

# 第一册

大青花鱼



# 目录

<b>第一章 从自然数到有理数</b>	<b>5</b>
1.1 分数、整数、有理数 . . . . .	5
1.2 有理数的大小 . . . . .	7
1.3 乘方 . . . . .	9
<b>第二章 从变量到方程（上）</b>	<b>15</b>
2.1 数和代数 . . . . .	15
2.2 代数式 . . . . .	20
2.3 等式和方程 . . . . .	24
<b>第三章 集合和映射</b>	<b>25</b>
3.1 集合 . . . . .	25
3.2 概念和集合 . . . . .	27
3.3 判断和集合 . . . . .	29
3.4 映射 . . . . .	33

<b>第四章 有理数的运算</b>	<b>37</b>
4.1 有理数的加减法 . . . . .	37
4.2 有理数的乘除法 . . . . .	40
4.3 数轴 . . . . .	44
<b>第五章 代数式的运算</b>	<b>45</b>
5.1 整式的运算 . . . . .	45
5.2 分式的运算 . . . . .	49
<b>第六章 从变量到方程（下）</b>	<b>51</b>
6.1 一元一次方程 . . . . .	51
6.2 一元一次不等式 . . . . .	53

# 第一章 从自然数到有理数

## 1.1 分数、整数、有理数

我们已经学过自然数： $0, 1, 2, 3, \dots$ 。自然数是 0 和 1 相加得到的数。从 0 开始，不断加 1，就能得到任何自然数。

比如： $4 = 0 + 1 + 1 + 1 + 1$ 。

自然数之间做加法和乘法，得到的还是自然数。

加法和乘法都满足结合律和交换律，乘法对加法有分配律。

自然数是自然产生的。当我们发现两头牛和两天有共同之处时，自然数的概念就诞生了。

为了回答类似“三个人平分七只鸡”的问题，人们发明了除法。**除法是乘法的逆运算。**

比如： $3 \times 7 = 21$ ，于是  $3 = 21 \div 7$ ， $7 = 21 \div 3$ 。

除法产生了分数。自然数可以看作分母是 1 的分数。分数之间可以做加法、乘法和除法，得到的还是分数。

为了回答类似“五个鸡蛋吃了两个还剩几个”的问题，人们发明了减法。**减法是加法的逆运算。**

比如,  $3 + 2 = 5$ , 于是  $3 = 5 - 2$ ,  $2 = 5 - 3$ 。

既然可以写出  $5 - 2$ , 那么可不可以写  $0 - 2$  呢?  $0 - 2$  有什么含义呢?

借用“五个鸡蛋吃了两个还剩几个”的思路,  $0 - 2$  可以表示“本没有鸡蛋, 借鸡蛋来吃了两个还剩几个”。剩下的是“欠两个鸡蛋”, 是一种负债状态。因此, 这样的数称为**负数**。

我们一般把  $0 - 2$  中的 0 去掉, 只记为  $-2$ 。 $-2$  满足  $-2 + 2 = 0$ 。对某个数, 比如 3 来说,  $3 + (-2) = 3 + (0 - 2) = 3 - 2$ 。也就是说, 一个数加上  $-2$ , 就和减去 2 一样。以此类推, 可以得到:

$$-1, -2, -3, \dots$$

它们由  $1, 2, 3, \dots$  前加上减号得到, 表示 0 减去  $1, 2, 3, \dots$  的结果, 读作“负一”、“负二”、“负三”等等。我们把负数带的减号称为**负号**(读作“负”), 和一般减法区别开来。

一般来说, 在任何分数前加上负号, 也可以得到一个负数, 表示 0 减去它的结果。

有没有  $-0$  呢?  $-0$  就是  $0 - 0$ , 也就是 0 自己, 所以就没有必要加负号了。

自然数和它们的负数合称**整数**。我们把  $-1, -2, -3, \dots$  这些负数称为**负整数**, 把原来  $1, 2, 3, \dots$  这些数称为**正整数**, 和负整数相对。由于  $-0$  就是 0, 约定 0 既不是正数, 也不是负数。于是整数分为正整数、负整数和 0。

分数和它们的负数合称**有理数**, 我们把带负号的分数称为**负有理数**或**负分数**, 把原来的分数(除了 0)称为**正有理数**或**正分数**。正有理数包括正整数, 负有理数也包括负整数, 有理数包括整数。

自然数或分数前面加负号得到的负数, 叫做它的**相反数**。反过来, 一个负整数或负分数去掉负号得到的数, 也叫做它的相反数。约定 0 的相反数就是 0。于是, 每个有理数都有唯一的相反数。

除了 0 以外，相反数总是成对的。比如，3 的相反数是  $-3$ ， $-3$  的相反数就是 3。一个有理数的相反数的相反数，就是它自己。

**思考 1.1.1.** 一个有理数前面加上负号，一定会得到一个负数吗？

加上一个负数，就和减去它的相反数一样。所以，现实中遇到和加法对应的概念，可以用减法和负数表示相反或相对的概念。比如，如果把“往东走”视作“加”，那么“往西走”就可以视作“减”。“原地往东走三步，再往西走两步”，就可以视作“ $0 + 3 - 2$ ”。计算得到 1。它表示最终和原来比，往东走了一步。

## 1.2 有理数的大小

加法不仅可以表达累加的概念，还可以用于比较大小。比如，5 比 3 大，3 比 5 小。

我们用大于号“ $>$ ”和小于号“ $<$ ”记录大小关系。5 比 3 大就写作  $5 > 3$ ，读作“5 大于 3”；3 比 5 小就写作  $3 < 5$ ，读作“3 小于 5”。

大小关系有哪些基本性质呢？

首先，大小关系用来形容不相等的数。所有不相等的数都能比大小。两个数如果不相等，那么总有一个比较大，另一个比较小。

大小关系是**互反**的。说一个数比另一个数大，就是说另一个数比它小。反之亦然。

大小关系还是**传递**的，甲数比乙数大（小），乙数比丙数大（小），那么甲数就比丙数大（小）。

5 比 3 大，可以理解为 5 是 3 再加自然数 2 得到的，而 3 却没法通过 5 加上一个自然数得到。一般来说，如果一个数加上某个自然数或分数等于另一个数，那么它比另一个数小，另一个数比它大。

我们希望大小关系对所有的有理数都成立，这样，我们就可以比较任何有理数的大小。首先，任何正有理数都大于 0。负有理数的相反数是分数，而任何负有理数加上它的相反数都得到 0。所以，按照大小关系的定义，我们规定 0 大于任何负有理数。于是任何正有理数大于 0，从而大于任何负有理数。

我们约定大于 0 的数叫做**正数**，小于 0 的数叫做**负数**。正整数、正有理数都是正数，负整数、负有理数都是负数。这样的约定和前面负数的定义是一致的。之前的结论可以这么说：**任何正数大于任何负数**。

负有理数之间如何比较大小呢？举例来说， $0 = -3 + 3 = -3 + 1 + 2$ ，所以  $-3 + 1 = 0 - 2 = -2$ 。 $-2$  由  $-3$  加上自然数 1 得到，所以  $-3$  小于  $-2$ 。进一步分析，我们发现，自然数 1 来源于“3 可以写成  $2 + 1$ ”。所以我们可以总结出两个负有理数比较大小的方法：看它们的相反数。相反数中较大的，可以写成较小数加上一个分数，于是，相反数较大的负有理数加上这个分数，就等于相反数较小的负有理数。因此，**相反数较大的负有理数比较小，相反数较小的负有理数比较大**。

正数和负数可以比较大小。所以，现实问题中涉及到相反或相对的概念比较大小时，可以用有理数表示。

比如，今天延安的气温是 3.4 摄氏度，长春的气温是  $-8.2$  摄氏度，哈尔滨的气温是  $-15.1$  摄氏度，那么延安气温最高，长春气温比延安低，而哈尔滨气温又比长春低。

### 思考 1.2.1.

1. 用自己的话总结：我们是怎样定义负数的大小关系的？
2. 怎么评价这样定义的大小关系？



## 1.3 乘方

乘法可以更方便地表示若干个相同的数相加。比如，我们用  $3 \times 4$  表示  $3 + 3 + 3 + 3$ 。那么，能不能方便地表示若干个相同的数相乘呢？

我们把  $3 \times 3$  称为 3 乘 2 次方，把  $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$  称为 7 乘 5 次方。

同一个数连乘几次，叫做它乘几次方。连乘的结果，叫做它的几次方或几次幂。这种运算叫做乘方或乘幂。

我们把 7 的 5 次方记作  $7^5$ ，把 7 称为底数，把 5 称为指数。这样记法，比  $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$  更方便。

一个数的 1 次方就是它自己。一个数的 2 次方也叫做它的平方。一个数的 3 次方也叫做它的立方。

约定任何数的 0 次方是 1。

$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = (7 \times 7 \times 7) \times (7 \times 7)$ 。用乘方表示这个关系，就是： $7^5 = 7^3 \times 7^2$ 。注意到  $5 = 3 + 2$ 。用日常的话来说，5 个 7 相乘，等于 3 个 7 相乘，再和 2 个 7 相乘。

同底数乘方的积，是指数之和的乘方。乘方的乘法，可以转化为指数的加法。因此，乘方的除法，也可以转化为指数的减法。

比如， $7^3 \times 7^2 = 7^{3+2} = 7^5$ ，所以，

$$7^{5-2} = 7^3 = 7^5 \div 7^2.$$

同底数乘方的商，是指数之差的乘方。

既然乘方的乘除可以转化为指数的加减，那么是否有负指数？能否定义一个数的负数次方？

如果定义  $7^{-3}$  为： $7^{-3} \times 7^3 = 7^0 = 1$ ，那么  $7^{(-3)}$  就等于  $\frac{1}{7^3}$ 。一个数的负几次方，就是 1 除以它的几次方。

显然, 0 没有负数次方。

再来看乘方的乘方。考虑  $(2^3)^4$ 。按照定义, 这表示把  $2^3$  连乘 4 次。而  $2^3$  本身表示把 2 连乘 3 次。把它写出来, 就是:

$$\begin{aligned}(2^3)^4 &= (2^3) \times (2^3) \times (2^3) \times (2^3) \\ &= 2^{3+3+3+3} \\ &= 2^{4 \times 3} = 2^{12} = 4096.\end{aligned}$$

乘方的乘方, 就是乘方的连乘积; 而乘方的乘法就是指数的加法, 所以乘方的连乘就是把指数重复相加, 也就是对指数做乘法。因此, 一般来说, 乘方的乘方, 就是乘方的指数的积。

**例题 1.3.1.** 计算:

1.  $2^5 \times 2^2 \times 2^{-3}$
2.  $3^4 \times (3^2)^3$

**解答.**

1. 按照规则,

$$\begin{aligned}2^5 \times 2^2 \times 2^{-3} &= 2^{5+2-3} \\ &= 2^4 = 16.\end{aligned}$$

2. 按照规则,

$$\begin{aligned}3^4 \times (3^2)^3 &= 3^4 \times 3^{3 \times 2} \\ &= 3^{4+3 \times 2} \\ &= 3^{10} = 59049.\end{aligned}$$

最后来看底数的运算对乘方的影响。比如, 如何计算  $(7 \times 5)^3$ ? 按照定

义,  $(7 \times 5)^3$  就是把  $7 \times 5$  连乘 3 次。将它写出来, 可以发现:

$$\begin{aligned}(7 \times 5)^3 &= (7 \times 5) \times (7 \times 5) \times (7 \times 5) \\ &= (7 \times 7 \times 7) \times (5 \times 5 \times 5) \\ &= 7^3 \times 5^3.\end{aligned}$$

一般来说, 底数的积的乘方, 是乘方的积。

要注意的是:  $(7 \times 5)^3$  和  $7 \times (5^3)$  是不一样的。那么, 可不可以写  $7 \times 5^3$  呢?

