

# 第四册

大青花鱼



# 目录

第一章 函数的级数	5
第二章 连续函数的和	9
2.1 函数图像的面积 . . . . .	10
2.2 函数的定合 . . . . .	15
2.3 合函数 . . . . .	15
附录 A 方程	17



# 第一章 函数的级数

研究可微函数时，我们讨论过分析函数在某点附近的行为的问题。我们的研究方法是：把函数在该点附近表示成多项式的形式。换句话说，我们把函数表示成一系列简单函数的和。比如，指数函数在 0 附近可以写成：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

那么，我们能不能把  $e^x$  直接写成无穷多个简单函数的和呢？

为此，我们引入了级数的概念，并证明了级数  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$  绝对收敛。那么，这个收敛的极限是否等于  $e^x$  呢？进一步来说，我们能否用多项式函数  $\sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!}$  近似表示  $e^x$  呢？

进一步研究仍然要用到级数。级数除了可以用来研究数列的收敛性质，也可以用来研究函数的收敛性质。这也是级数方法更常见的应用。不过，在此之前，我们需要做一些准备工作，比如定义什么是函数的数列，什么叫函数的收敛，等等。

## 1.1 函数列

给定区间  $I$ ，我们把在  $I$  上有定义的实函数的集合记为  $\mathcal{A}_I(\mathbb{R})$ ，把其中连续函数的集合记为  $\mathcal{L}_I(\mathbb{R})$ ，其中  $k$  次可微的函数的集合记为  $\mathcal{W}_I^k(\mathbb{R})$ 。

定义函数列为可数个函数按顺序的排列。也就是说，函数列和数列基本一样，只不过数列的每一项是函数。比如一个由  $[0, 1]$  上的连续实函数组成的数列：

$$(x^2, x, 3x, 5x, \cdots (2n+1)x, \cdots)$$

它属于集合  $\mathcal{L}_{[0,1]}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ 。

接下来定义函数列的收敛。怎么判断一个函数是否接近另一个函数呢？与数列不同，函数列的收敛有多种定义。这里只介绍两种常用的定义。

**定义 1.1.1. 函数列逐点收敛** 设有定义在区间  $I$  上的函数列<sup>1</sup> $\{f_n\}$ 。如果有定义在  $I$  上的函数  $f$ ，使得对任意  $r > 0$ ，任意  $x \in I$ ，都有正整数  $N_x$ ，使得只要  $n > N_x$ ，就有：

$$|f_n(x) - f(x)| < r.$$

就说函数列  $\{f_n\}$  **逐点收敛** 到函数  $f$ ， $f$  是  $\{f_n\}$  的**逐点极限**。

**定义 1.1.2. 函数列一致收敛** 设有定义在区间  $I$  上的函数列<sup>2</sup> $\{f_n\}$ 。如果有定义在  $I$  上的函数  $f$ ，使得对任意  $r > 0$ ，都有正整数  $N$ ，使得只要  $n > N$ ，就有：

$$\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < r.$$

就说函数列  $\{f_n\}$  **一致收敛** 到函数  $f$ ， $f$  是  $\{f_n\}$  的**一致极限**。

逐点收敛是最“简单”的定义，即一个一个点来看是否越来越近。一致收敛则是从整体出发，要求所有地方的值“同时”接近，步调一致。对比两种收敛方式，可以猜测：一致收敛的要求更高。逐点收敛时，对不同的  $x$ ，可以有不同的  $N_x$ ，而一致收敛要求步调一致。

**例子 1.1.1.** 考虑定义在  $[0, 1)$  上的函数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ，其通项为：

$$f_n : x \mapsto x^n.$$

<sup>1</sup>即“由定义在区间  $I$  上的函数构成的函数列”，为了方便，做一定省略。下同。

<sup>2</sup>即“由定义在区间  $I$  上的函数构成的函数列”，为了方便，做一定省略。下同。

对  $[0, 1)$  中任意  $x$ , 由于  $0 \leq x < 1$ ,  $x^n$  随着  $n$  增大趋于 0。因此,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  逐点收敛到  $[0, 1)$  上的零函数。

不过, 对任意正整数  $n$ , 取  $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ , 则

$$f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

我们知道数列  $\{(1 - \frac{1}{n})^n\}$  趋于  $\frac{1}{e}$ , 因此  $n$  足够大时, 总有  $f_n(x_n) > \frac{1}{2e} > 0$ 。这说明函数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  并不一致收敛到零函数。

