

3. 求 $y=\dfrac{x^2+Ax+B}{x+C}$ ①或 $y=\dfrac{x+C}{x^2+Ax+B}$ ②的值域 (若分子或分母的最高次项系数不为 1，则先将系数提取出来)，方法一：换元 ____________；
方法二：__________，以①式为例写出主要过程：要绘

制①或②的图像，可以先绘制 $y=(x^2+Ax+B)(x+C)$ 的图像，因为这个三次函数的正负号与①或②式的正负号是一致的。

4. 求 $y=\dfrac{\sqrt{Ax^2+B}}{Cx^2+D}$ 的值域，先提取系数，
$y=\dfrac{\sqrt{A}}{C}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+\frac{B}{A}}}{x^2+\frac{D}{C}}$，换元，$t=$ ____________，那么
$x^2=t^2-\dfrac{B}{A}$,
$$y=\frac{\sqrt{A}}{C}\cdot\frac{t}{t^2-\dfrac{B}{A}+\dfrac{D}{C}}=\frac{\sqrt{A}}{C}\cdot\frac{1}{t+\left(\dfrac{D}{C}-\dfrac{B}{A}\right)\dfrac{1}{t}}$$

5. 给定 4 个实数 x_1,x_2,x_3,x_4，其中任意两个都不相等，设 $y_i=\dfrac{Ax_i+B}{Cx_i+D}$，$(AD-BC\neq 0,\ i=1,2,3,4)$，那么，
$$\frac{(y_1-y_3)(y_2-y_4)}{(y_1-y_4)(y_2-y_3)}=\frac{(x_1-x_3)(x_2-x_4)}{(x_1-x_4)(x_2-x_3)}$$

6. $y=|x-b_1|+|x-b_2|+\cdots+|x-b_n|$,假设 $b_1<b_2<\cdots<b_n$，如果 n 是偶数，那么最小值在区间 ____________ 内取得；如果 n 是奇数，那么最小值在____________处取得。

7. 恒成立问题或有解问题 ($\exists$ 表示存在，$\forall$ 表示任意。$f(x)_{\max},f(x)_{\min}$ 分别表示 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上的最大值、最小值。)
$$\exists\ x_0\in(a,b),\ f(x_0)>m\ \Rightarrow\ \underline{\hspace{3cm}}$$
$$\exists\ x_0\in(a,b),\ f(x_0)<m\ \Rightarrow\ \underline{\hspace{3cm}}$$
$$\forall\ x\in(a,b),\ f(x)<m\ \Rightarrow\ \underline{\hspace{3cm}}$$
$$\forall\ x\in(a,b),\ f(x)>m\ \Rightarrow\ \underline{\hspace{3cm}}$$

8. 对数运算法则：
$\log_a(MN)=$____________.
$\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right)=$____________.
$\log_a M^n=$__________，　$\log_{a^n}M=$__________.
换底公式：$\log_a M=$____________.

9. 常见函数方程 (写出符合以下等式的函数)：
$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ ________
$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ ________
$f(x_1x_2)=f(x_1)f(x_2)$ ________
$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$ ________
$f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ ________
$f(x_1x_2)=x_2f(x_1)+x_1f(x_2)$ ________
$f(x_1+x_2)+f(x_1-x_2)=2\lambda f(x_1)f(x_2)$ ________
$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)+2\lambda x_1x_2$ ________

10. * $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 或 $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$，则
$$f(x_1)+f(x_2)=f\left(\underline{\hspace{2cm}}\right)$$

11. $\arctan x_1+\arctan x_2=$ ____________.

12. 函数凹凸性，填“<”或“>”，请结合图像记忆。

$x_1,x_2\in(0,\pi)$，$x_1\neq x_2$，

$$\frac{1}{2}(\sin x_1+\sin x_2)\underline{\qquad}\sin\frac{x_1+x_2}{2}$$

$x_1,x_2\in(0,\frac{\pi}{2})$，$x_1\neq x_2$，

$$\frac{1}{2}(\tan x_1+\tan x_2)\underline{\qquad}\tan\frac{x_1+x_2}{2}$$

$x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$x_1\neq x_2$，

$$\frac{\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_2}}{2}\underline{\qquad}\mathrm{e}^{\frac{x_1+x_2}{2}}$$

$x_1,x_2\in(0,+\infty)$，$x_1\neq x_2$，

$$\frac{\ln x_1+\ln x_2}{2}\underline{\qquad}\ln\frac{x_1+x_2}{2}$$

$x_1,x_2\in(0,+\infty)$，$x_1\neq x_2$，$\alpha\in\mathbf{R}$，$\alpha>1$，

$$\frac{x_1^\alpha+x_2^\alpha}{2}\underline{\qquad}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^\alpha$$

13. 若 $f(x)$ 满足 $f(x)=\pm\dfrac{1}{f(x+a)}$，那么 $f(x)$ 的一个周期是______.

14. 若 $f(x)$ 满足 $f(x+a)=f(b-x)$，则 $f(x)$ 的一条对称轴是 __________.

15. 如果 $f(x)$ 同时具有对称轴 $x=a$ 和对称中心 (b,c)，且 $a\neq b$，那么 $f(x)$ 具有周期 $T=$______.

16. 三变量均值不等式：设 $a,b,c\geqslant 0$，则 $\dfrac{a+b+c}{3}\geqslant$ ______.

17. 设 $a,b>0,x>0$，利用上面的三变量均值不等式，有：
$ax^2+\dfrac{b}{x}=ax^2+\dfrac{b}{2x}+\dfrac{b}{2x}\geqslant$ __________；
$ax+\dfrac{b}{x^2}=\dfrac{1}{2}ax+\dfrac{1}{2}ax+\dfrac{b}{x^2}\geqslant$ __________.

18. 零点存在定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，且 $f(a)\cdot f(b)$______,则一定存在 $x_0\in(a,b)$,使 $f(x_0)=0$. 此定理为二分法找函数零点的理论基础。

19. * 记 $f_0(x)=x$，$f_1(x)=f(x)$，$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$. 称 $f_n(x)$ 为函数 $f(x)$ 的 n 次迭代。

$f(x)$	$f_n(x)$
$x+2\sqrt{x}+1$	
$\dfrac{x}{a+bx}$	
$\sqrt[k]{ax^k+b}$	
x^2+2x	
$\dfrac{x^2}{2x-1}$	$\dfrac{x^{2^n}}{x^{2^n}-(x-1)^{2^n}}$

20. $f_1(x)=f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$，$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$，$n\in\mathbf{N}^+$，$k\in\mathbf{N}$，则 $f_{4k+1}(x)=$______，$f_{4k+2}(x)=$______，$f_{4k+3}(x)=$______，$f_{4k+4}(x)=$______.

2　排列、组合与二项式定理

21. 排列数：$P_n^k=$__________，或者写成 A_n^k.

22. 组合数：$C_n^k=C_n^{n-k}=$__________.
递推关系：$C_n^k+C_n^{k-1}=$__________.

23. 二项式定理：$(a+b)^n=$ __________.

24. $(a+b+c)^2=$____________________.
$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})^2$ 的结果类似。

25. 杨辉三角：

1

1　1

1　2　1

____

____

____

____

第 $n+1$ 行的系数之和为 $\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k=$__________.