我们约定, **乘方运算比乘法优先**。也就是说,  $7 \times 5^3$  表示  $7 \times (5^3)$ , 而不是  $(7 \times 5)^3$ 。

乘方的底数相乘, 可以转换为乘方相乘。那么底数相除, 如何计算呢? 让我们考虑一个简单的例子:  $(\frac{7}{5})^3$ 。按照定义,  $(\frac{7}{5})^3$  就是把  $\frac{7}{5}$  连乘 3 次。将它写出来, 可以发现:

$$\begin{aligned}\left(\frac{7}{5}\right)^3 &= \frac{7}{5} \times \frac{7}{5} \times \frac{7}{5} \\ &= \frac{7 \times 7 \times 7}{5 \times 5 \times 5} \\ &= \frac{7^3}{5^3}.\end{aligned}$$

一般来说, 底数的商的乘方, 是乘方的商。

和底数的乘积一样, 要注意:  $(\frac{7}{5})^3$  和  $\frac{7^3}{5}$  是不一样的。我们约定, **乘方运算比除法优先**。也就是说,  $\frac{7^3}{5}$  表示  $\frac{7^3}{5}$ , 而不是  $(\frac{7}{5})^3$ 。 $7 \div 5^3$  表示  $7 \div (5^3)$ , 而不是  $(7 \div 5)^3$ 。

**例题 1.3.2.** 计算:

1.  $3^3 \times (\frac{1}{3})^4$
2.  $(\frac{6}{5})^3 \times (\frac{5}{6})^3$
3.  $(\frac{2}{15})^3 \times (\frac{35}{4})^2$
4.  $(\frac{3}{4})^{-2} \times (\frac{7}{2})^3$

解答.

1. 按照规则,

$$\begin{aligned} 3^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 &= 3^3 \times \frac{1^4}{3^4} \\ &= \frac{\cancel{3^3}}{\cancel{3^3}^4} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

从这个例子可以看到,  $\frac{1}{3}$  的 4 次方就是  $1^4$  除以  $3^4$  的商, 而  $1^4$  就是 1, 所以, 3 的倒数的 4 次方就是 3 的 4 次方的倒数, 也就是它的  $-4$  次方。

一般来说, 非零的数, **倒数的乘方就是乘方的倒数**。或者说, 取倒数的乘方, 就是取指数为相反数的乘方。

2. 按照规则,

$$\begin{aligned} \left(\frac{6}{5}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 &= \frac{6^3}{5^3} \times \frac{5^3}{6^3} \\ &= \frac{\cancel{6^3} \times \cancel{5^3}}{\cancel{5^3} \times \cancel{6^3}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

从这个例子可以看到, 如果两个乘方的底数互为倒数, 指数相同, 那么它们的乘积等于 1。再次验证了: 倒数的乘方就是乘方的倒数。

我们也可以换个角度理解:  $\frac{6}{5}$  的倒数的 3 次方, 就是它的  $-3$  次方。因此, 我们要计算的是  $\frac{6}{5}$  的 3 次方乘以它的  $-3$  次方, 即它的  $3 - 3 = 0$  次方。因此结果是 1。

3. 按照规则,

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{2}{15}\right)^3 \times \left(\frac{35}{4}\right)^2 &= \frac{2^3}{15^3} \times \frac{35^2}{4^2} \\
 &= \frac{2^3 \times 35^2}{15^3 \times 4^2} \\
 &= \frac{2^3 \times (5 \times 7)^2}{(3 \times 5)^3 \times (2^2)^2} \\
 &= \frac{2^3 \times 5^2 \times 7^2}{3^3 \times 5^3 \times 2^{2 \times 2}} \\
 &= \frac{\cancel{2^3} \times \cancel{5^2} \times 7^2}{3^3 \times \cancel{5^2}^1 \times \cancel{2^4}^1} \\
 &= \frac{7^2}{3^3 \times 5 \times 2} \\
 &= \frac{49}{90}.
 \end{aligned}$$

4. 按照规则,

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \times \left(\frac{5}{2}\right)^3 &= \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times \frac{5^3}{2^3} \\
 &= \frac{4^2}{3^2} \times \frac{5^3}{2^3} \\
 &= \frac{(2^2)^2 \times 5^3}{3^2 \times 2^3} \\
 &= \frac{2^{2 \times 2} \times 5^3}{3^2 \times 2^3} \\
 &= \frac{2^{\cancel{4}}^1 \times 5^3}{3^2 \times \cancel{2^3}^1} \\
 &= \frac{2 \times 5^3}{3^2 \times 2} \\
 &= \frac{250}{18}.
 \end{aligned}$$

综上所述, 我们总结出乘方的运算法则:

1. 一个数的几次方，就是把它连续乘几次。
2. 任何数的 0 次方是 1。
3. 一个数的负几次方，就是 1 除以它的几次方。
4. 两个同底数乘方的积，是该底数的乘方，指数是两者指数的和。
5. 两个同底数乘方的商，是该底数的乘方，指数是两者指数的差。
6. 乘方的乘方，是同底数的乘方，指数是两次乘方的指数的积。
7. 底数的积的乘方，是乘方的积。
8. 底数的商的乘方，是乘方的商。

**思考 1.3.1.**

1. 约定任何数的 0 次方是 1，有什么好处？
2. 计算乘方的乘方，和乘法的结合律，有什么相似之处？为什么？
3. 计算底数乘除法的乘方，和乘法对加减法的分配律，有什么相似之处？为什么？
4. 为什么要约定乘方运算比乘除法优先？
5. 为什么说一个数的倒数就是它的  $-1$  次方？
6. 乘方中，指数的倒数，代表什么，是否有意义？指数的除法，代表什么，是否有意义？
7. 是否有关于两数之和的乘方的运算方法？

## 第二章 从变量到方程（上）

### 2.1 数和代数

讨论数的性质时，我们常常发现，总结一些普遍的规律，需要用很多话来说清楚。比如：

**例子 2.1.1.**

$$4 = 3 + 1, \quad 4^2 - 3^2 = 4 + 3.$$

$$5 = 4 + 1, \quad 5^2 - 4^2 = 5 + 4.$$

$$(2 \times 4 + 1)^2 = 8 \times 10 + 1.$$

$$(2 \times 5 + 1)^2 = 8 \times 15 + 1.$$

我们想总结两个对所有数都适用的规律，但只举了几个例子。这种方法不好。

有没有更好的方法呢？

对于第一个规律，我们可以说：如果天元比地元大 1，那么天元的平方减去地元的平方等于天元加地元。对于第二个规律，我们可以说，每个自然数两倍加 1 的平方除以 8 余 1。

我们用“天元”、“地元”、“每个自然数”代替了具体的 4 和 5，以说明这是更普遍的规律，而不是只对 4 和 5 成立的等式。这种思想叫做**代数**的

思想。代数可以让我们暂时忽略具体的数，把重点放在数与数之间的关系上。我们能轻松看出这些关系是普遍的，不依赖特定的数。我们把这样的关系叫做**代数关系**。

为了和数区别，“天元”、“地元”、“每个自然数”等称为**量**。量是对可以运算的概念的称呼。量可以有现实意义，比如物理学里会讨论物理量，也可以没有现实意义，比如数学中代替数的量可以称为数量。

在讨论问题的时候，如果我们认为一个量代替的数不会变化，就说这个量是**常量**；如果会变化，就说它是**变量**。

我们可以用变量描述上面两个规律：

如果天 = 地 + 1, 那么 $\text{天}^2 - \text{地}^2 = \text{天} + \text{地}$ .

$(2 \times \text{甲} + 1)^2$  除以 8 余 1.

为了方便，我们一般用字母命名的变量来指代数。

如果 $a = b + 1$ , 那么 $a^2 - b^2 = a + b$ .

$(2 \times x + 1)^2$  除以 8 余 1.

其中变量  $a, b, x$  可以变成 3, 4, 5 或任何一个自然数。

**用变量代替数，可以用简明的语言表示更复杂、更普遍的规律。**

**例题 2.1.1.** 用代数的方法，说明加法的结合律。

**解答.** 用文字表示加法的结合律：任意三个数相加，先把前两个数相加，或者先把后两个数相加，和不变。

考虑任意三个数，记这三个数为  $a, b, c$ ，那么：

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

也就是说，加法的结合律可以写成：

$$\text{对任意三个数 } a, b, c, (a + b) + c = a + (b + c).$$



**例题 2.1.2.** 用代数的方法，证明：

1. 先减一个数后加另一个数，等于先加另一个数后减这个数。
2. 减去两个数的差，等于先减被减数，再加上减数。

**解答.**

1. 把被减数记作  $a$ ，先减的数记作  $b$ ，后加的另一个数记作  $c$ 。我们要证明：

$$a - b + c = a + c - b.$$

设  $a + c - b$  的结果为  $d$ ，则按照减法的定义：

$$a + c = d + b.$$

因此，根据加法交换律，

$$c = b + d - a.$$

代入  $a - b + c$ ，得到：

$$\begin{aligned} a - b + c &= a - b + b + d - a \\ &= a + d - a = d + a - a && \text{(加法交换律)} \\ &= d = a + c - b. \end{aligned}$$

2. 把减去的两个数分别记作  $b$  和  $c$ ，被  $b - c$  的差减的数记为  $a$ 。我们要证明：

$$a - (b - c) = a - b + c.$$

设  $a - (b - c)$  的结果为  $d$ ，则按照减法的定义：

$$a = d + (b - c).$$

根据加法交换律和前面的结论，

$$d + (b - c) = (b - c) + d = b - c + d = b + d - c.$$

所以,

$$a + c = b + d.$$

因此, 根据加法交换律和前面的结论,

$$a + c = d + b$$

$$d = a + c - b = a - b + c.$$

即

$$a - (b - c) = d = a - b + c.$$

**例题 2.1.3.** 用代数的方法, 说明同底数乘方的乘除法。

**解答.** 设底数为  $a$ , 考虑两个乘方:  $a^m$  和  $a^n$ , 其中正整数  $m, n$  是乘方的指数。它们的乘积可以这样计算:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

这是因为按照乘方的定义,  $a^m$  和  $a^n$  分别是  $m$  个  $a$  和  $n$  个  $a$  连乘的结果, 因此, 两者的乘积就是:

$$\begin{aligned} a^m \times a^n &= \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m \text{ 个 } a} \times \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n \text{ 个 } a} \\ &= \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m+n \text{ 个 } a} \\ &= a^{m+n}. \end{aligned}$$

任何数  $a$  的 0 次方是 1。如果  $n = 0$ , 那么  $a^n = 1$ , 于是

$$a^m \times a^n = a^m \times 1 = a^m = a^{m+n}.$$

$m = 0$  时也是如此。因此:

$$\text{对任意自然数 } m, n, \quad a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

