数列不等式的方法和若干例题

王昊宇

(清华大学, 100084)

前　言

数列不等式是一类难度较大的不等式题型, 在高考中几乎必考, 在竞赛中(尤其预赛、一试) 也常有涉及. 变量通常遵循某个通项公式或者递推公式, 而待证明的结论通常是针对某一项或者针对和式、积式的不等式估计.

数列是离散的函数, 而递推关系从本质意义上来说就是一种函数方程. 如果递推关系具有局部性(只依赖相邻项), 那么它就非常像高等数学当中具有局部性的函数方程——微分方程. 微分方程的理论(包括不等式估计理论) 是非常丰富的, 而递推数列可以认为是其初等版本, 故也可有丰富的命题的空间. 很多时候因为离散的东西需要处理一些"零头", 所以有可能比连续的东西更加难以处理, 换言之, 递推数列的研究可能比微分方程更加困难. 有一些(相对) 简单的微分方程可以解出显式解, 同样地, 一些(相对) 简单的递推数列也能解出通项公式, 此时的题型就是"数列+不等式", 相对而言还容易一些. 但更多的微分方程、递推数列是并不能够求其显式解的, 此时题型就成了"数列×不等式", 必须寻找放缩的方式使得(以不等式来递推的) 数列能够解出、放缩出一个不等式通项, 这种题目也就更具有挑战性了.

绝大多数数列不等式都是无法取等的, 但这并不意味着数列不等式都很松, 因为有些数列不等式(或者函数不等式) 在一种极限情况下是接近等号的. 甚至可以说, 只要命题者愿意研究, 数列不等式可以出得相当紧. 这时很多常用的不等式(比如均值、柯西、排序) 都不是很凑效了, 容易放过, 反而是需要一些在一定范围内很紧凑的不等式, 比如伯努利、切线放缩, 有时也需要借助函数不等式甚至需要借助泰勒展开、积分放缩这样的高等手段来提高放缩精度.

求和的估计也是十分常见的. 有时候可以求出求和通项, 有时则需要放缩才能累和. 求和可以理解为离散版的积分, 同样地, 很多时候加法比积分更加困难. 因此, 借

修订日期: **2025-01-25.**

助积分进行放缩, 其实是一种有效的手段. 初等的做法则是尝试放缩裂项, 其实技巧性更高, 只是不依赖于高等知识.

注 笔者的解答过程中有大量跳步. 逻辑绕不过去的地方自己推理一遍, 方能学到东西. 部分内容会涉及高等, 包括极限、无穷和、积分, 如不了解可先跳过相应内容.

聚沙成塔——常用的求和恒等式

多项式求和公式(涵盖了等差数列求和)

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4},$$

这些公式可以用归纳法来论证, 且可以推广次数. 其实它们等价于组合恒等式当中的“曲棍球引理”(此名称非标准名称. 需要在杨辉三角当中看, 方能觉得形象)

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{k+a}^{a} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{k+a}^{k} = \mathrm{C}_{n+a+1}^{a+1} = \mathrm{C}_{n+a+1}^{n}.$$

当我们处理多项式求和的时候, 可以把多项式拆分为这种排列数或者组合数的“加权求和”的形式(高等代数中称为“线性组合”), 每部分套用公式, 再加起来.

部分分式裂项

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right);$$
$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right);$$
$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right);$$

裂项的目的, 是为了在进行求和时, 可以错位相消. 以上的等式只要对一段连续的 n 求和, 右侧将可以只保留2 项(只留头尾) 或4 项(只留头两项和尾两项), 就把和式处理掉了. 有时为了达成裂项的目的, 会进行放缩, 比如

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-0.5)(n+0.5)} = \frac{1}{n-0.5} - \frac{1}{n+0.5}.$$

$$\frac{1}{n^2} > \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

这种放缩对于 n 较小的时候放得较为过分, 如果题目需要证明的不等式较紧, 可能需要考虑把头几项单独计算, 从某一项开始再进行放缩裂项.

这种办法用于处理分母是 n 的 2, 3, 4 $\cdots$ 次多项式的和式不等式, 是较为合适的.

等比数列求和

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q},\ q \neq 1.$$

注意上式下标从 0 开始, 如果从 1 开始则需要改为 $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k = \frac{q-q^{n+1}}{1-q}$.

有时候我们也需要处理"多项式 $\times$ 等比"的求和, 此时可以考虑错位相消法. 此外, 如果项数为无限, 其实更为简单(因为不需要处理"残项"):

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots,\ |q| < 1;$$

$$\frac{1}{(1-q)^2} = 1 + 2q + 3q^2 + \cdots + (n+1)q^n + \cdots,\ |q| < 1;$$

$$\frac{1}{(1-q)^3} = 1 + 3q + 6q^2 + \cdots + \frac{(n+1)(n+2)}{2}q^n + \cdots,\ |q| < 1.$$

更一般地, 对正整数 k, 有

$$\frac{1}{(1-q)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k-1}^{k-1} q^n,\ |q| < 1.$$

与前面类似, 一般的多项式可以拆为以上的便于求和的多项式的加权求和的形式, 每部分套用公式, 再加在一起即可处理. 不等式不算太紧的话, 也可以考虑用放缩来简化处理.

有时候需要处理等差三角函数求和, 此时可采取"半角正弦"的裂项方法:

$$\sin\frac{d}{2}\sin(a_0+nd) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(a_0+(n-\frac{1}{2})d\right) - \cos\left(a_0+\left(n+\frac{1}{2}\right)d\right)\right),$$

$$\sin\frac{d}{2}\cos(a_0+nd) = \frac{1}{2}\left(-\sin\left(a_0+(n-\frac{1}{2})d\right) + \sin\left(a_0+\left(n+\frac{1}{2}\right)d\right)\right),$$

便能求和消去.

组织起来——常见递推式的处理

一些递推公式可以直接推出通项公式. 除了等差, 等比之外, 还有一些相对复杂一些的递推式. (除等差、等比外) 最为常用的是等比带非齐次项: $a_{n+1} = ra_n + b_n$, 其中 $r \neq 0, 1$ 为常数, b_n 为某个已知的数列. 此时可以两侧同除以 r^{n+1} 得到

$$\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}} = \frac{a_n}{r^n} + \frac{b_n}{r^{n+1}},$$

从而可以错位相消, 得到

$$\frac{a_n}{r^n}=a_0+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_k}{r^{k+1}},$$

也即

$$a_n=r^na_0+\sum_{k=0}^{n-1}r^{n-1-k}b_k.$$

这个公式称为 Grownwall 恒等式, 从直觉上可以这么理解: r 理解为“增值率”, a_0 是“初始资产”, 经过 n 个时间单位, 复利增值到了 r^n. 而 b_k 理解为在第 $k+1$ 个时间点才额外新增的资产, 它只经过了 $n-1-k$ 个时间单位的增值, 因此前面的系数只有 r^{n-1-k}.

这个公式在 $r>0$ 的情况下可以有不等式版本: 如果 $a_{n+1}\le ra_n+b_n$, 就有

$$a_n\le r^na_0+\sum_{k=0}^{n-1}r^{n-1-k}b_k,$$

此即 Grownwall 不等式(类似地, 大于等于的版本也成立). 其实 Grownwall 不等式是微分方程研究中的常用工具, 此处是其离散版本的对应.

此外,“等比”也可以改成“不等比”, 递推数列 $a_{n+1}=r_na_n+b_n$ 的“通项公式”为

$$a_n=\left(\prod_{k=0}^{n-1}r_k\right)a_0+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\prod_{t=k+1}^{n-1}r_t\right)b_k,$$

其中 $\prod\limits_{t=n}^{n-1}r_t$ 视为 1. 这是更为一般的 Grownwall 恒等式, 如果所有 $r_k>0$ 亦可有更为一般的 Grownwall 不等式. 此式形式较为复杂, 其原因是参数较多且较一般. 代入具体题目后应该是可以简化的. (不等比的数列可能是“公比”为 n, 此时通项将涉及阶乘)

除此之外, 最常见的能求通项的就是二阶线性递推数列和分式递推数列, 限于篇幅, 这里只陈述结论或处理方法.

二阶线性递推 $a_{n+2}+ba_{n+1}+ca_n=0$ 可以求特征方程 $x^2+bx+c=0$ 的根 x_1,x_2, 可能为复数. 如果两根不同, 则 $a_n=Ax_1^n+Bx_2^n$, 如果相同则 $a_n=(C+Dn)\,x_1^n$, 而后可根据数列的两项值来确定常数的具体数值.