26. * 偶数件不同物品中选出奇数件物品的方法数 $C_{2n}^1,C_{2n}^3,C_{2n}^5,\cdots$ 都是 ____ 数。(填“奇”或“偶”)

27. * 组合恒等式：

$$\sum_{k=r}^{n}C_k^r=\underline{\qquad\qquad},\quad \sum_{k=0}^{r}C_m^kC_n^{r-k}=\underline{\qquad\qquad}$$

$$\sum_{k=1}^{n}kC_n^k=\underline{\qquad\qquad},\quad \sum_{k=1}^{n}k^2C_n^k=\underline{\qquad\qquad}$$

28. * 设 n 个元素错排的方案数为 D_n，$D_1=0$，$D_2=1$，则

$$D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$$

$$D_n-nD_{n-1}=-[D_{n-1}-(n-1)D_{n-2}]=(-1)^n$$

$$\frac{D_n}{n!}-\frac{D_{n-1}}{(n-1)!}=\frac{(-1)^n}{n!}$$

$$D_n=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right]$$

29. $\left(ax^\alpha+bx^\beta\right)^n$ 展开式的通项为

$$T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^rx^{(n-r)\alpha+r\beta},$$

设 $C_n^m a^{n-m} b^m$ 是最大的系数，则

$$\begin{cases} C_n^m a^{n-m} b^m \geqslant \underline{\qquad\qquad\qquad} \\ C_n^m a^{n-m} b^m \geqslant \underline{\qquad\qquad\qquad} \end{cases}$$

3 概率论与数理统计

30. 给定正整数集合 $S = \{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$，定义多项式 $f(x) = (1+x^{k_1})(1+x^{k_2})\cdots(1+x^{k_n})$，则 $f(x)$ 的展开式中，__________ 恰好等于从集合 S 中选出元素总和为 m $(m \in \mathbf{N})$ 的子集的方法数。

31. 数学期望 (或均值) 的定义：$E(X) =$ __________，
性质：$E(aX+b) =$ __________.
方差：$D(X) = E\{[X - E(X)]^2\} =$ __________，
性质：$D(aX+b) =$ __________.

32. 伯努利大数定律: 独立地重复一个伯努利试验 n 次, 当 n 很大时，频率逼近概率。

33. 概率加法公式：

$$P(A_1 \cup A_2) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

34. 条件概率公式：$P(B \mid A) =$ __________.
概率乘法公式：$P(A \cap B) =$ __________.
若 A, B 相互独立，则 $P(A \cap B) =$ __________.

35. 全概率公式：$P(A) =$ ______________.

36. * 贝叶斯公式:

$$P(\Omega_i \mid A) = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

37. 二项分布 $b(n,p)$：每次实验时，事件 A 发生的概率为 p，那么在 n 次实验中事件 A 发生 k 次的概率为 $P\{X=k\} =$__________. 数学期望为______，方差为__________.

38. * 几何分布:在 n 次伯努利试验中,试验 k 次才得到第一次成功的概率，$P\{X=k\} = (1-p)^{k-1}p$，$k \in \mathbf{N}^+$，$0 < p < 1$. 数学期望为______，方差为__________.

39. 超几何分布：共有 N 件产品，其中有 $D(D \leqslant N)$ 件次品，从中任取 $n(n \leqslant N)$ 件，其中恰有 $k(k \leqslant D)$ 件次品的概率：$P\{X=k\} =$ __________. 数学期望为______，方差为 $\dfrac{nD}{N}\left(1-\dfrac{D}{N}\right)\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)$.

40. 正态分布：$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$\mu \in \mathbf{R}$，$\sigma > 0$. 数学期望为 ______，方差为 ______. 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim$ ________ (标准正态分布).

41. 最小二乘法，回归直线 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$.

$$\hat{b} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}$$

$$= \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x}$$

回归直线通过散点图的几何中心 $(\overline{x}, \overline{y})$.

42. 样本相关系数

$$r = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 - n\overline{y}^2}}$$

$$= \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \cdot \sqrt{n\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)^2}}$$

4 三角函数

43. 正余弦和角、差角公式:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

44. 二倍角公式:

$$\sin 2x = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$\cos 2x = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

(余弦二倍角需写出三种形式)

45. * 三倍角公式:

$$\sin 3x = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$\cos 3x = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

46. 余弦的递推关系:

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta - \underline{\qquad\qquad\quad}$$

47. 和差化积:

$$\sin x + \sin y = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\cos x + \cos y = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

48. 积化和差:

$$\sin x\sin y = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\cos x\cos y = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\sin x\cos y = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

49. 辅助角公式:

$$a\sin x + b\cos x$$
$$= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \qquad \left(\tan\varphi = \frac{b}{a}\right)$$

变体一:

$$a\sin x + b\cos(x + x_0)$$
$$= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

变体二:

$$a\cos^2 x + b\sin^2 x + c\sin x\cos x$$
$$= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

变体三:

$$a\sin^2 x + b\cos x = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

50. *

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

51. * $\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$.

52. * ΔABC 中的恒等式 $(A + B + C = \pi)$:

$$\sin A + \sin B + \sin C = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\cos A + \cos B + \cos C = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\tan A + \tan B + \tan C = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\tan\left(\tfrac{A}{2}\right)\tan\left(\tfrac{B}{2}\right) + \tan\left(\tfrac{B}{2}\right)\tan\left(\tfrac{C}{2}\right) +$$
$$\tan\left(\tfrac{A}{2}\right)\tan\left(\tfrac{C}{2}\right) = \underline{\qquad\quad}$$

53. 对于 ΔABC，考虑 $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$ 的特殊情形，以及两个角趋近于 0，第三个角趋近于 π 时的极限 (或者一个角趋近于 0，剩余两个角趋近于 $\dfrac{\pi}{2}$)，有

$$\underline{\qquad\quad} < \sin A + \sin B + \sin C \leqslant \underline{\qquad\quad}$$
$$\underline{\qquad\quad} < \sin A\sin B\sin C \leqslant \underline{\qquad\quad}$$
$$\underline{\qquad\quad} < \cos A + \cos B + \cos C \leqslant \underline{\qquad\quad}$$
$$\underline{\qquad\quad} < \cos A\cos B\cos C \leqslant \underline{\qquad\quad}$$

54. 当 $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin x > \dfrac{2}{\pi}x$，$\cos x > 1 - \dfrac{2}{\pi}x$.
对于锐角三角形 ABC，有

$$\sin A + \sin B + \sin C > \underline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$\cos A + \cos B + \cos C > \underline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$\tan A + \tan B + \tan C \geqslant \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

55. * 参数方程 $\begin{cases} x = A\cos(\omega t + a) \\ y = B\cos(\omega t + b) \end{cases}, AB \neq 0$，消去参数 t 可得:

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

56. * 双曲正弦函数 $\sinh x = \underline{\qquad\qquad}$,
反双曲正弦函数 $\operatorname{arcsinh} x = \underline{\qquad\qquad}$;
双曲余弦函数 $\cosh x = \underline{\qquad\qquad}$,
反双曲余弦函数 $\operatorname{arccosh} x = \underline{\qquad\qquad}$.
求导：$(\sinh x)' = \underline{\qquad\quad}$；$(\cosh x)' = \underline{\qquad\quad}$.
$(\operatorname{arcsinh} x)' = \underline{\qquad\quad}$；$(\operatorname{arccosh} x)' = \underline{\qquad\quad}$.
平方差关系：$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = \underline{\qquad}$.