乘方的除法就是乘法的逆运算。 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ，因此，当  $m \geq n$  的时候，

$$a^{m-n} \times a^n = a^{m-n+n} = a^m.$$

我们把这个定义扩展到任意自然数  $m, n$ ，也就是说，只要不出现 0 的负数次方，那么

$$\text{对任意自然数 } m, n, a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

因此，只要不出现 0 的负数次方，那么

$$\text{对任意整数 } m, n, a^m \times a^n = a^{m+n}, a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

### 思考 2.1.1.

1. 用代数的方法，说一说怎样比较两个负有理数的大小。
2. 用代数的方法，说明乘方的运算法则：

只要不出现除以 0 的情况<sup>①</sup>，那么：

- (1). 对任何数  $a$  和任何正整数  $m$ ,

$$a^m = \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m \uparrow a}.$$

- (2). 对任何数  $a$ ,  $a^0 = 1$ 。

- (3). 对任何数  $a$  和任何自然数  $m$ ,  $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ 。

- (4). 对任何数  $a$  和任何整数  $m, n$ ,  $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 。

- (5). 对任何数  $a$  和任何整数  $m, n$ ,  $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 。

- (6). 对任何数  $a$  和任何整数  $m, n$ ,  $(a^m)^n = a^{m \times n}$ 。

- (7). 对任何数  $a, b$  和任何整数  $m$ ,  $(a \times b)^m = a^m \times b^m$ 。

- (8). 对任何数  $a, b$  和任何整数  $m$ ,  $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ 。

3. 用代数的方法，描述加法结合律、加法交换律、乘法结合律、乘法交换律和分配律。

4. 用代数的方法证明：

- 4.1. 先除以一个数后乘以另一个数，等于先乘以另一个数后除以这个

---

<sup>①</sup>0 的负数次方实际上就是除以 0。

数。

4.2. 除以两个数的商，等于先除以被除数，再乘以除数。

## 2.2 代数式

含有变量的算式叫做**代数式**。为了区别，我们把只有数的算式叫做**数式**。

$a + 2$ ,  $1.84 \times x^2 - 3$ ,  $\frac{2 \times x^3 - 1}{a^n + 1}$ ,  $0.79 \times j^2 - \frac{h+1}{n} + 5$  等等都是代数式。

数式既表示计算过程，也表示计算的结果：一个数。把数式中的数用变量代替，我们不再计算结果，只关心计算过程本身。这对我们找出并解释计算过程中的规律很有帮助。掌握了计算的规律后，我们再用具体的数代替变量（称为**赋值**或**代入**），就能更快更好地算出结果。

乘号  $\times$  和  $x$  或  $X$  很像，为了避免混淆，一般省略乘号，或用  $\cdot$  代替乘号。 $1.84 \times x - 3$  可以写成  $1.84x - 3$  或  $1.84 \cdot x - 3$

代数式中不同的变量称为**元**。只与一个变量有关的式子叫做**一元式**，和多个变量有关的式子叫做**多元式**。

变量和数通过四则运算得到的代数式，叫做**有理式**。变量和数通过加法、减法和乘法得到的代数式，叫做**整式**。如果除法中涉及了变量，就叫**分式**。有理式中除了整式，就是分式。

**例子 2.2.1.**

整式： $x^3 + 5x - 3.32$ ,  $a + b^2 - 2C$ ,  $(b - 4)^9$ .

分式： $\frac{1-0.9r+v^2}{3B-k}$ ,  $n^2 - 7 + \frac{0.88}{(H-6)^3}$ ,  $t - (t + 0.382g)^{-3}$ .

我们知道，数的乘法比加减法优先。比如，计算  $4 + 3 \times 6$  时，我们要

先计算  $3 \times 6 = 18$ ，再计算  $4 + 18 = 22$ 。先计算加法是不对的。代数式特别是整式中，我们也更关心乘法。我们把变量和数相乘的部分称为**项**。举例来说， $0.54xba$ ， $-1.24 \cdot gb \cdot 1.19 \cdot g^2$ ， $u \cdot 98K$  分别是一项， $10b - V$  是两项的差。

项是变量和数的乘积。变量之间不一定能运算，但数与数之间可以运算。我们可以把一项中所有的数相乘，放在最前面，叫做项的**系数**。其次，一项之中，同一个变量多次相乘，可以放在一起，作为连乘，用乘方表示。这样把项变得更简洁的过程，叫做**化简**。

比如，考虑代数式  $x \cdot 3 \cdot y \cdot 2 \cdot x$ 。它只有一项。这一项中，可以先把所有的数相乘，得到 6，放在前面。然后找出相同的变量多次相乘的情况。这里  $x$  乘了两次，因此可以写成  $x^2$ 。整理后我们得到  $6x^2y$ 。这就是化简的结果。

代数式某一项化简后，总是一个数乘以若干个变量的乘幂。

要注意的是，项的某个变量前有负号，说明它是  $-1$  乘以这个变量的结果。这时要把  $-1$  计到系数里面。比如，化简  $x \cdot 2 \cdot (-y) \cdot 3 \cdot x$  时，系数为  $-1 \cdot 2 \cdot 3 = -6$ ，化简结果为： $-6x^2y$ 。

如果两项变量部分相同，只有系数不同，就说它们是**同类项**。同类项的一项就是另一项乘以某个（不是零的）数。

同类项的变量部分相同，系数不同。因此，根据乘法分配律，可以合并，规则是把系数相加。比如，代数式  $3.52x^2y + 0.19x^2y$  由两项组成，而  $3.52x^2y$  和  $0.19x^2y$  可以合并，得到  $3.71x^2y$ 。**合并同类项**也是代数式化简的一部分。

**例题 2.2.1.** 对以下代数式合并同类项：

1.  $3x^2y - y^22x + 1 + yx^2 - 6y \cdot (xy + 4)$

2.  $aha - 5a(h + ah) + 4ha^2 + hab$

3.  $\frac{a+2b}{a-b} + \frac{2a^2-b}{(a-b)(a+b)}$

**解答.**

1. 首先用乘法分配律将每一项展开出来，

$$\begin{aligned} & 3x^2y - y^22x + 1 + yx^2 - 6y \cdot (xy + 4) \\ &= 3x^2y - y^22x + 1 + yx^2 - 6yxy + 6y \cdot 4. \end{aligned}$$

然后按同一顺序把每项的字母排好，最左边是系数，然后按字母表顺序排列。比如： $y^22x$  改写为  $2xy^2$ 。这样，我们就能方便地找出同类项，然后合并。

$$\begin{aligned} & 3x^2y - y^22x + 1 + yx^2 - 6yxy + 6y \cdot 4 \\ &= 3x^2y - 2xy^2 + 1 + x^2y - 6xy^2 + 24y \\ &= (3x^2y + x^2y) + (-2xy^2 - 6xy^2) + 24y + 1 \\ &= 4x^2y - 8xy^2 + 24y + 1 \end{aligned}$$

2. 同上，

$$\begin{aligned} & aha - 5a(h + ah) + 4ha^2 + hab \\ &= a^2h - 5ah - 5a^2h + 4a^2h + abh \\ &= (a^2h - 5a^2h + 4a^2h) - 5ah + abh \\ &= 0a^2h - 5ah + abh \\ &= -5ah + abh \end{aligned}$$

这里几个  $a^2h$  相关的同类项合并之后系数为 0，这说明几个同类项相互抵消了。同类项抵消是代数式化简的主要原因。

3. 分式的化简需要考虑分子和分母。为了方便，通常会先进行通分，然后

对分子做合并同类项，最后约分。

$$\begin{aligned}
 & \frac{a+2b}{a-b} + \frac{2a^2-b}{(a-b)(a+b)} \\
 = & \frac{(a+2b)(a+b) + 2a^2-b}{(a-b)(a+b)} \\
 = & \frac{a^2+2ba+ab+2b^2+2a^2-b}{(a-b)(a+b)} \\
 = & \frac{(a^2+2a^2) + (2ab+ab) + 2b^2-b}{(a-b)(a+b)} \\
 = & \frac{3a^2+3ab+2b^2-b}{(a-b)(a+b)}
 \end{aligned}$$

一项中所有变量的指数的和，叫做它的**次数**。比如  $3.71x^2y$  的次数是 3，它可以叫 3 次项。不含变量部分的项叫**常数项**。我们约定，常数项次数为 0。

整式是变量和数通过加减法和乘法得到的代数式。由于乘法优先计算，可以认为整式是一些项做加减法得到的。合并同类项后，如果只剩下一项，就说它是**单项式**。一般来说剩下不止一项，称为**多项式**。多项式的每一项都是单项式。多项式次数最高的项叫做**最高次项**。最高次项的次数就叫多项式的**次数**。如果多项式每一项的次数都相等，就称它为**齐次多项式**。

### 习题 2.2.1.

1. 合并同类项：

- $3 + 9x^3 + 5x - 7x^3 - 3.32 - 1.05x$
- $ab^2 + (c-b)a^2 - ba(b-c) + c(b+a)c + (a-c)b(c+a) - (b+c)bc.$

2. 判断是否是齐次多项式：

- $\frac{(a+b)^3}{a-b}$
- $a^4 - bx^3$
- $a^4b^4 \left( \frac{a^2}{b} + \frac{c^2}{a} \right)^4$

## 2.3 等式和方程

**等式**就是把两个式子或多个式子用等号连起来。**不等式**就是把两个式子或多个式子用不等号连起来。一般情况，默认是两个式子。

等式可以是真的，也可以是假的。前者也叫等式成立，后者也叫等式不成立。

按大小关系，**不等号**分为两类：大于类和小于类。按是否包含相等关系，不等号分为两类：严格类和可等于类。一共有四个不等号：“ $<$ ”（严格小于），“ $\leq$ ”（小于等于），“ $>$ ”（严格大于），“ $\geq$ ”（大于等于）。

等式的基本性质：两边同时加、减、乘、除同一个量，成立的等式仍然成立。

为了解决生活中的问题，我们学过简单的方程。把未知的数，用变量表示。问题中的相等关系，就变成了含变量的等式，称为**方程**。解决这个问题，求出使得等式成立的变量值，称为**解方程**，这时变量的值称为**方程的解**。

如果问题中的条件是不等关系，我们就得到了含变量的**不等式**。解决这个问题，求出使得不等式成立的变量值，称为**解不等式**。变量的值称为**不等式的解**。

**习题 2.3.1.** 以下哪些是等式？哪些是不等式？哪些是方程？

- (1).  $3x + 1 = 4$ , (2).  $6 = 4$ , (3).  $a = b = c + 1$   
(4).  $v \leq 4r^2 - v$ , (5).  $2 > 3$ , (6).  $h \geq f > g - f$



