

带 * 表示难度较大或者不方便设置待填空白的知识点。

网页版数学工具:

WolframAlpha (<https://www.wolframalpha.com/>)

GeoGebra (<https://www.geogebra.org/>)

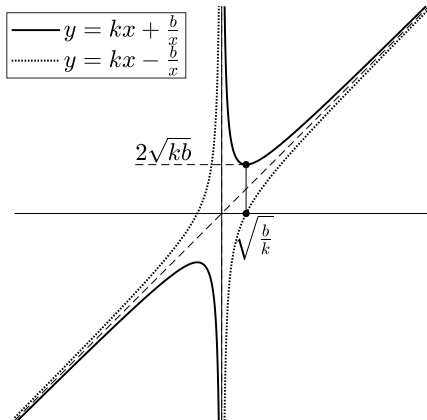
Desmos (<https://www.desmos.com/>).

1 函数

1. 求 $y = \frac{Ax+B}{Cx+D}$ ($AD-BC \neq 0$) 的值域:

$$y = \frac{A}{C} \cdot \frac{x + \frac{D}{C} - \frac{D}{C} + \frac{B}{A}}{x + \frac{D}{C}} = \frac{A}{C} \cdot \left(1 + \frac{-\frac{D}{C} + \frac{B}{A}}{x + \frac{D}{C}} \right).$$

2. 设 $k > 0, b > 0$, 则 $y = kx + \frac{b}{x}$ 与 $y = kx - \frac{b}{x}$ 的图像如下, 这两种函数都是双曲线,



当 $x > 0$ 时, $y = kx + \frac{b}{x}$ 在 $x = \sqrt{\frac{b}{k}}$ 处取得极小值 $2\sqrt{kb}$; $y = kx - \frac{b}{x}$ 的零点是 $x = \sqrt{\frac{b}{k}}$.

3. 求 $y = \frac{x^2 + Ax + B}{x + C}$ ①或 $y = \frac{x + C}{x^2 + Ax + B}$ ②的值域 (若分子或分母的最高次项系数不为 1, 则先将系数提取出来), 方法一: 换元 $t = x + C$;

方法二: 判别式, 以①式为例写出主要过程:

$$y(x+C) = x^2 + Ax + B$$

$$x^2 + (A-y)x + B-yC = 0$$

$$\Delta = (A-y)^2 - 4(B-yC) \geq 0$$

要绘制①或②的图像, 可以先绘制 $y = (x^2 + Ax + B)(x + C)$ 的图像, 因为这个三次函数的正负号与①或②式的正负号是一致的。

4. 求 $y = \frac{\sqrt{Ax^2+B}}{Cx^2+D}$ 的值域, 先提取系数,

$$y = \frac{\sqrt{A}}{C} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + \frac{B}{A}}}{x^2 + \frac{D}{C}}, \text{ 换元, } t = \sqrt{x^2 + \frac{B}{A}}, \text{ 那么}$$

$$x^2 = t^2 - \frac{B}{A},$$

$$y = \frac{\sqrt{A}}{C} \cdot \frac{t}{t^2 - \frac{B}{A} + \frac{D}{C}} = \frac{\sqrt{A}}{C} \cdot \frac{1}{t + \left(\frac{D}{C} - \frac{B}{A} \right) \frac{1}{t}}$$

5. 给定 4 个实数 x_1, x_2, x_3, x_4 , 其中任意两个都不相等, 设 $y_i = \frac{Ax_i+B}{Cx_i+D}$, ($AD-BC \neq 0, i = 1, 2, 3, 4$), 那么,

$$\frac{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)}{(y_1 - y_4)(y_2 - y_3)} = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)}$$

6. $y = |x-b_1| + |x-b_2| + \dots + |x-b_n|$, 假设 $b_1 < b_2 < \dots < b_n$, 如果 n 是偶数, 那么最小值在区间 $[b_{\frac{n}{2}}, b_{\frac{n}{2}+1}]$ 内取得; 如果 n 是奇数, 那么最小值在 $x = b_{\frac{n+1}{2}}$ 处取得。

7. 恒成立问题或有解问题 (\exists 表示存在, \forall 表示任意). $f(x)_{\max}, f(x)_{\min}$ 分别表示 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上的最大值、最小值。)

$$\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) > m \Rightarrow \underline{f(x)_{\max} > m}$$

$$\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) < m \Rightarrow \underline{f(x)_{\min} < m}$$

$$\forall x \in (a, b), f(x) < m \Rightarrow \underline{f(x)_{\max} < m}$$

$$\forall x \in (a, b), f(x) > m \Rightarrow \underline{f(x)_{\min} > m}$$

8. 对数运算法则:

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N.$$

$$\log_a \left(\frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N.$$

$$\log_a M^n = n \log_a M, \quad \log_{a^n} M = \frac{1}{n} \log_a M.$$

$$\text{换底公式: } \log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}.$$

9. 常见函数方程:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \underline{kx}$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad \underline{kx + b}$$

$$f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2) \quad \underline{x^\alpha}$$

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) f(x_2) \quad \underline{a^x}$$

$$f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \underline{\log_a x}$$

$$f(x_1 x_2) = x_2 f(x_1) + x_1 f(x_2) \quad \underline{x \log_a x}$$

$$f(x_1 + x_2) + f(x_1 - x_2) = 2\lambda f(x_1) f(x_2) \quad \underline{\frac{1}{\lambda} \cos x}$$

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) + 2\lambda x_1 x_2 \quad \underline{\lambda x^2 + \mu x}$$

10. * $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ 或 $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$, 则

$$f(x_1) + f(x_2) = f\left(\frac{x_1 + x_2}{1 + x_1 x_2}\right)$$

11. $\arctan x_1 + \arctan x_2 = \arctan \frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 x_2}.$

12. 函数凹凸性, 填 “<” 或 “>”, 请结合图像记忆。

$$x_1, x_2 \in (0, \pi), x_1 \neq x_2,$$

$$\frac{1}{2}(\sin x_1 + \sin x_2) \leq \sin \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_1, x_2 \in (0, \frac{\pi}{2}), x_1 \neq x_2,$$

$$\frac{1}{2}(\tan x_1 + \tan x_2) \geq \tan \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 \neq x_2,$$

$$\frac{e^{x_1} + e^{x_2}}{2} \geq e^{\frac{x_1 + x_2}{2}}$$

$$x_1, x_2 \in (0, +\infty), x_1 \neq x_2,$$

$$\frac{\ln x_1 + \ln x_2}{2} \leq \ln \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_1, x_2 \in (0, +\infty), x_1 \neq x_2, \alpha \in \mathbf{R}, \alpha > 1,$$

$$\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha}{2} \geq \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^\alpha$$

13. 若 $f(x)$ 满足 $f(x) = \pm \frac{1}{f(x+a)}$, 那么 $f(x)$ 的一个周期是 $2a$.

14. 若 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = f(b-x)$, 则 $f(x)$ 的一条对称轴是 $x = \frac{a+b}{2}$.

15. 如果 $f(x)$ 同时具有对称轴 $x = a$ 和对称中心 (b, c) , 且 $a \neq b$, 那么 $f(x)$ 具有周期 $T = 4|a-b|$.

