第四册

大青花鱼

目录

第一章　函数的级数

研究可微函数时，我们讨论过分析函数在某点附近的行为的问题。我们的研究方法是：把函数在该点附近表示成多项式的形式。换句话说，我们把函数表示成一系列简单函数的和。比如，指数函数在 0 附近可以写成：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right).$$

那么，我们能不能把 e^x 直接写成无穷多个简单函数的和呢？

为此，我们引入了级数的概念，并证明了级数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ 绝对收敛。那么，这个收敛的极限是否等于 e^x 呢？进一步来说，我们能否用多项式函数 $\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$ 近似表示 e^x 呢？

进一步研究仍然要用到级数。级数除了可以用来研究数列的收敛性质，也可以用来研究函数的收敛性质。这也是级数方法更常见的应用。不过，在此之前，我们需要做一些准备工作，比如定义什么是函数的数列，什么叫函数的收敛，等等。

1.1　函数列

给定区间 I，我们把在 I 上有定义的实函数的集合记为 $\mathcal{A}_I(\mathbb{R})$，把其中连续函数的集合记为 $\mathcal{L}_I(\mathbb{R})$，其中 k 次可微的函数的集合记为 $\mathcal{W}_I^k(\mathbb{R})$。

定义函数列为可数个函数按顺序的排列。也就是说，函数列和数列基本一样，只不过数列的每一项是函数。比如一个由 $[0,1]$ 上的连续实函数组成的数列：

$$(x^2, x, 3x, 5x, \cdots (2n+1)x, \cdots)$$

它属于集合 $\mathcal{L}_{[0,1]}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$。

接下来定义函数列的收敛。怎么判断一个函数是否接近另一个函数呢？与数列不同，函数列的收敛有多种定义。这里只介绍两种常用的定义。

定义 1.1.1. 函数列逐点收敛 设有定义在区间 I 上的函数列[1]$\{f_n\}$。如果有定义在 I 上的函数 f，使得对任意 $r>0$，任意 $x \in I$，都有正整数 N_x，使得只要 $n > N_x$，就有：

$$|f_n(x) - f(x)| < r.$$

就说函数列 $\{f_n\}$ **逐点收敛**到函数 f，f 是 $\{f_n\}$ 的**逐点极限**。

定义 1.1.2. 函数列一致收敛 设有定义在区间 I 上的函数列[2]$\{f_n\}$。如果有定义在 I 上的函数 f，使得对任意 $r>0$，都有正整数 N，使得只要 $n>N$，就有：

$$\forall x \in I,\ \ |f_n(x) - f(x)| < r.$$

就说函数列 $\{f_n\}$ **一致收敛**到函数 f，f 是 $\{f_n\}$ 的**一致极限**。

逐点收敛是最“简单”的定义，即一个一个点来看是否越来越近。一致收敛则是从整体出发，要求所有地方的值“同时”接近，步调一致。对比两种收敛方式，可以猜测：一致收敛的要求更高。逐点收敛时，对不同的 x，可以有不同的 N_x，而一致收敛要求步调一致。

例子 1.1.1. 考虑定义在 $[0,1)$ 上的函数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，其通项为：

$$f_n : x \mapsto \frac{nx}{e^{nx}}.$$

[1]即“由定义在区间 I 上的函数构成的函数列”，为了方便，做一定省略。下同。

[2]即“由定义在区间 I 上的函数构成的函数列”，为了方便，做一定省略。下同。

对 $[0,1)$ 中任意 x，由于 $0 \leqslant x < 1$，而 t 趋于无穷大时，e^t 是 t 的高阶无穷大，因此，随着 n 增大，nx 趋于正无穷，从而 $\frac{nx}{e^{nx}}$ 趋于 0。因此，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 逐点收敛到 $[0,1)$ 上的零函数。

不过，对任意正整数 n，取 $x_n = \frac{1}{n}$，则

$$f_n(x_n) = \frac{1}{e}.$$

因此，只要 $0 < r < \frac{1}{e}$，无论 n 有多大，总有 $f_n(x) = \frac{1}{e} > r$。这说明函数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 并不一致收敛到零函数。

直观来看，f_n 的图像在靠近 0 时就会隆起，即便 n 越大时，隆起的部分越来越狭窄，但高度不变。因此，就一致收敛的要求来说，f_n 永远无法从整体上靠近零函数。