## 第三章 集合和映射

### 3.1 集合

我们用集合表示一类事物。把不同性质的事物聚集在一起，合起来考虑，就是**集合**，简称**集**。构成集合的事物称为集合的**元素**。

1. 集合的元素互不相同。
2. 集合的元素没有顺序。
3. 集合的元素是确定的：一个事物要么属于该集合，要么不属于。

某个事物  $a$  属于集合  $A$ ，记作  $a \in A$ 。某个事物  $a$  不属于集合  $A$ ，记作  $a \notin A$ 。

#### 例子 3.1.1.

可以在大括号中列出集合的元素，比如： $\{1, 2, 3\}$  是一个集合， $\{1, 2, 2, 3\}$  不是集合。

也可以在大括号中用条件描述集合。集合的元素是满足条件的元素，比如： $\{a \mid a \text{ 是偶数}\}$ 。竖线左边是元素的样子，右边是它满足的条件。

还可以直接用文字描述集合，比如： $\{\text{一年的十二个月份}\}$  是一个集合。除了以上方式，也可以用示意图、图表、列表等方式表示集合。

没有元素的集合称为**空集**，记为  $\emptyset$ 。

自然数、整数、分数、有理数都是集合。自然数一般简记为  $\mathbb{N}$ ，分数一

般简记为  $\mathbb{F}$ ，整数一般简记为  $\mathbb{Z}$ ，有理数一般简记为  $\mathbb{Q}$ 。“ $a$  是自然数”可以记为  $a \in \mathbb{N}$ 。

如果集合  $A$  的元素都是集合  $B$  的元素，就说  $A$  是  $B$  的**子集**，或者说  $A$  包含于  $B$ ，记为  $A \subseteq B$ ， $B$  是  $A$  的**母集**，或者说  $A$  包含  $B$ ，记为  $B \supseteq A$ 。如果两者不相同，就说  $A$  是  $B$  的**真子集**，记为  $A \subset B$ ， $B$  是  $A$  的**真母集**，记为  $B \supset A$ 。

如果  $A$  是  $B$  的子集，那么  $B$  中不属于  $A$  的元素也构成一个集合，称为  $A$  在  $B$  中的**补集**，记为  $B \setminus A$ 。讨论问题的时候，我们可能会默认某个集合是问题涉及的所有事物的集合，其他集合都是它的子集。这样的集合一般称为**全集**。全集存在的时候，集合  $A$  在全集中的补集可以简称为  $A$  的补集，记为  $\bar{A}$  或  $A^c$ 。

### 例子 3.1.2.

1. 集合  $\{1, 2\}$  是集合  $\{1, 2, 3\}$  的真子集，集合  $\{1, 2, 3\}$  是集合  $\{1, 2\}$  的真母集： $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$ ， $\{1, 2, 3\} \supset \{1, 2\}$ 。
2. 任何集合  $S$  总是空集  $\emptyset$  的母集： $\emptyset \subseteq S$ 。
3.  $\{1, 2\}$  在集合  $\{1, 2, 3\}$  中的补集是  $\{3\}$ 。 $\{3\}$  在集合  $\{1, 2, 3\}$  中的补集是  $\{1, 2\}$ 。

自然数集、整数集、分数集和有理数集有以下关系：

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{Q}$$

以上每个集合中的正数与负数，构成它的子集，一般用上标  $+$  和  $-$  标示。比如， $\mathbb{Z}^+$  就表示正整数集合， $\mathbb{Q}^-$  就表示负有理数集合。

考虑若干个集合。由属于其中至少一个集合的元素构成的集合，称为这些集合的**并集**；由属于所有集合的元素构成的集合，称为这些集合的**交集**。两个集合  $A, B$  的并集记为  $A \cup B$ ，交集记为  $A \cap B$ 。

几个集合交集为空集，就说它们**不相交**，否则就说它们相交。几个集合中任取两个，都不相交，就说它们两两不相交。如果集合  $A$  的一些子集两两不相交，而且它们的并集是  $A$ ，就说这些集合是  $A$  的**分划**。

### 例子 3.1.3.

1. 集合  $\{1, 2\}$  和  $\{2, 3\}$  的并集是集合  $\{1, 2, 3\}$ ， $\{1, 2\}$  和  $\{2, 3\}$  的交集是  $\{2\}$ 。

2. 集合  $A = \{1, 2\}$ 、 $B = \{3, 4\}$ 、 $C = \{5, 6\}$  两两不相交。它们的并集是  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 。 $A, B, C$  是  $S$  的分划。

3. 集合  $\{1, 2, 3\}$ 、 $\{3, 4, 5\}$ 、 $\{1, 5, 6\}$  两两的交集都不是空集，但它们的交集为空集。它们不相交，但不是两两不相交。

**习题 3.1.1.** 验证集合满足以下性质：

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup A = A \cap A = A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- 如果  $A \subseteq B$ ，那么  $A \cap B = A$ ， $A \cup B = B$
- $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$
- $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$

## 3.2 概念和集合

概念和集合有密切的关系。下面让我们从集合的角度，重新理解“概念”。一个概念的范围，其实就是一个集合。而概念的含义，就是用来描述这个集合的语言形式。

比如，“五行”这个概念的范围，就是“金、木、水、火、土”。所以，

我们考虑“五行”这个概念，其实就是考虑集合 {金, 木, 水, 火, 土}。又比如，“自然数”这个概念的范围，也就是一个个具体的自然数。所以“自然数”这个概念就对应自然数的集合。

考虑“偶数”这个概念，我们可以定义“偶数就是能被 2 整除的数”，所以，作为集合的“偶数”，就可以写成：

$$\{x \mid x \text{ 能被 } 2 \text{ 整除}\}.$$

这说明，概念的定义就是描述它对应的集合的语言。概念的特性，就是集合的元素需要满足的条件。

再来看概念的关系。概念的关系有：等同关系，从属和包含关系，交叉关系，互斥关系和矛盾关系。

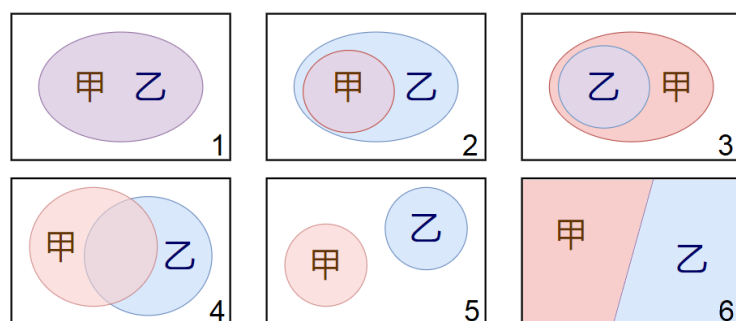
设有甲、乙两概念，分别对应集合  $A$ 、 $B$ 。

- 甲、乙两个概念等同，就是说  $A = B$ ，两个集合完全相同。
- 概念甲从属于乙，就是说  $A$  是  $B$  的子集。同理，甲包含乙，就是说  $A$  是  $B$  的母集。
- 甲、乙交叉，表示  $A$ 、 $B$  不相同，且  $A$ 、 $B$  的交集不是空集。
- 甲、乙互斥，就是说  $A$ 、 $B$  的交集是空集，两个集合不相交。
- 甲、乙（关于两者都从属的概念丙）矛盾，就表示  $A$ 、 $B$  不相交，而且是丙对应的集合  $C$  的分划。 $A$  关于  $C$  的补集是  $B$ ， $B$  关于  $C$  的补集是  $A$ 。

为了更好地理解，我们可以用**叠圈图**直观理解集合的关系。

如下图，每个圈表示一个集合<sup>①</sup>，圈内的区域表示属于该集合的元素，圈外的区域表示不属于该集合的元素，也就是该集合（关于全集的）补集。两个圈重叠的部分就表示同时属于两者的元素的集合，也就是两个集合的交集。而两个圈各自的部分加上重叠的部分，就是至少属于其中之一的元素的集合，也就是两个集合的并集。

<sup>①</sup>也可以用其他形状的区域。



1. 等同关系, 2. 从属关系, 3. 包含关系,  
4. 交叉关系, 5. 互斥关系, 6. 矛盾关系。

叠圈图可以让我们直接看到集合之间的关系。可以看到，用集合来解释概念，方便得多。

### 习题 3.2.1.

1. 请用集合解释概念的属加种差定义方法。
2. 用叠圈图表示“偶数”、“3 的倍数”、“自然数”之间的关系。
3. 三个集合  $A, B, C$  都是集合  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  的子集，它们都不是空集，而且构成集合  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  的分划。
  - 3.1. 请写出一个符合条件的  $A, B, C$  的例子。
  - 3.2. 符合条件的  $A, B, C$  一共有几种？

## 3.3 判断和集合

理解了概念和集合的关系，我们可以用集合的概念来重新看待判断和命题。

简单的性质判断，只涉及一个概念和一个性质。在对应的命题里，概念是主语，性质是谓语。我们把主语的概念记为  $A$ ，把谓语的性质记为  $b$ ，那

么简单的性质判断可以写成：

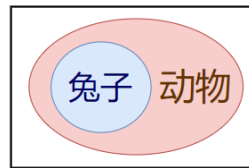
$$A \text{ 是 } b.$$

如果把  $a$  看成集合，把用  $B$  表示所有具有性质  $b$  的东西的集合。那么，性质判断“ $A$  是  $b$ ”就是说：

$$A \subseteq B$$

所以，简单的性质判断，就是描述概念的从属关系，也就是集合的子集关系。判断为真，就是说  $A \subseteq B$  成立；判断为假，就是说  $A \subseteq B$  不成立。

如果判断的概念  $A$  是单独概念，那么它对应的子集只有一个元素。我们把这种只含有一个元素的集合称为**单元集**。



如果把  $A$  的元素记为  $a$ ，那么  $A = \{a\}$ 。 $\{a\} \subseteq B$  实际上就是说  $a \in B$ 。

命题：兔子是动物。

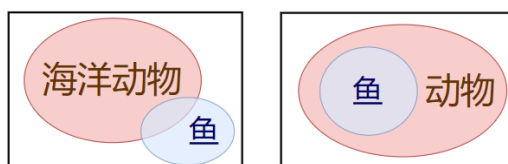
也就是说，判断的概念  $A$  是单独概念时，我们实际在判断概念是否属于有某个性质的集合。

我们可以给判断的概念  $A$  加上全称和有称，比如“所有  $A$  都是  $b$ ”。“所有”的意思是，概念  $A$  的范围里所有的元素，都是  $b$ 。于是，“所有”其实只是再次强调了子集关系。

在数学语言里，我们引进表示全称的符号： $\forall$ 。它读作“任一”、“任何”、“每个”。全命题：“所有  $A$  都是  $b$ ”可以记作“ $\forall x \in A, x \in B$ ”。它的意思是“ $A$  中任一元素都是  $B$  的元素”。也就是说， $A$  是  $B$  的子集。

如果我们说“有些  $A$  是  $b$ ”，我们要表达的意思是， $A$  的元素里，有些元素是  $b$ 。这些元素构成  $A$  的子集，但不一定是  $A$ 。所以，有命题其实表示  $A$  和  $B$  相交，交集不是空集。

在数学语言里，我们引进表示有称的符号： $\exists$ 。它读作“存在”，“有”，“至少有一个”。有命题“有些  $A$  是  $b$ ”可以记作“ $\exists x \in A, x \in B$ ”。它的意思是“ $A$  中至少有一元素是  $B$  的元素”。也就是说， $A$  和  $B$  的交集不是空集。