直观来看,  $f_n$  的图像在靠近 1 时就会“翘尾巴”, 即便  $n$  越大时, “尾巴”也越来越陡, 但  $x$  趋于 1 时总收敛于 1。因此, 就一致收敛的要求来说,  $f_n$  永远无法从整体上靠近零函数。

不过, 容易证明: 一致收敛的函数列, 必然也逐点收敛。

那么, 一致收敛相比逐点收敛有什么优点呢? 来看下面的例子。

**例子 1.1.2.** 考虑定义在  $[-1, 1]$  上的函数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , 其通项为:

$$f_n : x \mapsto x^{\frac{1}{2n+1}}.$$

对  $0 < x < 1$ ,  $x^{\frac{1}{2n+1}}$  随着  $n$  增大趋于 1。对  $-1 < x < 0$ ,  $x^{\frac{1}{2n+1}}$  随着  $n$  增大趋于 -1。因此,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  逐点收敛的极限是以下函数:

$$f x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{如果 } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{如果 } x = 0 \\ -1 & \text{如果 } x \in [-1, 0) \end{cases}$$

$f$  在 0 处不连续。

上面的例子中, 函数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  中每一项都是连续乃至无穷可微的函数, 但它们的极限是不连续的函数。

实际应用中,我们希望把复杂的函数用简单的函数近似,在简单的函数上证明我们想要的结果,然后通过函数列收敛,把想要的结果性质传递到原本的复杂的函数上去。但是,如果逐点收敛不能保持极限的连续性或可微性的话,那么很多性质也无法传递到极限  $f$  上去。

如果函数列一致收敛的话,我们可以证明,连续函数的函数列,极限也是连续函数。



## 第二章 连续函数的和

小学的学习中，我们定义了有限个数的和。通过定义级数，我们学习了无穷多个数的求和。不过，正如我们所知，无穷也有可数与不可数之分。级数定义了可数多个数的求和。那么，是否能对不可数多个数求和呢？

举例来说，实数集是不可数集合，实数区间中的点也是不可数集合。给定定义在实数集或某个区间  $I$  上的实变函数  $f$ ，它将集合中每个点映射到函数值  $f(x)$ 。那么，能否对这些函数值求和呢？

这个问题比可数多个数的求和更为复杂，但在实际生活与生产中经常出现。比如，我们通常假设时间是连续变量，而评估各种物理作用的效果时，通常需要研究一段时间内作用的效果。例如，物体受的力在一定时间内的累计效果，称为冲量。它是物体导致速度变化的因素。设物体在  $t$  时刻受力为  $F(t)$ ，那么，一段时间  $[t_1, t_2]$  上的冲量就是函数  $F(t)$  在  $[t_1, t_2]$  的累积。

另一个例子是带电物体的电荷累计。我们假设物体表面每个点上的电荷是连续分布的，一点  $P$  上的电荷密度是  $g(P)$ 。那么，物体表面的总电荷就是表面所有点上电荷密度的累积。

因此，我们有必要定义函数在区间、平面区域乃至更复杂的形体上的求和。良好的定义并不是显而易见的。为这类求和给出符合实际生产生活中的需要的定义，是一门深奥的学问。在当前阶段，我们只给出简要的介绍，研究特定情形下的求和工具，不作更深入的探索。

## 2.1 函数图像的面积

首先来看一个物理学中的例子。设物体受到方向恒定，大小随时间  $t$  变化的力  $F(t)$ 。定义  $F(t)$  在一段时间内的累积效果为冲量  $I$ 。如果设物体刚受力时的冲量  $I(0) = 0$ ，那么有定律：

$$I(t) - I(0) = m(v(t) - v(0)).$$

其中  $v$  是物体的在受力方向上的速率。为了计算速率的改变量，我们希望计算  $I(t)$ ，也就是  $F(t)$  的“和”。

以时间为横轴，画出函数  $F$  的图像。如果  $F$  的大小也是恒定的，那么可以发现， $F$  在一段时间  $[t_1, t_2]$  内的“总和”就是  $F \cdot (t_2 - t_1)$ 。从图像来看，函数图像是水平的线段， $F(t)$  的“和”就是函数图像下方（函数曲线与  $x$  之间的部分）矩形的面积。