16. 三变量均值不等式: 设 $a, b, c \geq 0$, 则 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

17. 设 $a, b > 0, x > 0$, 利用上面的三变量均值不等式, 有:

$$ax^2 + \frac{b}{x} = ax^2 + \frac{b}{2x} + \frac{b}{2x} \geq 3\sqrt[3]{\frac{ab^2}{4}};$$

$$ax + \frac{b}{x^2} = \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ax + \frac{b}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2b}{4}}.$$

18. 零点存在定理: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 连续, 且 $f(a) \cdot f(b) \leq 0$, 则一定存在 $x_0 \in (a, b)$, 使 $f(x_0) = 0$. 此定理为二分法找函数零点的理论基础。

19. * 记 $f_0(x) = x, f_1(x) = f(x), f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$. 称 $f_n(x)$ 为函数 $f(x)$ 的 n 次迭代 (用数学归纳法证明)。

$f(x)$	$f_n(x)$
$x + 2\sqrt{x} + 1$	$(\sqrt{x} + n)^2$
$\frac{x}{a+bx}$	$\frac{x}{a^n + \frac{1-a^n}{1-a}bx}$
$\sqrt[k]{ax^k + b}$	$\sqrt[k]{a^n x^k + \frac{1-a^n}{1-a}b}$
$x^2 + 2x$	$(x+1)^{2^n} - 1$
$\frac{x^2}{2x-1}$	$\frac{x^{2^n}}{x^{2^n} - (x-1)^{2^n}}$

$$20. f_1(x) = f(x) = \frac{1+x}{1-x}, f_{n+1}(x) = f(f_n(x)), n \in \mathbf{N}^+,$$

$$k \in \mathbf{N}, \text{ 则 } f_{4k+1}(x) = \frac{1+x}{1-x}, f_{4k+2}(x) = -\frac{1}{x},$$

$$f_{4k+3}(x) = \frac{x-1}{x+1}, f_{4k+4}(x) = x.$$

2 排列、组合与二项式定理

$$21. \text{ 排列数: } P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \text{ 或者写成 } A_n^k.$$

$$22. \text{ 组合数: } C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$\text{递推关系: } C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k.$$

$$23. \text{ 二项式定理: } (a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}.$$

$$24. (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc).$$

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 \text{ 的结果类似.}$$

25. 杨辉三角:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & & & & & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ & & & & & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & & & & & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & & & \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & & & & \\ & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \end{array}$$

$$\text{第 } n+1 \text{ 行的系数之和为 } \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n.$$

26. * 偶数件不同物品中选出奇数件物品的方法数 $C_{2n}^1, C_{2n}^3, C_{2n}^5, \dots$ 都是 偶 数。(填“奇”或“偶”)

27. * 组合恒等式:

$$\sum_{k=r}^n C_k^r = C_{n+1}^{r+1}, \quad \sum_{k=0}^r C_m^k C_n^{r-k} = C_{n+m}^r$$

$$\sum_{k=1}^n k C_n^k = n \cdot 2^{n-1}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 C_n^k = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$$

28. * 设 n 个元素错排的方案数为 D_n , $D_1 = 0, D_2 = 1$, 则

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

$$D_n - nD_{n-1} = -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}] = (-1)^n$$

$$\frac{D_n}{n!} - \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$D_n = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right]$$

29. $(ax^\alpha + bx^\beta)^n$ 展开式的通项为

$$T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r x^{(n-r)\alpha + r\beta},$$

设 $C_n^m a^{n-m} b^m$ 是最大的系数, 则

$$\begin{cases} C_n^m a^{n-m} b^m \geq \frac{C_n^{m-1} a^{n-m+1} b^{m-1}}{C_n^{m+1} a^{n-m-1} b^{m+1}} \\ C_n^m a^{n-m} b^m \geq \frac{C_n^{m+1} a^{n-m-1} b^{m+1}}{C_n^{m-1} a^{n-m+1} b^{m-1}} \end{cases}$$

30. 设 $k \in \mathbf{N}$, 在从 $30k+1$ 到 $30k+30$ 这连续 30 个整数中, 不是 2 或 3 或 5 的倍数的整数一共有 8 个。

3 概率论与数理统计

31. 给定正整数集合 $S = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$, 定义多项式 $f(x) = (1+x^{k_1})(1+x^{k_2}) \cdots (1+x^{k_n})$, 则 $f(x)$ 的展开式中, x^m 的系数恰好等于从集合 S 中选出元素总和为 m ($m \in \mathbf{N}$) 的子集的方法数。

32. 数学期望 (或均值) 的定义: $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$,

性质: $E(aX+b) = aE(X) + b$.

方差: $D(X) = E\{[X-E(X)]^2\} = \frac{E(X^2) - [E(X)]^2}{}$,

性质: $D(aX+b) = a^2 D(X)$.

33. 伯努利大数定律: 独立地重复一个伯努利试验 n 次, 当 n 很大时, 频率逼近概率。

34. 概率加法公式:

$$P(A_1 \cup A_2) = \frac{P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)}{}$$

35. 条件概率公式: $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

概率乘法公式: $P(A \cap B) = \frac{P(A)P(B|A)}{}$.

若 A, B 相互独立, 则 $P(A \cap B) = \frac{P(A)P(B)}{}$.

36. 全概率公式: $P(A) = \sum_{k=1}^n P(A|\Omega_k)P(\Omega_k)$.

37. * 贝叶斯公式:

$$P(\Omega_i|A) = \frac{P(A|\Omega_i)P(\Omega_i)}{\sum_{k=1}^n P(A|\Omega_k)P(\Omega_k)}$$

38. 二项分布 $b(n, p)$: 每次实验时, 事件 A 发生的概率为 p , 那么在 n 次实验中事件 A 发生 k 次的概率为 $P\{X=k\} = \frac{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}{}$. 数学期望为 np , 方差为 $np(1-p)$.

39. * 几何分布: 在 n 次伯努利试验中, 试验 k 次才得到第一次成功的概率, $P\{X=k\} = (1-p)^{k-1}p$, $k \in \mathbf{N}^+$, $0 < p < 1$. 数学期望为 $\frac{1}{p}$, 方差为 $\frac{1-p}{p^2}$.

40. 超几何分布: 共有 N 件产品, 其中有 D ($D \leq N$) 件次品, 从中任取 n ($n \leq N$) 件, 其中恰有 k ($k \leq D$) 件次品的概率: $P\{X=k\} = \frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$. 数学期望为 $\frac{nD}{N}$, 方差为 $\frac{nD}{N} \left(1 - \frac{D}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$.

41. 正态分布: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $\mu \in \mathbf{R}$, $\sigma > 0$. 数学期望为 μ , 方差为 σ^2 . 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ (标准正态分布).

42. 最小二乘法, 回归直线 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$.

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \\ &= \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \\ \hat{a} &= \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \end{aligned}$$

回归直线通过散点图的几何中心 (\bar{x}, \bar{y}) .

43. 样本相关系数

$$\begin{aligned} r &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2}} \\ &= \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \cdot \sqrt{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2}} \end{aligned}$$

44. (卡方) 独立性检验, 2×2 列联表:

	$Y=0$	$Y=1$	合计
$X=0$	a	b	$a+b$
$X=1$	c	d	$c+d$
合计	$a+c$	$b+d$	$n=a+b+c+d$

$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

χ^2 越大, 说明“ X 与 Y 有关系”成立的可能性越大。

4 三角函数

45. 正余弦和角、差角公式:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \frac{\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta}{1}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta}{1}$$

46. 二倍角公式:

$$\sin 2x = \frac{2 \sin x \cos x}{1}$$

$$\cos 2x = \frac{2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x}{1}$$

47. * 三倍角公式:

$$\sin 3x = \frac{-4 \sin^3 x + 3 \sin x}{1}$$

$$\cos 3x = \frac{4 \cos^3 x - 3 \cos x}{1}$$

48. 余弦的递推关系:

$$\cos(n+1)\theta = 2 \cos \theta \cos n\theta - \cos(n-1)\theta$$

49. 和差化积:

$$\sin x + \sin y = \frac{2 \sin \left(\frac{x+y}{2} \right) \cos \left(\frac{x-y}{2} \right)}{1}$$

$$\cos x + \cos y = \frac{2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \cos \left(\frac{x-y}{2} \right)}{1}$$

50. 积化和差:

$$\sin x \sin y = \frac{\frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]}{1}$$

$$\cos x \cos y = \frac{\frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)]}{1}$$

$$\sin x \cos y = \frac{\frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]}{1}$$

51. 辅助角公式:

$$\begin{aligned} & a \sin x + b \cos x \\ &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)}{1} \quad \left(\tan \varphi = \frac{b}{a} \right) \end{aligned}$$

变体一:

$$\begin{aligned} & a \sin x + b \cos(x + x_0) \\ &= \frac{a \sin x + b \cos x \cos x_0 - b \sin x \sin x_0}{1} \end{aligned}$$

变体二:

$$\begin{aligned} & a \cos^2 x + b \sin^2 x + c \sin x \cos x \\ &= \frac{a \frac{\cos 2x + 1}{2} + b \frac{-\cos 2x + 1}{2} + \frac{c}{2} \sin 2x}{1} \end{aligned}$$

变体三:

$$a \sin^2 x + b \cos x = \frac{a(1 - \cos^2 x) + b \cos x}{1}$$

52. *

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

$$\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{-\cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x + \cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

$$53. * \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}.$$

54. * $\triangle ABC$ 中的恒等式 ($A + B + C = \pi$):