左：有些鱼是海洋动物，右：所有的鱼都是动物。

举例来说，“所有偶数都是自然数”可以写作“ $\forall x \in \{\text{偶数}\}, x \in \{\text{自然数}\}$ ”，换句话说，偶数集是自然数集的子集。“有些偶数是 3 的倍数”可以写作“ $\exists x \in \{\text{偶数}\}, x \in \{3 \text{ 的倍数}\}$ ”，换句话说，偶数集和 3 的倍数的集合相交，交集不是空集。

**例题 3.3.1.** 用代数的方法，表示加法和乘法的交换律、结合律。

**解答.** 加法的交换律：任意两个数相加，交换次序，和不变。把两个数用  $a$ 、 $b$  表示，加法交换律可以表示成：

$$\forall a, b, \quad a + b = b + a.$$

加法的结合律：任意三个数相加，先把前两个数相加，或者先把后两个数相加，和不变。把三个数用  $a$ 、 $b$ 、 $c$  表示，加法结合律可以表示成：

$$\forall a, b, c, \quad (a + b) + c = a + (b + c).$$

乘法的交换律：任意两个数相乘，交换次序，积不变。把两个数用  $a$ 、 $b$  表示，乘法交换律可以表示成：

$$\forall a, b, \quad a \times b = b \times a.$$

乘法的结合律：任意三个数相乘，先把前两个数相乘，或者先把后两个数相乘，积不变。把三个数用  $a$ 、 $b$ 、 $c$  表示，乘法结合律可以表示成：

$$\forall a, b, c, \quad (a \times b) \times c = a \times (b \times c).$$

复合判断，也可以用集合的方式表达。

联言判断是多个判断的全判断。考虑这样的联言判断：\$A\$ 不仅是 \$b\$，也是 \$c\$。它表达的意思是，\$A\$ 不仅包含于性质 \$b\$ 对应的集合 \$B\$，也包含于性质 \$c\$ 对应的集合 \$C\$。\$A\$ 的元素同时在 \$B\$、\$C\$ 中。换句话说，\$A\$ 是 \$B\$、\$C\$ 的交集的子集。

一般来说，考虑关于概念 \$A\$ 的联言判断，它表达的是 \$A\$ 包含于多个性质对应的集合的交集。如果把这些性质的集合记为 \$I\$，把每个性质对应的集合记为 \$B\_i\$，那么联言判断就是说，\$A\$ 包含于它们的交集，记为：

$$A \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i.$$

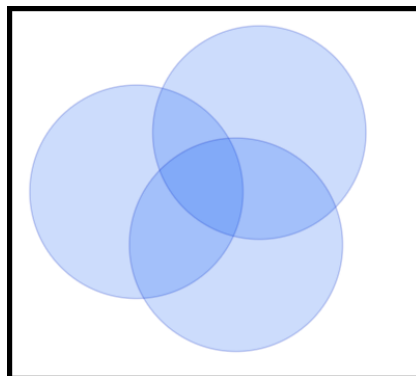
或言判断是多个判断的有判断。考虑这样的或言判断：\$A\$ 也许 \$b\$，也许 \$c\$。它表达的意思是，\$A\$ 可能包含于性质 \$b\$ 对应的集合 \$B\$，也可能包含于性质 \$c\$ 对应的集合 \$C\$。\$A\$ 的元素至少在 \$B\$、\$C\$ 中的一个里。换句话说，\$A\$ 是 \$B\$、\$C\$ 的并集的子集。

一般来说，考虑关于概念 \$A\$ 的或言判断，它表达的是 \$A\$ 包含于多个性质对应的集合的并集。如果把这些性质的集合记为 \$I\$，把每个性质对应的集合记为 \$B\_i\$，那么或言判断就是说，\$A\$ 包含于它们的交集，记为：

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i.$$

右图中，每个圈代表一个分支判断对应的集合。联言判断对应着所有圈交叠的区域（颜色最深的部分），而或言判断对应着所有蓝色的区域的总和。

**思考 3.3.1.** 有个理发师，坚持只给那些不给自己理发的人理发。那么，他是否该给自己理发呢？





**习题 3.3.1.**

1. 用代数的方法，表示乘法对加法的分配律。
2. 用代数的方法，表示乘方的运算法则。
3. 考虑假言判断：如果  $A$  是  $b$ ，那么  $A$  是  $c$ 。设性质  $b$ 、 $c$  对应的集合是  $B$ 、 $C$ ，集合  $A$ 、 $B$ 、 $C$  之间有什么关系？
4. 从集合的角度，解释这句话：“如果全部  $A$  都是  $b$ ，那么有些  $A$  是  $b$ ”。

## 3.4 映射

我们用**映射**表示事物之间的对应关系。把一个事物对应到另一个事物，可以理解为事物的变换或对事物进行操作。因此映射也叫做**变换**或**操作**。把数量对应到数量的映射，叫做**函数**。

**例子 3.4.1.**

1. 把现有《道德经》各个版本和它的字数对应起来，就是一个映射：

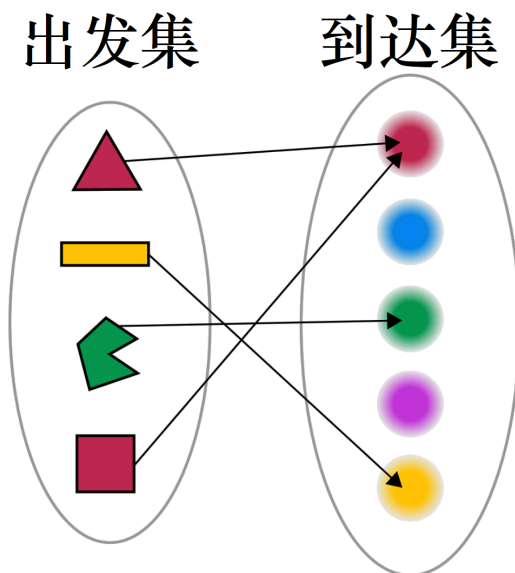
王弼《老子道德经注》（通行本）	→	5162字
河上公《道德经章句》	→	5201字
傅奕《道德经古本》	→	5450字
马王堆帛书甲本	→	5344字
马王堆帛书乙本	→	5342字
郭店楚墓本	→	2046字

2. 把事物对应到自己的映射叫做**恒等映射**或**等映射**。比如，把每个自然数对应到自己的映射就叫自然数集上的恒等映射，也叫恒等函数。任何非空集合上都有恒等映射。恒等映射的定义域和值域相同。

3. 把事物对应到同一个对象的映射叫做**恒映射**或**常映射**。比如，把任意自然数对应到 0 的映射就是恒映射。

我们把映射涉及的事物用两个集合记录：**出发集**和**到达集**。映射把出发集的一个元素对应到到达集的一个元素。用变量  $x$  指代出发集的元素， $x$  的取值在出发集里变化时，映射对应的元素也在到达集里变化，可以用变量  $y$  表示。一般称  $x$  为**自变量**， $y$  为**应变变量**。出发集和到达集都是数集的时候，映射就叫做函数。

需要强调的是，映射可以把多个元素对应到同一个元素，但不会把一个元素对应到多个元素。



映射把图形对应到它的颜色

如果把映射记作  $f$ ，那么可以用  $y = f(x)$  或  $f: x \mapsto y$  表达“映射把出发集的元素和到达集的元素对应起来”这件事。对出发集的元素  $x$  来说，如果映射  $f$  把它和到达集的元素  $y$  对应起来，就说  $y$  是  $x$ （经过  $f$  映射）的**值**，记作  $f(x) = y$ 。

出发集中，某个映射涉及的元素集合称为映射的**定义域**；到达集里，某个映射涉及的元素集合则称为映射的**值域**。定义域是出发集的子集，值域是到达集的子集。

举例来说, 映射  $f$  的定义域是  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 它把  $1, 2, 3, 4, 5$  分别对应到  $6, 7, 8, 7, 6$ 。那么它的值域是  $\{6, 7, 8\}$ 。具体来说,  $f(2) = 7$ ,  $f(3) = 8$ 。

考虑映射  $f$  的定义域的子集  $S$ 。 $S$  中元素经过  $f$  映射的值, 构成值域的子集。我们把它叫做  $S$  (关于  $f$ ) 的**像集**, 简称  $S$  的**像**, 记作  $f(S)$ 。

反之, 考虑映射  $f$  的值域的子集  $T$ 。 $T$  中元素总是  $f$  的定义域中元素的值。我们把  $f$  的定义域里值属于  $T$  的元素集合起来。这个集合叫做  $T$  关于  $f$  的**原像**。

举例来说, 映射  $f$  的定义域是  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 它把  $1, 2, 3, 4, 5$  分别对应到  $6, 7, 8, 7, 6$ 。那么, 集合  $\{1, 2, 3, 4\}$  的像集是  $\{6, 7, 8\}$ ; 集合  $\{1, 2\}$  的像集是  $\{6, 7\}$ 。集合  $\{7, 8\}$  的原像是  $\{2, 3, 4\}$ ; 集合  $\{6, 8\}$  的原像是  $\{1, 3, 5\}$ 。

我们约定, 空集的像集是空集, 空集的原像是空集。

每个一元式都可以用来定义映射。比如, 设定定义域是自然数集  $\mathbb{N}$  后, 代数式  $4 - 0.3x + 9x^2 + \frac{(1-x+2.69x^4)}{0.5x-1.385}$  就可以定义映射:

$$\forall x \in \mathbb{N}, \quad x \mapsto 4 - 0.3x + 9x^2 + \frac{(1 - x + 2.69x^4)}{0.5x - 1.385}.$$

如果把定义域设成另一个集合, 比如  $\{1, 2, 3\}$  或全体偶数, 就定义了另一个映射。

我们知道, 每个概念都对应某种集合。如果我们把这个集合作为定义域或者出发集, 那么, 确定了定义域后, 每个含有变量的简单性质判断就可以定义一个映射。

比如, 考虑这样一个命题: “ $\{1, 2, 5, 6\}$  中的任何数  $n$  都能被 5 整除”。我们可以看到, 定义域是  $\{1, 2, 5, 6\}$ , 而 “ $n$  能被 5 整除” 就可以定义以下的映射:

$$\forall n \in \{1, 2, 5, 6\}, \quad n \mapsto n \text{ 能被 } 5 \text{ 整除}.$$

这个映射从简单判断的主语出发。主语的概念对应集合  $\{1, 2, 5, 6\}$ 。

对集合中每个单独的元素  $n$ , “ $n$  能被 5 整除” 这个判断要么是真的, 要么是假的。因此, 如何我们考虑集合 {真, 假}, 那么这个集合就是上面的映射的到达集, 因为对每个  $n$  来说, “ $n$  能被 5 整除” 这个判断要么是真的, 要么是假的。而它的值域就是集合 {真, 假} 的子集。

“真”、“假” 就是命题的真值, 所以我们一般把这个集合称为**真值集**或者**二元集**。很多时候, 我们也会用 0 表示 “假”, 1 表示 “真”<sup>①</sup>。

#### 思考 3.4.1.

1. 全判断  $\forall x \in A, P(x)$  和映射  $x \mapsto P(x)$  之间存在什么关系?