分式线性递推 $a_{n+1}=\frac{aa_n+b}{a_n+c}$ 可以求不动点方程 $x=\frac{ax+b}{x+c}$ 的两根 x_1,x_2, 同样可能为复根. 如果两根不同, 则考察 $\frac{a_{n+1}-x_1}{a_{n+1}-x_2}$, 可证明其为等比数列; 若 $x_1=x_2$, 则考察 $\frac{1}{a_{n+1}-x_1}$, 可证明其为等差数列.

一般来说, 在数列不等式的题目中, 能弄出通项的数列并不多. 尽管如此, 我们仍然需要掌握这种数列, 因为很多时候我们需要先放缩再套用已有的处理办法, 或者先用不动点法“尝试求通项”, 未成, 但却找到了放缩的办法.

一些例子 (1)

例 1 (Raphson–Newton 迭代法) 给定 $a>0$, $a_0>0$, 定义递推数列

$$a_n = a_{n-1} - \frac{a_{n-1}^2 - a}{2\,a_{n-1}} = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}}\right),\ n \ \geq\ 1,$$

求证: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{a}$.

证明 将递推式减去不动点 $\sqrt{a}$ 或者减去 $-\sqrt{a}$ 可得

$$a_n - \sqrt{a} = \frac{1}{2\,a_{n-1}}\left(a_{n-1} - \sqrt{a}\right)^2,$$
$$a_n + \sqrt{a} = \frac{1}{2\,a_{n-1}}\left(a_{n-1} + \sqrt{a}\right)^2,$$

归纳易证 $a_n>0$, 从而第二式总非零. 取两式比值可得

$$\frac{a_n - \sqrt{a}}{a_n + \sqrt{a}} = \left(\frac{a_{n-1} - \sqrt{a}}{a_{n-1} + \sqrt{a}}\right)^2,$$

迭代此式, 可知

$$\frac{a_n - \sqrt{a}}{a_n + \sqrt{a}} = \left(\frac{a_{n-1} - \sqrt{a}}{a_{n-1} + \sqrt{a}}\right)^2 = \left(\frac{a_{n-2} - \sqrt{a}}{a_{n-2} + \sqrt{a}}\right)^4 = \cdots = \left(\frac{a_0 - \sqrt{a}}{a_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n}.$$

因为底数 $\frac{a_0-\sqrt{a}}{a_0+\sqrt{a}}$ 的绝对值小于 1, 而指数在 $n\to\infty$ 时趋于无穷, 因此上式在 $n\to\infty$ 时趋于 0, 也即 $\frac{a_0-\sqrt{a}}{a_0+\sqrt{a}}\to 0$, 从而 $a_n = \sqrt{a}\frac{1+\frac{a_n-\sqrt{a}}{a_n+\sqrt{a}}}{1-\frac{a_n-\sqrt{a}}{a_n+\sqrt{a}}} \to \sqrt{a}\frac{1+0}{1-0} = \sqrt{a}$. □

评注 很多情况下不动点法并不能用于求出通项, 但本题是个例外. 另外, 本题实质上是尝试求解方程 $x^2-a=0$ 的一个根, 从点 (a_n, a_n^2-a) 引曲线 $y=x^2-a$ 的切线, 相交 x 轴于 $(a_{n+1},0)$, 以后者作为下一步的近似根. 此法在数值计算当中十分常用, 用于近似计算函数的零点, 称为 Raphson-Newton 迭代法.

另外, 本题并非必须求通项. 可用均值证明 $a_1 \ \geq\ \sqrt{a}$ 并归纳证明 $\sqrt{a}\ \leq\ a_{n+1}\ \leq\ a_n$ 对 $n\ \geq\ 1$ 成立, 随后利用单调有界定理得出极限存在, 随后在递推式两侧取极限来解出极限值必须等于 $\sqrt{a}$. 其实更多的场合之下, 采用这一思路更加明智 (硬解通项计算量更高, 且能做的题更少).

例 2 (2024 预赛–贵州–7) 求 $\sum\limits_{i=1}^{40}\sqrt{400+i}$ 的整数部分.

思考 根号的求和无法显示写出, 应该需要放缩裂项.

解答 配对求和

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{40}\sqrt{400+i} &= \sum_{i=1}^{20}\left(\sqrt{400+i}+\sqrt{400+41-i}\right)\\ &> \sum_{i=1}^{20}\left(\sqrt{400}+\sqrt{400+41}\right) = 820,\end{aligned}$$

这里利用了 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$ 对于 $a+b=c+d,\ c<a\ \le\ b<d$. 此后需要估计一个上界. 但

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{40}\sqrt{400+i}-820&=\sum_{i=1}^{20}\left(\left(\sqrt{400+i}-20\right)-\left(21-\sqrt{400+41-i}\right)\right)\\
&=\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{i}{\sqrt{400+i}+20}-\frac{i}{21+\sqrt{400+41-i}}\right)\\
&<\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{i}{40}-\frac{i}{42}\right)=\frac{\left(\frac{20\times 21}{2}\right)}{840}<1,
\end{aligned}
$$

因此原和式的整数部分是 820 . $\square$

评注 本题其实很需要代数变形技巧. 因为其实是填空题, 感觉更需要有猜测的直觉. 另外, 经过尝试, 本题欲采用积分放缩法反倒会遇到难以计算的数值, 甚至容易放过. 以下利用上凸性质进行梯形放缩

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{40}\sqrt{400+i}&>\int_{400.5}^{440.5}x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x>\frac{40}{41}\int_{400}^{441}x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\
&=\frac{40}{41}\times\frac{2}{3}\left(441^{\frac{3}{2}}-400^{\frac{3}{2}}\right)=820+\frac{20}{123}>820,
\end{aligned}
$$

再利用单调性向上放缩

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{40}\sqrt{400+i}&<\int_{401}^{441}x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\left(441^{\frac{3}{2}}-401^{\frac{3}{2}}\right)\\
&<\frac{2}{3}\left(441^{\frac{3}{2}}-\left(400\times 401.5^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{2}{3}\times(1231)\\
&=820+\frac{2}{3}<820+1,
\end{aligned}
$$

也能得到结果, 但既没有省计算量也没有省技巧, 属于偷鸡不成蚀把米了. 应该说本题其实是相当不好做的——吃技巧, 还坑积分放缩套路.

例 3 (2024 预赛–重庆–11) 设 $x_1=3,\ x_{n+1}=\sqrt{x_n+14}-\sqrt{x_n+2},\ n\ \ge\ 1$, 求 $(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 的整数部分.

思考 不难判断 $f(x)=\sqrt{x+14}-\sqrt{x+2}$ 单调递减 (平方根的凹性, 或者求导), 代入首项估算不难判断 $x_2=\sqrt{17}-\sqrt{5}\approx 4-2=2<3=x_1$, 此后就有 $x_3>x_2$, 随后增减交替. 通过观察可发现 2 是不动点.

解答 记 $f(x)=\sqrt{x+14}-\sqrt{x+2}$, 容易判断 $f(x)$ 单调减, 且 $f(2)=2$. 以下证明

$$|f(x)-2|\le\frac{1}{2\sqrt{2}}|x-2|.$$

事实上,

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+14}}-\frac{1}{2\sqrt{x+2}}>-\frac{1}{2\sqrt{x+2}}>-\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

因此对任何 $x>0$, 根据 Lagrange 中值定理, 存在 ξ 使得 $f(x)-f(2)=f'(\xi)(x-2)$, 取绝对值即可知以上引理成立.

上述引理说明

$$|x_{k+1}-2|\leq\frac{1}{2\sqrt{2}}|x_k-2|\leq|x_k-2|.$$

用归纳法配合单调性容易证明:

$$x_{2k-1}-2>0>x_{2k}-2$$

因此, $\{x_k-2\}$ 是一个正负交替, 绝对值递降且趋于 0 的数列. 因此

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-2)\ \geq\ \sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}((x_{2\,k-1}-2)+(x_{2\,k}-2))\ \geq\ \sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}0=0,$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(x_k-2)=1+\sum_{k=2}^{n}(x_k-2)&\leq 1+\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}((x_{2k}-2)+(x_{2\,k+1}-2))\\&\leq 1+\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}0=1,\end{aligned}$$

其中当 $n=1$ 时上个等式取等, 而 $n\ \geq\ 2$ 时不取等. 所以 $x_1+x_2+\cdots+x_n$ 的整数部分为 $2n\ (n\geq 2)$ 或者 $3\ (n=1)$. □

评注 本题关键在于围绕不动点做文章. 在不动点附近, $|f'(x)|$ 始终小于一个常数, 且常数小于 1, 这就能导致数列只要进入这个附近, 就会向着不动点收敛. 由于 $f'(x)$ 为负, 此处必然是在两侧交替地取值, 这种满足: 正负交替、绝对值递降且趋于 0 的数列称为 Leibniz 数列 (级数), 其部分和的绝对值可用用首项控制住, 剩下的项可以两两放缩抵消.

