

Automatic Control

Speed Control of a DC Motor



Grupo nr.: 095

099961: Inês Paiva

100026: Madalena Barros

100029: Teresa Nogueira

Junho 26, 2022

2 — System Modelling

2.1.: Simplified Dynamic model of the DC motor

Por análise direta do circuito sabemos que $v(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + e(t)$, ainda $i(t) = \frac{v(t)-e(t)}{R}$ para $R \gg L$ onde $e(t) = K_e\omega(t)$ é a *back-emf voltage*.

Partindo então da equação de *angular motion of the motor shaft* para determinar o modelo simplificado do motor na forma $G(s) = \frac{\Omega(s)}{V(s)} = K_0 \frac{a}{s+a}$ temos:

$$\mathcal{L}\{J\omega'(t) = -\beta\omega(t) + n(t)\} \Leftrightarrow s\Omega(s)J = -\beta\Omega(s) + K_n I(s)^1 \Leftrightarrow \Omega(s)[sJ + \beta] = K_n I(s) \Leftrightarrow \frac{\Omega(s)}{I(s)} = \frac{K_n}{sJ + \beta}$$

Como $\mathcal{L}\{i(t) = \frac{v(t)-e(t)}{R}\} = I(s) = \frac{V(s)-K_e\Omega(s)}{R}$ temos novamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{J\omega'(t) = -\beta\omega(t) + n(t)\} &\Leftrightarrow s\Omega(s)J = -\beta\Omega(s) + K_n \left[\frac{V(s) - K_e\Omega(s)}{R} \right] \Leftrightarrow \\ \Omega(s)[sJ + \beta + \frac{K_n K_e}{R}] &= K_n V(s) \Leftrightarrow \frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{K_n}{sJ + \beta + \frac{K_n K_e}{R}} \rightarrow \frac{K_n}{J} \frac{1}{s + \frac{1}{J}[\beta + \frac{K_n K_e}{R}]} \end{aligned}$$

Logo $a = \frac{\beta + \frac{K_n K_e}{R}}{J}$ e $K_0 = \frac{K_n}{\beta + \frac{K_n K_e}{R}}$ como desejávamos comprovar.

□

3 — System Identification

3.1.: Step Response in Time Domain

Step $\rightarrow \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$, a resposta ao degrau unitário será então:

$$G(s)U(s) \rightarrow K_0 \frac{a}{s(s+a)} \rightarrow K_0 \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right]$$

Por aplicação da inversa de Laplace temos:

$$\mathcal{L}\{K_0 \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right]\} \rightarrow K_0(1 - e^{-at}) \rightarrow \omega(t)$$

Como pretendíamos demonstrar.

De forma a determinar K_0 e a podemos usar a proposta subentendida no enunciado da pergunta:

Para K_0 mede-se o valor da resposta ao degrau para $t \rightarrow \inf$, para qual a resposta estabiliza, basta então retirar o valor da amplitude obtida em *steady state* quando as curvas simuladas e reais se sobrepõem:

$$\omega(t \rightarrow \infty) = K_0(1 - \frac{1}{\infty}) = K_0$$

Para determinar a podemos fazer inferência semelhante, mede-se o valor da resposta ao degrau para $t \rightarrow \frac{1}{a}$, já que assim teremos:

$$\omega(t = \frac{1}{a}) \rightarrow K_0(1 - e^{-\frac{a}{a}}) = K_0(1 - e^{-1}) \approx 0.632K_0$$

Devemos procurar o valor da amplitude $0,632K_0$ de forma a obter a constante de tempo $\frac{1}{a}$ e por conseguinte a , somente quando verificarmos sobreposição do declive transitório da curva simulada e da real antes do *steady state*.

¹Por aplicação direta das propriedades de linearidade e diferenciação.

3.2.: Asymptotic Bode diagram for G(s)

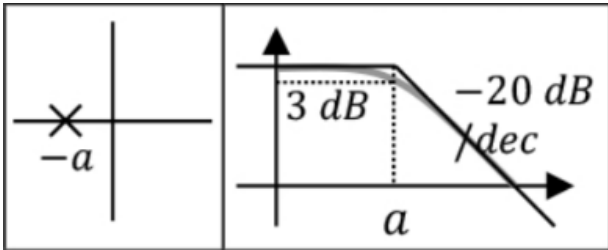


figura 1: Assíntotas do gráfico de Bode

Analisando a disposição e tipo de função de transferência suportada por G(s) facilmente chegamos ao esquema obtido na figura 1 (exibe um comportamento semelhante a um filtro passa-baixo).

K_0 será obtido para as baixas frequências já que, verificando o limite para $s \rightarrow 0$, nomeadamente $G(0)$, obtemos:

$$G(0) = K_0 \frac{a}{a + 0} = K_0$$

Quanto ao outro parâmetro é expectável verificar uma queda de 3dB's para $\omega = a$ a partir da qual se verifica uma queda constante de 20dB's. É então possível determinar a procurando a tal queda de 3dB's e o respetivo *break point* $\omega = a$.