5 复数

57. 虚数单位 i 的整数次幂的周期性:
$\mathrm{i}^{4n} = \underline{\quad\ }$，$\mathrm{i}^{4n+1} = \underline{\quad\ }$，$\mathrm{i}^{4n+2} = \underline{\quad\ }$，$\mathrm{i}^{4n+3} = \underline{\quad\ }$.

58. 共轭复数的性质:
$\overline{\overline{z}} = \underline{\qquad\qquad}$，$\overline{z_1 \pm z_2} = \underline{\qquad\qquad}$,
$\overline{z_1 \cdot z_2} = \underline{\qquad\qquad}$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \underline{\qquad\qquad}$.

59. 复数的模的性质:
$|z| = \underline{\qquad\qquad}$，$z\overline{z} = \underline{\qquad\qquad}$,
$|z_1 z_2| = \underline{\qquad\qquad}$，$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \underline{\qquad\qquad}$,
$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = \underline{\qquad\qquad}$.

60. 三角不等式：$\underline{\qquad\qquad} \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant \underline{\qquad\qquad}$.

61. 去掉 $\sqrt{A + B\sqrt{C}}$ $(A > 0, C > 0)$ 的外层根号的方法：设 $\sqrt{A + B\sqrt{C}} = x + y\sqrt{C}$，两边平方，然后比较左右两边 $\sqrt{C}$ 的系数和另一项，可得到两个方程：$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$. 根据基本不等式，$A \geqslant \underline{\qquad\quad}$ 是可以去掉外层根号的必要不充分条件。

62. 去掉 $\sqrt{a + b\mathrm{i}}$ 的根号的方法：设 $\sqrt{a + b\mathrm{i}} = x + y\mathrm{i}$，两边平方，然后比较左右两边的实部和虚部，可得到两个方程：$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$.

63. 欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \underline{\qquad\qquad}$.

64. * 自然对数的底数 $\mathrm{e}=2.718281828\cdots$ 的定义：

$$\mathrm{e}=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

65. $\cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta)=(\underline{\qquad\qquad\qquad})^n$，
将等号右边用二项式定理展开后，比较左右两边的实部和虚部，即可得到任意的 n 倍角公式。

66. 若 $x^n=1$, $n\in\mathbf{N}^+$，则称 x 为 n 次单位根，复数范围内，x 共有 n 个不同的值，分别是
$\underline{\qquad\qquad\qquad}$.

67. $(x+\mathrm{i}y)(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$
$=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$(坐标旋转公式).

6 向量

68. 零向量具有任意方向。

69. $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$，两者的数量积（“点乘”）定义为

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\rangle=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 的夹角的余弦为

$$\cos\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\rangle=\underline{\qquad\qquad\qquad}$$

70. 二阶行列式：$\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad\qquad}$.

71. * $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$，这两者的向量积（“叉乘”）定义为

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$
$$=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}$ 分别是 x,y,z 轴正方向的单位向量。向量积的结果仍然是向量。向量积不满足交换律，即 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$.　　$|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=\underline{\qquad\qquad\qquad}$.（用向量的模和夹角表示）

72. 当 $a_3=b_3=0$ 时，$|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=\underline{\qquad\qquad\qquad}$（用坐标表示），代表以 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 为邻边的平行四边形的面积，除以 2 就得到以 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 为两条边的三角形的面积。

$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$$
$$=(a_1b_1+a_2b_2)^2+\underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$ 的充要条件是$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$（用坐标表示）.
$\overrightarrow{a}//\overrightarrow{b}$ 的充要条件是$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$（用坐标表示）.

73. 向量基本定理：如果 $\overrightarrow{e_1}$ 与 $\overrightarrow{e_2}$ 是平面上两个不平行的向量，那么该平面上的任意向量 $\overrightarrow{a}$，都可唯一地表示为 $\overrightarrow{e_1}$ 与 $\overrightarrow{e_2}$ 的线性组合，即存在唯一的一对实数 λ 与 μ，使得 $\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$.

74. 平面上有不同的四点 O,P,Q,R, 设 $\overrightarrow{OR}=\lambda\overrightarrow{OP}+\mu\overrightarrow{OQ}$，则 P,Q,R 三点共线的充要条件是 $\underline{\qquad\qquad\qquad}$.

7 解三角形

75. 外心：三条$\underline{\qquad\qquad}$线的交点；
内心：三条$\underline{\qquad\qquad}$线的交点；
重心：三条$\underline{\qquad\qquad}$线的交点；
垂心：三条$\underline{\qquad\qquad}$线的交点。

76. 对于 ΔABC，重心 G 分割中线的比例为 $\underline{\qquad\quad}$.
设 O 为空间中的任意一点，则

$$\overrightarrow{OG}=\underline{\qquad\quad}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

77. 正弦定理：

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

R 为三角形外接圆半径。

78. 余弦定理：

$$c^2=a^2+b^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$$
$$=\underline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\underline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$\cos C=\underline{\qquad\qquad\qquad}$$

79. 对任意三角形，“大边”是”大角”的充要条件。

80. * 对于 ΔABC，

$$a+b+c\geqslant 2(a\cos A+b\cos B+c\cos C)$$

将三个余弦定理的式子相加可得：

$$a^2+b^2+c^2=2bc\cos A+2ac\cos B+2ab\cos C$$

将上式中的 a,b,c 换成任意实数 x,y,z，同时保持 $A+B+C=\pi$，那么有嵌入不等式

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

81. $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(\underline{\qquad\quad})^2$，具有勾股定理的形式。让 $a,b(a\neq b)$ 取正整数，就能得到勾股数，比如 $(3,4,5)$，$(5,12,13)$，$(7,24,25)$，$(8,15,17)$，$(9,40,41)$，$(11,60,61)$，$(20,21,29)$.

82. 把上一条中的 a^2 换成 $\overrightarrow{a}$，b^2 换成 $\overrightarrow{b}$，实数乘法换成向量点乘，就得到向量的极化恒等式：

____

83. 对于 ΔABC，R 为外接圆半径，r 为内切圆半径，$p=\dfrac{a+b+c}{2}$ 为三角形周长的一半，三角形的面积公式有：
两边夹角：________________________________.
只含 R,A,B,C：____________.
只含 R,a,b,c：____________.
只含 p,r：____________.
只含 p,a,b,c：______________________.

84. r 为内切圆半径，则 $r=$ ____________ (用 p,a,b,c 表示).

85. * 对于 ΔABC，外森比克不等式：

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant \underline{\qquad\quad} S_{\Delta ABC}$$

86. * ΔABC 的费马点：分别以 AB,BC,AC 为边，在 ΔABC 外部 (或内部) 作三个等边三角形，这三个等边三角形的外接圆会交于同一点，即费马点。当三角形的最大内角小于 120° 时，费马点位于三角形内部，设费马点与三个顶点连线长度分别为 x,y,z，则

$$xy+yz+zx=\frac{4}{\sqrt{3}}S_{\Delta ABC} \leqslant \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

87. * 三角形的内心和外心的距离为 $\sqrt{R(R-2r)}$.
任意三角形的外接圆半径大于等于 2 倍内切圆半径 ($R \geqslant 2r$).

