

# 第三册习题集

大青花鱼



# 目录

<b>第一章 无穷</b>	<b>5</b>
1.1 无穷集合的势 . . . . .	5
1.2 常见无穷集合的势 . . . . .	5
1.3 可数和不可数 . . . . .	5
<b>第二章 连续函数的变化</b>	<b>7</b>
2.1 函数在一点的变化 . . . . .	7
2.2 微变的运算法则 . . . . .	7
2.3 常见函数的微变 . . . . .	7
2.4 微变函数 . . . . .	7
2.5 多次微变 . . . . .	13
<b>第三章 研究函数</b>	<b>15</b>
3.1 增减与极值 . . . . .	15
3.2 凹凸性质 . . . . .	15

3.3	局部性质 . . . . .	15
3.4	曲线的性质 . . . . .	15
<b>第四章</b>	<b>平直空间</b>	<b>17</b>
4.1	平直空间的基本性质 . . . . .	17
4.2	子空间与和空间 . . . . .	17
4.3	生成空间 . . . . .	17
4.4	基底和维数 . . . . .	17
<b>第五章</b>	<b>连续函数的和</b>	<b>19</b>
5.1	函数图像的面积 . . . . .	19
5.2	函数的定合 . . . . .	19
5.3	合函数 . . . . .	19
<b>第六章</b>	<b>级数</b>	<b>21</b>
6.1	正项级数 . . . . .	21
6.2	收敛与发散 . . . . .	21
6.3	函数的级数 . . . . .	21

# 第一章 无穷

## 1.1 无穷集合的势

## 1.2 常见无穷集合的势

## 1.3 可数和不可数



## 第二章 连续函数的变化

### 2.1 函数在一点的变化

**定义 2.1.1. 散整式** 如果整式  $P$  的系数在数域  $\mathbb{A}$  中, 根也都在  $\mathbb{A}$  中, 就说  $P$  是 (在  $\mathbb{A}$  上的) **散整式**。或者说  $P$  是**散的**, 在  $\mathbb{A}$  上**散开**。散整式  $P$  可以写成:

$$P(X) = c(X - x_1)^{m_1}(X - x_2)^{m_2} \cdots (X - x_k)^{m_k}$$

的形式。其中  $c \in \mathbb{A}$ ,  $c \neq 0$ , 根  $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$  是  $\mathbb{A}$  中系数。  
 $m_0, m_1, \cdots, m_k$  是正整数。

### 2.2 微变的运算法则

### 2.3 常见函数的微变

### 2.4 微变函数

**例子 2.4.1.** 设  $f$  是开区间  $I$  上可微的函数, 下面要证明微变函数  $\partial f$  在  $I$  上满足介值定理, 即如果对  $I$  中两点  $a, b$  有  $\partial f(a) < \partial f(b)$ , 那么存在  $c \in I$

使得  $\partial f(a) < \partial f(c) < \partial f(b)$ 。

1. 设  $a, b \in I$ ,  $\partial f(a) < \partial f(b)$ , 对  $z \in (\partial f(a), \partial f(b))$ , 证明: 有正实数  $H$ , 使得只要  $0 < h < H$ , 就有:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} < z < \frac{f(b+h) - f(b)}{h}.$$

2. 证明: 存在  $h > 0$ ,  $y \in I$ , 使得  $y+h \in I$ , 且

$$\frac{f(y+h) - f(y)}{h} = z.$$

3. 证明: 存在  $x \in I$  使得  $z = \partial f(x)$ 。

4. 证明  $f$  把区间  $I$  映射到一个区间。

5. 考虑函数  $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ 。证明  $f$  在  $[0, 1]$  上可微。 $f$  的微变函数是否在  $[0, 1]$  上连续? 给出集合  $\partial f([0, 1])$  的特征。你能得出什么结论?

**解答.** 1. 根据定义, 微变率是变率的极限。因此, 对任意实数  $r > 0$ , 总有  $H > 0$ , 使得只要  $0 < h < H$ , 就有:

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \partial f(a) \right| < r.$$

对  $\partial f(b)$  也一样。选择  $r$  使得  $\partial f(a) + r < z$ ,  $\partial f(b) - r > z$ 。比如  $z - \partial f(a)$  和  $\partial f(b) - z$  中较小者的一半。再选择使得相应变率足够接近  $\partial f(b)$ 、 $\partial f(b)$  的  $H$ 。这样, 只要  $0 < h < H$ , 就有:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \partial f(a) \right| &< r, \\ \left| \frac{f(b+h) - f(b)}{h} - \partial f(b) \right| &< r. \end{aligned}$$

从而就有:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} < z < \frac{f(b+h) - f(b)}{h}.$$

2. 给定  $0 < h < H$ , 考虑函数

$$\phi: x \mapsto \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$



则  $\phi$  是  $[a, b-h]$  上的连续函数。因此, 由于  $z \in (\phi(a), \phi(b))$ , 根据介值定理, 有  $y \in (a, b-h)$ , 使得

$$\frac{f(y+h) - f(y)}{h} = z.$$

3. 根据微分零值定理, 存在  $x \in (y, y+h)$  使得  $\partial f(x) = \frac{f(y+h) - f(y)}{h} = z$ 。