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{4 \cos \left(\frac{A}{2} \right) \cos \left(\frac{B}{2} \right) \cos \left(\frac{C}{2} \right)}{1}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{1 + 4 \sin \left(\frac{A}{2} \right) \sin \left(\frac{B}{2} \right) \sin \left(\frac{C}{2} \right)}{1}$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \frac{\tan A \tan B \tan C}{1}$$

$$\tan \left(\frac{A}{2} \right) \tan \left(\frac{B}{2} \right) + \tan \left(\frac{B}{2} \right) \tan \left(\frac{C}{2} \right) +$$

$$\tan \left(\frac{A}{2} \right) \tan \left(\frac{C}{2} \right) = \frac{1}{1}$$

55. 对于 $\triangle ABC$, 考虑 $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ 的特殊情形, 以及两个角趋近于 0, 第三个角趋近于 π 时的极限 (或者一个角趋近于 0, 剩余两个角趋近于 $\frac{\pi}{2}$), 有

$$\frac{0}{1} < \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{0}{1} < \sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\frac{1}{1} < \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

$$\frac{-1}{1} < \cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$$

56. 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ 时, $\sin x > \frac{2}{\pi}x$, $\cos x > 1 - \frac{2}{\pi}x$.

对于锐角三角形 ABC , 有

$$\sin A + \sin B + \sin C > \frac{2}{\pi}(A + B + C) = 2$$

$$\cos A + \cos B + \cos C > 3 - \frac{2}{\pi}(A + B + C) = 1$$

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3 \tan \frac{A + B + C}{3} = 3\sqrt{3}$$

57. * 参数方程 $\begin{cases} x = A \cos(\omega t + a) \\ y = B \cos(\omega t + b) \end{cases}$, $AB \neq 0$, 消去参数 t

可得:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{xy}{AB} \cos(a - b) = \sin^2(a - b)$$

58. * 双曲正弦函数 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$,

反双曲正弦函数 $\operatorname{arsinh} x = \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{1}$;

双曲余弦函数 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$,

反双曲余弦函数 $\operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

求导: $(\sinh x)' = \cosh x$; $(\cosh x)' = \sinh x$.

$(\operatorname{arcsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$; $(\operatorname{arccosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

平方差关系: $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$.

5 复数

59. 虚数单位 i 的整数次幂的周期性:

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

60. 共轭复数的性质:

$$\begin{aligned} \overline{\bar{z}} &= z, \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \\ \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}. \end{aligned}$$

61. 复数的模的性质:

$$\begin{aligned} |z| &= |\bar{z}|, \quad z\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2, \\ |z_1 z_2| &= |z_1| |z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \\ |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2). \end{aligned}$$

62. 三角不等式: $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

63. 去掉 $\sqrt{A + B\sqrt{C}}$ ($A > 0, C > 0$) 的外层根号的方法:
 设 $\sqrt{A + B\sqrt{C}} = x + y\sqrt{C}$, 两边平方, 然后比较左右两边 \sqrt{C} 的系数和另一项, 可得到两个方程:
 $A = x^2 + y^2 C, B = 2xy$. 根据基本不等式, $A \geq |B|\sqrt{C}$ 是可以去掉外层根号的必要不充分条件.

64. 去掉 $\sqrt{a + bi}$ 的根号的方法: 设 $\sqrt{a + bi} = x + yi$, 两边平方, 然后比较左右两边的实部和虚部, 可得到两个方程: $a = x^2 - y^2, b = 2xy$.

65. 欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

66. * 自然对数的底数 $e = 2.718281828 \dots$ 的定义:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

67. $\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$,

将等号右边用二项式定理展开后, 比较左右两边的实部和虚部, 即可得到任意的 n 倍角公式.

68. 若 $x^n = 1, n \in \mathbf{N}^+$, 则称 x 为 n 次单位根, 复数范围内, x 共有 n 个不同的值, 分别是

$$e^{2k\pi i/n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

69. $(x + iy)(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$= (x \cos \theta - y \sin \theta) + i(x \sin \theta + y \cos \theta) \quad (\text{坐标旋转公式}).$$

6 向量

70. 零向量具有任意方向.

71. $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 两者的数量积 (“点乘”) 定义为

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \underline{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

\vec{a}, \vec{b} 的夹角的余弦为

$$\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

72. 二阶行列式: $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \underline{a_1 b_2 - a_2 b_1}$.

73. * $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 这两者的向量积 (“叉乘”) 定义为

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= \underline{(a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)} \end{aligned}$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 分别是 x, y, z 轴正方向的单位向量. 向量积的结果仍然是向量. 向量积不满足交换律, 即 $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$. $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

74. 当 $a_3 = b_3 = 0$ 时, $|\vec{a} \times \vec{b}| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$, 代表以 \vec{a}, \vec{b} 为邻边的平行四边形的面积, 除以 2 就得到以 \vec{a}, \vec{b} 为两条边的三角形的面积.

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

$$= (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

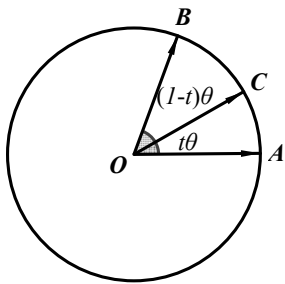
$\vec{a} \perp \vec{b}$ 的充要条件是 $\underline{a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0}$.

$\vec{a} // \vec{b}$ 的充要条件是 $\underline{a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0}$.

75. 向量基本定理: 如果 \vec{e}_1 与 \vec{e}_2 是平面上两个不平行的向量, 那么该平面上的任意向量 \vec{a} , 都可唯一地表示为 \vec{e}_1 与 \vec{e}_2 的线性组合, 即存在唯一的一对实数 λ 与 μ , 使得 $\vec{a} = \lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2$.

76. 平面上有不同的四点 O, P, Q, R , 设 $\vec{OR} = \lambda \vec{OP} + \mu \vec{OQ}$, 则 P, Q, R 三点共线的充要条件是 $\underline{\lambda + \mu = 1}$.

77. 设圆 O 是单位圆, A, B, C 为圆周上不同的三点, 且 C 点位于劣弧 AB 上 (弧长小于半圆), \vec{OA}, \vec{OB} 的夹角为 θ ($0 < \theta < \pi$), 向量 \vec{OC} 与 \vec{OA}, \vec{OB} 的夹角分别为 $t\theta, (1-t)\theta$, 其中 $0 < t < 1$, 设 $\vec{OC} = \lambda \vec{OA} + \mu \vec{OB}$, 则 $\lambda = \frac{\sin((1-t)\theta)}{\sin(\theta)}, \mu = \frac{\sin(t\theta)}{\sin(\theta)}$.



7 解三角形

78. 外心: 三条 中垂 线的交点;

内心: 三条 角平分 线的交点;

重心: 三条 中 线的交点;

垂心: 三条 垂 线的交点。

79. 对于 $\triangle ABC$, 重心 G 分割中线的比例为 1:2。

设 O 为空间中的任意一点, 则

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

80. 正弦定理:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

R 为三角形外接圆半径。

81. 余弦定理:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{aligned}$$

82. 对任意三角形, “大边”是“大角”的充要条件。

83. * 对于 $\triangle ABC$,

$$a + b + c \geq 2(a \cos A + b \cos B + c \cos C)$$

将三个余弦定理的式子相加可得:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2bc \cos A + 2ac \cos B + 2ab \cos C$$

将上式中的 a, b, c 换成任意实数 x, y, z , 同时保持 $A + B + C = \pi$, 那么有嵌入不等式

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2yz \cos A + 2zx \cos B + 2xy \cos C$$

84. $(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2$, 具有勾股定理的形式。让 $a, b (a \neq b)$ 取正整数, 就能得到勾股数, 比如 (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (8, 15, 17), (9, 40, 41), (11, 60, 61), (20, 21, 29)。