88. * ΔABC 内部有任意一点 O，记 ΔAOB，ΔBOC，ΔCOA 的面积分别为 S_C,S_A,S_B，那么有：

$$S_A\cdot \underline{\qquad} + S_B\cdot \underline{\qquad} + S_C\cdot \underline{\qquad} = \overrightarrow{0}$$

◇ 当 O 是 ΔABC 的重心时，

$$S_A:S_B:S_C = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

◇ 当 O 是 ΔABC 的垂心时，

$$S_A:S_B:S_C = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

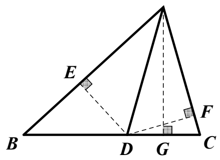
◇ 当 O 是 ΔABC 的内心时，

$$S_A:S_B:S_C = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

◇ 当 O 是 ΔABC 的外心时，

$$S_A:S_B:S_C = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

89. D 是 ΔABC 的 BC 边上的一点，则 $\dfrac{|AB|}{|AC|}=\dfrac{|BD|}{|CD|}$ 的充分必要条件是：AD 是________________________。



8 导数与积分

90. 基本初等函数的导数公式：
$(x^\alpha)'=$ ____________，$(\ln x)'=$ ____________，
$(a^x)'=$ ____________，$(\mathrm{e}^x)'=$ ____________，
$(\sin x)'=$ ____________，$(\cos x)'=$ ____________，
$(\tan x)'=$ ____________.

91. 导数运算法则：

$$[c_1f(x)+c_2g(x)]' = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$[f(x)\cdot g(x)]' = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

92.

$$[f(x)\cdot x^n]' = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$\left[\frac{f(x)}{x^n}\right]' = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

93. 复合函数求导法则：$[g(f(x))]'=g'(u)f'(x)$，再将 u 换回 $f(x)$. 比如 $[\ln f(x)]'=$ ____________.

94. 设 $f(x)=(x-x_0)^n g(x)$，两边取自然对数，有

$$\ln f(x)=n\ln(x-x_0)+\ln g(x)$$

两边求导，有

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

95. 可导奇函数的导函数是_____ 函数 (填“奇”或“偶”)；可导偶函数的导函数是_____ 函数。

96. 牛顿-莱布尼茨公式 (微积分基本公式)：

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = \underline{\qquad\qquad}$$

97. * 罗必塔 (L'Hospital) 法则：当 $x\to x_0$ 时，如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均趋于 0 或 $\pm\infty$，那么

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

特别地，$\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=$ ______.

98. 把 $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$ 中的 x 换成 $x-1$，有 $\mathrm{e}^{x-1}\geqslant x$，两边同乘 e，有 ____________.

99. 把 $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$ 中的 x 换成 $-x$，有 $\mathrm{e}^{-x}\geqslant -x+1$，当 $x<1$ 时，两边同时取倒数，有 $\mathrm{e}^x \leqslant$ ____________.

100. x 换成 $\alpha x(\alpha>0)$，有 $\mathrm{e}^{\alpha x}\geqslant \alpha x+1$，当 $1+\alpha x>0$ 时，两边同时开 α 次方，有 $\mathrm{e}^x\geqslant$ ____________.

101. * e 是自然对数的底数，$n\in\mathbf{N}^+$，则

$$2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

102. 对于三次函数 $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，对称中心的坐标为 _______________, 对称中心也是三次函数的拐点 (二阶导数为 0，且二阶导数在此点左右异号)。

103. * 对任意 n 次首一多项式 $P(x)$(最高次项系数为 1 的多项式), 设 M 代表 $|P(x)|$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值, 那么无论其它项的系数怎么变化 (保持首一)，M 总是大于等于_____________.

104. * 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒 (Taylor) 级数

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

当 $x_0=0$ 时,

$$\mathrm{e}^x=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}+\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\cdots$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}+\cdots\right)$$

105. 当 $|x|<0.2$ 时，$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x$ (x 可正可负). 而且 $|x|$ 越小，这个估算公式越精确。

$\sqrt{1.1}=1.048808\cdots\approx 1+\frac{1}{2}\times 0.1=1.05$,

$\sqrt{73}=8.544003\cdots=\sqrt{64+9}=\sqrt{64\left(1+\frac{9}{64}\right)}=$

__________________________________.

106. 拉格朗日中值定理: 如果函数 $f(x)$ 满足: (1) 在闭区间 $[x_1,x_2]$ 上连续；(2) 在开区间 (x_1,x_2) 内可导。
那么至少存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)$，使得 $f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. (至少能作出一条和割线斜率相等的切线)。

107. * 厄米特-哈达玛 (Hermite-Hadamard) 不等式: $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且可积，$\forall x_1,x_2\in[a,b]$，$x_1<x_2$，如果 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$(等价于 $f''(x)>0$)，那么有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

108. * 小于等于 n 的全部正整数的 $1\sim 5$ 次方的求和结果:

$$1^1+2^1+3^1+\cdots+n^1=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}$$

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$$

$$1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5=\frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+\frac{5n^4}{12}-\frac{n^2}{12}$$

$1\sim n$ 的 k 次方求和结果是关于 n 的 $k+1$ 次多项式，多项式的系数从高次项到低次项依次为

$$\frac{1}{k+1},\ \frac{1}{2},\ \frac{k}{12},\ 0,\ -\frac{k(k-1)(k-2)}{720},\cdots$$

以上这些求和公式可以写成如下通式,

$$\begin{aligned}&1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k\\&=\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}C_{k+1}^{j}B_j n^{k+1-j}+n^k \qquad (1)\\&=\frac{1}{k+1}n^{k+1}+\frac{1}{2}n^k+\frac{k}{12}n^{k-1}+\cdots \qquad (2)\end{aligned}$$

B_j 为伯努利数，$B_0=1,B_1=-\frac{1}{2}$，$B_2=\frac{1}{6},B_3=0,B_4=-\frac{1}{30},B_5=0,B_6=\frac{1}{42}\cdots$ 伯努利数满足递推关系：$0=\sum\limits_{j=0}^{n-1}C_n^jB_j$ ($n\geqslant 2$). (1) 式实际上是欧拉-麦克劳林求和公式的一个特例。

109. 黎曼 zeta 函数：$\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ ($s>1$),
$\zeta(2)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=$ ____________.

110. 非整数次幂求和 (只有近似公式，没有精确公式):

$$\sum_{l=1}^{n}l^{-1/2}\leqslant\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\sum_{l=1}^{n}l^{-1/3}\leqslant\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\sum_{l=1}^{n}l^{1/3}\leqslant\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\sum_{l=1}^{n}l^{1/2}\leqslant\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

系数同样满足第108条中 (2) 式的规律，只是其中的 k 不是正整数，同时不要出现**负幂项**。常数项的作用是提高近似公式的精度，可通过令 $n=1$ 来确定常数项。

9 不等式

111. 糖水不等式：若 $0<b<a, c>0$，则 $\dfrac{b}{a}<$ ________ .

$$\frac{1}{a^k-1}\leqslant \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

112. 设 a,b,c,d 均大于 0，且 $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$，那么 $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}$.