不过，容易证明：**一致收敛的函数列，必然也逐点收敛**。

那么，一致收敛相比逐点收敛有什么优点呢？来看下面的例子。

例子 1.1.2. 考虑定义在 $[-1,1]$ 上的函数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，其通项为：

$$f_n : x \mapsto x^{\frac{1}{2n+1}}.$$

对 $0 < x < 1$，$x^{\frac{1}{2n+1}}$ 随着 n 增大趋于 1。对 $-1 < x < 0$，$x^{\frac{1}{2n+1}}$ 随着 n 增大趋于 -1。因此，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 逐点收敛的极限是以下函数：

$$fx \mapsto \begin{cases} 1 & \text{如果} x \in (0,1] \\ 0 & \text{如果} x = 0 \\ -1 & \text{如果} x \in [-1,0) \end{cases}$$

f 在 0 处不连续。

上面的例子中，函数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 中每一项都是连续乃至无穷可微的函数，但它们的极限是不连续的函数。

实际应用中，我们希望把复杂的函数用简单的函数近似，在简单的函数上证明我们想要的结果，然后通过函数列收敛，把想要的结果性质传递到原本的复杂的函数上去。但是，如果逐点收敛不能保持极限的连续性或可微性的话，那么很多性质也无法传递到极限 f 上去。

如果函数列一致收敛的话，我们可以证明，连续函数的函数列，极限也是连续函数。更进一步：

定理 1.1.1. 一致收敛保持光滑性质 如果函数 f 在区间 I 上可微，且微变函数在 I 上连续，就说 f 在 I 上**一阶光滑**或**连续可微**。如果 f 的前 k 次微变都在 I 上一阶光滑，就说 f 在 I 上 **$\boldsymbol{k}$ 阶光滑**或 **$\boldsymbol{k}$ 阶连续可微**。如果对任意正整数 k，f 在 I 上 k 阶光滑，就说 f 在 I 上**光滑**。

如果函数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 中每一项都在区间 I 上连续可微，简单收敛到函数 f，且函数列 $\{\partial f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 一致收敛到函数 g，那么 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 一致收敛到 f，f 在 I 上连续可微，且其微变函数 $\partial f = g$。

第二章　连续函数的和

小学的学习中，我们定义了有限个数的和。通过定义级数，我们学习了无穷多个数的求和。不过，正如我们所知，无穷也有可数与不可数之分。级数定义了可数多个数的求和。那么，是否能对不可数多个数求和呢?

举例来说，实数集是不可数集合，实数区间中的点也是不可数集合。给定定义在实数集或某个区间 I 上的实变函数 f，它将集合中每个点映射到函数值 $f(x)$。那么，能否对这些函数值求和呢?

这个问题比可数多个数的求和更为复杂，但在实际生活与生产中经常出现。比如，我们通常假设时间是连续变量，而评估各种物理作用的效果时，通常需要研究一段时间内作用的效果。例如，物体受的力在一定时间内的累计效果，称为冲量。它是物体导致速度变化的因素。设物体在 t 时刻受力为 $F(t)$，那么，一段时间 $[t_1, t_2]$ 上的冲量就是函数 $F(t)$ 在 $[t_1, t_2]$ 的累积。

另一个例子是带电物体的电荷累计。我们假设物体表面每个点上的电荷是连续分布的，一点 P 上的电荷密度是 $g(P)$。那么，物体表面的总电荷就是表面所有点上电荷密度的累积。

因此，我们有必要定义函数在区间、平面区域乃至更复杂的形体上的求和。良好的定义并不是显而易见的。为这类求和给出符合实际生产生活中的需要的定义，是一门深奥的学问。在当前阶段，我们只给出简要的介绍，研究特定情形下的求和工具，不作更深入的探索。

2.1　函数图像的面积

首先来看一个物理学中的例子。设物体受到方向恒定，大小随时间 t 变化的力 $F(t)$。定义 $F(t)$ 在一段时间内的累积效果为冲量 I。如果设物体刚受力时的冲量 $I(0)=0$，那么有定律:

$$I(t)-I(0)=m(v(t)-v(0)).$$

其中 v 是物体的在受力方向上的速率。为了计算速率的改变量，我们希望计算 $I(t)$，也就是 $F(t)$ 的"和"。

以时间为横轴，画出函数 F 的图像。如果 F 的大小也是恒定的，那么可以发现，F 在一段时间 $[t_1,t_2]$ 内的"总和"就是 $F\cdot(t_2-t_1)$。从图像来看，函数图像是水平的线段，$F(t)$ 的"和"就是函数图像下方（函数曲线与 x 之间的部分）矩形的面积。