4. 考虑像集  $\partial f(I)$ , 我们在前几问中证明了: 在  $\partial f(I)$  任取两个元素  $\partial f(a) < \partial f(b)$ , 则开区间  $(\partial f(a), \partial f(b))$  中任一点都在  $\partial f(I)$  中。这说明  $\partial f(I)$  是一个区间。

5. 容易证明  $f$  在  $(0, 1]$  上可微, 微变函数为:

$$\partial f(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

对于 0 点, 考虑变率:

$$\left| \frac{f(h) - f(0)}{h} \right| \leq |h| \left| \sin\left(\frac{1}{h^2}\right) \right| \leq |h|$$

因此  $h$  趋于 0 时, 变率趋于 0。这说明  $f$  在 0 处可微, 微变率为 0。

另外, 对任意正整数  $n$ , 取  $x = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$ , 则  $\frac{1}{x^2} = 2n\pi$ 。它的正弦值为 0, 余弦值为 1。于是  $\partial f(x) = -2\sqrt{2n\pi}$ 。这说明  $x$  按数列  $\{\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\}$  趋于 0 时,  $\partial f$  的值趋于负无穷大。因此  $\partial f$  在 0 处不连续。当然, 我们也可以取使得  $\frac{1}{x^2}$  的正弦值为 0, 余弦值为 -1 的  $x$ , 类似可以让  $\partial f$  的值趋于正无穷大。使用前几问的结果可知:  $\partial f([0, 1])$  是全体实数集。这也从另一方面印证  $\partial f$  不连续。

**例子 2.4.2.** 设  $f$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 在开区间  $(a, b)$  上可微。  $f(a) = f(b) = 0$ 。  $c$  是数轴上不属于  $[a, b]$  的一点。证明: 存在  $(a, b)$  上一点, 函数  $f$  在该点的切线与横坐标轴交于  $(c, 0)$  点。

**证明：** 对  $(a, b)$  上的点  $t$ ,  $f$  过点  $t$  的切线方程为：

$$y = f(t) + \partial f(t)(x - t).$$

切线过  $(c, 0)$  点, 说明以下关系成立：

$$\partial f(t)(t - c) - f(t) = 0$$

考虑构造一个关于  $t$  的函数  $g(t)$ , 使得  $g(a) = g(b)$ , 且  $\partial g = 0$  当且仅当上式等于 0。这样, 我们使用微变零值定理, 就能得到结论。

直接让  $\partial g = \partial f(t)(t - c) - f(t)$ , 发现没有简单的构造方法。考虑让  $\partial g$  为分式,  $\partial f(t)(t - c) - f(t)$  作为分母。这样思考下, 我们构造：

$$g : t \mapsto \frac{f(t)}{t - c}.$$

则  $g(a) = g(b) = 0$ 。而求微得到：

$$\partial g = \frac{\partial f(t)(t - c) - f(t)}{(t - c)^2}.$$

这就是我们要找的  $g$ 。运用微变零值定理, 存在  $x \in (a, b)$ , 使得  $\partial g = 0$ , 即  $\partial f(x)(x - c) - f(x) = 0$ 。因此  $f$  在  $x$  的切线过  $(c, 0)$  点。  $\square$

**注意：** 本题结论在直观上很容易理解, 即当点在  $(a, b)$  上运动时,  $f$  过点的切线扫过整个数轴  $[a, b]$  以外的部分, 不会有遗漏。

**例子 2.4.3.** 如果  $P$  是  $\mathbb{R}$  上的散整式, 证明对任意实数  $t$ ,  $\partial P + tP$  也是散整式。

**解答.** 把  $P$  写成  $c(X - x_1)^{m_1}(X - x_2)^{m_2} \cdots (X - x_k)^{m_k}$  的形式, 它的次数是：

$$n = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$$

每个根  $x_i$  都是  $\partial P$  的  $m_i - 1$  次根, 那么它也是  $\partial P + tP$  的  $m_i - 1$  次根。计算重根的话, 我们已经找到了  $\partial P + tP$  的  $n - k$  个根。

现在继续找出其他的根。我们可以猜测, 对每个  $0 < i < k$ , 区间  $(x_i, x_{i+1})$  中都有一个根。

考虑函数  $f: x \mapsto P(x)e^{tx}$ 。  $f$  在闭区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上连续, 在开区间  $(x_i, x_{i+1})$  上可微, 根据微变零值定理,  $\partial f$  在  $(x_i, x_{i+1})$  上有零点。而

$$\partial f(x) = (\partial P(x) + tP(x))e^x,$$

$e^x$  总大于零, 所以这个零点就是  $\partial P + tP$  的根。

这样, 我们又找到了  $k-1$  个根。合共  $n-1$  个根。如果  $t=0$ , 那么  $\partial P + tP$  是  $n-1$  次多项式, 这些根就是它所有的根。如果  $t \neq 0$ , 那么  $\partial P + tP$  可以写成这  $n-1$  个根的散整式和一个一次式的乘积。于是最后一个根也是实数。这说明  $\partial P + tP$  总是散的。