113. 设 $a>1$, 当 $k\geqslant 1$ 时, $a^k-1\geqslant a^k-a^{k-1}=(a-1)a^{k-1}$, 所以

$$\frac{1}{a^k-1}\leqslant \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

114. 伯努利不等式：当 $x>-1$ 时，
- 若 $\alpha>1$，则 $(1+x)^{\alpha}$ ____ $1+\alpha x$;
- 若 $0<\alpha<1$，则 $(1+x)^{\alpha}$ ____ $1+\alpha x$.

用数学归纳法或求导证明。

115. * 广义伯努利不等式：

若 $x_1,x_2,\cdots x_n>0, n\geqslant 2$，则

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\\ >&1+(x_1+x_2+\cdots+x_n)\end{aligned}$$

若 $x_1,x_2,\cdots x_n\in(0,1), n\geqslant 2$，则

$$\begin{aligned}&(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)\\ >&1-(x_1+x_2+\cdots+x_n)\end{aligned}$$

用数学归纳法证明。

116. $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$\text{\_\_\_\_}<\sin x<\text{\_\_\_\_}<$$

$$x+\frac{x^3}{3}<\frac{3x}{3-x^2}<\tan x<\frac{x}{1-\frac{2}{\pi}x}$$

117. * $x\in(0,1)$,

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}<\frac{x}{\sqrt{1+\frac{2}{3}x^2}}<\sin x<\frac{x}{\sqrt{1+\frac{1}{3}x^2}}<x$$

$$<\frac{x}{\sqrt{1-\frac{1}{3}x^2}}<\tan x<\frac{x}{\sqrt{1-\frac{2}{3}x^2}}<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

118. $x\in\mathbf{R}$，$\cos x\geqslant$ ____________(泰勒级数取前两项).
$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\cos x<1-\dfrac{4x^2}{\pi^2}$.

119. $x\in(0,1)$，$\mathrm{e}^{2x}<\dfrac{1+x}{1-x}$.
两边取自然对数，有 $2x<$ _______.
令 $t=\dfrac{1+x}{1-x}\in(1,+\infty)$，则 $x=$ _______，上面的不等式变为 ____________.

120. $t\in(1,+\infty)$，$\ln t<$ ____________ (含 $\sqrt{t}$) .

121. 对任意两个不等的正实数 x_1,x_2，有

$$\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}<\frac{x_1+x_2}{2}$$

$\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}$ 称为对数平均值。把上式中的 x_1 换成 e^{x_1}，x_2 换成 e^{x_2}，可得：

____

122. 两变量均值不等式 (包含 4 种均值) ：

____

123. * 将上式推广到 n 变量情形：
调和均值 $(H_n)\leqslant$ 几何均值 $(G_n)\leqslant$
算术均值 $(A_n)\leqslant$ 平方均值 (Q_n)

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant$$

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leqslant\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

其中，$a_1,a_2,\cdots a_n$ 均非负。

124. 给定 $\lambda a+\mu b=C$，求 ab 的最大值和 $\dfrac{k_1}{a}+\dfrac{k_2}{b}$ 的最小值。其中，λ,μ,C,k_1,k_2 为正的常数，a,b 为正的变量。

$$ab=\frac{1}{\lambda\mu}(\lambda a\cdot\mu b)\leqslant\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

$$\begin{aligned}\frac{k_1}{a}+\frac{k_2}{b}&=\left(\frac{k_1}{a}+\frac{k_2}{b}\right)\cdot\frac{1}{C}(\lambda a+\mu b)\\&=\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}\end{aligned}$$

125. 若 $x\in\mathbf{R}$，则 $\sqrt{x^2+4}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}\geqslant$ _______.

126. * 加权算术-几何均值不等式：正数 λ_k 满足 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$，且 $x_k\geqslant 0$，那么

$$x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}\leqslant\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n$$

127. 柯西不等式：
$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，那么

$$|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}||\cos\theta|\leqslant|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$$

$$|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|^2\leqslant|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2$$

把上式转化为坐标表示：

____

128. $a,b,c\in\mathbf{R}$，因为 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0$，所以，$a^2+b^2+c^2\geqslant$ ____________.

129. * 赫尔德 (Hölder) 不等式：$p>1, q>1, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，$a_k\geqslant 0, b_k\geqslant 0, k=1,2\cdots n$，那么

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

等号成立的条件是：存在非 0 实数 λ，对任意 $k=1,2\cdots n$ 都有 $\lambda a_k=b_k$. 当 $p=q=2$ 时，就变成柯西不等式。

130. * 闵可夫斯基 (Minkowski) 不等式：$r>0, r\neq 1, a_k>0, b_k>0$，那么

$$\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^r\right]^{\frac{1}{r}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^r\right)^{\frac{1}{r}} \quad (r>1)$$

$$\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^r\right]^{\frac{1}{r}} \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^r\right)^{\frac{1}{r}} \quad (r<1)$$

以上两式等号成立的条件都是：存在非 0 实数 λ，对任意 $k=1,2\cdots n$ 都有 $\lambda a_k=b_k$.

131. 含根号的缩放：

$$\_\_\_\_\_\_\_\_ > 2\sqrt{k} > \_\_\_\_\_\_\_\_ >$$
$$\_\_\_\_\_\_\_\_ > \_\_\_\_\_\_\_\_$$

以上各项除 $2\sqrt{k}$ 外，取倒数后均可裂项。

132. 含平方的缩放：

$$\_\_\_\_\_\_\_\_ \geqslant k^2+1>k^2> \_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$> \_\_\_\_\_\_\_\_ \geqslant \_\_\_\_\_\_\_\_$$

以上各项除 k^2+1 和 k^2 外，取倒数后均可裂项。

133. 正整数倒数求和缩放：

$$\_\_\_\_\_\_\_\_ < \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} < \_\_\_\_\_\_\_\_$$

10 数列

134. 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，S_n 是其前 n 项和，

- 若 $m+n=s+t$，则 $a_m+a_n=$ ________；
- $S_{m+n}=S_m+S_n+$ ______；
- $\dfrac{S_{2n-1}}{a_n}=$ ________；
- $m\neq n$，$\dfrac{S_m-S_n}{m-n}=\dfrac{S_{m+n}}{m+n}=$ ________；
- $S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}\cdots$ 是公差为 ____ 的等差数列；
- 在前 $2n$ 项中，$\dfrac{\text{奇数项之和}}{\text{偶数项之和}}=\dfrac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}=$ ________；
- 在前 $2n+1$ 项中，$\dfrac{\text{奇数项之和}}{\text{偶数项之和}}=\dfrac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n+1}}{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}=$ ________；

135. 等比数列 $a_n=a_1x^{n-1}$ 的求和公式：当 $x\neq 1$ 时，$S_n=$ ____________. 若 $|x|<1$，则 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k=$ ________.