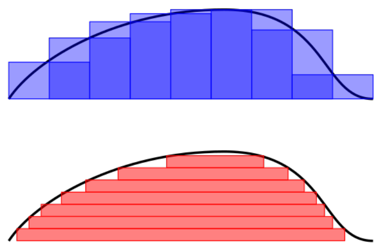
如果物体受力大小不恒定，但分段恒定，于是函数图像可以看作若干段水平线段。于是，按分段求多个矩形的面积，然后求和，就得到 I 的改变量。

然而，更常见的情况是: F 的大小随时间不断改变。这时候，我们如何求 F 的"和"呢?

需要知道的是，对一般的函数 F，我们并不能很好地定义 I 的改变量。不过，对于物理学中常见的模型以及当前我们接触的简单形状来说，可以用比较简单的方法，定义"函数曲线下方的面积"。

具体来说，我们从 F 恒定或分段恒定的情形下，通过矩形面积计算的方法出发。给定一般的函数 F，我们也希望用一系列的矩形来近似表示"函数曲线下方的面积"。

具体的方法有两种。一种是把区间 $[t_1,t_2]$ 竖直分割成很多段，把每段的函数曲线近似看作水平线段，这样就得到一系列左右并排的、"竖直"的



用矩形近似表示函数曲线下方的面积

矩形。另一种是把函数曲线下方的区域横着分割，得到一系列上下相叠、高度相同，但长度不同（由函数性质决定）的矩形。

无论用哪种方法，如果只要矩形足够“细”，矩形面积就趋于某个极限，那么我们就把这个极限看作 F 的“和”。

那么，怎样严格地说明这个定义呢？两种方法中，第一种方法可以用我们已经学过的概念严格说明。因此，我们目前采用第一种方法来定义。

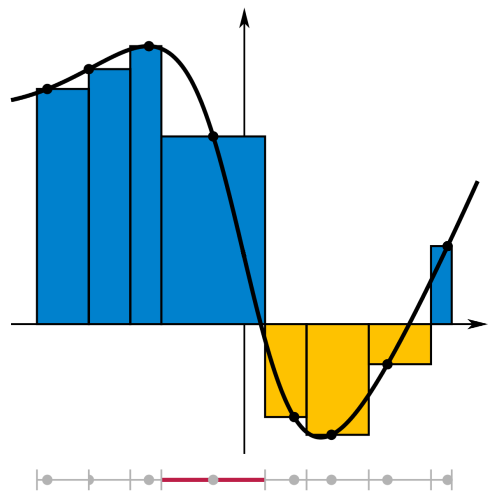
定义 2.1.1. 区间的分割与取样和
给定闭区间 $I = [a, b]$ 及一列从小到大排列的数 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$。则把区间 I 分成 n 个子区间 $[x_0, x_1]$，$[x_1, x_2]$，$\cdots$，$[x_{n-1}, x_n]$，就是这一列数对区间的分割。

如果区间的分割有 n 个子区间，就说它是区间的 $\boldsymbol{n}$ **阶分割**。如果区间的分割使得所有子区间长度都不超过某个数 d，就说它是区间的 $\boldsymbol{d}$**–分割**。

设 f 是定义在 I 上的函数。给定区间的某个分割，在该分割的各个子区间中取样 $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$，其函数值 $f(c_i)$ 与区间长度的乘积的总和：

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(c_i)$$

称为函数关于该分割的**取样和**。



函数关于区间分割的取样和

直观上看，取样和就是在函数各个子区间的曲线上取一点作为高，以子区间长度为宽作矩形，然后把所有矩形的面积相加。这也就是我们上面提到的取一系列左右并排的、“竖直”的矩形的方法。