**例子 2.4.4.**  $f$  是  $\mathbb{R}^+$  到  $\mathbb{R}$  的连续函数, 且在  $(0, \infty)$  上可微。已知  $f(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 。证明, 存在正实数  $c$ , 使得  $\partial f(c) = 0$ 。

**解答.** 如果  $f$  恒等于 0, 那么任取正实数即可。

如果  $f$  不恒等于 0, 不妨设  $f$  有正值  $f(a) > 0$ 。由于  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , 所以对  $\frac{f(a)}{2} > 0$ , 存在  $R > 0$ , 使得只要  $x > R$ , 就有  $f(x) < \frac{f(a)}{2}$ 。比如,  $f(R+1) < \frac{f(a)}{2}$ 。

因此, 根据介值定理, 区间  $(0, a)$  和  $(a, R+1)$  中, 各有一点  $x_1, x_2$ , 使得  $f(x_1) = f(x_2) = \frac{f(a)}{2}$ 。

因此, 根据微变零值定理, 存在  $c \in (x_1, x_2)$ , 使得  $\partial f(c) = 0$ 。

**例子 2.4.5.** 函数  $f, g$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 在开区间  $(a, b)$  上可微。

1. 如果  $\partial g$  在  $(a, b)$  上不等于 0, 证明  $g$  在  $(a, b)$  上不等于  $g(b)$ 。
2. 给定  $t \in [a, b]$ 。记  $v = \frac{f(t)-f(b)}{g(t)-g(b)}$ 。考虑定义在  $[a, b]$  上的函数  $h$ :

$$h: x \mapsto f(x) - v \cdot g(x)$$

验证  $h(t) = h(b)$ , 从而证明:

$$\exists c \in [t, b), \text{ 使得 } \frac{f(t) - f(b)}{g(t) - g(b)} = \frac{\partial f(c)}{\partial g(c)}.$$

3. 如果有实数  $l$  使得

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{\partial f(x)}{\partial g(x)} = l,$$

证明:

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = l,$$

**解答.** 1. 使用反证法: 如果有  $t \in (a, b)$  使得  $g(t) = g(b)$ , 那么根据微变零值定理, 存在  $c \in (t, b)$  使得  $\partial g(c) = 0$ , 矛盾!

2. 验证  $h(t) = h(b)$ :

$$\begin{aligned} h(t) &= f(t) - \frac{f(t) - f(b)}{g(t) - g(b)} \cdot g(t) \\ &= \frac{f(t) \cdot (g(t) - g(b)) - g(t) \cdot (f(t) - f(b))}{g(t) - g(b)} \\ &= \frac{f(t)g(t) - f(t)g(b) - g(t)f(t) + g(t)f(b)}{g(t) - g(b)} \\ &= \frac{f(b)g(t) - g(b)f(t)}{g(t) - g(b)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(b) &= f(b) - \frac{f(t) - f(b)}{g(t) - g(b)} \cdot g(b) \\ &= \frac{f(b) \cdot (g(t) - g(b)) - g(b) \cdot (f(t) - f(b))}{g(t) - g(b)} \\ &= \frac{f(b)g(t) - f(b)g(b) - g(b)f(t) + g(b)f(b)}{g(t) - g(b)} \\ &= \frac{f(b)g(t) - g(b)f(t)}{g(t) - g(b)} \end{aligned}$$

所以  $h(t) = h(b)$ 。

根据微变零值定理，存在  $c \in (t, b)$ ，使得  $\partial h(c) = 0$ ，因此：

$$\frac{f(t) - f(b)}{g(t) - g(b)} = \frac{\partial f(c)}{\partial g(c)}.$$

这里我们可以用  $\partial g(c)$  做分母，是因为第一问的结论保证了它不等于 0。

3. 按照定义，对任意实数  $r > 0$ ，存在  $d > 0$ ，使得只要  $x \in (b-d, b)$ ，就有

$$\left| \frac{\partial f(x)}{\partial g(x)} - l \right| < r.$$

而根据第二问，存在  $c \in (x, b)$ ，使得

$$\frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \frac{\partial f(c)}{\partial g(c)}.$$

$c \in (x, b)$ ，故  $c \in (b-d, b)$ ，于是

$$\left| \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} - l \right| = \left| \frac{\partial f(c)}{\partial g(c)} - l \right| < r.$$

这说明只要取  $x \in (b-d, b)$ ，就有

$$\left| \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} - l \right| < r.$$

也就是说，

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = l.$$

## 2.5 多次微变



## 第三章 研究函数

### 3.1 增减与极值

### 3.2 凹凸性质

### 3.3 局部性质

### 3.4 曲线的性质





## 第四章 平直空间

### 4.1 平直空间的基本性质

### 4.2 子空间与和空间

### 4.3 生成空间

### 4.4 基底和维数



## 第五章 连续函数的和

### 5.1 函数图像的面积

### 5.2 函数的定合

### 5.3 合函数



## 第六章 级数

### 6.1 正项级数

### 6.2 收敛与发散

### 6.3 函数的级数