从一道高考题到竞赛题的演变

赵斌[1] 李伟[2]

(1. 海亮高级中学, 311816; 2. 江苏省天一中学, 214101)

在刚刚结束的 2025 年普通高等学校招生统一考试 (即“高考”) 的数学全国 I 卷中有这样一道压轴题:

题 1 (1) 求函数 $f(x)=5\cos x-\cos 5x$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 的最大值;

(2) 给定 $\theta\in(0,\pi)$ 和 $a\in\mathbb{R}$, 证明: 存在 $y\in[a-\theta,a+\theta]$, 使得 $\cos y\le\cos\theta$;

(3)设 $b\in\mathbb{R}$, 若存在 $\varphi\in\mathbb{R}$, 使得 $5\cos x-\cos(5x+\varphi)\le b$ 对 $x\in\mathbb{R}$ 恒成立, 求 b 的最小值.

这是一道带有竞赛风格的高考题, 如果没有前两问为第三问铺垫, 仅有第三问完全可以作为高中联赛一试的压轴题. 现将第三问中的"5"推广到一般的正实数"a", 即有下面的推广, 其难度应该可以达到 CMO 的难度:

题 2 给定正数 a, 若存在实数 φ, 对任意 $x\in\mathbb{R}$, 均有 $a\cos x-\cos(ax+\varphi)\le b$, 求 b 的最小值.

解 一方面:

(1) 当 a 为无理数时, 令 $x=\frac{(2k+1)\pi-\varphi}{a+1}$, 则此时有 $ax+\varphi+x=(2k+1)\pi$, 从而,

$$a\cos x-\cos(ax+\varphi)=(a+1)\cos x=(a+1)\cos\left(\{\frac{k}{a+1}\}\cdot 2\pi+\frac{\pi-\varphi}{a+1}\right),$$

且由于 a 是无理数, 则 $\frac{1}{a+1}$ 也是无理数, 故 $\{\frac{k}{a+1}\}$ 在 $[0,1]$ 上稠密, 从而存在正整数 k 使得 $\cos\left(\{\frac{k}{a+1}\}\cdot 2\pi+\frac{\pi-\varphi}{a+1}\right)$ 趋近于 1, 从而 $b\ge a+1$.

(2) 当 a 为有理数时, 设 $a=\frac{q}{p},p,q\in\mathbb{N}^*,(p,q)=1$.

(i) 当 p 为奇数时, 设 $p\varphi\in[2t\pi,2(t+1)\pi],t\in\mathbb{Z}$, 由 Bezout 定理, 取整数 k, 满足

$$p\cdot k\equiv t+\frac{1-p}{2}\pmod{p+q}\iff p\cdot(2k+1)\equiv 2t+1\pmod{2(p+q)},$$

令 $x=\frac{p(2k+1)\pi-p\varphi}{p+q}$, 则,

$$\cos x=\cos\left(\frac{p(2k+1)\pi-p\varphi}{p+q}\right)=\cos\left(\frac{(2t+1)\pi-p\varphi}{p+q}\right),$$

修订日期: **2025-06-09.**

且
$$\frac{p(2t+1)\pi-p\varphi}{p+q}\in\left[-\frac{\pi}{p+q},\frac{\pi}{p+q}\right],$$
此时有 $ax+\varphi+x=(2k+1)\pi$, 从而
$$a\cos x-\cos(ax+\varphi)=(a+1)\cos x\geq(a+1)\cos\frac{\pi}{p+q}.$$
故
$$b\geq(a+1)\cos\frac{\pi}{p+q}.$$

(ii) 当 p 为偶数时, 设 $p\varphi\in[(2t-1)\pi,(2t+1)\pi],t\in\mathbb{Z}$, 由 Bezout 定理, 取整数 k, 满足
$$p\cdot k\equiv t+\frac{-p}{2}\pmod{p+q}\iff p\cdot(2k+1)\equiv 2t\pmod{2(p+q)},$$
令 $x=\frac{p(2k+1)\pi-p\varphi}{p+q}$, 则
$$\cos x=\cos\left(\frac{p(2k+1)\pi-p\varphi}{p+q}\right)=\cos\left(\frac{2t\pi-p\varphi}{p+q}\right),$$
且
$$\frac{p(2t+1)\pi-p\varphi}{p+q}\in\left[-\frac{\pi}{p+q},\frac{\pi}{p+q}\right],$$
此时有 $ax+\varphi+x=(2k+1)\pi$, 从而
$$a\cos x-\cos(ax+\varphi)=(a+1)\cos x\geq(a+1)\cos\frac{\pi}{p+q}.$$
故
$$b\geq(a+1)\cos\frac{\pi}{p+q}.$$

另一方面:

(1) 当 a 是无理数时, 显然 $b=a+1$ 符合条件.