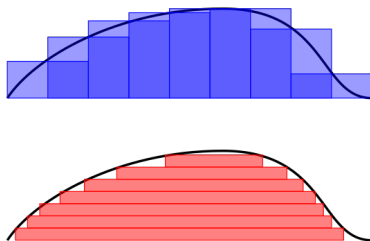
如果物体受力大小不恒定，但分段恒定，于是函数图像可以看作若干段水平线段。于是，按分段求多个矩形的面积，然后求和，就得到  $I$  的改变量。

然而，更常见的情况是： $F$  的大小随时间不断改变。这时候，我们如何求  $F$  的“和”呢？

需要知道的是，对一般的函数  $F$ ，我们并不能很好地定义  $I$  的改变量。不过，对于物理学中常见的模型以及当前我们接触的简单形状来说，可以用比较简单的方法，定义“函数曲线下方的面积”。

具体来说，我们从  $F$  恒定或分段恒定的情形下，通过矩形面积计算的方法出发。给定一般的函数  $F$ ，我们也希望用一系列的矩形来近似表示“函数曲线下方的面积”。

具体的方法有两种。一种是把区间  $[t_1, t_2]$  竖直分割成很多段，把每段的函数曲线近似看作水平线段，这样就得到一系列左右并排的、“竖直”的



用矩形近似表示函数曲线下方的面积

矩形。另一种是把函数曲线下方的区域横着分割，得到一系列上下相叠、高度相同，但长度不同（由函数性质决定）的矩形。

无论用哪种方法，如果只要矩形足够“细”，矩形面积就趋于某个极限，那么我们就把这个极限看作  $F$  的“和”。

那么，怎样严格地说明这个定义呢？两种方法中，第一种方法可以用我们已经学过的概念严格说明。因此，我们目前采用第一种方法来定义。

### 定义 2.1.1. 区间的分割与取样和

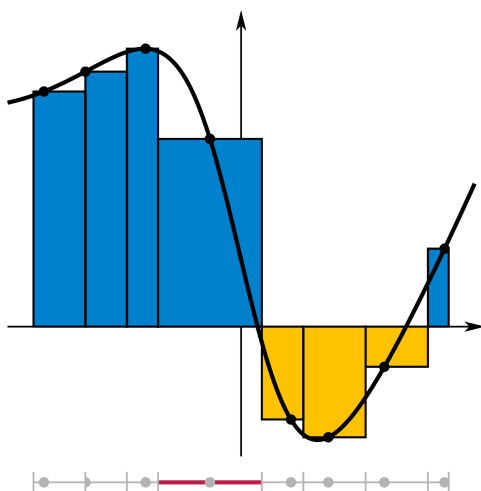
给定闭区间  $I = [a, b]$  及一列从小到大排列的数  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 。则把区间  $I$  分成  $n$  个子区间  $[x_0, x_1]$ ,  $[x_1, x_2]$ ,  $\cdots$ ,  $[x_{n-1}, x_n]$ ，就是这一列数对区间的分割。

如果区间的分割有  $n$  个子区间，就说它是区间的  **$n$  阶分割**。如果区间的分割使得所有子区间长度都不超过某个数  $d$ ，就说它是区间的  **$d$ -分割**。

设  $f$  是定义在  $I$  上的函数。给定区间的某个分割，在该分割的各个子区间中取样  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ，其函数值  $f(c_i)$  与区间长度的乘积的总和：

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(c_i)$$

称为函数关于该分割的**取样和**。



函数关于区间分割的取样和

直观上看，取样和就是在函数各个子区间的曲线上取一点作为高，以子区间长度为宽作矩形，然后把所有矩形的面积相加。这也就是我们上面提到的取一系列左右并排的、“竖直”的矩形的方法。

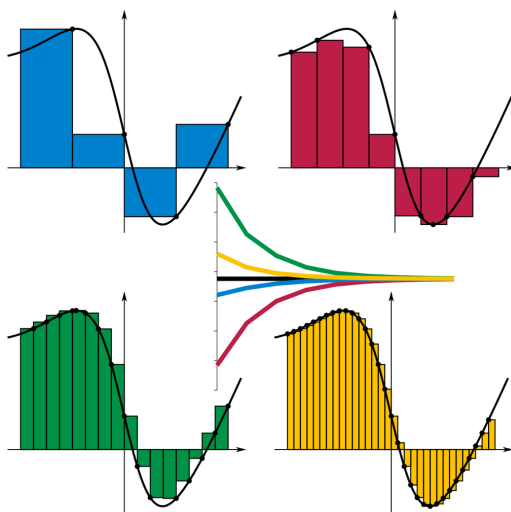
**定义 2.1.2. 函数的积合** 设有定义在闭区间  $I = [a, b]$  上的函数  $f$ 。如果有某个数  $S$  使得：对任意  $r > 0$ ，总有  $d > 0$ ，使得  $f$  关于它在  $I$  上的所有  $d$ -分割的任意取样和，与  $S$  的差都小于  $r$ ，那么就说  $S$  是  $f$  在区间  $I$  上的**积合或合**， $f$  在区间  $I$  上**可积**。