85. 把上一条中的 a^2 换成 \vec{a} , b^2 换成 \vec{b} , 实数乘法换成向量点乘, 就得到向量的极化恒等式:

$$4\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2$$

86. 对于 $\triangle ABC$, R 为外接圆半径, r 为内切圆半径, $p = \frac{a+b+c}{2}$ 为三角形周长的一半, 三角形的面积公式有:

$$\text{两边夹角: } \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B.$$

$$\text{只含 } R, A, B, C: \frac{2R^2 \sin A \sin B \sin C}{4R}.$$

$$\text{只含 } R, a, b, c: \frac{abc}{4R}.$$

$$\text{只含 } p, r: pr.$$

$$\text{只含 } p, a, b, c: \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

87. r 为内切圆半径, 则 $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ 。

88. * 对于 $\triangle ABC$, 外森比克不等式:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} S_{\triangle ABC}$$

89. * $\triangle ABC$ 的费马点: 分别以 AB, BC, AC 为边, 在 $\triangle ABC$ 外部 (或内部) 作三个等边三角形, 这三个等边三角形的外接圆会交于同一点, 即费马点。当三角形的最大内角小于 120° 时, 费马点位于三角形内部, 设费马点与三个顶点连线长度分别为 x, y, z , 则

$$xy + yz + zx = \frac{4}{\sqrt{3}} S_{\triangle ABC} \leq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

90. * 三角形的内心和外心的距离为 $\sqrt{R(R-2r)}$ 。

任意三角形的外接圆半径大于等于 2 倍内切圆半径 ($R \geq 2r$)。

91. * $\triangle ABC$ 内部有任意一点 O , 记 $\triangle AOB, \triangle BOC, \triangle COA$ 的面积分别为 S_C, S_A, S_B , 那么有:

$$S_A \cdot \vec{OA} + S_B \cdot \vec{OB} + S_C \cdot \vec{OC} = \vec{0}$$

◇ 当 O 是 $\triangle ABC$ 的重心时,

$$S_A : S_B : S_C = 1 : 1 : 1$$

◇ 当 O 是 $\triangle ABC$ 的垂心时,

$$S_A : S_B : S_C = \tan A : \tan B : \tan C$$

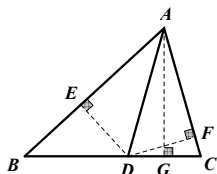
◇ 当 O 是 $\triangle ABC$ 的内心时,

$$S_A : S_B : S_C = a : b : c$$

◇ 当 O 是 $\triangle ABC$ 的外心时,

$$S_A : S_B : S_C = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$$

92. D 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的一点, 则 $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CD|}$ 的充分必要条件是: AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线。



93. (皮克公式) 横纵坐标均为整数的点称为格点, 所有顶点均在格点的多边形称为格点多边形。设格点多边形内部有 N 个格点, 边界上有 B 个格点。则多边形的面积为 $N + \frac{B}{2} - 1$.

8 导数与积分

94. 基本初等函数的导数公式:

$$\begin{aligned}(x^\alpha)' &= \underline{\alpha x^{\alpha-1}}, \quad (\ln x)' = \underline{\frac{1}{x}}, \\(a^x)' &= \underline{(\ln a)a^x}, \quad (e^x)' = \underline{e^x}, \\(\sin x)' &= \underline{\cos x}, \quad (\cos x)' = \underline{-\sin x}, \\(\tan x)' &= \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}.\end{aligned}$$

95. 导数运算法则:

$$\begin{aligned} [c_1 f(x) + c_2 g(x)]' &= \underline{c_1 f'(x) + c_2 g'(x)} \\ [f(x) \cdot g(x)]' &= \underline{f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)} \\ \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' &= \underline{\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}} \end{aligned}$$

96.

$$\begin{aligned} [f(x) \cdot x^n]' &= \frac{x^n f'(x) + nx^{n-1} f(x)}{\left[\frac{f(x)}{x^n} \right]'} = \frac{x f'(x) - n f(x)}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

97. 复合函数求导法则: $[g(f(x))]' = g'(u)f'(x)$, 再将 u 换回 $f(x)$. 比如 $[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

98. 设 $f(x) = (x - x_0)^n g(x)$, 两边取自然对数, 有

$$\ln f(x) = n \ln(x - x_0) + \ln q(x)$$

两边求导, 有

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{n}{x - x_0} + \frac{g'(x)}{g(x)}$$

99. 可导奇函数的导函数是 偶 函数;

可导偶函数的导函数是 奇 函数。

100. 牛顿-莱布尼茨公式 (微积分基本公式):

$$\int_a^b f'(x)dx = \underline{f(b) - f(a)}$$

101. * 罗必塔 (L'Hospital) 法则: 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 如果 $f(x)$

和 $g(x)$ 均趋于 0 或 $\pm\infty$, 那么

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{q'(x)}$$

特别地, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \underline{0}$.

102. 把 $e^x \geq x+1$ 中的 x 换成 $x-1$, 有 $e^{x-1} \geq x$, 两边同乘 e , 有 $e^x \geq ex$.

103. 把 $e^x \geq x + 1$ 中的 x 换成 $-x$, 有 $e^{-x} \geq -x + 1$, 当 $x < 1$ 时, 两边同时取倒数, 有 $e^x \leq \frac{1}{1-x}$.

104. x 换成 $\alpha x (\alpha > 0)$, 有 $e^{\alpha x} \geq \alpha x + 1$, 当 $1 + \alpha x > 0$ 时, 两边同时开 α 次方, 有 $e^x \geq (1 + \alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}$.

105. * e 是自然对数的底数, $n \in \mathbf{N}^+$, 则

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

106. 对于三次函数 $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, 对称中心的坐标为 $\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$, 对称中心也是三次函数的拐点 (二阶导数为 0, 且二阶导数在此点左右异号)。

107. * 对任意 n 次首一多项式 $P(x)$ (最高次项系数为 1 的多项式), 设 M 代表 $|P(x)|$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值, 那么无论其它项的系数怎么变化 (保持首一), M 总是大于等于 $\frac{1}{2^{n-1}}$.

108. * 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的泰勒 (Taylor) 级数

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

当 $x_0 = 0$ 时,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \right)$$

109. 当 $|x| < 0.2$ 时, $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ (x 可正可负). 而且 $|x|$ 越小, 这个估算公式越精确。

$$\sqrt{1.1} = 1.048808 \cdots \approx 1 + \frac{1}{2} \times 0.1 = 1.05,$$

$$\sqrt{73} = 8.544003 \dots = \sqrt{64+9} = \sqrt{64 \left(1 + \frac{9}{64}\right)} =$$

$$8\sqrt{1+\frac{9}{64}} \approx 8\left(1+\frac{9}{2\times 64}\right) = 8+\frac{9}{2\times 8} = 8\frac{9}{16}.$$

110. 拉格朗日中值定理: 如果函数 $f(x)$ 满足: (1) 在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上连续; (2) 在开区间 (x_1, x_2) 内可导。

那么至少存在一点 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. (至少能作出一条和割线斜率相等的切线)。

111. * 厄米特-哈达玛 (Hermite-Hadamard) 不等式: $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续且可积, $\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2$, 如果 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$ (等价于 $f''(x) > 0$), 那么有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

112. * 小于等于 n 的全部正整数的 $1 \sim 5$ 次方的求和结果:

$$\begin{aligned} 1^1 + 2^1 + 3^1 + \cdots + n^1 &= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 &= \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} \\ 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 &= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} \\ 1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5 &= \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12} \end{aligned}$$

$1 \sim n$ 的 k 次方求和结果是关于 n 的 $k+1$ 次多项式, 多项式的系数从高次项到低次项依次为

$$\frac{1}{k+1}, \frac{1}{2}, \frac{k}{12}, 0, -\frac{k(k-1)(k-2)}{720}, \dots$$

以上这些求和公式可以写成如下通式,

$$\begin{aligned} &1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k \\ &= \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k C_{k+1}^j B_j n^{k+1-j} + n^k \end{aligned} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{k+1} n^{k+1} + \frac{1}{2} n^k + \frac{k}{12} n^{k-1} + \cdots \quad (2)$$

B_j 为伯努利数, $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42} \cdots$ 伯努利数满足递推关系: $0 = \sum_{j=0}^{n-1} C_n^j B_j$ ($n \geq 2$). (1) 式实际上是欧拉-麦克劳林求和公式的一个特例。

113. 黎曼 zeta 函数: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ($s > 1$),

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

114. 非整数次幂求和 (只有近似公式, 没有精确公式):