例 4 (2024 预赛–福建–7) 已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且

$$S_n=\frac{9}{8}a_n-\frac{3}{8}3^n+\frac{3}{8}.$$

则使 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{S_i}{a_i}<2024$ 成立的最大正整数 n 为多数?

思考 代入 $n=1$ 可得 $a_1=6$. 对更大的 n 代入 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 整理可得

$$0=\frac{1}{8}S_n-\frac{9}{8}S_{n-1}-\frac{3}{8}3^n+\frac{3}{8},$$

同时乘以 8 并除以 9^n 可得

$$0=\frac{S_n}{9^n}-\frac{S_{n-1}}{9^{n-1}}-\frac{3}{3^n}+\frac{3}{9^n},$$

对 n 求和可得 (利用 $S_0=0$)

$$\frac{S_n}{9^n}=3\,\frac{\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}-3\,\frac{\frac{1}{9}-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{8}-\frac{1.5}{3^n}+\frac{0.375}{9^n},$$

进一步得到

$$\frac{a_n}{9^n}=\frac{S_n}{9^n}-\frac{1}{9}\left(\frac{S_{n-1}}{9^{n-1}}\right)=\left(\frac{9}{8}-\frac{1.5}{3^n}+\frac{0.375}{9^n}\right)-\left(\frac{1}{8}-\frac{0.5}{3^n}+\frac{0.375}{9^n}\right)=1-\frac{1}{3^n},$$

从而

$$\frac{S_n}{a_n}=\frac{1.125-\frac{1.5}{3^n}+\frac{0.375}{9^n}}{1-\frac{1}{3^n}}=1.125-\frac{0.375}{3^n},$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{S_i}{a_i}=\frac{9}{8}\,n-\frac{3}{16}\left(1-\frac{1}{3^n}\right).$$

考察 $n=1800$, 结果为 $2025-\frac{3}{16}+\frac{3}{16}\,3^{-1800}>2024$, 而 $n=1799$ 时结果为 $2024-\frac{1}{8}-\frac{3}{16}+\frac{3}{16}\,3^{-1799}<2024$, 因此答案为 1799. □

评注 本题给的递推关系可以求出通项, 因此数列部分和不等式放缩部分是可以解耦的, 技巧性相对较低. 只是这样的题目需要一定的计算量, 且容易出错.

例 5 (2024 预赛–新疆–6) 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=\frac{1}{5}, 2a_{n+1}=2a_n+a_n^2$. 记

$$T_{2024}=\frac{1}{a_1+2}+\frac{1}{a_2+2}+\cdots+\frac{1}{a_{2024}+2},$$

求 T_{2024} 的整数部分.

思考 递推关系取倒数

$$\frac{1}{2a_{n+1}}=\frac{1}{a_n\left(a_n+2\right)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_n+2}\right),$$

因此

$$T_{2024}=\sum_{i=1}^{2024}\frac{1}{a_i+2}=\sum_{i=1}^{2024}\left(\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}}\right)=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{2025}}=5-\frac{1}{a_{2025}}.$$

解答 延续上面步骤. 显然 a_n 单调增. 那么 $a_{2025}>0$,说明 $T_{2024}<5$. 假设 $a_{2025}<1$, 则有

$$T_{2024}=\sum_{i=1}^{2024}\frac{1}{a_i+2}>\sum_{i=1}^{2024}\frac{1}{1+2}=\frac{2024}{3}>5,$$

矛盾. 因此假设不成立, 从而 $a_{2025}\geq 1$, 进而 $T_{2024}\geq 5-\frac{1}{1}=4$, 也即答案为 4. □

评注 本题的递推公式刚好可以用于裂项, 也即本题的结论的形式其实是"预先设计好"的. 对于这样的问题, 通常只能去尝试破解出题者的套路. 另: 反证法不是必须的, 也可以通过计算若干项 (可以连计算带放缩) 的方式来估计 a_{2025} 的下界. 另外, 内蒙古的第 7 题如出一辙, 此处不再单独讲解: $a_1=\frac{1}{10}$, $a_{n+1}=a_n^2+a_n$, 求 $\sum\limits_{i=1}^{2024}\frac{1}{a_i+1}$ 的整数部分.

例 6 (2024 预赛–广东–4) 数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意 $n\geq 2$, $a_n=2024a_{n-1}-n$. 如果该数列的每一项都是正数, 则 a_1 的最小值为多数?

解答 递推式两边除以 2024^n 可得

$$\frac{a_n}{2024^n}=\frac{a_{n-1}}{2024^{n-1}}-\frac{n}{2024^n},$$

迭代此式可得

$$0<\frac{a_n}{2024^n}=\frac{a_1}{2024}-\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{2024^k},$$

因此

$$a_1>\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{2024^{k-1}},$$

令 $n\to\infty$ 可知

$$a_1\geq\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k}{2024^{k-1}}=-1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2024^{k-1}}=-1+\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2024}\right)^2}=\frac{4047}{2023^2}.$$

而当 $a_1=\frac{4047}{2023^2}$, 根据如上的通项公式可得 $\frac{a_n}{2024^n}>0$. 因此这就是最小值. □

评注 只要意识到了通项可以求出来, 本题并不困难, 只是需要按照常规的做法去硬算. 不过作为填空题, 难度还是比较大的, 是"硬题", 若欲代特殊值偷鸡就做不出来了.

例 7 (2024 预赛–吉林–14) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+a_{n-1}(n\geq 2)$, 求证: $\sum\limits_{k=1}^{2024}\frac{1}{a_k}>88$.

解答 先裂项变形

$$\sum_{k=1}^{2024}\frac{1}{a_k}=1+\sum_{k=2}^{2024}(a_{k+1}-a_{k-1})=1+a_{2024}+a_{2025}-a_1-a_2=a_{2024}+a_{2025}-2.$$

然后把递推式乘以 a_n 会发现 $a_{n+1}\,a_n=1+a_n\,a_{n-1}$, 因此 $\{a_{n+1}\,a_n\}$ 是等差数列, 从而利用首项的值可知 $a_{n+1}\,a_n=n+1$. 从而

$$\sum_{k=1}^{2024}\frac{1}{a_k}=a_{2024}+a_{2025}-2\ \geq\ 2\sqrt{a_{2024}\,a_{2025}}-2=90-2=88,$$

我们指出, 上式的等号不成立. 事实上等号成立要求 $a_{2024}=a_{2025}=45$, 但其实根据 $a_{n+1}a_n=n+1$ 和首项可以得到通项公式

$$a_{2k-1}=\frac{(2k-1)!!}{(2k-2)!!}, a_{2k}=\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!},$$

二者并不相符. 因此 $\sum\limits_{k=1}^{2024}\frac{1}{a_k}>88$. □

评注 本题的递推关系是纸老虎. 表面上二阶且非线性, 其实稍作变形就露出了马脚. 本题是通项可求的类型.

暗流涌动——变形技巧背后的微分方程

有一类一阶递推数列具有如下的形式:

$$a_{n+1}=a_n+\varepsilon\, f\left(a_n\right),$$

其中 ε 是与 n 无关的常数 (通常较小), f 是一个函数, 通常具有单调性 (至少在某一范围之内). 如果 f 的形式不是特别简单, 这样的数列是无法求通项的 (可以尝试常见的函数, 比如幂、指数、对数, 通项都无法计算).

尽管如此, 我们可以尝试如下的套路: 试图寻找函数 $F(x)$ 使得其导数为 $\frac{1}{f(x)}$. 随后研究

$$F\left(a_{n+1}\right)-F\left(a_n\right)\approx F'\left(a_n\right)\left(a_{n+1}-a_n\right)=\varepsilon,$$

这里约等号表示两者相接近, 实际做题时可用不等式放缩, 严格论证一些“八九不离十”的结果, 把待处理的式子大致变为接近等差数列的东西.

若 $f(x)=x^2$, 可取 $F(x)=-\frac{1}{x}$, 这也就是“取倒”技巧的由来. 若 $f(x)=\frac{1}{x^m}$, 可取 $F(x)=\frac{1}{m+1}\,x^{m+1}$, 这就是平方、立方的技巧.