(2) 当 a 是有理数时, 设 $a=\frac{q}{p},p,q\in\mathbb{N}^*,(p,q)=1$.

(i) 当 p 为奇数时, 此时取 $\varphi=0$, 我们来证明 $b=(a+1)\cos\frac{\pi}{p+q}$ 时符合条件, 即:
$$a\cos x-\cos(ax)\leq(a+1)\cos\frac{\pi}{p+q}.$$

令 $f(x)=a\cos x-\cos(ax)$, 为求 $f(x)\leq(a+1)\cos\frac{\pi}{p+q}$, 只需要证明在 $f'(x)=0$ 的点 x 有 $f(x)\leq(a+1)\cos\frac{\pi}{p+q}$ 即可. 而
$$f'(x)=0\iff\sin x=\sin(ax)\iff ax=x+2k\pi\text{ 或}ax+x=(2k+1)\pi,k\in\mathbb{Z},$$

a) 当 $ax=x+2k\pi$ 时,
$$a\cos x-\cos(ax)=(a-1)\cos x,$$

而由函数 $\cos x\pi$ 在 $x\in[0,\frac{1}{2}]$ 时上凸, 且 $x=(1-2x)\cdot 0+2x\cdot\frac{1}{2}$, 从而

$$(a+1)\cos\frac{\pi}{p+q}\geq(a+1)\left(1-\frac{2}{p+q}\right)\geq|a-1|.$$

最后一个不等式是因为 $\frac{p+q-2}{p}\geq\frac{|p-q|}{p}$.

b) 当 $ax+x=(2k+1)\pi$ 时 $x=\frac{p(2k+1)}{2(p+q)}\cdot 2\pi$, 而此时 $\frac{p(2k+1)}{2(p+q)}$ 不是整数, 易得 $\cos x\leq\cos\frac{\pi}{p+q}$. 从而我们有

$$f(x)=(a+1)\cos x\leq\cos\frac{\pi}{p+q}.$$

故此时该不等式成立.

(ii) 当 p 为偶数时, 此时取 $p\cdot\varphi=\pi$, 我们来证明 $b=(a+1)\cos\frac{\pi}{p+q}$ 时符合条件, 即:

$$a\cos x-\cos(ax+\frac{\pi}{p})\leq(a+1)\cos\frac{\pi}{p+q}.$$

令 $g(x)=a\cos x-\cos(ax+\frac{\pi}{p})$, 为求 $g(x)\leq(a+1)\cos\frac{\pi}{p+q}$, 只需要证明在 $g'(x)=0$ 的点 x 有 $g(x)\leq(a+1)\cos\frac{\pi}{p+q}$ 即可. 而

$$g'(x)=0\iff\sin x=\sin(ax+\frac{\pi}{p})\iff ax+\frac{\pi}{p}=x+2k\pi\text{ 或 }ax+\frac{\pi}{p}+x=2k\pi,k\in\mathbb{Z},$$

a) 当 $ax+\frac{\pi}{p}=x+2k\pi$ 时,

$$g(x)=a\cos x-\cos(ax+\frac{\pi}{p})=(a-1)\cos x,$$

而由函数 $\cos x\pi$ 在 $x\in[0,\frac{1}{2}]$ 时上凸, 且 $x=(1-2x)\cdot 0+2x\cdot\frac{1}{2}$, 从而

$$(a+1)\cos\frac{\pi}{p+q}\geq(a+1)\left(1-\frac{2}{p+q}\right)\geq|a-1|.$$

最后一个不等式是因为$\frac{p+q-2}{p}\geq\frac{|p-q|}{p}$.

b) 当 $ax+\frac{\pi}{p}+x=(2k+1)\pi$ 时 $x=\frac{p\cdot 2k+(p-1)\pi}{2(p+q)}\cdot 2\pi$, 而此时 $\frac{p\cdot 2k+(p-1)\pi}{2(p+q)}$ 不是整数, 易得 $\cos x\leq\cos\frac{\pi}{p+q}$. 从而我们有

$$g(x)=(a+1)\cos x\leq\cos\frac{\pi}{p+q}.$$

故此时不等式成立.

综上, 当 a 为无理数时, b 的最小值为 $a+1$; 而当 a 为有理数时, 设 $a=\frac{q}{p},p,q\in\mathbb{N}^*,(p,q)=1$, b 的最小值为 $(a+1)\cos\frac{\pi}{p+q}$. $\square$