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n l^{-1/2} &\leq \frac{2n^{1/2} - 1}{1} \\ \sum_{l=1}^n l^{-1/3} &\leq \frac{3}{2} n^{2/3} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n l^{1/3} &\leq \frac{3}{4} n^{4/3} + \frac{1}{2} n^{1/3} - \frac{1}{4} \\ \sum_{l=1}^n l^{1/2} &\leq \frac{2}{3} n^{3/2} + \frac{1}{2} n^{1/2} - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

系数同样满足第112条中 (2) 式的规律, 只是其中的 k 不是正整数, 同时不要出现负幂项。常数项的作用是提
高近似公式的精度, 可通过令 $n = 1$ 来确定常数项。

9 不等式

115. 糖水不等式: 若 $0 < b < a, c > 0$, 则 $\frac{b}{a} < \frac{b+c}{a+c}$.

$$\frac{1}{a^k - 1} \leq \frac{1+1}{a^k - 1 + 1} = \frac{2}{a^k}$$

116. 设 a, b, c, d 均大于 0, 且 $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, 那么 $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

117. $a, b \in \mathbf{R}$, 则 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$.
(填 $<, >, \leq, \geq$ 之一。)

118. 设 $a > 1$, 当 $k \geq 1$ 时, $a^k - 1 \geq a^k - a^{k-1} = (a-1)a^{k-1}$, 所以

$$\frac{1}{a^k - 1} \leq \frac{1}{(a-1)a^{k-1}}$$

119. 伯努利不等式: 当 $x > -1$ 时,

- 若 $\alpha > 1$, 则 $(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x$;
- 若 $0 < \alpha < 1$, 则 $(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x$.

用数学归纳法或求导证明。

120. * 广义伯努利不等式:

若 $x_1, x_2, \dots, x_n > 0, n \geq 2$, 则

$$\begin{aligned} &(1+x_1)(1+x_2) \cdots (1+x_n) \\ &> 1 + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \end{aligned}$$

若 $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, 1), n \geq 2$, 则

$$\begin{aligned} &(1-x_1)(1-x_2) \cdots (1-x_n) \\ &> 1 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \end{aligned}$$

用数学归纳法证明。

121. $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\pi} x < \sin x < x < \\ &x + \frac{x^3}{3} < \frac{3x}{3-x^2} < \tan x < \frac{x}{1-\frac{2}{\pi}x} \end{aligned}$$

122. * $x \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} &\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \frac{x}{\sqrt{1+\frac{2}{3}x^2}} < \sin x < \frac{x}{\sqrt{1+\frac{1}{3}x^2}} < x \\ &< \frac{x}{\sqrt{1-\frac{1}{3}x^2}} < \tan x < \frac{x}{\sqrt{1-\frac{2}{3}x^2}} < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

123. $x \in \mathbf{R}$, $\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$ (泰勒级数取前两项).

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \cos x < 1 - \frac{4x^2}{\pi^2}.$$

124. $x \in (0, 1)$, $e^{2x} < \frac{1+x}{1-x}$.

两边取自然对数, 有 $2x < \ln \frac{1+x}{1-x}$.

令 $t = \frac{1+x}{1-x} \in (1, +\infty)$, 则 $x = \frac{t-1}{t+1}$, 上面的不等

式变为 $\frac{2(t-1)}{t+1} < \ln t$.

125. $t \in (1, +\infty)$, $\ln t < \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}$.

126. 对任意两个不等的正实数 x_1, x_2 , 有

$$\sqrt{x_1 x_2} < \frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} < \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$\frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1}$ 称为对数平均值。把上式中的 x_1 换成 e^{x_1} , x_2 换成 e^{x_2} , 可得:

$$e^{\frac{x_1+x_2}{2}} < \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1} < \frac{e^{x_1} + e^{x_2}}{2}$$

127. 两变量均值不等式:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

128. * 将上式推广到 n 变量情形:

调和均值 (H_n) \leq 几何均值 (G_n) \leq

算术均值 (A_n) \leq 平方均值 (Q_n)

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

其中, a_1, a_2, \cdots, a_n 均非负。

129. 给定 $\lambda a + \mu b = C$, 求 ab 的最大值和 $\frac{k_1}{a} + \frac{k_2}{b}$ 的最小值。其中, $\lambda, \mu, C, k_1, k_2$ 为正的常数, a, b 为正的变量。

$$ab = \frac{1}{\lambda\mu}(\lambda a \cdot \mu b) \leq \frac{1}{\lambda\mu} \left(\frac{\lambda a + \mu b}{2} \right)^2 = \frac{C^2}{4\lambda\mu}$$

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{a} + \frac{k_2}{b} &= \left(\frac{k_1}{a} + \frac{k_2}{b} \right) \cdot \frac{1}{C} (\lambda a + \mu b) \\ &= \frac{1}{C} \left(k_1 \lambda + k_2 \mu + k_1 \mu \frac{b}{a} + k_2 \lambda \frac{a}{b} \right) \end{aligned}$$

130. 若 $x \in \mathbf{R}$, 则 $\sqrt{x^2+4} + \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \geq \frac{5}{2}$.

131. * 加权算术-几何均值不等式: 正数 λ_k 满足 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$, 且 $x_k \geq 0$, 那么

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$$

132. 柯西不等式:

$\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, 那么

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\cos \theta| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 \leq |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

把上式转化为坐标表示:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)$$

133. $a, b, c \in \mathbf{R}$, 因为 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$, 所以, $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

134. * 赫尔德 (Hölder) 不等式: $p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a_k \geq 0, b_k \geq 0, k = 1, 2, \cdots, n$, 那么

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

等号成立的条件是: 存在非 0 实数 λ , 对任意 $k = 1, 2, \cdots, n$ 都有 $\lambda a_k = b_k$. 当 $p = q = 2$ 时, 就变成柯西不等式。

135. * 闵可夫斯基 (Minkowski) 不等式: $r > 0, r \neq 1, a_k > 0, b_k > 0$, 那么

$$\begin{aligned} \left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^r \right]^{\frac{1}{r}} &\leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^r \right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^r \right)^{\frac{1}{r}} \quad (r > 1) \\ \left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^r \right]^{\frac{1}{r}} &\geq \left(\sum_{k=1}^n a_k^r \right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^r \right)^{\frac{1}{r}} \quad (r < 1) \end{aligned}$$

以上两式等号成立的条件都是: 存在非 0 实数 λ , 对任意 $k = 1, 2, \cdots, n$ 都有 $\lambda a_k = b_k$.

136. 含根号的缩放:

$$\begin{aligned} \sqrt{k+1} + \sqrt{k} &> 2\sqrt{k} > \sqrt{k + \frac{1}{2}} + \sqrt{k - \frac{1}{2}} > \\ &\sqrt{k+1} + \sqrt{k-1} > \sqrt{k} + \sqrt{k-1} \end{aligned}$$

以上各项除 $2\sqrt{k}$ 外, 取倒数后均可裂项。

137. 含平方的缩放:

$$\begin{aligned} \frac{k(k+1)}{k^2+1} &\geq k^2+1 > k^2 > \left(k - \frac{1}{2}\right) \left(k + \frac{1}{2}\right) \\ &> (k-1)(k+1) \geq \frac{k(k-1)}{k^2+1} \end{aligned}$$

以上各项除 k^2+1 和 k^2 外, 取倒数后均可裂项。

138. 正整数倒数求和缩放:

$$\frac{\ln(n+1)}{1} < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < \frac{1+\ln n}{n}$$

10 数列

139. 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, S_n 是其前 n 项和,

- 若 $m+n=s+t$, 则 $a_m+a_n=\underline{a_s+a_t}$;
- $S_{m+n}=S_m+S_n+\underline{mnd}$;
- $\frac{S_{2n-1}}{a_n}=\underline{2n-1}$;
- $m \neq n$, $\frac{S_m-S_n}{m-n}=\frac{S_{m+n}}{m+n}=\underline{\frac{d}{2}(m+n)+(a_1-\frac{d}{2})}$;
- $S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n} \cdots$ 是公差为 $\underline{n^2d}$ 的等差数列;
- 在前 $2n$ 项中, $\frac{\text{奇数项之和}}{\text{偶数项之和}}=\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}=\underline{\frac{a_n}{a_{n+1}}}$;
- 在前 $2n+1$ 项中, $\frac{\text{奇数项之和}}{\text{偶数项之和}}=\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n+1}}{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}=\underline{\frac{n+1}{n}}$;