这么做的动机, 其实是跟微分方程建立近似的对应. 这个递推式近似地在模拟如下的微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}=f(y(x)),$$

其中 $a_n\approx y(n\varepsilon)$. 该方程通过变形后可变为

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{f(y)}=x+C,$$

左侧即为 F. 离散到数列后会有截断误差, 但右侧仍然会接近等差数列.

例 8 (摘自单墫《数学竞赛研究教程》) 已知 $a_0=\frac{1}{2}, a_{k+1}=a_k+\frac{1}{n}a_k^2\ (0\le k<n)$, 证明:

$$1-\frac{1}{n}<a_n<1.$$

注 单墫老师摘录的是由中国科学技术大学白志东先生给出的方法. 通过尝试计算和放缩, 右侧猜 $a_k < \frac{n}{2\,n-k}$ 而后归纳证明, 而左侧猜 $a_k > \frac{n+1}{2\,n+2-k}$ 而后归纳证明. 在那个时代, 一些技巧套路并不如现今这么熟知, 很多题目的解答都是探索尝试而得来的.

证明 对递推式取倒数, 裂项可得

$$\frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1}{a_k\left(1+\frac{a_k}{n}\right)} = \frac{1}{a_k} - \frac{1}{n+a_k},$$

不难证明 a_k 单增, 恒正, 因此

$$\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1}{n+a_k} < \frac{1}{n},$$

进而 $\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} < \frac{n}{n} = 1$, 也即 $\frac{1}{a_n} > 1$, 推出 $a_n < 1$.

这说明所有 $a_k < 1, 0 \le k \le n$, 从而

$$\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1}{n+a_k} > \frac{1}{n+1},$$

进而 $\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} > \frac{n}{n+1}$, 因此 $\frac{1}{a_n} < \frac{n+2}{n+1}$, 推出 $a_n > \frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2} > 1 - \frac{1}{n}$. □

评注 本题左侧可以进一步加强. 事实上, (取倒或者归纳) 证明了 $a_k \le \frac{n}{2\,n-k}$ 以后, 可得

$$\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1}{n+a_k} \ge \frac{1}{n+\frac{n}{2n-k}} = \frac{2n-k}{n(2n-k+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\frac{1}{2n-k+1}$$

从而有 (此处利用了一个经典结论

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < \ln 2,$$

这个经典结论可以根据对数放缩裂项 $\frac{1}{m} < \ln m - \ln(m-1)$ 得到)

$$\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} \ge 1 - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n-k+1} > 1 - \frac{1}{n}\ln 2,$$

因此有

$$a_n > \frac{1}{1+\frac{1}{n}\ln 2} > 1 - \frac{1}{n}\ln 2.$$

如果希望加强右侧, 也可以考虑代入更精确的下界来放缩.

例 9 给定 $a_0 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, 求 a_{2024} 的整数部分.

解答 将递推式平方可得 $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2}$, 因此

$$a_n^2 > a_{n-1}^2 + 2 > a_{n-2}^2 + 4 > \cdots > a_0^2 + 2n = 2n+1,$$

这说明 $a_n > \sqrt{2n+1}$, $\forall\, n \ge 1$. 此估计可以通过直算几项来稍微加强：$a_1 = 2$, $a_2 = \frac{5}{2}$, 从而对 $n \ge 2$ 时有 $a_n \ge \sqrt{2n+2.25}$. 特别地, $a_{2024} \ge \sqrt{4050.25} > \sqrt{3969} = 63$.

有了这个稍微粗略的估计之后, 即可进行更为精细的估计:(利用放缩 $\frac{2}{x} < \ln\frac{x+1}{x-1}$, $x>1$)

$$\begin{aligned}
a_{2024}^2 &= a_2^2 + 2\cdot 2022 + \sum_{k=2}^{2023}\frac{1}{a_k^2} \\
&\le 4050.25 + \sum_{k=2}^{2023}\frac{1}{2k+2.25} \\
&< 4050.25 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{2023}\ln\left(\frac{2k+3.25}{2k+1.25}\right) \\
&= 4050.25 + \frac{1}{2}\ln\frac{4049.25}{5.25} \\
&< 4050.25 + \frac{1}{2}\ln\frac{4096}{4} \\
&= 4050.25 + \frac{\ln 2^{10}}{2} = 4050.25 + 5\ln 2 \\
&< 4050.25 + 5\cdot 0.7 < 4096 = 64^2.
\end{aligned}$$

因此 a_{2024} 的整数部分是 63. □

评注 估计上界也可以考虑做一些变形后放缩, 比如两侧减 0.5 后再平方,

$$(a_{n+1}-0.5)^2 = \left(a_n - 0.5 + \frac{1}{a_n}\right)^2 = (a_n-0.5)^2 + 2\frac{a_n-0.5}{a_n} + \frac{1}{a_n^2} < (a_n-0.5)^2+2,$$

对于 $n\ge 2$ 成立. 因此

$$(a_{2024}-0.5)^2 < 2\cdot 2022 + (a_2-0.5)^2 < 4048,$$

但可惜右侧比 63.5^2 略大, 说明放缩过度了. 可改为两侧减 0.2 后再平方, 利用 $a_n\ge 2.5, n\ge 2$, 有

$$\begin{aligned}
(a_{n+1}-0.2)^2 &= (a_n-0.2)^2 + 2\frac{a_n-0.2}{a_n} + \frac{1}{a_n^2} \\
&\le (a_n-0.2)^2 + 2\frac{a_n-0.2}{a_n} + \frac{0.4}{a_n} \\
&= (a_n-0.2)^2 + 2,
\end{aligned}$$

因此

$$(a_{2024}-0.2)^2 < 2\cdot 2022 + (a_2-0.2)^2 = 4049.29 < 4064 = 64\cdot 63.5 < 64\cdot 63.6 < 63.8^2,$$

这说明 $a_{2024} < 64$.

仙人指路——积分放缩方法

在处理已知通项的求和式时, 并不是总能够寻找到好的裂项方式, 甚至放缩后裂项的方式也不好找. 不过, 数列是离散的函数, 求和是离散的积分, 而有些时候, 积分是

比加法容易的. 积分虽然略有超纲, 但其实不定积分就是求导的逆运算, 而定积分有着明确的几何意义 (或者物理意义), 在熟练掌握导数之后, 计算一些常用的一元积分并非遥不可及之事.

对于一个单调增的函数 $f(x)$, 我们可以试图寻找函数 $F(x)$ 使得 $F' = f$, 这时就有

$$f(n) = \int_n^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}\,x \le \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(n+1) - F(n),$$

$$f(n) = \int_{n-1}^{n} f(n)\,\mathrm{d}\,x \ge \int_{n-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(n) - F(n-1).$$

完成这样的放缩之后, 和式 $\sum f(n)$ 就可以错位相消, 进而估计出形式相对简单的上下界了. 对于单调减的函数, 结论类似, 只是不等号反向.

例如

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1).$$

如果向上放缩, 可以单独拿出一项,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \sum_{k=2}^{n} (\ln k - \ln(k-1)) = 1 + \ln(n).$$

有些时候, 这样的放缩不够精细. 为了提高紧凑程度, 可以考虑多保留几项再开始放缩 (通常前几项的放缩会放得更多), 或者对于有凸性的函数, 使用梯形放缩方法.

假设 $f(x)$ 是凸函数, $F' = f$, 则有

$$2f(n) \le f(n+x) + f(n-x) \le f(n-a) + f(n+a),\ 0 \le x \le a.$$

对 x 从 0 到 $a > 0$ 积分可得

$$2af(n) \le \int_{n-a}^{n+a} f(x)\,\mathrm{d}\,x \le a(f(n-a) + f(n+a)),$$

从左到右三项的几何含义分别为: 下方切线梯形面积、曲边梯形面积、上方割线梯形面积."梯形放缩法" 的名称因此而得来.

以上两种方法是最常用的, 但并非全部方法, 有时候也会做积分恒等变形 (就像和式变换一样) 再采取基本的放缩.

例 10 (2023 天津高考压轴) *求证:*

$$\frac{5}{6} < \ln n! - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n \le 1.$$

思考 此处 $\ln n! = \sum\limits_{k=2}^{n} \ln k$, 因此本质就是和式估计问题.

解答 记 $a_n=\ln n!-(n+\frac{1}{2})\ln n+n$, 则 $a_1=1$, 而

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\ln(n+1)-\left(n+\frac{3}{2}\right)\ln(n+1)+n+1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n\\&=-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{n+1}{n}+1,\end{aligned}$$

利用梯形放缩

$$\ln\frac{n+1}{n}=\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x\geq\frac{1}{n+0.5},$$

可知 $a_{n+1}-a_n\leq 0$, 也即该数列递减, 从而 $a_n\leq a_1\leq 1$, 右侧成立.

