

# 第四册

大青花鱼



# 目录

第一章 函数的级数	5
1.1 函数列 . . . . .	6
1.2 幂级数 . . . . .	9
1.3 收敛半径 . . . . .	9
第二章 连续函数的和	11
2.1 函数图像的面积 . . . . .	12
2.2 函数的定合 . . . . .	14
2.3 合函数 . . . . .	14
第三章 方程与空间	15
第四章 复数	17
附录 A 函数的级数	19



# 第一章 函数的级数

研究可微函数时，我们讨论过分析函数在某点附近的行为的问题。我们的研究方法是：把函数在该点附近表示成多项式的形式。换句话说，我们把函数表示成一系列简单函数的和。比如，指数函数在 0 附近可以写成：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

那么，我们能不能把  $e^x$  直接写成无穷多个简单函数的和呢？

为此，我们引入了级数的概念，并证明了级数  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$  绝对收敛。那么，这个收敛的极限是否等于  $e^x$  呢？进一步来说，我们能否用多项式函数  $\sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!}$  近似表示  $e^x$  呢？

## 加法结合律

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$$

进一步研究仍然要用到级数。级数除了可以用来研究数列的收敛性质，也可以用来研究函数的收敛性质。这也是级数方法更常见的应用。不过，在此之前，我们需要做一些准备工作，比如定义什么是函数的数列，什么叫函数的收敛，等等。

## 1.1 函数列

给定区间  $I$ , 我们把在  $I$  上有定义的实函数的集合记为  $\mathcal{A}_I(\mathbb{R})$ , 把其中连续函数的集合记为  $\mathcal{L}_I(\mathbb{R})$ , 其中  $k$  次可微的函数的集合记为  $\mathcal{W}_I^k(\mathbb{R})$ 。

定义函数列为可数个函数按顺序的排列。也就是说, 函数列和数列基本一样, 只不过数列的每一项是函数。比如一个由  $[0, 1]$  上的连续实函数组成的数列:

$$(x^2, x, 3x, 5x, \dots (2n+1)x, \dots)$$

它属于集合  $\mathcal{L}_{[0,1]}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ 。

接下来定义函数列的收敛。怎么判断一个函数是否接近另一个函数呢? 与数列不同, 函数列的收敛有多种定义。这里只介绍两种常用的定义。

**定义 1.1.1. 函数列逐点收敛** 设有定义在区间  $I$  上的函数列<sup>①</sup> $\{f_n\}$ 。如果有定义在  $I$  上的函数  $f$ , 使得对任意  $r > 0$ , 任意  $x \in I$ , 都有正整数  $N_x$ , 使得只要  $n > N_x$ , 就有:

$$|f_n(x) - f(x)| < r.$$

就说函数列  $\{f_n\}$  逐点收敛到函数  $f$ ,  $f$  是  $\{f_n\}$  的逐点极限。

**定义 1.1.2. 函数列一致收敛** 设有定义在区间  $I$  上的函数列<sup>②</sup> $\{f_n\}$ 。如果有定义在  $I$  上的函数  $f$ , 使得对任意  $r > 0$ , 都有正整数  $N$ , 使得只要  $n > N$ , 就有:

$$\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < r.$$

就说函数列  $\{f_n\}$  一致收敛到函数  $f$ ,  $f$  是  $\{f_n\}$  的一致极限。

逐点收敛是最“简单”的定义, 即一个一个点来看是否越来越接近。一致收敛则是从整体出发, 要求所有地方的值“同时”接近, 步调一致。对比两

<sup>①</sup>即“由定义在区间  $I$  上的函数构成的函数列”, 为了方便, 做一定省略。下同。

<sup>②</sup>即“由定义在区间  $I$  上的函数构成的函数列”, 为了方便, 做一定省略。下同。

种收敛方式，可以猜测：一致收敛的要求更高。逐点收敛时，对不同的  $x$ ，可以有不同的  $N_x$ ，而一致收敛要求步调一致。

**例子 1.1.1.** 考虑定义在  $[0, 1)$  上的函数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ，其通项为：

$$f_n : x \mapsto \frac{nx}{e^{nx}}.$$

对  $[0, 1)$  中任意  $x$ ，由于  $0 \leq x < 1$ ，而  $t$  趋于无穷大时， $e^t$  是  $t$  的高阶无穷大，因此，随着  $n$  增大， $nx$  趋于正无穷，从而  $\frac{nx}{e^{nx}}$  趋于 0。因此， $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  逐点收敛到  $[0, 1)$  上的零函数。