140. 等比数列 $a_n=a_1x^{n-1}$ 的求和公式: 当 $x \neq 1$ 时,

$$S_n=\frac{a_1(1-x^n)}{1-x}=\frac{a_1-a_{n+1}}{1-x}$$
 若 $|x| < 1$, 则

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k=\frac{1}{1-x}$$

141. 等差乘以等比型数列求和 ($x \neq 1$):

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$$

当 $|x| < 1$ 时,

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

对上式求导,

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2}=\frac{2}{(1-x)^3}$$

因为 $k^2x^{k-1}=x \cdot k(k-1)x^{k-2}+kx^{k-1}$, 所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} k^2x^{k-1} &= \frac{1+x}{(1-x)^3} \\ \sum_{k=1}^{\infty} k^2x^k &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}\end{aligned}$$

142. 常见裂项方法:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n(n+k)} &= \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right) \\ \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] \\ \frac{1}{4n^2-1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+k}} &= \frac{1}{k} (\sqrt{n+k}-\sqrt{n}) \\ \frac{a^n}{(a^n+1)(a^{n+1}+1)} &= \frac{1}{a-1} \left(\frac{1}{a^n+1} - \frac{1}{a^{n+1}+1} \right)\end{aligned}$$

143. * 阿贝尔 (Abel) 求和公式: 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n, B_n , 那么

$$\sum_{k=1}^n A_k b_k + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} B_k = A_n B_n \quad (3)$$

144. 如果 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上满足下列 2 个条件, 则称 $f(x)$ 为一个压缩函数。

- (1) 任意 $x \in [a, b]$, 有 $f(x) \in [a, b]$;
- (2) 任意 $x, y \in [a, b]$, 存在常数 $L \in (0, 1)$, 使得 $|f(x)-f(y)| \leq \underline{L|x-y|}$.

145. 压缩映像原理: 如果 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的压缩函数, 那么必定存在唯一的 $X \in [a, b]$, 满足方程 $\underline{X=f(X)}$, X 被称为 $f(x)$ 的不动点。

146. $A > 0, B > 0$, 记 $f(x)=\sqrt{Ax+B}$, $g(x)=A+\frac{B}{x}$, 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 > 0, a_{n+1}=f(a_n)=\sqrt{Aa_n+B}$, 数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_1 > 0, b_{n+1}=g(b_n)=A+\frac{B}{b_n}$, 那么数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的不动点均为 $\underline{\frac{A+\sqrt{A^2+4B}}{2}}$.

147. 设 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 若 $a < 1$, 则 $x_1=a$; 若 $a > 1$, 则 $x_1=\frac{1}{a}$. 定义数列 $x_{n+1}=\frac{x_n}{2}(3-ax_n^2)$, 那么数列 $\{x_n\}$ 的不动点为 $\underline{\frac{1}{\sqrt{a}}}$.

148. 对于一阶线性递推数列 $a_{n+1}=Aa_n+B$ ($A \neq 1$), 先解方程 $\underline{x=Ax+B}$, 然后递推公式两边减去 x , $a_{n+1}-x=A(\underline{a_n-x})$, 这样就转化成了等比数列。

149. $a_{n+1}=Aa_n+Bq^n$. 两边同除 q^n , 有 $\frac{a_{n+1}}{q^n}=A\frac{a_n}{q^{n-1}}+B$, 这样就转化成了上一条中的一阶线性递推数列。

150. $a_{n+1}=Aa_n^2$, 则 $Aa_{n+1}=\underline{(Aa_n)^2}=\cdots=(Aa_1)^{2^n}$.

151. $a_{n+1}=a_n^2+2a_n$. 两边同时加 1, $a_{n+1}+1=\underline{(a_n+1)^2}$.

152. $a_{n+1}=a_n^2-2a_n+2$. 两边同时减 1, $a_{n+1}-1=\underline{(a_n-1)^2}$.

153. $a_{n+1}=\frac{Aa_n}{Ca_n+D}$, 两边取倒数, $\frac{1}{a_{n+1}}=\underline{\frac{D}{A}\frac{1}{a_n}+\frac{C}{A}}$, 那么 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 为一阶线性递推数列。

154. * 设 $p > 1, a < 0$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \approx x+ax^p$, 定义数列 $a_{n+1}=f(a_n)$, 如果对任意的正整数 n , 都有 $a_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n^{p-1}=\frac{1}{a(1-p)}$$

如果 $a_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, 那么可以做倒代换 $b_n = \frac{1}{a_n}$, 然后对 b_n 应用上式。

155. 对于二阶线性递推数列 $a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n$, 先解特征方程 $x^2 = Ax + B$, 假设有两个不等的根 x_1, x_2 (可以为复数), 那么

$$\begin{aligned} a_{n+2} - x_2 a_{n+1} &= x_1 (a_{n+1} - x_2 a_n) = \cdots \\ &= \frac{x_1^n (a_2 - x_2 a_1)}{x_1^n} \\ a_{n+2} - x_1 a_{n+1} &= x_2 (a_{n+1} - x_1 a_n) = \cdots \\ &= \frac{x_2^n (a_2 - x_1 a_1)}{x_2^n} \end{aligned}$$

156. 分式线性递推数列 $a_{n+1} = \frac{Aa_n + B}{Ca_n + D}$, 先解方程 $x = \frac{Ax + B}{Cx + D}$, 假设有两个不等的根 x_1, x_2 (可以为复数), 那么

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha &= \frac{Aa_n + B - \alpha(Ca_n + D)}{Ca_n + D} \\ &= \frac{(A - C\alpha)(a_n - \alpha)}{Ca_n + D} \\ a_{n+1} - \beta &= \frac{Aa_n + B - \beta(Ca_n + D)}{Ca_n + D} \\ &= \frac{(A - C\beta)(a_n - \beta)}{Ca_n + D} \end{aligned}$$

两式相除可得:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1} - \alpha}{a_{n+1} - \beta} &= \left(\frac{A - C\alpha}{A - C\beta} \right) \cdot \frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta} = \cdots \\ &= \left(\frac{A - C\alpha}{A - C\beta} \right)^n \cdot \frac{a_1 - \alpha}{a_1 - \beta} \end{aligned}$$

157. * 分式非线性递推数列, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{A^2}{a_n} \right)$, 假设 $a_1 \neq \pm A$,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - A &= \frac{a_n^2 + A^2 - 2Aa_n}{2a_n} = \frac{(a_n - A)^2}{2a_n} \\ a_{n+1} + A &= \frac{a_n^2 + A^2 + 2Aa_n}{2a_n} = \frac{(a_n + A)^2}{2a_n} \\ \frac{a_{n+1} - A}{a_{n+1} + A} &= \frac{(a_n - A)^2}{(a_n + A)^2} = \cdots = \frac{(a_1 - A)^{2^n}}{(a_1 + A)^{2^n}} \end{aligned}$$

11 解析几何

158. 直线的方程:

一般式方程: $Ax + By + C = 0$;

点法式方程: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$;

斜截式方程: $y = kx + b$;

点斜式方程: $y - y_0 = k(x - x_0)$;

截距式方程: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$;

两点式方程: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

159. 直线的参数方程: $\begin{cases} x = x_0 + t \cos \phi \\ y = y_0 + t \sin \phi \end{cases}$, ϕ 是直线的倾斜角, $|t|$ 表示直线上任一点到 (x_0, y_0) 的距离. 更一般地, 可以写成 $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$, 若 $a^2 + b^2 \neq 1$, 则此时的 $|t|$ 不再表示距离, 这一点需要注意.

160. 点 (x_0, y_0) 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离公式: $\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

161. 两条平行直线 $Ax + By + C_1 = 0$ 和 $Ax + By + C_2 = 0$ 的距离公式: $\frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

162. 两条直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$, 且 $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, 则过 l_1, l_2 的交点的任意直线都可以用

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \quad \text{表达.}$$

$$l_1 \text{ 和 } l_2 \text{ 的两条角平分线的方程为 } \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

163. 平面的方程:

一般式方程: $Ax + By + Cz + D = 0$;

点法式方程: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$;

截距式方程: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

164. 点 (x_0, y_0, z_0) 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离公式: $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

165. 设二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根为 x_1, x_2 , 判别式为 Δ , 则 $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$, $x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$.

166. 椭圆和双曲线的准线方程是 $x = \pm \frac{a^2}{c}$.