为证明左侧, 我们尝试向下梯形放缩 (利用凹性)

$$\begin{aligned}\ln n!=\sum_{k=2}^{n}\ln k\geq\sum_{k=2}^{n}\int_{k-0.5}^{k+0.5}\ln x\,\mathrm{d}\,x=\int_{1.5}^{n+0.5}\ln x\,\mathrm{d}\,x\\=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}-(n-1),\end{aligned}$$

为证明左侧, 只需证明

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{n+\frac{1}{2}}{n}\geq\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{6},$$

而

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{n+\frac{1}{2}}{n}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_n^{n+\frac{1}{2}}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x\geq\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_n^{n+\frac{1}{2}}\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2},$$

因此只需证明

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}>\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2},$$

也即$\ln\frac{3}{2}<\frac{4}{9}$. 而利用梯形放缩, $\ln\frac{3}{2}=\int_2^3\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x\leq\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})=\frac{5}{12}<\frac{4}{9}$, 因此上式成立, 从而原不等式左侧成立. □

评注 这题原本是有一些铺垫步骤的, 但其实只要有积分放缩的思想, 便可以自行将解题思路搭建起来. 原则上来说每一步放缩都可以用准初等的内容 (最多涉及函数导数) 来代替, 但那样的解答过程就会让人难以理解其思路.

本题如果使用斯特林公式, 可以将左侧加至最强.

例 11 (2024 印度 MO-6) 对整数 $n\geq 3$, 记

$$A_n=\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+3}+\cdots+\sqrt{n^2+2n-1},$$
$$B_n=\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+4}+\cdots+\sqrt{n^2+2n},$$

求所有 n 使得 $\lfloor A_n\rfloor=\lfloor B_n\rfloor$.

注 本题似乎跟 2024 贵州预赛 (前文例 2) 有些类似. 若试图使用积分放缩, 反而会很棘手.

解答

$$
\begin{aligned}
A_n+B_n&=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{n^2+k}+\sqrt{(n+1)^2-k}\right)\\
&\geq\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{n^2}+\sqrt{(n+1)^2}\right)=n(2n+1),\\
A_n+B_n-n(2n+1)&=\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\sqrt{n^2+k}-n\right)-\left(n+1-\sqrt{(n+1)^2-k}\right)\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{\sqrt{n^2+k}+n}-\frac{k}{n+1+\sqrt{(n+1)^2-k}}\right)\\
&<\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{2n}-\frac{k}{2(n+1)}\right)\\
&=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{2n(n+1)}=\frac{1}{4},
\end{aligned}
$$

这样就大致框定了 A_n+B_n 的范围. 而 $B_n-A_n>0$ 以及 $B_n-A_n<\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}<1$ 较为显然. 若 n 为奇数, 有

$$A_n=\frac{A_n+B_n}{2}-\frac{B_n-A_n}{2}>\frac{n(2n+1)}{2}-\frac{1}{2}=n^2+\frac{n-1}{2},$$

我们稍微将 B_n-A_n 的估计加细一些,

$$
\begin{aligned}
B_n-A_n&=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{n^2+2k}-\sqrt{n^2+(2k-1)}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2k}+\sqrt{n^2+(2k-1)}}\\
&<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

从而

$$B_n=\frac{A_n+B_n}{2}+\frac{B_n-A_n}{2}<\frac{n(2n+1)+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{2}<n^2+\frac{n-1}{2}+1,$$

这说明 $\lfloor A_n\rfloor=n^2+\frac{n-1}{2}=\lfloor B_n\rfloor$. 换言之, $n\geq 3$ 为奇数时, $\lfloor A_n\rfloor=\lfloor B_n\rfloor$.

而当 $n\geq 4$ 为偶数时,

$$B_n>\frac{A_n+B_n}{2}\geq\frac{n(2n+1)}{2},$$

我们把 B_n-A_n 的下界估计加细一点

$$B_n-A_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2k}+\sqrt{n^2+(2k-1)}}>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2(n+1)}=\frac{n}{2(n+1)},$$

从而有

$$A_n=\frac{A_n+B_n}{2}-\frac{B_n-A_n}{2}<\frac{n(2n+1)+\frac{1}{4}-\frac{n}{2(n+1)}}{2}<\frac{n(2n+1)}{2},$$

这说明 $\lfloor B_n \rfloor \geq \frac{n(2n+1)}{2} > \lfloor A_n \rfloor$, 二者不等. 综上, 本题所求的 n 为全体大于等于 3 的奇数. $\square$

评注 兵无常势, 水无常形. 尽管本题从形式上看似乎非常适合积分放缩, 但真正着手去做时, 会发现对本题而言积分放缩的精度反而是不太够的. 所谓数学分析, 不只是微积分, 更重要的是一种思想, 把式子拆成"好研究的项"和"很小的项", 前者用代数变形处理，后者用不等式控住. 但不得不说, 如果不亲手试一次用积分处理本题, 可能还真无法知道积分放缩法是怎么翻车的. 并非所有解题尝试都能够走向成功, 有些尝试即便成功了也可能只是探出一条麻烦丑陋的路径. 但只要是自己下了的工夫, 不论成功失败, 不论巧妙笨拙, 都是自己的经验. 只有平时下够工夫, 才能在重要考试面前不出、少出乱子, 及时发现异常并调整战术.

借力打力——用函数不等式进行数列放缩

不少场合下, 我们需要处理的数列或者和式会跟函数有关系. 我们做函数题时, 它可能是困难, 但当我们做数列题时, 它反而能成为工具.

比如, 当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, 有 $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$, 这个不等式就能用于处理一些类似 $\sum\limits_{n} \sin\frac{1}{n(n+1)}$ 的和式. 不过我们也应当意识到, 往小的放缩在 $x \approx 0$ 时是有点松的, 如果想在这一部分放出更紧的下界, 可考虑 $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$.

这种不等式是如何得到的? 这其实是高等数学中的重要结论——泰勒级数 (马克劳林级数)、泰勒展开.

泰勒级数指的是一些函数在一定范围内可以写成无穷求和的形式, 比如

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k,\ |x| < 1;\ \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k\ ,\ |x| < 1;$$

而有时候我们需要获得一些关于函数的不等式, 此时就需要拉格朗日余项的泰勒展开定理了. 此处陈述其结论.

定理 假设 $x_0 \neq x_1$ 为实数, 函数 $f(x)$ 在闭区间 $\overline{I_{01}} = [x_0, x_1]$ (或者 $[x_1, x_0]$) 上有定义且连续, 且在开区间 $I_{01} = (x_0, x_1)$ (或者 (x_1, x_0)) 上至少 n 阶可导. 此时, 存在 $\xi \in I_{01}$, 使得

$$f(x_1) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_1 - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x_1 - x_0)^n.$$

其中 $f^{(k)}$ 表示的是 f 的 k 阶导函数.

假若我们知道一个函数的导函数的形式, 以及 n 阶导函数在一个区间上的符号, 就能用此定理获得一个不等式.

对数估计 当 $x > -1$, $n \geq 1$ 奇数时, 或者 $-1 < x \leq 0$, $n \geq 2$ 偶数时

$$\ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k;$$

当 $x \geq 0$, $n \geq 2$ 偶数时,

$$\ln(1+x) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k;$$

其中等号只在 $x = 0$ 处成立.

此结论是拉格朗日余项的泰勒展开定理用于 $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$ 的推论. 这些不等式的特点是, 在 x 接近 0 时, 放缩的程度不多, 并且在 $|x| < 1$ 固定时, 项数越多则越精细 (但同时处理起来也更麻烦). 对数是数列不等式放缩当中最常用的函数, 这是因为对数经常用于处理连乘积式.

其它函数 (指数、三角、分式、根式) 也能套用泰勒级数或者泰勒展开的结论, 得到我们需要的不等式估计. 它们的共同特点是, 在泰勒展开的中心点 x_0 的附近较为精确, 离得越远通常放缩得越过.