#### 习题 3.4.1.

1. 映射  $f$  的定义域是  $\{1, 2, 3\}$ , 值域是  $\{4, 5\}$ 。
  - 1.1. 写出一个满足条件的映射  $f$ 。
  - 1.2. 你能写出几个满足条件的映射  $f$ ?
2. 判断以下说法是否正确。
  - 2.1. 到达集中的元素, 总是映射的结果。
  - 2.2. 出发集中的元素经过映射的值, 总在映射的值域中。
  - 2.3. 映射的定义域的元素构成的集合, 其像集的原像总是自己。
  - 2.4. 映射的值域的元素构成的集合, 其原像的像集总是自己。
3. 考虑以下映射和集合, 给出相应的像集或原像。
  - 3.1. 映射  $f$  把正整数对应到它的 3 倍数。比如:  $f(1) = 3, f(2) = 6$ , 等等。求集合  $\{21, 39, 87\}$  的像集和原像。
  - 3.2. 映射  $g$  把月份对应到它的天数 (不考虑闰年)。比如一月的值是 31, 二月的值是 28, 等等。求集合  $\{30\}$  的原像。
  - 3.3. 映射  $h$  把汉字对应到它的笔画数。比如 “数” 的值是 13, “学” 的值是 8, 等等。设集合  $S$  是  $\{1, 2\}$  的原像, 请写出它的十个元素。

---

<sup>①</sup>也有可能会反过来。

## 第四章 有理数的运算

我们已经学过自然数和分数的运算。两个自然数可以做加法、减法和乘法，任两个分数可以做加法、减法、乘法和（不为零的）除法。把自然数、分数扩展到有理数后，两个有理数可以做加法、减法、乘法和不为零的除法。

有理数的运算和自然数、分数相比，多了与负数有关的运算。为了讨论方便，我们首先介绍一个表示负数的方法：每个负数都能表示成  $-a$  的形式，其中  $a$  是它的相反数，是一个正数。

### 4.1 有理数的加减法

我们先来看与负数有关的加减法。按照负数的定义，任何负数  $-a = 0 - a$ 。所以，一个数加上一个负数，就等于减去它的相反数：

$$b + (-a) = b + (0 - a) = (b + 0) - a = b - a.$$

换句话说，减去一个正数，就等于加上它的相反数。另一方面：

$$b - (-a) = b + a - a - (-a) = b + a + (-a) - (-a) = b + a.$$

换句话说，减去一个负数，也等于加上它的相反数。

两者可以用同一句话描述：**减去一个数，等于加上它的相反数。**

减法化加法

$$b - a = b + (-a)$$

换成相反数

于是，有理数的减法总可以转化为有理数的加法。

**例子 4.1.1.** 1. 计算：

$$\begin{array}{ll} (1). & 3.4 - (-2.1) \quad (2). \quad 2.8 - (-5) \\ (3). & 9.1 - (-4.6) \quad (4). \quad 1.2 - (-4.4) \end{array}$$

2. 把以下减法改为加法：

$$\begin{array}{ll} (1). & 3.4 - 2.1 \quad (2). \quad 2.8 - 5 \\ (3). & -9.1 - (-4.6) \quad (4). \quad -1.2 - (-4.4) \end{array}$$

**解答.**

1.

$$\begin{array}{ll} (1). & 3.4 - (-2.1) = 3.4 + 2.1 = 5.5 \\ (2). & 2.8 - (-5) = 2.8 + 5 = 7.8 \\ (3). & 9.1 - (-4.6) = 9.1 + 4.6 = 13.7 \\ (4). & 1.2 - (-4.4) = 1.2 + 4.4 = 5.6 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{ll} (1). & 3.4 - 2.1 = 3.4 + (-2.1) \\ (2). & 2.8 - 5 = 2.8 + (-5) \\ (3). & -9.1 - (-4.6) = -9.1 + 4.6 \\ (4). & -1.2 - (-4.4) = -1.2 + 4.4 \end{array}$$

再来看两个有理数的加法。我们要计算：

$$a + b$$

如果两者都是正数，就是我们熟悉的分数加法。

如果两者都是负数，那么  $-a$ 、 $-b$  都是正数：

$$0 = 0 + 0 = (a + (-a)) + (b + (-b)) = a + b + ((-a) + (-b)).$$

因此，和是  $(-a) + (-b)$  的相反数。

如果  $a$ 、 $b$  一正一负，不妨设  $a$  正  $b$  负<sup>①</sup>，于是  $-b$  是正数。

$$a + b = a - (-b)$$

式子中  $a$  和  $-b$  都是正数。如果  $a > -b$ ，那么  $a - (-b)$  是正数。如果  $a < (-b)$ ，那么  $a - (-b)$  是负数。而由于：

$$0 = 0 + 0 = a - a + (-b) - (-b) = (a - (-b)) + ((-b) - a),$$

因此  $a - (-b)$  和  $(-b) - a$  互为相反数。也就是说， $a + b$  是正数  $(-b) - a$  的相反数。

看得出，上面讨论中  $a$  和  $-b$  的大小关系很重要。为了方便总结，我们引进**绝对值**的概念：

**定义 4.1.1.** 正数的**绝对值**是它自身，负数的绝对值是它的相反数。0 的绝对值是 0。

按照这个定义，可以把前面讨论的结果简化：

如果两个有理数同为正数（负数），那么它们的和也是正数（负数），绝对值是它们绝对值的和。如果两个有理数一正一负，那么它们的和的正负与绝对值较大者的正负一致，和的绝对值是绝对值较大者减去绝对值较小者的差。

总结两个有理数的加减法：

---

<sup>①</sup>如果  $a$  负  $b$  正，根据加法交换律，可以转化成  $a$  正  $b$  负的情形。

1. 将减法转为加法。
2. 任何数与 0 相加都得到自身。
3. 计算两个数的绝对值。
4. 如果两个数同正负，取绝对值的和，加上对应的正负号。
5. 如果两个数一正一负，用较大的绝对值减去较小的绝对值，加上绝对值较大的数的正负号。

例子 4.1.2. 计算：

- (1).  $3.4 - (-2.1)$       (2).  $2.8 - 5$       (3).  $-7 + 2.3$   
 (4).  $-9.1 + (-4.6)$     (5).  $-1.2 + 4.4$     (6).  $-0.9 - 3.4$

解答.

- (1).  $3.4 - (-2.1) = 3.4 + 2.1 = 5.5$   
 (2).  $2.8 - 5 = 2.8 + (-5) = -(5 - 2.8) = -2.2$   
 (3).  $-7 + 2.3 = -(7 - 2.3) = -4.7$   
 (4).  $-9.1 + (-4.6) = -(9.1 + 4.6) = -13.7$   
 (5).  $-1.2 + 4.4 = 4.4 - 1.2 = 3.2$   
 (6).  $-0.9 - 3.4 = -0.9 + (-3.4) = -(0.9 + 3.4) = -4.3$

习题 4.1.1. 算一算：

1.  $2.56 - (-1.9)$ ,  $(-4) + 3.29$ ,  $10.8 + (-42.15)$ .
2.  $-59.76 + 40.3$ ,  $-2.8 - 6.6$ ,  $-5.09 - (-2.9)$ .
3.  $-1.76 - (-5.21) - 1.874$ ,  $3.202 - (-1.94) - 1.57$ ,  $2 + (-9.18) - (20.354)$ .
4.  $3 - 2 - (-8) + (-2.2)$ ,  $-8.1 - ((-1.6) - 1.96 + (-3.9 + 1.203))$ .

## 4.2 有理数的乘除法

讨论有理数的乘除法，可以从最简单的情况开始： $(-1) \times 1$  和  $(-1) \times (-1)$ 。按照定义，

$$0 = 0 \times 1 = (-1 + 1) \times 1 = (-1) \times 1 + 1 \times 1 = (-1) \times 1 + 1.$$



于是

$$(-1) \times 1 = 0 - 1 = -1.$$

同理,  $(-1) \times 0 = 0$ 。根据乘法交换律,  $1 \times (-1) = -1$ ,  $0 \times (-1) = 0$ 。

最后:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \times (-1) = (-1 + 1) \times (-1) \\ &= (-1) \times (-1) + 1 \times (-1) \\ &= (-1) \times (-1) - 1. \end{aligned}$$

于是  $(-1) \times (-1) = 1$ 。

所以,  $-1$  的乘法性质可以归纳为“负零得零, 负正得负, 负负得正”。

同理, 把乘数换成一般的数, 也有:

$$(-1) \times a = 0 - a = -a, \quad (-1) \times (-a) = 0 - (-1) \times a = a.$$

也就是说, 一个数乘以  $-1$ , 总得到它的相反数。

从绝对值的角度来看, 任何正数都等于它的绝对值, 任何负数都等于它的绝对值乘以  $-1$ 。换句话说, 在乘法中, 任何有理数都可以分成两部分考虑: 绝对值和正负号。

因此, 两个有理数  $a$ 、 $b$  相乘, 可以分别把两部分相乘。比如:

$$(-3.3) \times 6 = (-1) \times 3.3 \times (+1) \times 6 = ((-1) \times (+1)) \times (3.3 \times 6).$$

其中  $3.3$ 、 $6$  分别是乘数和被乘数的绝对值,  $-1$  和  $+1$  是它们的正负号。

两个有理数的乘积, 是两者绝对值的乘积, 乘以两者正负号的乘积。绝对值的乘积总是正数, 正负号的乘积总是  $\pm 1$ 。因此, 两个有理数的乘积, 绝对值是两者绝对值的乘积, 正负号是两者正负号的乘积。具体来说, 看  $-1$  的个数, 就可以确定乘积的正负了。如果正负号都是正数, 那么不需要

考虑  $-1$  的问题。如果两者一正一负，那么乘积是负数，如果正负号都是负数，“负负得正”，于是乘积是正数。

如果乘数或被乘数是  $0$ ，结果是  $0$ 。

除法是乘法的逆运算。除以一个正有理数  $a$ ，等于乘以它的倒数： $\frac{1}{a}$ 。我们只需要把涉及负数的除法也转为乘法即可。

除数是负有理数  $-a$  的时候，我们首先找到  $b \div (-a)$  的商，也就是使得  $c \times (-a) = b$  的数  $c$ 。根据前面对乘法的推导，

$$b \times (-1) \times \frac{1}{a} = c \times (-a) \times (-1) \times \frac{1}{a} = c \times a \times \frac{1}{a} = c$$

或者说

$$c = b \times \left( (-1) \times \frac{1}{a} \right) = b \times \left( -\frac{1}{a} \right).$$

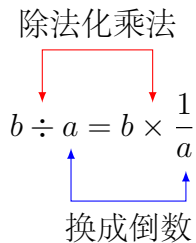
即

$$b \div (-a) = b \times \left( -\frac{1}{a} \right).$$

最后，我们说明  $-\frac{1}{a}$  是  $-a$  的倒数：

$$\begin{aligned} (-a) \times \left( -\frac{1}{a} \right) &= a \times (-1) \times (-1) \times \frac{1}{a} \\ &= (-1) \times (-1) \times a \times \frac{1}{a} \\ &= 1 \times 1 = 1. \end{aligned}$$

所以，无论除数是正有理数还是负有理数，除以一个数，等于乘以它的倒数。



于是，有理数的除法总可以转化为有理数的乘法。

综上所述，可以这样总结有理数的乘除法：

1. 将除法转为乘法。
2. 任何数与 0 相乘都得到 0。
3. 计算两个数的绝对值。
4. 如果两个数同正负，取绝对值的乘积。
5. 如果两个数一正一负，取绝对值乘积的相反数。

例子 4.2.1. 计算：

$$\begin{array}{lll} (1). & 3.3 \times (-5) & (2). \quad -\frac{3}{7} \times (-\frac{5}{6}) \quad (3). \quad (-2.4) \times \frac{1}{6} \\ (4). & 4.8 \div (-1.6) & (5). \quad -\frac{3}{7} \div (-\frac{5}{14}) \quad (6). \quad (-2.8) \div \frac{2}{3} \end{array}$$

解答.

$$\begin{array}{ll} (1). & 3.3 \times (-5) = -(3.3 \times 5) = -16.5 \\ (2). & -\frac{3}{7} \times (-\frac{5}{6}) = \frac{3}{7} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{14} \\ (3). & (-2.4) \times \frac{1}{6} = -(2.4 \times \frac{1}{6}) = -0.4 \\ (4). & 4.8 \div (-1.6) = 4.8 \times (-\frac{5}{8}) = -(4.8 \times \frac{5}{8}) = -3 \\ (5). & -\frac{3}{7} \div (-\frac{5}{14}) = -\frac{3}{7} \times (-\frac{14}{5}) = \frac{3}{7} \times \frac{14}{5} = 1.2 \\ (6). & (-2.8) \div \frac{2}{3} = (-2.8) \times \frac{3}{2} = -(2.8 \times \frac{3}{2}) = -4.2 \end{array}$$

习题 4.2.1.