167. 点差法, 在椭圆上取不同的两点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 则

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

两式相减, 有 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b^2(x_2 + x_1)}{y_2 + y_1}$.

如果是双曲线, 则 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{b^2(x_2 + x_1)}{y_2 + y_1}$.

168. 圆锥曲线 (不包括圆) 的统一极坐标方程: $\rho = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}$. p 代表焦点到准线的距离. e 是离心率. 椭圆: $0 < e < 1$; 抛物线: $e = 1$; 双曲线: $e > 1$. 过焦点且倾斜角为 θ 的弦的长度为 $\frac{2ep}{1 - e^2 \cos^2 \theta}$.

169. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的参数方程: $\begin{cases} x = \frac{a \cos \theta}{\cos \theta} \\ y = \frac{b \sin \theta}{\sin \theta} \end{cases}$.

170. * 椭圆的顶投影参数方程, 设椭圆的上顶点为 $N(0, b)$, 在 x 轴上任取一点 $U(u, 0)$, 过 N, U 两点的直线与椭圆的除 N 以外的交点为 $P(x, y)$, 则

$$\begin{cases} x = a \cdot \frac{2au}{u^2 + a^2} \\ y = b \cdot \frac{u^2 - a^2}{u^2 + a^2} \end{cases}$$

171. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的参数方程: $\begin{cases} x = \frac{a}{\cos \theta} \\ y = \frac{b \tan \theta}{\sin \theta} \end{cases}$.

172. 抛物线 $y^2 = 2px$ 的参数方程: $\begin{cases} x = \frac{2pt^2}{t^2} \\ y = \frac{2pt}{t^2} \end{cases}$.

173. * 平摆线参数方程: $\begin{cases} x = R(\theta - \sin \theta) \\ y = R(1 - \cos \theta) \end{cases}$.

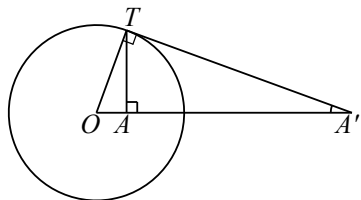
174. * 圆的渐开线参数方程: $\begin{cases} x = R(\cos \theta + \theta \sin \theta) \\ y = R(\sin \theta - \theta \cos \theta) \end{cases}$.

175. 球的表面积 $S = 4\pi R^2$, 球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

176. 椭圆面积公式为 πab , 而不是 $\frac{1}{2}\pi(a^2 + b^2)$; 椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的体积公式为 $\frac{4}{3}\pi abc$, 而不是 $\frac{4}{9}\pi(a^3 + b^3 + c^3)$.

177. 到平面上两定点的距离之比为不等于 1 的定值的点的轨迹是圆 (称为“阿波罗尼奥斯圆”).

178. $\odot O$ 的半径是 R , 且 O, A, A' 三点共线, 如果 $|OA| \cdot |OA'| = R^2$, 则 A 点与 A' 点互为“反演点”.

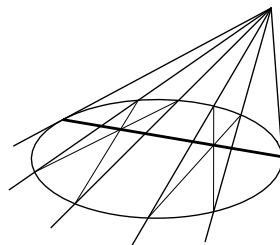


179. 椭圆上一点 (x_0, y_0) 的切线斜率为 $-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$, 切线方程为 $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ (换一半).

180. 双曲线上一点 (x_0, y_0) 的切线斜率为 $\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$, 切线方程为 $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$ (换一半).

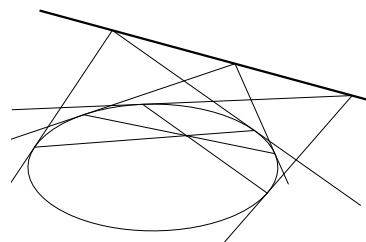
181. 抛物线 $y^2 = 2px$ 上一点 (x_0, y_0) 的切线斜率为 $\frac{p}{y_0}$, 切线方程为 $yy_0 = p(x + x_0)$ (换一半).

182. 当点 (x_0, y_0) 在椭圆外部时, 直线 $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ 表示椭圆的切点弦, 即从点 (x_0, y_0) 向椭圆作两条切线, 连接两个切点得到的弦.

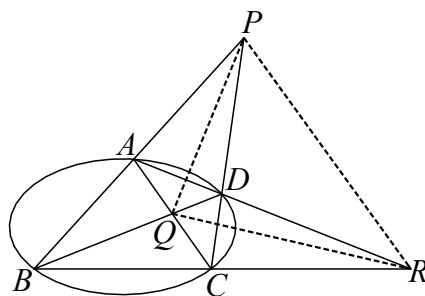


从点 (x_0, y_0) 出发作椭圆的两条割线, 与椭圆有 4 个交点, 那么以这 4 个交点为顶点的四边形的对角线交点也在切点弦上.

183. 当点 (x_0, y_0) 在椭圆内部时, 直线 $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ 与椭圆相离, 从直线 $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ 上的点向椭圆作两条切线, 则切点弦过定点 (x_0, y_0) .



184. 椭圆上有不同的四点 A, B, C, D , 假设 AB 与 CD 所在的直线交于 P 点, AD 与 BC 所在的直线交于 R 点, AC 与 BD 交于 Q 点, 则 P 点的极线是 QR , Q 点的极线是 PR , R 点的极线是 PQ , $\triangle PQR$ 称为自极三角形.



185. 判断直线 $l: Ax + By + C = 0$ 与椭圆的位置关系, 将直线方程变形为

$$\left(-\frac{Aa^2}{C}\right)x + \left(-\frac{Bb^2}{C}\right)y = 1$$

设 $P\left(-\frac{Aa^2}{C}, -\frac{Bb^2}{C}\right)$, 当 P 点在椭圆内部时 (即 $A^2 a^2 + B^2 b^2 < C^2$), 直线 l 与椭圆相离; 当 P 点在椭

圆上时, 直线 l 与椭圆相切; 当 P 点在椭圆外部时, 直线 l 与椭圆相交。

186. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的性质:

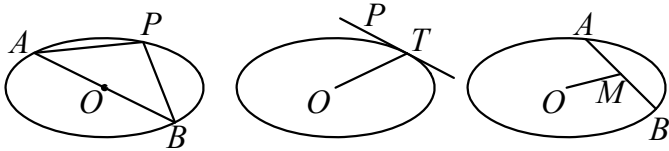
- 在椭圆外一点向椭圆做两条切线, 切线夹角保持为 $\frac{\pi}{2}$ 时, 切线交点的轨迹方程为 $x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2$ (蒙日圆, 外准圆)
- 从椭圆中心 O 引出两条相互垂直的向径, 与椭圆分别交于 P, Q 两点, 从 O 点向 PQ 作垂线, 垂足为 H , 那么 H 点的轨迹也是一个圆 (内准圆), 圆的方程为 $x^2 + y^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$. 斜边长度 $|PQ|$ 的取值范围是:

$$\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq |PQ| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

ΔOPQ 的面积取值范围是:

$$\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \leq S_{\Delta OPQ} \leq \frac{1}{2} ab$$

- 以下三种情形, 斜率之积为定值。



$$k_{AP} \cdot k_{BP} = k_{OT} \cdot k_{PT} = k_{OM} \cdot k_{AB} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

- AB, CD 是椭圆的两条相交弦, 交点为 P , 且 AB, CD 的斜率互为相反数, 则 $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$.
- * 椭圆上任意一点 $P(x_0, y_0)$, 过 P 点作两条相互垂直的直线, 这两条直线与椭圆的除 P 点之外的交点分别是 Q, R , 那么线段 QR 过定点

$$\left(\frac{(a^2 - b^2)x_0}{a^2 + b^2}, -\frac{(a^2 - b^2)y_0}{a^2 + b^2} \right)$$

- * 过椭圆内部一点 $M(x_0, y_0)$ 作椭圆的两条垂直弦 PQ, RS , 弦 PQ, RS 的中点分别为 K, L , 那么线段 KL 过定点

$$\left(\frac{a^2 x_0}{a^2 + b^2}, \frac{b^2 y_0}{a^2 + b^2} \right)$$

- 椭圆上任意一点 $P(x_0, y_0)$, 过 P 点作两条斜率互为相反数的直线, 这两条直线与椭圆的除 P 点之外的交点分别是 Q, R , 那么直线 QR 的斜率是定值, 且与过 P 的切线的斜率互为相反数。
- 在椭圆的长轴 AB 上有一定点 $M(m, 0)$, 过点 M 作椭圆的弦 CD , 记直线 AC, BD 的斜率分别为 k_1, k_2 , 则
 - ① $\frac{k_1}{k_2}$ 是定值;
 - ② AC, BD 延长线的交点的轨迹方程是 $x = \frac{a^2}{m}$, 即点