例 12 给定正整数 $n \geq 3$, 求证

$$\prod_{k=1}^{2n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) < e^2 < \prod_{k=1}^{2n+1} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right),$$

以及

$$\prod_{k=1}^{2n-1} \left(1 - \frac{k}{n^2}\right) < e^{-2} < \prod_{k=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{k}{n^2}\right).$$

证明 先证明第一个式子. 取对数, 可等价转化为

$$\sum_{k=1}^{2n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) < 2 < \sum_{k=1}^{2n+1} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right),$$

经过尝试, 左侧欲放缩 $\ln(1+x) < x$ 会放过. 改为采用放缩 $\ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ 可得

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) &< \sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\frac{k^2}{n^4} + \frac{1}{3}\frac{k^3}{n^6}\right) \\
&= \frac{2n(2n+1)}{2n^2} - \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{12n^4} + \frac{(2n)^2(2n+1)^2}{12n^6} \\
&= 2 + \frac{1}{n} - \frac{4}{3}\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{4}{3}\frac{1}{n^2} + \frac{4}{3}\frac{1}{n^3} + \frac{1}{3}\frac{1}{n^4} \\
&= 2 - \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{7}{6n^3} + \frac{1}{3n^4} \\
&< 2,
\end{aligned}$$

其中最后一个不等式利用了 $n \geq 3$.

右侧采取放缩 $\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$, 可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n+1}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)&>\sum_{k=1}^{2n+1}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{1}{2}\frac{k^2}{n^4}\right)\\&=\frac{(2n+1)(2n+2)}{2n^2}-\frac{(2n+1)(2n+2)(4n+3)}{12n^4}\\&=2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{4}{3}\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}-\frac{13}{6n^3}-\frac{1}{2n^4}\\&=2+\frac{5}{3n}-\frac{2}{n^2}-\frac{13}{6n^3}-\frac{1}{2n^4}>2,\end{aligned}$$

其中最后一个不等式也是利用了$n\geq 3$.

再证明第二个式子. 取对数, 可等价转化为

$$\sum_{k=1}^{2n-1}\ln\left(1-\frac{k}{n^2}\right)<-2<\sum_{k=1}^{2n-2}\ln\left(1-\frac{k}{n^2}\right),$$

先处理左侧. 采用放缩 $\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}$, $-1<x<0$ 可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n-1}\ln\left(1-\frac{k}{n^2}\right)&<\sum_{k=1}^{2n-1}\left(-\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}\right)\\&=-\frac{(2n-1)(2n)}{2n^2}-\frac{(2n-1)2n(4n-1)}{12n^4}\\&=-2+\frac{1}{n}-\frac{4}{3n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{6n^3}\\&=-2-\frac{1}{3n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{6n^3}<-2,\end{aligned}$$

其中最后一个不等式利用了 $n\geq 3$.

然后处理右侧. 我们并没有一个在 $-1<x<0$ 范围内将 $\ln(1+x)$ 放小的式子, 但可以考虑采用无穷级数展开, 并把下式 $t=1,2$ 的项单独拿出来,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n-2}\ln\left(1-\frac{k}{n^2}\right)&=-\sum_{k=1}^{2n-2}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{t}\frac{k^t}{n^{2t}}\\&=-\frac{(2n-2)(2n-1)}{2n^2}-\frac{(2n-2)(2n-1)(4n-3)}{12n^4}-\sum_{t=3}^{\infty}\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{2n-2}\frac{k^t}{n^{2t}}.\end{aligned}$$

而

$$\sum_{k=1}^{2n-2}k^t<\sum_{k=1}^{2n-2}\int_k^{k+1}x^t\,\mathrm{d}\,x=\int_1^{2n-1}x^t\,\mathrm{d}\,x<\int_0^{2n}x^t\,\mathrm{d}\,x=\frac{2^{t+1}n^{t+1}}{t+1},$$

从而(利用 $n\geq 3>2$)

$$\sum_{t=3}^{\infty}\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{2n-2}\frac{k^t}{n^{2t}}<\sum_{t=3}^{\infty}\frac{1}{t}\frac{2^{t+1}n^{-t+1}}{t+1}<\sum_{t=3}^{\infty}\frac{1}{t}\frac{16n^{-2}}{t+1}=\frac{16}{3n^2},$$

因此

$$\sum_{k=1}^{2n-2}\ln\left(1-\frac{k}{n^2}\right)>\left(-2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{4}{3n}+\frac{3}{n^2}-\frac{13}{6n^3}+\frac{1}{2n^4}\right)-\frac{16}{3n^2}$$

$$= -2 + \frac{5}{3n} - \frac{10}{3n^2} - \frac{13}{6n^3} + \frac{1}{2n^4} > -2,$$

其中最后一个不等式利用了 $n \geq 3$. □

评注 如果精度不够, 多展开几项可能就能达成目的. 在处理最后一个不等式的右侧时, 如果对所有的 t 都进行精细处理, 不现实, 而如果都进行积分放缩则会放过. 这里采用了折衷的办法, 前两项精确处理, 定出主项; 后面的项采用较为粗略的积分放缩 (其实不用积分也行), 简化形式. 二者配合, 既把式子的复杂度控制在可以接受的范围内, 又在放缩时没损失"大项"的强度, 使得不等式强度依然足够完成题目所需.

例 13 (2024 清华大学 π 节挑战) 已知数列 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2\ \sin\ \frac{a_n}{2}$. 求证:

$$\sum_{n=1}^{2024} a_n\ < 314.$$

思考 本题的递推式较为诡异 (尽管形式看上去还算简单). 不过, 不难看出 a_n 递减, 且因为有下界所以有极限, 其极限必然是 0. 因此本题主要目标就是适当准确地估计 a_n 的阶, 然后进行放缩.

我们可以先近似地思考递推式, $\frac{a_{n+1}}{2} \approx \frac{a_n}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{a_n}{2}\right)^3$, 按照前面讲过的套路, 取倒数平方较为合理 $\left(\frac{a_{n+1}}{2}\right)^{-2} \approx \left(\frac{a_n}{2}\right)^{-2} + \frac{1}{3}$. 我们用此法估计 $\frac{a_n}{2} \approx \sqrt{\frac{3}{n}}$ 之后, 再进行放缩估计, 试图得到右侧.

证明 换元 $b_n = \frac{a_n}{2}$, 有 $b_1 = 1,\ b_{n+1} = \sin\ b_n$. 不难判断 $b_n > 0$ 且单调递减. 考察

$$\frac{1}{b_{n+1}^2} - \frac{1}{b_n^2} = \frac{b_n^2 - \sin^2 b_n}{b_n^2 \sin^2 b_n},$$

我们希望证明上式大于等于 $\frac{1}{3}$. 只需证明

$$f(x) = x^2 - \sin^2 x - \frac{1}{3}x^2 \sin^2 x \geq 0, 0 \leq x \leq 1.$$

而

$$\sin^2 x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}x^{2k}}{(2k)!},$$

从而有

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k-1}x^{2k}}{(2k)!} - \frac{1}{3}\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k}\frac{2^{2k-3}x^{2k}}{(2k-2)!} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2^{2k-1}}{(2k)!} - \frac{2^{2k-3}}{3(2k-2)!}\right)x^{2k} \\ &= 0x^4 + \sum_{k=3}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2^{2k-1}}{(2k)!} - \frac{2^{2k-3}}{3(2k-2)!}\right)x^{2k}. \end{aligned}$$

断言当 $k \geq 3$ 时有

$$\frac{2^{2k-3}}{3(2k-2)!} \geq \frac{2^{2k-1}}{(2k)!}.$$

事实上这等价于 $(2k)(2k-1) \geq 12$, 而左侧显然大于等于 $30 > 12$, 也即

$$\frac{2^{2k-1}}{(2k)!} - \frac{2^{2k-3}}{3(2k-2)!} < 0,$$

如上的幂级数系数交替正负. 熟知阶乘增长远快于指数, 因此

$$\frac{2^{2k-1}}{(2k)!} - \frac{2^{2k-3}}{3(2k-2)!} \to 0 - 0 = 0,\ (k \to \infty),$$

我们还希望证明系数绝对值单调递减. 也即证明

$$\frac{2^{2k-1}}{(2k)!} - \frac{2^{2k-3}}{3(2k-2)!} < \frac{2^{2k+1}}{(2k+2)!} - \frac{2^{2k-1}}{3(2k)!},$$

这等价于

$$\frac{2^{2k-3}}{3(2k-2)!} + \frac{2^{2k+1}}{(2k+2)!} > \frac{4}{3}\,\frac{2^{2k-1}}{(2k)!},$$

但其实我们有更强的

$$\frac{2^{2k-3}}{3(2k-2)!} \geq \frac{4}{3}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!},$$

因为这等价于 $(2k)(2k-1) \geq 16$, 也在 $k \geq 3$ 成立. 因此

$$\sum_{k=3}^{\infty}(-1)^k\left(\left(\frac{2^{2k-1}}{(2k)!} - \frac{2^{2k-3}}{3(2k-2)!}\right)x^{2k}\right)$$

是一个级数, 首项为正, 一般项交替正负, 且绝对值单调递减趋于 0. 因此 $f(x) \geq 0$ 在$0 \leq x \leq 1$ 时成立. (Leibniz 级数的性质).