136. 等差乘以等比型数列求和 $(x\neq 1)$：

$$\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$$

当 $|x|<1$ 时，

$$\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}= \_\_\_\_\_\_\_\_$$

对上式求导，

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}= \_\_\_\_\_\_\_\_$$

因为 $k^2x^{k-1}=x\cdot k(k-1)x^{k-2}+kx^{k-1}$，所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2x^{k-1}= \_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2x^{k}= \_\_\_\_\_\_\_\_$$

137. 常见裂项方法：

$$\frac{1}{n(n+k)}= \_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}= \_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$\frac{1}{4n^2-1}= \_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+k}}= \_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$\frac{a^n}{(a^n+1)(a^{n+1}+1)}= \_\_\_\_\_\_\_\_$$

138. * 阿贝尔 (Abel) 求和公式：数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n, B_n，那么

$$\sum_{k=1}^{n}A_kb_k+\sum_{k=1}^{n-1}a_{k+1}B_k=A_nB_n \tag{3}$$

139. 如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足下列 2 个条件，则称 $f(x)$ 为一个压缩函数。
(1) 任意 $x\in[a,b]$，有 $f(x)\in[a,b]$;
(2) 任意 $x,y\in[a,b]$，存在常数 $L\in(0,1)$，使得 $|f(x)-f(y)|\leqslant$ ________.

140. 压缩映像原理：如果 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的压缩函数，那么必定存在唯一的 $X\in[a,b]$，满足方程________，X 被称为 $f(x)$ 的不动点。

141. $A>0, B>0$，记 $f(x)=\sqrt{Ax+B}$，$g(x)=A+\dfrac{B}{x}$，数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1>0, a_{n+1}=f(a_n)=\sqrt{Aa_n+B}$，数列 $\{b_n\}$ 满足：$b_1>0, b_{n+1}=g(b_n)=A+\dfrac{B}{b_n}$，那么数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的不动点均为________.

142. 对于一阶线性递推数列 $a_{n+1}=Aa_n+B$ $(A\neq 1)$，先解方程________，然后递推公式两边减去 x，$a_{n+1}-x=A($______$)$，这样就转化成了等比数列。

143. $a_{n+1}=Aa_n+Bq^n$. 两边同除 q^n，有 $\dfrac{a_{n+1}}{q^n}=$ ____________，这样就转化成了上一条中的一阶线性递推数列。

144. $a_{n+1}=Aa_n^2$，则 $Aa_{n+1}=$ _______ $=\cdots=$ _______.

145. $a_{n+1}=a_n^2+2a_n$. 两边同时加 1，$a_{n+1}+1=$ ____________.

146. $a_{n+1}=a_n^2-2a_n+2$. 两边同时减 1，$a_{n+1}-1=$ ____________.

147. $a_{n+1}=\dfrac{Aa_n}{Ca_n+D}$，两边取倒数，$\dfrac{1}{a_{n+1}}=$ ____________，那么 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 为一阶线性递推数列。

148. * 设 $p>1,a<0$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)\approx x+ax^p$，定义数列 $a_{n+1}=f(a_n)$，如果对任意的正整数 n，都有 $a_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，那么

$$\lim_{n\to\infty}na_n^{p-1}=\frac{1}{a(1-p)}$$

如果 $a_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，那么可以做倒代换 $b_n=\dfrac{1}{a_n}$，然后对 b_n 应用上式。

149. 对于二阶线性递推数列 $a_{n+2}=Aa_{n+1}+Ba_n$，先解特征方程 ____________，假设有两个不等的根 x_1,x_2(可以为复数)，那么

$$\begin{aligned}a_{n+2}-x_2a_{n+1}&=x_1(a_{n+1}-x_2a_n)=\cdots\\&=\_\_\_\_\_\_\_\_\\a_{n+2}-x_1a_{n+1}&=x_2(a_{n+1}-x_1a_n)=\cdots\\&=\_\_\_\_\_\_\_\_\end{aligned}$$

150. 分式线性递推数列 $a_{n+1}=\dfrac{Aa_n+B}{Ca_n+D}$，先解方程____________，假设有两个不等的根 x_1,x_2 (可以为复数)，那么

$$\begin{aligned}a_{n+1}-\alpha&=\frac{Aa_n+B-\alpha(Ca_n+D)}{Ca_n+D}\\&=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\\a_{n+1}-\beta&=\frac{Aa_n+B-\beta(Ca_n+D)}{Ca_n+D}\\&=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\end{aligned}$$

两式相除可得：

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}&=\left(\frac{A-C\alpha}{A-C\beta}\right)\cdot\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=\cdots\\&=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\end{aligned}$$

151. * 分式非线性递推数列，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{A^2}{a_n}\right)$，假设 $a_1\neq\pm A$,

$$\begin{aligned}a_{n+1}-A&=\frac{a_n^2+A^2-2Aa_n}{2a_n}=\frac{(a_n-A)^2}{2a_n}\\a_{n+1}+A&=\frac{a_n^2+A^2+2Aa_n}{2a_n}=\frac{(a_n+A)^2}{2a_n}\\\frac{a_{n+1}-A}{a_{n+1}+A}&=\frac{(a_n-A)^2}{(a_n+A)^2}=\cdots=\frac{(a_1-A)^{2^n}}{(a_1+A)^{2^n}}\end{aligned}$$

11 解析几何

152. 直线的方程：
一般式方程：____________________；
点法式方程：____________________；
斜截式方程：____________________；
点斜式方程：____________________；
截距式方程：____________________；
两点式方程：____________________.

153. 直线的参数方程：$\begin{cases}x=\_\_\_\_\_\_\_\_\\y=\_\_\_\_\_\_\_\_\end{cases}$，$\phi$ 是直线的倾斜角，$|t|$ 表示直线上任一点到 (x_0,y_0) 的距离。更一般地，可以写成 $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\end{cases}$，若 $a^2+b^2\neq 1$，则此时的 $|t|$ 不再表示距离，这一点需要注意。

154. 点 (x_0,y_0) 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离公式：____________.

155. 两条平行直线 $Ax+By+C_1=0$ 和 $Ax+By+C_2=0$ 的距离公式：____________.

156. 平面的方程：
一般式方程：____________________；
点法式方程：____________________；
截距式方程：____________________.

157. 点 (x_0,y_0,z_0) 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式：____________________.

158. 设二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 x_1,x_2，判别式为 Δ, 则 $|x_1-x_2|=$ _______，$x_1^2+x_2^2=$ ____________.

159. 椭圆和双曲线的准线方程是 ____________.

160. 点差法，在椭圆上取不同的两点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，则

$$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1\\\dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$$

两式相减，有 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=$ ______.

如果是双曲线，则 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=$ ______.

161. 圆锥曲线（不包括圆）的统一极坐标方程：$\rho=$ ______. p 代表焦点到准线的距离。e 是离心率。椭圆：$0<e<1$；抛物线：$e=1$；双曲线：$e>1$. 过焦点且倾斜角为 θ 的弦的长度为______.

162. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程：$\begin{cases}x=\text{______}\\y=\text{______}\end{cases}$.

163. * 椭圆的顶投影参数方程，设椭圆的上顶点为 $N(0,b)$，在 x 轴上任取一点 $U(u,0)$，过 N,U 两点的直线与椭圆的除 N 以外的交点为 $P(x,y)$，则

$$\begin{cases}x=a\cdot\dfrac{2au}{u^2+a^2}\\y=b\cdot\dfrac{u^2-a^2}{u^2+a^2}\end{cases}$$

164. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程：$\begin{cases}x=\text{______}\\y=\text{______}\end{cases}$.

165. 抛物线 $y^2=2px$ 的参数方程：$\begin{cases}x=\text{______}\\y=\text{______}\end{cases}$.