不过，对任意正整数  $n$ ，取  $x_n = \frac{1}{n}$ ，则

$$f_n(x_n) = \frac{1}{e}.$$

因此，只要  $0 < r < \frac{1}{e}$ ，无论  $n$  有多大，总有  $f_n(x) = \frac{1}{e} > r$ 。这说明函数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  并不一致收敛到零函数。

直观来看， $f_n$  的图像在靠近 0 时就会隆起，即便  $n$  越大时，隆起的部分越来越狭窄，但高度不变。因此，就一致收敛的要求来说， $f_n$  永远无法从整体上靠近零函数。

不过，容易证明：一致收敛的函数列，必然也逐点收敛。

那么，一致收敛相比逐点收敛有什么优点呢？来看下面的例子。

**例子 1.1.2.** 考虑定义在  $[-1, 1]$  上的函数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ，其通项为：

$$f_n : x \mapsto x^{\frac{1}{2n+1}}.$$

对  $0 < x < 1$ ， $x^{\frac{1}{2n+1}}$  随着  $n$  增大趋于 1。对  $-1 < x < 0$ ， $x^{\frac{1}{2n+1}}$  随着  $n$  增大趋于 -1。因此， $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  逐点收敛的极限是以下函数：

$$f x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{如果 } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{如果 } x = 0 \\ -1 & \text{如果 } x \in [-1, 0) \end{cases}$$

$f$  在 0 处不连续。

上面的例子中，函数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  中每一项都是连续乃至无穷可微的函数，但它们的极限是不连续的函数。

实际应用中，我们希望把复杂的函数用简单的函数近似，在简单的函数上证明我们想要的结果，然后通过函数列收敛，把想要的结果性质传递到原本的复杂的函数上去。但是，如果逐点收敛不能保持极限的连续性或可微性的话，那么很多性质也无法传递到极限  $f$  上去。

如果函数列一致收敛的话，我们可以证明（见附录）：

### 定理 1.1.1. 一致收敛保证极限

已知区间  $I$  上的函数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  一致收敛到  $f$ ，且函数列的每一项  $f_n$  都在区间的一端  $a$  点处<sup>③</sup>有极限  $u_n$ 。那么数列  $\{u_n\}$  收敛到某个数  $u$ ，且  $u$  是  $f$  在  $a$  处的极限。也就是说，在一定条件下，我们可以交换两种极限操作：

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

因此，连续函数的函数列如果一致收敛，极限也是连续函数。更进一步（证明见附录）：

**定理 1.1.2. 微变的一致极限** 已知函数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  中每一项都在区间  $I$  上可微，且微变函数连续。设函数列逐点收敛到函数  $f$ ，且函数列  $\{\partial f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  一致收敛到函数  $g$ ，那么  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  一致收敛到  $f$ ， $f$  在  $I$  上可微，且其微变函数  $\partial f = g$ 。

也就是说，在函数列收敛，且其微变函数一致收敛时，我们可以交换微变操作和函数列的极限操作：

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \partial f_n = \partial \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n.$$

---

<sup>③</sup>也可以是无穷远处。



## 1.2 幂级数

## 1.3 收敛半径



## 第二章 连续函数的和

小学的学习中，我们定义了有限个数的和。通过定义级数，我们学习了无穷多个数的求和。不过，正如我们所知，无穷也有可数与不可数之分。级数定义了可数多个数的求和。那么，是否能对不可数多个数求和呢？

举例来说，实数集是不可数集合，实数区间中的点也是不可数集合。给定定义在实数集或某个区间  $I$  上的实变函数  $f$ ，它将集合中每个点映射到函数值  $f(x)$ 。那么，能否对这些函数值求和呢？