这说明了 $\frac{1}{b_{n+1}^2} - \frac{1}{b_n^2} \geq \frac{1}{3}$, 从而 $\frac{1}{b_n^2} \geq \frac{n-1}{3} + \frac{1}{b_1^2} = \frac{n+2}{3}$, 也即有 $b_n \leq \sqrt{\frac{3}{n+2}}$. 那么

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2024} a_n &= 2 + 2\sum_{n=2}^{2024} b_n \leq 2 + 2\sum_{n=2}^{2024}\sqrt{\frac{3}{n+2}} \\ &\leq 2 + 2\sum_{n=2}^{2024}\sqrt{3}\int_{n+1}^{n+2}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x = 2 + 2\sqrt{3}\int_{3}^{2026}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x \\ &= 2 + 4\sqrt{3}\left(2026^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}}\right) = -10 + 4\cdot\sqrt{6078} \\ &< -10 + 4\cdot\sqrt{6400} = 310 < 314.\end{aligned}$$

因此结论成立. □

评注 此处证明函数不等式采用的是幂级数完全展开的暴力方法, 利用交替级数的性质得到结论. 方法应该不唯一. 后段的和式放缩较为常规, 结论也没那么紧, 可以有一定的放缩空间. 本题最主要的入手点在于猜测出 a_n 的大致的阶, 通过与之相近的递推公式的处理办法 (倒数平方) 来迁移到本题.

一些例子 (2)

例 14 (快速排序复杂度估阶) 已知 $a_0 = 0,\ a_1 > 0$, 然后对于 $n \geq 2$ 有

$$a_n = n + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(a_i + a_{n-1-i}) = n + \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} a_i,$$

求证: 存在常数 $0 < C_1 < C_2$ 使得 $C_1 n\log n \leq a_n \leq C_2 n\log n, \forall\, n \geq 2$. (默认采用自然对数)

思考 我们其实可以待定这些常数, 尝试用归纳法证明结论.

$$a_n \leq n + \frac{2}{n}\left(a_1 + \sum_{i=2}^{n-1} C_2 i\log i\right),$$

目标转化为对于 $\sum\limits_{i=2}^{n-1} i\log i$ 的估计. 而

$$\sum_{i=2}^{n-1} i\log i < \int_2^n x\log x\,\mathrm{d}\,x = \left(\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_{x=2}^{n} = \frac{n^2}{2}\log n - \frac{n^2}{4},$$

可以代入上式估计

$$a_n \leq n + \frac{2a_1}{n} + C_2 n\log n - C_2\frac{n}{2}.$$

证明 我们令 $C_2 = \frac{a_2}{2\log\ 2} + 2 + a_1$, 则对于 $n = 2$, 有 $a_n \leq\ C_2\, n\log\ n$ 成立. 假设此式已对 $n \leq\ k-1$ 成立, 则有 $n = k$ 时,

$$a_k \leq k + \frac{2}{k}\left(a_1 + \sum_{i=2}^{k-1} C_2 i\log i\right) \leq k + \frac{2a_1}{k} - C_2\frac{k}{2} + C_2 k\log k \leq C_2 k\log k,$$

其中最后一步放缩利用

$$C_2\frac{k}{2} \geq (2+a_1)\frac{k}{2} > k + \frac{a_1 k}{2} > k + \frac{2a_1}{k}.$$

因此右侧成立.

对于左侧, 我们考虑向下的估计

$$\sum_{i=2}^{n-1} i\log i > \int_1^{n-1} x\log x\,\mathrm{d}\,x = \frac{(n-1)^2}{2}\log(n-1) - \frac{(n-1)^2}{4} + \frac{1}{4},$$

代入估计

$$\begin{aligned}
a_n &\geq n + \frac{2}{n}C_1\sum_{i=2}^{n-1} i\log i \geq n + C_1\frac{(n-1)^2}{n}\log(n-1) - C_1\frac{n-2}{2} \\
&= n + C_1\frac{(n-1)^2}{n}\log(n) - C_1\frac{(n-1)^2}{n}\log\frac{n}{n-1} - C_1\frac{n-2}{2} \\
&> n + C_1 n\log n - 2C_1\log n - C_1\frac{(n-1)^2}{n}\frac{1}{n-1} - C_1\frac{n}{2} \\
&> n + C_1 n\log n - 2C_1\log n - C_1 - C_1\frac{n}{2},
\end{aligned}$$

可考虑取 $C_1=\min\{\frac{1}{4},\frac{a_2}{2\log 2}\}$, 此时结论 $a_n\ge C_1 n\log n$ 对 $n=2$ 成立, 而当 $n\ge 3$ 时, 在上述的归纳过渡过程中,

$$2C_1\log n+C_1+C_1\frac{n}{2}\le\frac{\log n}{2}+\frac{1}{4}+\frac{n}{8}<\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\frac{n}{8}<n,$$

说明在归纳假设之下确实有 $a_n>C_1 n\log n$, 从而可以根据归纳法完成过渡, 得到结论对于一切 n 都成立. □

评注 本题的背景是分析快速排序算法的时间复杂度的阶. 因为题目并没有要求寻找最优的常数, 因此可以在放缩的时候, 非主要项放得随便一些, 常数可以选得弱一些, 证得出来就好.

例 15 给定 $a_1>0$, $a_{n+1}=a_n+\frac{n}{a_n},\forall\, n\ge 1$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-n)=0.$$

证明 由均值 $a_2\ge 2$, 再由归纳法和双钩函数的单调性可知 $a_n\ge n,\forall\, n\ge 2$. 我们断言 $(a_n-n)\ge(a_{n+1}-n-1)$ 对于 $n\ge 2$ 成立. 事实上,

$$a_{n+1}-n-1=a_n-n+\frac{n}{a_n}-1\le a_n-n+\frac{n}{n}-1=a_n-n.$$

这说明 (a_n-n) 最终单调递减且有下界 0, 从而有极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-n)=a\ge 0$. 将递推式平方可得

$$a_{n+1}^2=a_n^2+2n+\frac{n^2}{a_n^2}\le a_n^2+2n+1,\ (n\ge 2),$$

这说明 $(a_n^2-n^2)$ 也是单调递减的 $(n\ge 2)$. 假若 $a>0$, 则

$$(a_n^2-n^2)=(a_n-n)(a_n+n)\ge a(a_n+n)\ge 2an,$$

但右侧随着 $n\to\infty$ 而趋于无穷, 与左侧有界相矛盾, 这说明只能是 $a=0$, 也即本题结论成立. □

评注 递推式既非线性又依赖 n, 无一般的章法可循. 本解答通过对与之相关的数列进行单调性研究来得到一些结论, 最终完成证明.

例 16 求证: 存在常数 $C>0$, 使得对任何 $0<\varepsilon<1$, 考察如下的数列: $a_0=0,a_{n+1}=\exp(a_n-1+\varepsilon),n\ge 0$, 都有: 当 $n\ge C\varepsilon^{-0.5}$ 时, $a_n>1$. (e 为自然对数的底, $\exp(\cdot)$ 的含义是以 e 为底的指数函数)

注 如果 $\varepsilon=0$, 则此数列会单调上升趋于 1.

证明 定义数列 $b_0=1,b_{n+1}=\ln b_n+1-\varepsilon,n\ge 0$, 若 $b_n\le 0$ 则规定 $b_{n+1}=-\infty$.