算一算：

$$4.51 \times (-2.2), (-1.2) \times (-3.9), (-1.8) \times 0.8.$$

$$1.98 \div (-0.3), -2.8 \div (-0.7), 5.2 \div (3 \div (-1.5)), (-3) \div (0.5 \times (-2.4)).$$

思考：

1. 为什么“任何数与 0 相加都得到自身”？
2. 为什么“任何数与 0 相乘都得到 0”？
3. 为什么说“涉及负数的乘法也满足交换律和分配律”？

### 4.3 数轴

为了直观表示有理数，我们引入**数轴**的概念。

从左往右画一条直线，在直线上取一点表示 0，称为**原点**。选择适当长度作为**单位长度**，规定右边是**正方向**，往右移动一个单位长度就是“+1”。

从原点出发往右移动，每移动一个单位长度就是“+1”。因此，每隔单位长度取一个点，就可以表示出  $1, 2, 3 \cdots$ 。相对的，往左移动一个单位长度就是“-1”，类似可以表示出  $-1, -2, -3 \cdots$ 。这就是数轴。

数轴可以用来做加减法。比如，计算  $3+2$ ，可以先在数轴上找到 3，然后向右移动 2 个单位长度，到达 5 对应的点，这说明  $3+2=5$ 。

数轴上的点，越往右就越大，越往左就越小。正数都在 0 右边，负数都在 0 左边。比较两个数的大小，可以在数轴上找对应的点：靠右的比较大，靠左的比较小。

#### 思考 4.3.1.

1. 数轴的用法和有理数的运算法则是否有矛盾？
2. 所有的有理数都在数轴上吗？怎么在数轴上找到一个有理数？

## 第五章 代数式的运算

代数式是含有变量的算式。代数式的运算和数式并没有区别。毕竟，代数式里的变量只是用来代替数的。对代数式做运算，使用和数式运算一样的规则：加法结合律、乘法结合律、加法交换律、乘法交换律，以及乘法对加法的分配律。

### 5.1 整式的运算

与整式有关的计算，一个常见的目标是把式子**展开**，也就是把几个整式的乘积转成一个整式：单项式或多项式。展开整式，可以按照以下步骤操作：

1. 用分配律把整式乘积转为整式中各项的乘积之和。
2. 合并同类项（用到结合律和交换律）。

**例子 5.1.1.** 计算：

1. 展开并化简  $(a + b)(a - b)$

解:

$$\begin{aligned}
 (a+b)(a-b) &= a \cdot (a-b) + b \cdot (a-b) && \text{(分配律展开)} \\
 &= a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b \\
 &= a^2 + (-1+1)ab - b^2 && \text{(合并同类项)} \\
 &= a^2 + 0ab - b^2 \\
 &= a^2 - b^2
 \end{aligned}$$

2. 展开并化简  $(a^2 + ab - b^2)(a - b)$

解:

$$\begin{aligned}
 &(a^2 + ab - b^2)(a - b) \\
 &= a^2 \cdot (a - b) + ab \cdot (a - b) + (-b^2) \cdot (a - b) && \text{(分配律展开)} \\
 &= a^2 \cdot a - a^2 \cdot b + ab \cdot a - ab \cdot b + (-b^2) \cdot a + (-b^2) \cdot (-b) \\
 &= a^2 \cdot a - a^2 \cdot b + a^2b - ab^2 - b^2 \cdot a + b^2 \cdot b \\
 &= a^3 + (-1+1)a^2b + (-1-1)ab^2 + b^3 && \text{(合并同类项)} \\
 &= a^3 + 0a^2b - 2ab^2 + b^3 \\
 &= a^3 - 2ab^2 + b^3
 \end{aligned}$$

在第一个例子中，我们首先把  $a - b$  看成一个整体，把  $a + b$  看成两项相加。使用分配律，就把  $(a + b)(a - b)$  转为  $a \cdot (a - b)$  与  $b \cdot (a - b)$  的和。接下来，我们把  $a - b$  看成两项相减，再次使用分配律，就把  $(a + b)(a - b)$  完全转成若干项的和：

$$a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b$$

接着，我们合并同类项。使用交换律，可以知道  $ab = ba$ ，所以这两项是同类项，可以合并。合并后，系数是  $-1 + 1 = 0$ ，所以这  $ab$  项被消去了。剩下的两项无法合并同类项了。于是我们最后得到：

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

第二个例子中的计算步骤也是如此。需要注意的是，展开  $(-b^2) \cdot (a - b)$  这样带有多个减号（负号）的式子时，要仔细处理正负号。为了防止出错，可以先将容易出错的减法转为加法。比如，计算  $ab - b(a - c)$  时，可以把它化为： $ab + (-b) \cdot (a + (-c))$ 。使用分配律展开各项之后，再用“负正得负，负负得正”的法则，消去负号，化简各项。比如，展开  $ab - b(a - c)$ ：

$$\begin{aligned} ab - b(a - c) &= ab + (-b) \cdot (a + (-c)) && \text{(减法化加法)} \\ &= ab + (-b) \cdot a + (-b) \cdot (-c) && \text{(分配律展开)} \\ &= ab - ba + bc && \text{(消去负号)} \\ &= bc. \end{aligned}$$

另一种常见的代数式计算叫做**变量代换**。我们知道，变量是用来代替数的。其实，变量也可以用来代替变量。用变量代替变量，可以变化代数式的形式，很多时候，可以帮助我们更好地理解事物间的关系。

举例来说，我们想展开  $(a - 2b + 1)(a - 2b - 1)$ ，除了像上面的例子一样直接使用分配律然后合并同类项，还有什么别的方法吗？

我们可以观察到，这个式子是两个整式的乘积，第一个是  $a - 2b$  与 1 的和，第二个是  $a - 2b$  与 1 的差。于是，我们可以把  $a - 2b$  看成一个整体，把 1 看成一个整体。我们用变量  $x$  代替  $a - 2b$ ， $y$  代替 1，那么原式就变成了  $(x + y)(x - y)$ ，于是等于  $x^2 - y^2$ 。

我们再把  $x$  和  $y$  代替的变量和数代回去，就得到原式等于  $(a - 2b)^2 - 1^2$ 。 $1^2 = 1$ ，所以我们现在只需要展开  $(a - 2b)^2$  了。展开  $(a - 2b)^2$ ：

$$\begin{aligned} (a - 2b)^2 &= (a - 2b)(a - 2b) \\ &= (a - 2b) \cdot a - (a - 2b) \cdot 2b \\ &= a^2 - 2b \cdot a - a \cdot 2b + 2b \cdot 2b \\ &= a^2 + (-2 - 2)ab + 4b^2 \\ &= a^2 - 4ab + 4b^2 \end{aligned}$$

因此,

$$(a - 2b + 1)(a - 2b - 1) = (a - 2b)^2 - 1 = a^2 - 4ab + 4b^2 - 1.$$

数学中常用的整式等式:

1.  $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
2.  $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
3.  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
4.  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5.  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6.  $a^3 + b^3 = (a^2 - ab + b^2)(a + b)$
7.  $a^3 - b^3 = (a^2 + ab + b^2)(a - b)$
8.  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
9.  $(a + b)(a + c) = a(a + b + c) + bc$
10.  $(a + b)(b + c)(c + a) + abc = (a + b + c)(ab + bc + ca)$
11.  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

### 习题 5.1.1.

1. 展开并化简:

1.1.  $(4a + 2b - 1)(a - 3b + 1).$

1.2.  $(a + b^2 - b - 2a^2)(a^2 - 2b^2 + a + b).$

2. 验证以下等式:

2.1.  $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2.$

2.2.  $a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1).$

2.3.  $3(a - b)(b - c)(c - a) = (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$

3. 求以下代数式中  $x^3$  的系数:

3.1.  $(x - 2)^5.$

3.2.  $(x^2 - x + 1)(x^3 - x^2 + 2x - 1).$



## 5.2 分式的运算

和分数一样，分式运算常见的目的有**约分**和**通分**。约分是把分子和分母中共有的式子消去，让分式更简洁。无法继续约分的分式叫做既约分式。通分是让几个分式的分母相同，以便相加。约分和通分的方法和分数相同。

**例子 5.2.1.** 通分：

$$1. \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$$

解：

$$\begin{aligned} \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} &= \frac{(b+c)bc + (a+c)ac + (a+b)ab}{abc} \\ &= \frac{a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2}{abc} \end{aligned}$$

$$2. \frac{a+2b}{a+b-1} - \frac{a+b+1}{a-b+1}$$

解：

$$\begin{aligned} \frac{a+2b}{a+b-1} - \frac{a+b+1}{a-b+1} &= \frac{(a+2b)(a-b+1) - (a+b+1)(a+b-1)}{(a+b-1)(a-b+1)} \\ &= \frac{a^2 - ab + a + 2ab - 2b^2 + 2b - (a^2 + 2ab + b^2 - 1)}{(a+b-1)(a-b+1)} \\ &= \frac{-ab - 3b^2 + a + 2b + 1}{(a+b-1)(a-b+1)} \end{aligned}$$

**习题 5.2.1.**

1. 通分：

$$1.2. \frac{1}{a+b} + \frac{1}{2a-b}.$$

$$1.2. \frac{a^2}{a+1} + \frac{a+1}{a-1}.$$

$$1.1. \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{c-a}{a+b-c}.$$

2. 验证以下等式：

$$2.1. \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} = \frac{2a}{a^2-b^2}.$$

$$2.2. \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

3. 求以下代数式中  $x$  的系数:

3.1.  $(x^2 - \frac{1}{x})^5$ .

3.2.  $(x - x^2 - \frac{1}{x} + 1)(x^2 + x + 3 - \frac{2}{x})$ .