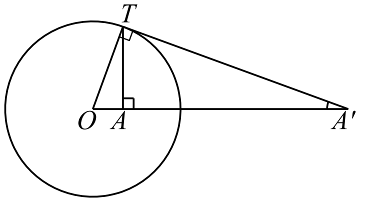
166. * 平摆线参数方程：$\begin{cases}x=R(\theta-\sin\theta)\\y=R(1-\cos\theta)\end{cases}$.

167. * 圆的渐开线参数方程：$\begin{cases}x=R(\cos\theta+\theta\sin\theta)\\y=R(\sin\theta-\theta\cos\theta)\end{cases}$.

168. 椭圆面积公式为______，而不是 $\dfrac{1}{2}\pi(a^2+b^2)$；椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的体积公式为 $\dfrac{4}{3}\pi abc$，而不是 $\dfrac{4}{9}\pi(a^3+b^3+c^3)$.

169. 到平面上两定点的距离之比为不等于 1 的定值的点的轨迹是圆（称为“阿波罗尼奥斯圆”）。

170. $\odot O$ 的半径是 R，且 O,A,A' 三点共线，如果 $|OA|\cdot|OA'|=$ ____，则 A 点与 A' 点互为“反演点”。

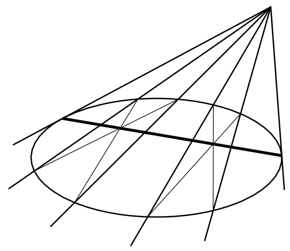


171. 椭圆上一点 (x_0,y_0) 的切线斜率为______，切线方程为______(换一半)。

172. 双曲线上一点 (x_0,y_0) 的切线斜率为______，切线方程为______(换一半)。

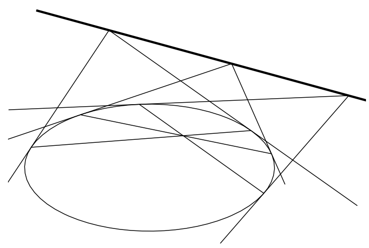
173. 抛物线 $y^2=2px$ 上一点 (x_0,y_0) 的切线斜率为______，切线方程为______(换一半)。

174. 当点 (x_0,y_0) 在椭圆外部时，直线 $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$ 表示椭圆的切点弦，即从点 (x_0,y_0) 向椭圆作两条切线，连接两个切点得到的弦。

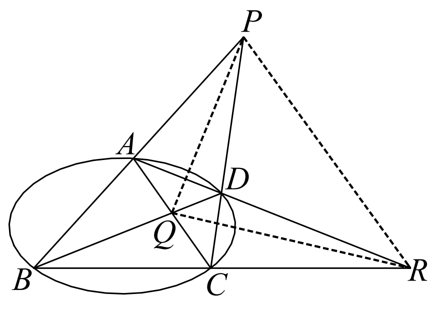


从点 (x_0,y_0) 出发作椭圆的两条割线，与椭圆有 4 个交点，那么以这 4 个交点为顶点的四边形的对角线交点也在切点弦上。

175. 当点 (x_0,y_0) 在椭圆内部时，直线 $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$ 与椭圆相离，从直线 $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$ 上的点向椭圆作两条切线，则切点弦过定点 (x_0,y_0).



176. 椭圆上有不同的四点 A,B,C,D，假设 AB 与 CD 所在的直线交于 P 点，AD 与 BC 所在的直线交于 R 点，AC 与 BD 交于 Q 点，则 P 点的极线是 QR，Q 点的极线是 PR，R 点的极线是 PQ，ΔPQR 称为自极三角形。



177. 判断直线 l：$Ax+By+C=0$ 与椭圆的位置关系，将直线方程变形为

$$\frac{\left(-\dfrac{Aa^2}{C}\right)x}{a^2}+\frac{\left(-\dfrac{Bb^2}{C}\right)y}{b^2}=1$$

设 $P\left(-\dfrac{Aa^2}{C},-\dfrac{Bb^2}{C}\right)$，当 P 点在椭圆内部时（即 $A^2a^2+B^2b^2<C^2$），直线 l 与椭圆相离；当 P 点在椭圆上时，直线 l 与椭圆相切；当 P 点在椭圆外部时，直线 l 与椭圆相交。

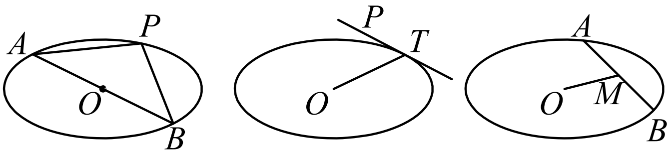
178. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的性质:

- 在椭圆外一点向椭圆做两条切线, 切线夹角保持为 $\dfrac{\pi}{2}$ 时, 切线交点的轨迹方程为______________(蒙日圆, 外准圆)
- 从椭圆中心 O 引出两条相互垂直的向径，与椭圆分别交于 P,Q 两点，从 O 点向 PQ 作垂线，垂足为 H，那么 H 点的轨迹也是一个圆（内准圆），圆的方程为______________. 斜边长度 $|PQ|$ 的取值范围是:

  ______________ $\leqslant |PQ| \leqslant$ ______________

  ΔOPQ 的面积的取值范围是:

  ______________ $\leqslant S_{\Delta OPQ} \leqslant$ ______________
- 以下三种情形，斜率之积为定值。



$k_{AP}\cdot k_{BP}=k_{OT}\cdot k_{PT}=k_{OM}\cdot k_{AB}=$ ______________.

- AB,CD 是椭圆的两条相交弦，交点为 P，且 AB, CD 的斜率互为相反数，则 $|PA|\cdot|PB|=$ ______________.
- * 椭圆上任意一点 $P(x_0,y_0)$，过 P 点作两条相互垂直的直线, 这两条直线与椭圆的除 P 点之外的交点分别是 Q,R，那么线段 QR 过定点

  $$\left(\frac{(a^2-b^2)x_0}{a^2+b^2},-\frac{(a^2-b^2)y_0}{a^2+b^2}\right)$$
- * 过椭圆内部一点 $M(x_0,y_0)$ 作椭圆的两条垂直弦 PQ,RS, 弦 PQ,RS 的中点分别为 K,L, 那么线段 KL 过定点

  $$\left(\frac{a^2x_0}{a^2+b^2},\frac{b^2y_0}{a^2+b^2}\right)$$
- 椭圆上任意一点 $P(x_0,y_0)$，过 P 点作两条斜率互为相反数的直线, 这两条直线与椭圆的除 P 点之外的交点分别是 Q,R，那么直线 QR 的斜率是定值，且与过 P 的切线的斜率互为 ______________。
- 在椭圆的长轴 AB 上有一定点 $M(m,0)$，过点 M 作椭圆的弦 CD，记直线 AC,BD 的斜率分别为 k_1,k_2，则

  ① $\dfrac{k_1}{k_2}$ 是定值;

  ② AC,BD 延长线的交点的轨迹方程是 ______________，即点 M 关于椭圆的极线;

  ③ 设②中的极线与 AB 延长线的交点为 H, 则 CH,DH 的斜率互为______________。
- P 为椭圆上一点, F_1,F_2 是椭圆的左右焦点, $\angle F_1PF_2=\theta$，则 $S_{\Delta F_1PF_2}=$ ________.
- F_1,F_2 是椭圆的两个焦点，椭圆上一点 P 处的切线 PT 平分 ΔPF_1F_2 在点 P 处的外角。焦点在直线 PT 上的投影点的轨迹是以长轴为直径的圆。以 PF_1(或 PF_2) 为直径的圆必与以长轴为直径的圆 ________。
- 设椭圆的左右两个顶点为 $A_1(-a,0),A_2(a,0)$，与 y 轴平行的直线交椭圆于 P_1,P_2 时，A_1P_1 与 A_2P_2 的交点的轨迹方程是 ______________.

179. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的性质:

- 从不在双曲线上的一点做双曲线的两条切线，如果两条切线垂直, 那么切线交点的轨迹也是一个圆 (蒙日圆, 外准圆)，圆的方程为______________.
- 从双曲线的中心 O 引出两条相互垂直的向径, 与双曲线分别交于 P,Q 两点，从 O 点向 P,Q 作垂线，垂足为 H，那么 H 点的轨迹也是一个圆 (内准圆), 内准圆的方程是______________. 双曲线内准圆存在的充要条件是虚轴大于实轴，即离心率大于 $\sqrt{2}$.
- * 双曲线上任意一点 $P(x_0,y_0)$, 过 P 点作两条相互垂直的直线, 这两条直线与双曲线的除 P 点之外的交点分别是 Q,R，那么线段 QR 过定点。

  $$\left(\frac{(a^2+b^2)x_0}{a^2-b^2},-\frac{(a^2+b^2)y_0}{a^2-b^2}\right)$$

  必须满足 $a\neq b$，定点才存在。
- * 过平面上任意一点 $M(x_0,y_0)$ 作双曲线的两条垂直弦 PQ,RS, 弦 PQ,RS 的中点分别为 K,L, 那么线段 KL 过定点。

  $$\left(\frac{a^2x_0}{a^2-b^2},-\frac{b^2y_0}{a^2-b^2}\right)$$

  必须满足 $a\neq b$，定点才存在。
- 双曲线上任意一点 $P(x_0,y_0)$，过 P 点作两条斜率互为相反数的直线, 这两条直线与双曲线的除 P 点之外的交点分别是 Q,R, 那么直线 QR 的斜率是定值，且与过 P 的切线的斜率互为 ______________。
- P 为双曲线上一点，F_1,F_2 是双曲线的左右焦点, $\angle F_1PF_2=\theta$，则 $S_{\Delta F_1PF_2}=$ ________.
- 设 $k>0$，则等轴双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 的实半轴和虚半轴的长度均为 ________，焦点坐标是______________.

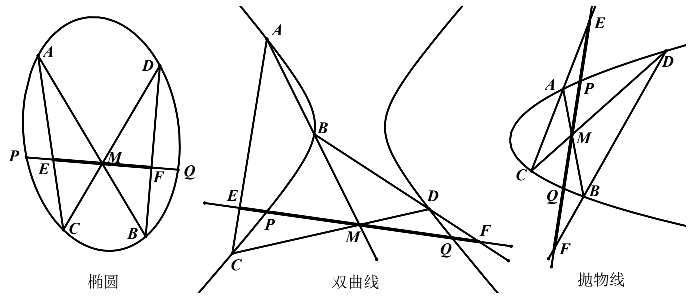
180. 抛物线 $y^2 = 2px$ 的性质:

- 抛物线的焦点为 F，顶点为 O，过焦点的直线与抛物线交于 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 两点，则
$\dfrac{1}{|FP|} + \dfrac{1}{|FQ|} = \dfrac{1-\cos\theta}{p} + \dfrac{1-\cos\theta}{p} =$ ____________;
$|FP| + |FQ| = \dfrac{p}{1-\cos\theta} + \dfrac{p}{1+\cos\theta} =$ ____________;
$y_1y_2 =$ ____________，$x_1x_2 = \dfrac{y_1^2}{2p} \cdot \dfrac{y_2^2}{2p} =$ ____________;
$S_{\Delta OPQ} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{p}{2} \cdot \left(\dfrac{2p}{\sin^2\theta} \cdot \sin\theta\right) =$ ____________.
- 抛物线的对称轴上有一个固定点 $M(x_0, 0)$，过 M 的直线与抛物线交于 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 两点，则
$y_1y_2 =$ ____________，$x_1x_2 = \dfrac{y_1^2}{2p} \cdot \dfrac{y_2^2}{2p} =$ ____________.
- 抛物线的顶点为 O, A, B 两点在抛物线上, 若 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -p^2$，则直线 AB 过定点 ____________.
- 从准线上的一点 $P\left(-\dfrac{p}{2}, y_0\right)$ 向抛物线作两条切线，设切点分别为 Q, R，则这两条切线 PQ, PR 相互____________。设抛物线焦点为 F，那么 QR 恒过____________，且 $PF \perp$ ____________.
- 抛物线上任意一点 $P(x_0, y_0)$，过 P 点作两条相互垂直的直线, 这两条直线与抛物线的除 P 点之外的交点分别是 Q, R，那么线段 QR 过定点 ____________.
- 抛物线上任意一点 $P(x_0, y_0)$，过 P 点作两条斜率互为相反数的直线, 这两条直线与抛物线的除 P 点之外的交点分别是 Q, R, 那么直线 QR 的斜率是定值, 且与过 P 的切线的斜率互为 ____________。

181. * 彭赛列 (Poncelet) 闭合定理：给定两条圆锥曲线 Γ_1 和 Γ_2，若存在一个 n ($n \geqslant 3$) 边形满足：内接于 Γ_1 且外切于 Γ_2，则必然存在无数个这样的 n 边形满足该性质 (同时内接和外切)。

182. * 三角形的内心和外心的距离为 $\sqrt{R(R-2r)}$，其中 R 为外接圆半径，r 为内切圆半径。假设一个半径为 r 的小圆位于一个半径为 R 大圆的内部 (两个圆没有交点)，若 $2r < R$ 且两个圆的圆心距恰好等于 $\sqrt{R(R-2r)}$，那么存在无穷多个三角形，分别以这两个圆为内切圆和外接圆。

183. * 蝴蝶定理：在圆锥曲线中，过弦 PQ 的中点 M 任作两条弦 AB, CD，直线 AC, BD 交 PQ 于点 E, F，则 $ME = EF$.



12 零散考点

184. $\pi \approx 3.141592653$ 的分数近似值:
$\dfrac{22}{7} \approx 3.142857$, $\dfrac{355}{113} \approx 3.14159292$.

185. 三次方程韦达定理：$(a \neq 0)$,

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 0$$

$x_1 + x_2 + x_3 =$____________;
$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 =$____________;
$x_1x_2x_3 =$____________.

186. 因式分解:

$a^3 \pm b^3 =$ ____________________
$a^4 - b^4 =$ ____________________
$= (a-b)(a+b)(a^2+b^2)$
$a^n - b^n = (a-b)($____________________$)$

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$
____

187. 锥体 (圆锥、棱锥) 体积公式：$V =$ ______,
S 为底面积，h 为锥体高度。

188. 圆台或棱台的体积：$V =$ ______________,
S, S' 为两个底面积，h 为台体高度 (两个底面间的距离)。

189. 球的表面积 $S =$ ______，球的体积 $V =$ ______.