DevSkill - Competitive Programming - Beginner

Class 10-12 - Number Theory (1-3)

Instructor : Md Sadman Sakib

Prime Numbers

একটা সংখ্যাকে আমরা তখনই মৌলিক সংখ্যা বলি, যখন এর কেবলমাত্র ১ এবং ওই সংখ্যা ছাড়া আর কোনো বিভাজক (divisor) থাকে না। যেমনঃ

২,৩,৫,৭,১৩,১৯ ইত্যাদি।

Primality Testing

একটি সংখ্যা প্রাইম নাম্বার কি না তা বের করার কিছু এলগোরিদিম (Inefficient থেকে efficient এই অর্ডারে সাজানো)

- ২ থেকে sqrt(N) পর্যন্ত চেক করা
- সিভ অব এরাটস্থ্যানিজ (বিশেষ উপযোগী যখন একটা রেঞ্জ এর মধ্যে অনেকগুলো নাম্বারের ব্যাপারে কোয়েরি করা হয়)
- Miller Rabin Primality Test (এটা একটা প্রোবাবিলিস্টিক এলগোরিদিম! যখন N>10^16 এর ও বেশি হয়,তখন উপরের দুইটি মেথডই Fail করে। তখন এটি ব্যবহার করা হয়)

Different kinds of Sieve

- Sieve for finding out **number of divisors**.
- Sieve for finding out **sum of divisors**.
- Sieve for finding out **divisors list (in sorted order!) of a number**.

... and many more!

Different kinds of Sieve (Code)

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

int number_of_divisors[1000000];
int sum_of_divisors[1000000];
vector<int>divisor_list[1000000];

void sieve_all(int N)
{
    for(int i=1; i<=N; i++)
    {
        for(int j=i; j<=N; j+=i)
        {
            number_of_divisors[j]++;
            sum_of_divisors[j]+=i;
            divisor_list[j].push_back(i);
        }
    }
}

int main()
{
    sieve_all(100); /// runs sieve for numbers up to N.

    return 0;
}
```

Modular Arithmetic

Rules!

- (a+b)%M = ((a%M)+(b%M))%M
- (a-b)%M = ((a%M)-(b%M)+M)%M
- (a*b)%M = ((a%M)*(b%M))%M
- (a/b)%M = ((a%M)*(pow(b,M-2)%M))%M ===> **Here, M must be a PRIME NUMBER**

Modular Exponentiation

The obvious Recursion is :

$$x^n = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 0 \\ \frac{1}{x}^{-n}, & \text{if } n < 0 \\ x \cdot \left(x^{\frac{n-1}{2}}\right)^2, & \text{if } n \text{ is odd} \\ \left(x^{\frac{n}{2}}\right)^2, & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$$

Number of Divisors for a single number (Efficient)

- We will use the idea of Prime Factorization
- The formula goes below :

Let the prime factorization of n be:

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$$

$$No.of\ divisors = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ \ldots (\alpha_k + 1)$$

Sum of Divisors for a single number (Efficient)

The formula goes below :

$$n = {p_1}^{e_1} * {p_2}^{e_2} * \cdots * {p_k}^{e_k}$$

$$\sigma(n) = \frac{{p_1}^{e_1+1} - 1}{p_1 - 1} * \frac{{p_2}^{e_2+1} - 1}{p_2 - 1} * \cdots * \frac{{p_k}^{e_k+1} - 1}{p_k - 1}$$