这个问题比可数多个数的求和更为复杂，但在实际生活与生产中经常出现。比如，我们通常假设时间是连续变量，而评估各种物理作用的效果时，通常需要研究一段时间内作用的效果。例如，物体受的力在一定时间内的累计效果，称为冲量。它是物体导致速度变化的因素。设物体在  $t$  时刻受力为  $F(t)$ ，那么，一段时间  $[t_1, t_2]$  上的冲量就是函数  $F(t)$  在  $[t_1, t_2]$  的累积。

另一个例子是带电物体的电荷累计。我们假设物体表面每个点上的电荷是连续分布的，一点  $P$  上的电荷密度是  $g(P)$ 。那么，物体表面的总电荷就是表面所有点上电荷密度的累积。

因此，我们有必要定义函数在区间、平面区域乃至更复杂的形体上的求和。良好的定义并不是显而易见的。为这类求和给出符合实际生产生活中的需要的定义，是一门深奥的学问。在当前阶段，我们只给出简要的介绍，研究特定情形下的求和工具，不作更深入的探索。

## 2.1 函数图像的面积

首先来看一个物理学中的例子。设物体受到方向恒定, 大小随时间  $t$  变化的力  $F(t)$ 。定义  $F(t)$  在一段时间内的累积效果为冲量  $I$ 。如果设物体刚受力时的冲量  $I(0) = 0$ , 那么有定律:

$$I(t) - I(0) = m(v(t) - v(0)).$$

其中  $v$  是物体的在受力方向上的速率。为了计算速率的改变量, 我们希望计算  $I(t)$ , 也就是  $F(t)$  的“和”。

以时间为横轴, 画出函数  $F$  的图像。如果  $F$  的大小也是恒定的, 那么可以发现,  $F$  在一段时间  $[t_1, t_2]$  内的“总和”就是  $F \cdot (t_2 - t_1)$ 。从图像来看, 函数图像是水平的线段,  $F(t)$  的“和”就是函数图像与  $x$  轴之间的矩形的面积。

如果物体受力大小不恒定, 但分段恒定, 于是函数图像可以看作若干段水平线段。于是, 按分段求多个矩形的面积, 然后求和, 就得到  $I$  的改变量。

然而, 更常见的情况是:  $F$  的大小随时间不断改变。这时候, 我们如何求  $F$  的“和”呢?

需要知道的是, 对一般的函数  $F$ , 我们并不能很好地定义  $I$  的改变量。不过, 对于物理学中常见的模型以及当前我们接触的简单形状来说, 可以用比较简单的方法, 定义“函数曲线的面积”。

具体来说,  $F$  恒定或分段恒定的情形下, 我们计算矩形的面积。从这个方法出发, 对一般的函数  $F$ , 我们也希望用一系列的矩形来近似表示“函数曲线的面积”。

### 定义 2.1.1. 区间的分割

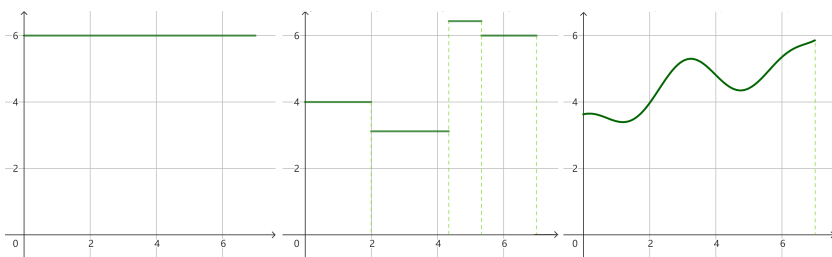
给定闭区间  $I = [a, b]$  及一系列从小到大排列的数  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} <$

$x_n = b$ 。则把区间  $I$  分成  $n$  个子区间  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ , 就是这一列数对区间的分割。我们用数列  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  表示这个分割。

如果区间的分割有  $n$  个子区间, 就说它是区间的  **$n$  阶分割**。如果区间的分割使得所有子区间长度都不超过某个数  $d$ , 就说它是区间的  **$d$ -分割**。