## 第六章 从变量到方程（下）

### 6.1 一元一次方程

**例子 6.1.1.** 根据以下问题，设未知数并列出方程：

- (1). 用一条 50 厘米长的丝带给一个正方形的盒子包装，捆好一周后，还有 26 厘米可以用于打结。盒子的边长是多少？
- (2). 把一箱书分给某组学生阅读。如果每人分 3 本，则剩余 20 本；如果每人分 4 本，则还差 16 本。这个班有多少学生？

**解答.**

- (1) 解：设盒子的边长是  $x$  厘米，列方程：

$$4x + 26 = 50.$$

- (2) 解：设这个班有  $x$  个学生，列方程：

$$3x + 20 = 4x - 16.$$

以上的方程都有这样的性质：恰好含有一个变量来表示未知数，而且含有变量的项都是一次项。这样的方程叫做**一元一次方程**。一元一次方程是由关于未知数的一元一次式构成的方程，它的一般形式是： $ax + b = cx + d$ 。其中变量  $x$  是方程的未知数， $a, b, c, d$  称为方程的系数。实际的问题中，系数  $a, b, c, d$  是已知数，根据等式的基本性质，我们可以求出未知数  $x$  的值。

首先，我们把含有变量  $x$  的项移到等式一边，把常数项移到等式另一边。利用等式的基本性质，我们将等式两边同时减去  $b$ ，再同时减去  $cx$ ，得到  $ax - cx = d - b$ 。

$ax$  和  $cx$  都是只含有  $x$  的一次项，它们之间只差一个系数，所以可以合并同类项： $ax - cx = (a - c)x$ 。

如果  $a \neq c$ ，那么可以把等式两边同除以  $a - c$ ，得到  $x = \frac{d-b}{a-c}$ 。这就是方程的解。

如果  $a = c$ ，那么我们得到  $0 = d - b$ 。如果  $b \neq d$ ，那么这个等式总是不成立的。任何  $x$  的值都不能使等式成立。我们说方程无解。如果  $b = d$ ，那么我们得到  $0 = 0$ 。这个等式总是成立的。任何  $x$  的值都能使等式成立。我们说方程有任意解。

使方程的等式成立的值是一个集合，称为它的**解集**。我们把上面的说法用集合的说法再表述一次：方程无解，就是说方程的解集是空集。方程有任意解，就是说方程的解集是全集。方程有唯一解  $x = \frac{d-b}{a-c}$ ，就是说方程的解集就是  $\{\frac{d-b}{a-c}\}$ 。

**解答.** 按这个方法，我们可以解以上两个问题中的方程：

(1) 解：设盒子的边长是  $x$  厘米，列方程：

$$4x + 26 = 50.$$

等式右边没有含变量的项，我们将等式两边同时减去 26，得到：

$$4x = 50 - 26.$$

即：

$$4x = 24.$$

再将等式两边同时除以 4，就得到解： $x = 6$ 。

答：盒子的边长是 6 厘米。

(2) 解：设这个班有  $x$  个学生，列方程：

$$3x + 20 = 4x - 16.$$

将等式两边同时减去 20，再将等式两边同时减去  $4x$ ，得到：

$$3x - 4x = -20 - 16.$$

左边合并同类项，右边计算减法，就得到：

$$-x = -36.$$

再将等式两边同时除以  $-1$ ，就得到解： $x = 36$ 。

答：这个班有 36 个学生。

我们可以这样总结一元一次方程  $ax + b = cx + d$  的解：

$$\left\{ \begin{array}{ll} a \neq c & \text{有唯一解：} \frac{d-b}{a-c} \\ a = c & \left\{ \begin{array}{ll} b \neq d & \text{无解} \\ b = d & \text{有任意解} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

**思考 6.1.1.** 以下方程如何求解？

$$\frac{ax + b}{cx + d} = 1$$

它的解有哪些情况？试和一元一次方程对比。

## 6.2 一元一次不等式

**例子 6.2.1.** 根据以下问题，设未知数并列出不等式：

(1). 海水的盐度是 0.351%，生理盐水的盐度是 0.9%，一千克海水中至少要

加入多少克纯水，才能让盐度降到生理盐水的盐度以下？

(2). 100 亩地规划种植葡萄。食用葡萄每亩年收益为 0.4 万元，酿酒葡萄每亩年收益为 0.6 万元。规划年收益 52 万元。要如何安排种植？

**解答.**

(1) 解：设要加  $x$  克水，题目条件可以写成：

$$\frac{1000 \times 0.351\%}{1000 + x} < 0.9\%.$$

由题目条件，可以假设  $1000 + x$  是正数，两边乘以左式分母，得到：

$$1000 \times 0.351\% < 0.9\% \times (1000 + x).$$

(2) 解：设  $x$  亩地种食用葡萄，那么  $100 - x$  亩地种酿酒葡萄，题目条件可以写成：

$$0.4 \times x + 0.6 \times (100 - x) \geq 52.$$

一元一次不等式和一元一次方程很像，也涉及关于变量的一元一次式。一元一次方程中，两个一元一次式有相等关系，一元一次不等式中，两个一元一次式有不等关系。区别在于，相等关系只有一种，而不等关系有两类四种。

不等式的基本性质和等式有什么共同点，又有什么区别呢？

**例子 6.2.2.** 观察以下不等式，你能发现什么规律？

(1).  $2 < 3, \quad 3 < 4, \quad 6 < 7$

(2).  $4 \leq 7, \quad 6 \leq 10.5, \quad 1.2 \leq 2.1, \quad 28 \leq 49$

(3).  $3 < 5, \quad 9 < 15, \quad -6 > -10, \quad -0.36 > -0.6$

(4).  $-7 \leq 1, \quad 7 \geq -1, \quad -1.4 \leq 0.2, \quad 1.19 \geq -0.17$

等式的基本性质是：等式两边加、减、乘、除以同一个量，成立的等式仍然成立。

不等式两边加减同一个量，成立的不等式仍然成立。不等式两边乘以或除以同一个量，成立的不等式不一定成立。

我们观察到，只有当不等式两边同时乘以或除以正数的时候，不等式仍然成立；不等式两边同时乘以或除以负数的时候，不等式不再成立，反号的不等式反而成立。

为什么乘除法和加减法有这样的区别呢？我们可以看以下的例子：

**例子 6.2.3.** 观察以下的式子，不等关系之间有什么联系？

(1).  $2 < 3, \quad 3 > 2, \quad -2 > -3, \quad -3 < -2$

(2).  $4 \leq 7, \quad 7 \geq 4, \quad -7 \leq -4, \quad -4 \geq -7$

一般来说，两个数  $a, b$  的不等关系是**互反**的：如果  $a < b$ ，那么  $b > a$ ，反之亦然；如果  $a \leq b$ ，那么  $b \geq a$ ，反之亦然。左右边互换的时候，不等号要反过来。而两个数的相等关系是**对称**的：如果  $a = b$ ，那么  $b = a$ 。左右边互换的时候，等号仍然是等号。

从  $2 < 3$  到  $-2 > -3$ ，可以理解为两边同时乘以  $-1$ ；也可以理解为两边同时减去  $2$ ，再同时减去  $3$ ，然后左右边互换。左右边互换时，不等式反号。如果两个数相等，那么左右边互换时不需要反号，或者说，等号的反号仍然是等号（因此说相等关系是自反的）。

追根究底，不等关系反映了数与数之间的顺序，相等关系反映了数与数之间有共同之处。它们代表了数的不同性质。

一元一次不等式的解法，思路和一元一次方程类似。我们都希望把一次项整理到不等式一边，把常数项整理到不等式另一边，然后合并同类项，最后两边同时除以变量  $x$  的系数，求出  $x$  的解。

因此，在处理一元一次不等式的时候，可以有两种方式。要么用加减法使一次项的系数变成正数，然后两边同时除以系数得到解。这个方法不需考虑做除法时不等式反号的问题；要么不要求一次项的系数是正数，两边同时除以一次项系数的时候，视情况决定不等号是否要反号。

**解答.** 按这个方法，我们可以解以上两个问题中的不等式：

(1) 解：设要加  $x$  克纯水，题目条件可以写成：

$$\frac{1000 \times 0.35\%}{1000 + x} < 0.9\%.$$

由题目条件，可以假设  $1000 + x$  是正数，两边乘以左式分母，得到：

$$\begin{aligned} 1000 \times 0.351\% &< 0.9\% \times (1000 + x) \\ 3.51 &< 9 + 0.009x \\ 3.51 - 0.9 &< 0.009x \\ 2.61 &< 0.009x \end{aligned}$$

两边同时除以正数 0.009，得到：

$$\frac{2.61}{0.009} < x$$

即：

$$x > \frac{2.61}{0.009} = 290.$$

此时  $1000 + x > 1290 > 0$ ，符合假设。

答：至少要加 290 克纯水。

(2) 解：设  $x$  亩地种食用葡萄，那么  $100 - x$  亩地种酿酒葡萄，题目条件可以写成：

$$\begin{aligned} 0.4 \times x + 0.6 \times (100 - x) &\geq 52 \\ 0.4x - 0.6x + 60 &\geq 52 \\ -0.2x &\geq 52 - 60 \\ -0.2x &\geq -8 \end{aligned}$$

一次项系数  $-0.2$  是负数，所以两边同时除以  $-0.2$ ，不等式反号：

$$x \leq \frac{-8}{-0.2}$$



得到  $x \leq 40$ 。由问题条件,  $x$  还需要满足  $0 \leq x \leq 100$ , 所以解为:  $x \leq 40$  且  $0 \leq x \leq 100$ , 也就是  $0 \leq x \leq 40$ 。

答: 至多 40 亩地种食用葡萄, 其余的地种酿酒葡萄。

可以看到, 一元一次不等式的解与一元一次方程的解是不一样的。一元一次方程的解总是单元集、全集或空集, 一元一次不等式的解一般既不是全集、也不是单元集或空集。

另外要注意的是, 在解决实际问题的時候, 往往需要根据题目条件做一些额外的假设, 才能列出方程或不等式。解完方程、不等式后, 应该及时检验得到的解, 看是否能让这些假设成立。

综上所述, 可以这样总结解一元一次不等式的方法:

**方法一:**

1. 通过两边同时加减法, 将一次项移到不等式一边, 将常数项移到另一边, 并保证一次项系数不是负数。
2. 如果一次项系数等于 0, 比较不等式两边:
  - 2.1. 如果不等式成立, 则原不等式有任意解。
  - 2.2. 如果不等式不成立, 则原不等式无解。
3. 如果一次项系数大于 0, 将两边同时除以一次项系数, 得到不等式的解。

**方法二:**

1. 通过两边同时加减法, 将一次项移到不等式一边, 将常数项移到另一边。
2. 如果一次项系数等于 0, 比较不等式两边:
  - 2.1. 如果不等式成立, 则原不等式有任意解。
  - 2.2. 如果不等式不成立, 则原不等式无解。
3. 如果一次项系数大于 0, 将两边同时除以一次项系数, 得到不等式的解。
4. 如果一次项系数小于 0, 将两边同时除以一次项系数, 并将不等式反号, 得到不等式的解。

**思考 6.2.1.** 以下不等式如何求解？

$$\frac{ax+b}{cx+d} < 1$$

它的解和一元一次不等式有什么不同？