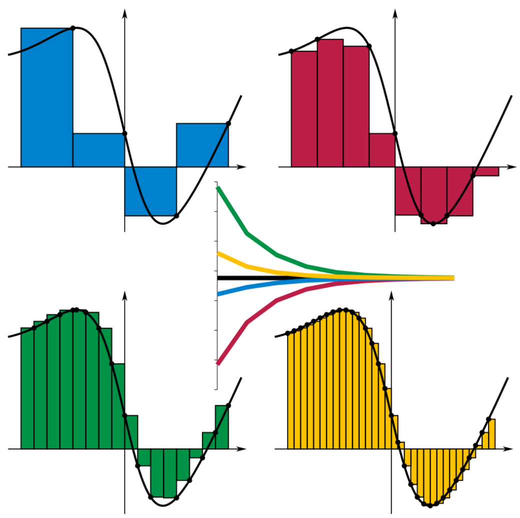
定义 2.1.2. 函数的积合 设有定义在闭区间 $I=[a,b]$ 上的函数 f。如果有某个数 S 使得：对任意 $r>0$，总有 $d>0$，使得 f 关于它在 I 上的所有 d–分割的任意取样和，与 S 的差都小于 r，那么就说 S 是 f 在区间 I 上的**积合**或**合**，f 在区间 I 上**可积**。

f 在区间 I 的积合记为

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{或} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

从定义中可以看出，我们并不保证函数在任何闭区间上都能定义积合。如果函数在某个区间上无法定义积合，就说它在该区间上不可积。不过，我们接下来会看到，很多我们接触过的常见显式函数，都是可积的。

定义中，我们假设函数总在 x 轴上方。如果函数有小于 0 的值，如何定义积分呢?



不同的取样方法，随着分割越来越细，取样和面积收敛

设函数在 $[a,b]$ 上求积。首先，如果函数 f 总小于零，它的图像总在 x 轴下方。它与 x 轴之间的面积可以说是“函数曲线上方的面积”。我们可以定义它的积合是 $-f$ 积合的相反数。

如果函数值有正有负，x 轴把函数曲线分为上下两个部分。我们可以把 x 轴上方部分和 x 轴之间的面积记为正面积，把 x 轴下方部分和 x 之间的面积记为负面积。定义函数在区间上的积合就是这两者的和。

另一种定义方法是先把坐标轴往下平移，即用 $y=-a$ 代替 x 轴。其中 a 是足够大的数，使得函数在区间上的值总大于 $-a$。这样，我们定义

具体来说，给定函数，如何求它在区间上的积合呢？

从最简单的函数 $f: x \mapsto x$ 出发。我们想知道它在区间 $I=[0,1]$ 上的合。

把区间 I 做 n–分割后取样，取样和为：

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(c_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) c_i.$$

其中 $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$，$x_{i-1} \leqslant c_i \leqslant x_i$。

于是，

$$x_{i-1}^2 - x_i x_{i-1} = (x_i - x_{i-1})x_{i-1} \leqslant (x_i - x_{i-1})c_i \leqslant (x_i - x_{i-1})x_i = x_i^2 - x_{i-1}x_i$$

而

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 - x_{i-1}x_i = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 - x_{i-1}^2}{2} + \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2} = \frac{x_n^2 - x_0^2}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2}.$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i-1}^2 - x_i x_{i-1} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 - x_{i-1}^2}{2} - \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2} = \frac{x_n^2 - x_0^2}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2}.$$

所以，

$$\left| S_n - \frac{x_n^2 - x_0^2}{2} \right| \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2}$$

注意到 x_0、x_n 是定值，而对于 d 分割来说，$x_i - x_{i-1}$ 总小于 d。取 $d = \frac{1}{n}$，就有

$$\left| S_n - \frac{x_n^2 - x_0^2}{2} \right| \leqslant \frac{1}{n}.$$

因此，随着分割越来越细，S_n 趋于 $\frac{x_n^2 - x_0^2}{2} = \frac{1}{2}$。$f$ 在 I 上的合是 $\frac{1}{2}$。

对于一般区间 $[a, b]$，同理可得 f 在 $[a, b]$ 上的合是 $\frac{b^2 - a^2}{2}$。

可以看到，即便对最简单的函数，求合也不是显而易见的事情。我们在推导中也用到了一些技巧。那么，一般来说，对于更复杂的函数，如何求合呢？甚至，如何确定它们可积呢？且听下回分解。

思考 2.1.1.

1. 对比函数的积合与微变，它们有哪些类似之处？有哪些不同之处？

2. 函数关于区间分割的取样和，与关于函数微变哪个定理有相似之处？你有什么想法？

3. 使用上下相叠的矩形来定义积合，需要注意哪些问题？

4. 如果函数在区间 $[a, b]$ 上某点无定义，是否还能定义它在区间上的积合？要注意哪些问题？

2.2 函数的定合

2.3 合函数

附录 A　方程