给定区间  $I$  上的函数  $f$  和区间  $I$  的分割, 如果  $f$  在分割的每个子区间上都是常函数, 就说  $f$  是**分段常函数**, 也叫**阶梯函数**。

举例来说,



左一、左二是阶梯函数, 右一不是阶梯函数

**定义 2.1.2. 阶梯函数的积合** 设有定义在闭区间  $I = [a, b]$  上的阶梯函数  $f$ , 对应分割  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ 。设  $f$  在子区间  $[x_i, x_{i+1}]$  的函数值为  $c_i$ , 则  $f$  在区间  $I$  上的**积合**定义为:

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i (x_{i+1} - x_i).$$

$f$  在区间  $I$  的积合记为

$$\int_I f(x) dx \quad \text{或} \quad \int_a^b f(x) dx$$

直观上看, 把阶梯函数到  $x$  轴之间的部分看作一系列左右并排的矩形, 阶梯函数的积合就是矩形面积的和。

对一般的函数来说,是否能定义积合呢?我们采用逼近的思想。给定区间  $I$  上的函数  $f$ ,我们可以找与  $f$  的曲线类似的阶梯函数。用这样的阶梯函数的积合,来近似定义  $f$  的函数曲线的面积。如果随着阶梯函数与  $f$  “越来越像”,它的积合趋于一个固定的极限值,那么,我们可以定义这个极限为  $f$  的函数曲线的面积。

#### 思考 2.1.1.

1. 对比函数的积合与微变,它们有哪些类似之处? 有哪些不同之处?
2. 函数关于区间分割的取样和,与关于函数微变哪个定理有相似之处? 你有什么想法?
3. 使用上下相叠的矩形来定义积合,需要注意哪些问题?
4. 如果函数在区间  $[a, b]$  上某点无定义,是否还能定义它在区间上的积合? 要注意哪些问题?

## 2.2 函数的定合

## 2.3 合函数

## 第三章 方程与空间





## 第四章 复数



## 附录 A 函数的级数

**定理 1.0.1. 一致收敛保证极限** 已知区间  $I$  上的函数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  一致收敛到  $f$ ，且函数列的每一项  $f_n$  都在区间的一端  $a$  点处<sup>①</sup>有极限  $u_n$ 。那么数列  $\{u_n\}$  收敛到某个数  $u$ ，且  $u$  是  $f$  在  $a$  处的极限。

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

**定理 1.0.2. 一致收敛传递连续性** 连续函数的函数列如果一致收敛，极限也是连续函数。

更进一步有：

**定理 1.0.3.** 如果函数  $f$  在区间  $I$  上可微，且微变函数在  $I$  上连续，就说  $f$  在  $I$  上一阶光滑或连续可微。如果  $f$  的前  $k$  次微变都在  $I$  上一阶光滑，就说  $f$  在  $I$  上  $k$  阶光滑或  $k$  阶连续可微。如果对任意正整数  $k$ ， $f$  在  $I$  上  $k$  阶光滑，就说  $f$  在  $I$  上光滑。

已知函数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  中每一项都在区间  $I$  上可微，且微变函数连续。设函数列逐点收敛到函数  $f$ ，且函数列  $\{\partial f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  一致收敛到函数  $g$ ，那么  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  一致收敛到  $f$ ， $f$  在  $I$  上可微，且其微变函数  $\partial f = g$ 。

也就是说，在一定条件下，我们可以交换微变、极限和函数列的极限操作：

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \partial f_n = \partial \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n.$$

---

<sup>①</sup>也可以是无穷远处。

如果函数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  中每一项都在区间  $I$  上  $k$  阶连续可微, 简单收敛到某个函数  $f$ , 并且

1. 对任意  $1 \leq i < k$ , 函数列  $\{\partial^i f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  简单收敛到函数  $g_i$ ;
2. 对任意闭区间  $B \subseteq I$ , 函数列  $\{\partial^k f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  在  $B$  上一致收敛到函数  $g_k$ 。

那么  $f$  在  $I$  上  $k$  阶连续可微, 且其前  $k$  阶微变函数为  $\partial^i f = g_i$  ( $1 \leq i \leq k$ )。此外,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  在  $I$  中任意闭区间一致收敛到  $f$ 。