$f$  在区间  $I$  的积合记为

$$\int_I f(x) dx \quad \text{或} \quad \int_a^b f(x) dx$$

从定义中可以看出，我们并不保证函数在任何闭区间上都能定义积合。如果函数在某个区间上无法定义积合，就说它在该区间上不可积。不过，我们接下来会看到，很多我们接触过的常见显式函数，都是可积的。

定义中，我们假设函数总在  $x$  轴上方。如果函数有小于 0 的值，如何定义积分呢？



不同的取样方法，随着分割越来越细，取样和面积收敛

设函数在  $[a, b]$  上求积。首先，如果函数  $f$  总小于零，它的图像总在  $x$  轴下方。它与  $x$  轴之间的面积可以说是“函数曲线上方的面积”。我们可以定义它的积合是  $-f$  积合的相反数。

如果函数值有正有负， $x$  轴把函数曲线分为上下两个部分。我们可以把  $x$  轴上方部分和  $x$  轴之间的面积记为正面积，把  $x$  轴下方部分和  $x$  轴之间的面积记为负面积。定义函数在区间上的积合就是这两者的和。

另一种定义方法是先把坐标轴往下平移，即用  $y = -a$  代替  $x$  轴。其中  $a$  是足够大的数，使得函数在区间上的值总大于  $-a$ 。这样，我们定义

具体来说，给定函数，如何求它在区间上的积合呢？

从最简单的函数  $f: x \mapsto x$  出发。我们想知道它在区间  $I = [0, 1]$  上的积合。

把区间  $I$  做  $n$ -分割后取样，取样和为：

$$S_n = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(c_i) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) c_i.$$

其中  $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ ,  $x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$ 。

于是,

$$x_{i-1}^2 - x_i x_{i-1} = (x_i - x_{i-1})x_{i-1} \leq (x_i - x_{i-1})c_i \leq (x_i - x_{i-1})x_i = x_i^2 - x_{i-1}x_i$$

而

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 - x_{i-1}x_i = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 - x_{i-1}^2}{2} + \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2} = \frac{x_n^2 - x_0^2}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2}.$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i-1}^2 - x_i x_{i-1} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 - x_{i-1}^2}{2} - \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2} = \frac{x_n^2 - x_0^2}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2}.$$

所以,

$$\left| S_n - \frac{x_n^2 - x_0^2}{2} \right| \leq \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2}$$

注意到  $x_0$ 、 $x_n$  是定值, 而对于  $d$  分割来说,  $x_i - x_{i-1}$  总小于  $d$ 。取  $d = \frac{1}{n}$ , 就有

$$\left| S_n - \frac{x_n^2 - x_0^2}{2} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

因此, 随着分割越来越细,  $S_n$  趋于  $\frac{x_n^2 - x_0^2}{2} = \frac{1}{2}$ 。  $f$  在  $I$  上的合是  $\frac{1}{2}$ 。

对于一般区间  $[a, b]$ , 同理可得  $f$  在  $[a, b]$  上的合是  $\frac{b^2 - a^2}{2}$ 。

可以看到, 即便对最简单的函数, 求合也不是显而易见的事情。我们在推导中也用到了一些技巧。那么, 一般来说, 对于更复杂的函数, 如何求合呢? 甚至, 如何确定它们可积呢? 且听下回分解。

### 思考 2.1.1.

1. 对比函数的积合与微变, 它们有哪些类似之处? 有哪些不同之处?
2. 函数关于区间分割的取样和, 与关于函数微变哪个定理有相似之处? 你有什么想法?
3. 使用上下相叠的矩形来定义积合, 需要注意哪些问题?
4. 如果函数在区间  $[a, b]$  上某点无定义, 是否还能定义它在区间上的积合? 要注意哪些问题?

## 2.2 函数的定合

## 2.3 合函数





## 附录 A 方程