M 关于椭圆的极线;

③ 设②中的极线与 AB 延长线的交点为 H , 则 CH, DH 的斜率互为相反数。

- P 为椭圆上一点, F_1, F_2 是椭圆的左右焦点, $\angle F_1 P F_2 = \theta$, 则 $S_{\Delta F_1 P F_2} = \frac{b^2 \tan \frac{\theta}{2}}{2}$.
- F_1, F_2 是椭圆的两个焦点, 椭圆上一点 P 处的切线 PT 平分 $\Delta P F_1 F_2$ 在点 P 处的外角。焦点在直线 PT 上的投影点的轨迹是以长轴为直径的圆。以 $P F_1$ (或 $P F_2$) 为直径的圆必与以长轴为直径的圆内切。
- 设椭圆的左右两个顶点为 $A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$, 与 y 轴平行的直线交椭圆于 P_1, P_2 时, $A_1 P_1$ 与 $A_2 P_2$ 的交点的轨迹方程是 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

187. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的性质:

- 从不在双曲线上的一点做双曲线的两条切线, 如果两条切线垂直, 那么切线交点的轨迹也是一个圆 (蒙日圆, 外准圆), 圆的方程为 $x^2 + y^2 = |a^2 - b^2|$.
- 从双曲线的中心 O 引出两条相互垂直的向径, 与双曲线分别交于 P, Q 两点, 从 O 点向 P, Q 作垂线, 垂足为 H , 那么 H 点的轨迹也是一个圆 (内准圆), 内准圆的方程是 $x^2 + y^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}$. 双曲线内准圆存在的充要条件是虚轴大于实轴, 即离心率大于 $\sqrt{2}$.
- * 双曲线上任意一点 $P(x_0, y_0)$, 过 P 点作两条相互垂直的直线, 这两条直线与双曲线的除 P 点之外的交点分别是 Q, R , 那么线段 QR 过定点。

$$\left(\frac{(a^2 + b^2)x_0}{a^2 - b^2}, -\frac{(a^2 + b^2)y_0}{a^2 - b^2} \right)$$

必须满足 $a \neq b$, 定点才存在。

- * 过平面上任意一点 $M(x_0, y_0)$ 作双曲线的两条垂直弦 PQ, RS , 弦 PQ, RS 的中点分别为 K, L , 那么线段 KL 过定点。

$$\left(\frac{a^2 x_0}{a^2 - b^2}, -\frac{b^2 y_0}{a^2 - b^2} \right)$$

必须满足 $a \neq b$, 定点才存在。

- 双曲线上任意一点 $P(x_0, y_0)$, 过 P 点作两条斜率互为相反数的直线, 这两条直线与双曲线的除 P 点之外的交点分别是 Q, R , 那么直线 QR 的斜率是定值, 且与过 P 的切线的斜率互为相反数。
- P 为双曲线上一点, F_1, F_2 是双曲线的左右焦点, $\angle F_1 P F_2 = \theta$, 则 $S_{\Delta F_1 P F_2} = \frac{b^2 \tan \frac{\theta}{2}}{2}$.
- 设 $k > 0$, 则等轴双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 的实半轴和虚半轴的长度均为 $\sqrt{2k}$, 焦点坐标是 $(\pm\sqrt{2k}, \pm\sqrt{2k})$.

188. 抛物线 $y^2 = 2px$ 的性质:

- 抛物线的焦点为 F , 顶点为 O , 过焦点的直线与抛物线交于 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 两点, 则

$$\frac{1}{|FP|} + \frac{1}{|FQ|} = \frac{1 - \cos \theta}{p} + \frac{1 - \cos \theta}{p} = \frac{2}{p};$$

$$|FP| + |FQ| = \frac{p}{1 - \cos \theta} + \frac{p}{1 + \cos \theta} = \frac{p}{\sin^2 \theta};$$

$$y_1 y_2 = -p^2, x_1 x_2 = \frac{y_1^2}{2p} \cdot \frac{y_2^2}{2p} = \frac{p^2}{4};$$

$$S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{2} \cdot \left(\frac{2p}{\sin^2 \theta} \cdot \sin \theta \right) = \frac{p^2}{2 \sin \theta}.$$
- 抛物线的对称轴上有一个固定点 $M(x_0, 0)$, 过 M 的直线与抛物线交于 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 两点, 则

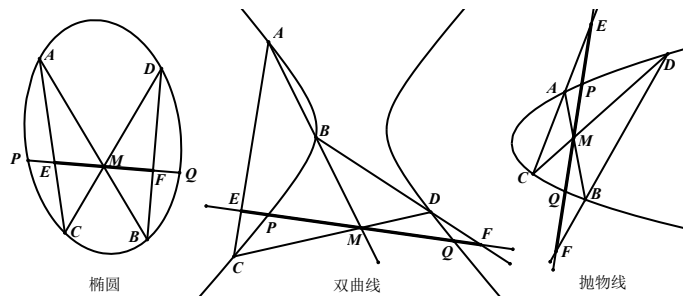
$$y_1 y_2 = -2px_0, x_1 x_2 = \frac{y_1^2}{2p} \cdot \frac{y_2^2}{2p} = x_0^2.$$
- 抛物线的顶点为 O, A, B 两点在抛物线上, 若 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -p^2$, 则直线 AB 过定点 $(p, 0)$.
- 从准线上的一点 $P\left(-\frac{p}{2}, y_0\right)$ 向抛物线作两条切线, 设切点分别为 Q, R , 则这两条切线 PQ, PR 相互垂直. 设抛物线焦点为 F , 那么 QR 恒过焦点, 且 $PF \perp QR$.
- 抛物线上任意一点 $P(x_0, y_0)$, 过 P 点作两条相互垂直的直线, 这两条直线与抛物线的除 P 点之外的交点分别是 Q, R , 那么线段 QR 过定点 $(x_0 + 2p, -y_0)$.
- 抛物线上任意一点 $P(x_0, y_0)$, 过 P 点作两条斜率互为相反数的直线, 这两条直线与抛物线的除 P 点之外的交点分别是 Q, R , 那么直线 QR 的斜率是定值, 且与过 P 的切线的斜率互为相反数.

189. * 彭赛列 (Poncelet) 闭合定理: 给定两条圆锥曲线 Γ_1 和 Γ_2 , 若存在一个 n ($n \geq 3$) 边形满足: 内接于 Γ_1 且外切于 Γ_2 , 则必然存在无数个这样的 n 边形满足该性质 (同时内接和外切)。

190. * 三角形的内心和外心的距离为 $\sqrt{R(R-2r)}$, 其中 R 为外接圆半径, r 为内切圆半径. 假设一个半径为 r 的小圆位于一个半径为 R 大圆的内部 (两个圆没有交点), 若 $2r < R$ 且两个圆的圆心距恰好等于 $\sqrt{R(R-2r)}$, 那么存在无穷多个三角形, 分别以这两个圆为内切圆和外接圆。

191. * 蝴蝶定理: 在圆锥曲线中, 过弦 PQ 的中点 M 任作

两条弦 AB, CD , 直线 AC, BD 交 PQ 于点 E, F , 则 $ME = EF$.



12 零散考点

192. 集合的 3 个特征: 确定性、互异性、无序性。

193. $\pi \approx 3.141592653$ 的分数近似值:

$$\frac{22}{7} \approx 3.142857, \frac{355}{113} \approx 3.14159292.$$

194. 三次方程韦达定理: ($a \neq 0$),

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{c}{a};$$

$$x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}.$$

195. 因式分解:

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) \\ = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$$

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

196. 锥体 (圆锥、棱锥) 体积公式: $V = \frac{1}{3}Sh$, S 为底面积, h 为锥体高度。

197. 圆台或棱台的体积: $V = \frac{1}{3}(S + \sqrt{SS'} + S')h$, S, S' 为两个底面积, h 为台体高度 (两个底面间的距离)。