那么,

$$b_{n+1} \leq b_n - 1 + 1 - \varepsilon,$$

说明 $b_n \leq b_0 - n\varepsilon = 1 - n\varepsilon$. 假若某个 $a_k > b_n$, 注意到数列 $\{b_n\}$ 的定义就是 $\{a_n\}$ 的反向, 我们可以推得 $a_{k+1} > b_{n-1}$, 并依次推下去直到 $a_{k+n} > b_0 = 1$. 假设 N 为最小的使得 $a_n \geq 1$ 的 n (若不存在则规定 $N = +\infty$). 对于 $0 \leq n < N - 1$, 有

$$\frac{1}{1 - a_{n+1}} = \frac{1}{1 - \exp(a_n - 1 + \varepsilon)} > \frac{1}{1 - \exp(a_n - 1)} > \frac{1}{1 - a_n} + \frac{1}{2},$$

其中最后一个不等式可由

$$f(x) = (1 - e^{-x}) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) < 1, 0 < x \leq 1$$

推出. 事实上,

$$f(0+0) = \lim_{x \to 0+0} (1 - e^{-x}) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) = \lim_{x \to 0+0} (1 - e^{-x}) \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0+0} \frac{e^{-x}}{1} = 1,$$

以上使用了洛必达法则. 而

$$f'(x) = e^{-x} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) - (1 - e^{-x}) \frac{1}{x^2} = e^{-x} x^{-2} \left(-e^x + 1 + x + \frac{x^2}{2} \right) < 0,$$

这说明 $f(x) < f(0+0) = 1$. 我们得到 $\frac{1}{1-a_{n+1}} > \frac{1}{1-a_n} + \frac{1}{2}$ 之后, 就对于 $0 \leq n < N$ 均有

$$\frac{1}{1 - a_n} \geq \frac{1}{1 - a_0} + \frac{n}{2} = \frac{2 + n}{2},$$

也即

$$a_n \geq \frac{n}{n+2} = 1 - \frac{2}{n+2}.$$

但其实 $n < N$ 的要求可以去掉, 因为当 $n \geq N$ 时 $a_n \geq 1 > 1 - \frac{2}{n+2}$.

我们取 $m = \lfloor \varepsilon^{-0.5} \rfloor$, $n = 2m$, 有

$$a_n \geq 1 - \frac{2}{2m+2} > 1 - \frac{1}{\varepsilon^{-0.5}} = 1 - \varepsilon^{-0.5}\,\varepsilon \geq 1 - (m+1)\varepsilon \geq b_{m+1}.$$

利用递推关系的单调性, 可知 $a_{n+1} \geq b_{m+1-1}, \cdots$ 直到 $a_{n+m+1} > b_0 = 1$.

因此, 可取 $C = 4$, 此时只要 $k \geq C\varepsilon^{-0.5}$, 就有 $k \geq 3m + 1 = m + 1 + n$, 从而 $a_k \geq a_{m+n+1} > 1$. □

评注 本题也是一个估阶的问题. 在接近 $a_n \approx 1$ 的地方, ε 起到主要的作用 (若没有它, 则 a_n 永远不超过 1); 而当 $a_n < 1 - \varepsilon^{0.5} < 1$ 时, 起作用的主要是忽略掉 ε 的递推关系, 我们从中发掘了不等式 $\frac{1}{1-a_{n+1}} > \frac{1}{1-a_n} + \frac{1}{2}$, 建立了"与 1 的距离"的一个估计. 两个不同的段的性质不尽一样, 因此定义了一个反向的数列, 欲在中间汇合, 左右逢源, 在分别取 $2\varepsilon^{-0.5}$ 项以及 $\varepsilon^{-0.5}$ 项的时候发生汇合. 本题常数不紧, 但阶 $\varepsilon^{-0.5}$ 是紧的, 还是有一定的难度的.

例 17 (数之谜原创代数 251-极限版本) 定义双指标数列 $a_k^{(n)}$ 为:

$$a_0^{(n)}=1,\ a_{k+1}^{(n)}=\left(a_k^{(n)}\right)^2+2^{-n},\ k\geq 0,\ n\geq 0.$$

求证: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{(n)}=e.$

证明 我们可以归纳证明:

$$a_k^{(n)}\geq 1+\left(2^k-1\right)2^{-n}.$$

事实上, 用 Bernoulli 放缩掉递推式的平方项, 即可完成归纳过渡.

那么, 对于 $t>k$, 利用 $a_{t+1}^{(n)}>\left(a_t^{(n)}\right)^2$ 可得

$$a_t^{(n)}>\left(a_k^{(n)}\right)^{2^{t-k}}\geq\left(1+\left(2^k-1\right)2^{-n}\right)^{2^{t-k}}.$$

特别地, 对于 $n>k>0$ 有 $a_n^{(n)}>\left(1+\left(2^k-1\right)2^{-n}\right)^{2^{n-k}}$. 先固定 k, 取 $n\to\infty$ 的下极限, 可得

$$\liminf_{n\to\infty} a_n^{(n)}\geq\left(e^{2^k-1}\right)^{2^{-k}}=e^{1-2^{-k}},$$

因为对任何 k 都成立, 可取极限 $k\to\infty$, 得到 $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n^{(n)}\geq e$.

另一边可以归纳证明: $a_k^{(n)}\leq\exp\left(\left(2^k-1\right)2^{-n}\right)$. 归纳过渡

$$\begin{aligned}a_{k+1}^{(n)}=\left(a_k^{(n)}\right)^2+2^{-n}&\leq\exp\left(2\left(2^k-1\right)2^{-n}\right)+2^{-n}\\&<\exp\left(2\left(2^k-1\right)2^{-n}\right)\left(1+2^{-n}\right)\\&<\exp\left(2\left(2^k-1\right)2^{-n}\right)\exp\left(2^{-n}\right)\\&=\exp\left(\left(2^{k+1}-1\right)2^{-n}\right).\end{aligned}$$

特别地, $a_n^{(n)}\leq\exp\left(1-2^{-n}\right)$. 取上极限可得 $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n^{(n)}\leq e$. 由于上极限和下极限被同一个值 e 卡紧, 所以极限存在, 且等于 e. $\square$

评注 本题是比较典型的数学分析问题, 处理的过程中使用了上、下极限的技巧 (因为极限不能先验地保证存在, 所以无法在不等式两侧取极限. 但上、下极限总是存在的, 至少在允许无穷的广义含义下存在). 在 1 附近, x^2 的效果与 $2x-1$ 相差不大, 因此伯努利不等式的放缩是较为精细的. 随着迭代远离了 1, 这个放缩也越来越松, 直到产生了 e 和 2 的差距 (从结果论来看). 而在离 1 适当远的地方, 加 2^{-n} 的作用微乎其微, 而是平方主导了变化, 其表现是对数尺度上的加倍. 两个阶段都“抓大放小”, 可以放出一个下界, 这个下界可以在两次取极限的意义下贴紧到 e. 上界的估计则是从第一步开始就采用对数尺度, 可以发现该数列近似是对数尺度下的等比+常数的递推数列, 因此得到这样的上界也是较为自然的, 这个上界通过取极限也可卡紧到 e.

然而, 本题在进行初等化时, 右侧几乎可以照搬 (成为 251 的左侧), 但左侧的下极

限手法难以找到替代. 因此, 采用了较硬的上界、下界估计手段 (这种做法在处理微分方程时非常常用), 强行给出了 $a_n^{(n)}$ 的下界估计 $e(1-n2^{-n})$. 但这个估计的形式不是很好看, 经过猜测和尝试, 把增量由 $\frac{1}{2^n}$ 改为 $\frac{1}{2^n-n}$ 之后能使得下界比 e 大, 这也就是 251 右侧 $e<b_n$ 的由来. 这个改动把原本的夹极限的问题变成了一个求不出通项, 并且还非常精细的数列不等式问题, 难度反而是变大了. 取完对数之后, 归根结底是 Grownwall 型递推式的处理.

总 结

数列不等式的题型繁多, 以上的方法和例题远不足以概括所有的题型和技术. 大体可以看出, 数列有具体 (给通项/给递推求通项) 和抽象 (给递推, 无法求通项) 之分, 不等式也有松 (可几乎随意放缩) 与紧 (必须精细放缩) 之分. 掌握好数列基本功, 就能处理绝大多数具体的数列, 与此同时也给抽象的数列提供一个比较的"模具".

数列不等式的条件往往是局部条件, 是一盘散沙, 而需要证明的结论往往有一定的整体性. 因此, 我们需要把条件进行集结组织, 才能找到通往结论的路. 有时候我们需要处理好两个相矛盾的事物: 式子的复杂度, 和不等式的紧度. 有的题难在复杂, 但不等式很松, 适当的放缩可以大幅简化式子. 有的题难在不等式很紧, 多数情况下递推式是能弄出通项或者接近通项的东西的, 进行等价变形后可以转化为较为简洁的式子. 当然, 也有那种形式又复杂, 不等式又紧的题目, 那种就是非常难的问题了, 通常需要经过多次尝试才能寻找到合适的处理办法.

尽管现在 CMO、TST 很少再直接考数列不等式, 但一些数列构造题、组合估计或者数论估计问题中, 仍可能涉及到数列放缩, 因此这项功底依旧是值得掌握的. 数列不等式本身横跨两个模块, 还旁通函数、导数, 上通高等数学的极限、级数、积分、微分方程, 其实是一项需要且值得长期学习的数学综合技能.