Em contexto real, para determinar o *bode plot*, é necessário inserir um conjunto de frequências sucessivamente maiores e verificar a amplitude da resposta no domínio do tempo, posteriormente converter para decibéis e realizar a regressão do gráfico, tal como veremos no ponto 3.5

3.3.: K_0 and a values Time Domain

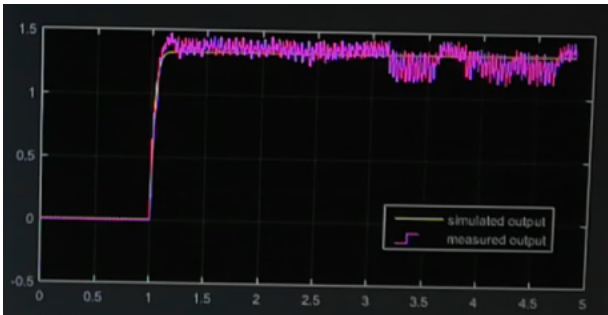


figura 2: Resposta do sistema ao degrau unitário.

Utilizando o método de comparação direta entre a resposta simulada e a real do sistema, foi possível obter os valores $K_O = 1.33$ e $a = 35$. É importante evidenciar a instabilidade da resposta real, gerada pelo ruído nos sensores e outras perturbações alheias que afetam as medições efetuadas (nomeadamente movimentos bruscos dos utilizadores flutuações de temperatura, etc).

3.4. & 3.5: K_0 and a values Frequency Domain

	Frequency (Hz)	Amplitude (V)	gain(dB)
1	2.126	1.302	2.292
2	6.048	1.286	2.185
3	17.83	1.122	1.000
4	25.55	1.008	0.069
5	40.8	0.91	-0.819
6	61.77	0.746	-2.545
7	78.06	0.648	-3.768
8	101.8	0.566	-4.944
9	129.8	0.45	-6.936
10	148.6	0.402	-7.915
11	171.6	0.384	-8.313

tabela 1: Resultados da resposta em frequência.

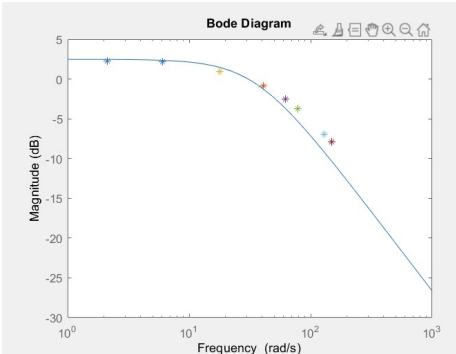


figura 3: Modelo do diagrama de bode com sobreposição de 8 dos pontos retirados.

Supondo agora uma comparação entre valores deduzidos, iremos escolher o valor da primeira frequência escolhida para o cálculo K_0 uma vez que, tal como já anteriormente referido $G(0) = K_0$ e esta é a que mais se sobrepõe à assintota da banda de passagem:

$$G(2.126 \cdot 2\pi) = 2.292\text{dB's} \rightarrow 10^{\frac{1.302}{-20}} \approx 1.3$$

Que é próximo do determinado anteriormente por observação da resposta do sistema ao degrau unitário.

Por observação da curva para altas frequências traçada pelos pontos experimentais, verificamos um atraso em relação à curva teórica, o que nos leva a acreditar que o valor medido para a seja ligeiramente maior, considerando o patamar da resposta em frequência de amplitude o valor utilizado anteriormente (nomeadamente 2.292dB's), a frequência de corte será o valor da frequência para o qual a magnitude a função de transferência do sistema se encontra 3dB's abaixo do patamar, observando os pontos retirados, vemos que isso acontece para a frequência cuja magnitude é ≈ -0.7 que se verifica para o ponto 5 e tendo em conta a natureza do intervalo de frequências utilizado $[a/10, 5a] = [3.5, 175]$ admitimos que $a \approx 40$ o que garante um erro absoluto de $\frac{|35-40|}{40} \cdot 100 = 12.5\%$

Analogamente ao já mencionado para os resultados obtidos no domínio do tempo, o facto de haver ruído e perturbações que afetam as medidas faz com que seja difícil obter valores idênticos para K_0 e a aos já obtidos anteriormente, por outro lado estamos a realizar uma aproximação grosseira do sistema a uma função de 1º ordem com somente um pólo o que com certeza gerará discrepâncias entre o modelo gerado e o modelo proposto teoricamente.

Utilizaremos os valores deduzidos na alínea 4.3 para realizar a restante discussão do sistema.

4 — Loop Shaping Control Design

4.1.: Loop Shaping Design

Seja $K(s) = \frac{K_1}{s} \cdot \frac{s+z}{z}$ com $K_1, z \in \mathbb{R}^+$ o controlador a ser desenhado (controlador de ação proporcional integral e derivativa) e $G(s)$ o sistema já anteriormente discutido, pretendemos cumprir os requisitos infra:

i) Zero steady-state error

Dada a natureza do controlador, o steady state error será sempre 0 graças à ação do integrador, mas, para efeitos de prova empírica iremos analisar a função de transferência em cadeia fechada e verificar o limite para $s \rightarrow 0$:

$$T(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{\frac{k_0 k_1}{s} \frac{s+z}{z} \frac{a}{s+a}}{1 + \frac{K_0 K_1}{s} \frac{s+z}{z} \frac{a}{s+a}} = \frac{K_0 K_1 \frac{s+z}{z} \frac{a}{s+a}}{s + K_0 K_1 \frac{s+z}{z} \frac{a}{s+a}}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} T(s) = \frac{K_0 K_1}{K_0 K_1} = 1$$

Sabemos ainda que $T(s) = \frac{\Omega(s)}{R(s)}$, logo, se $T(0) = 1$ o ganho DC (steady state gain) da função de transferência em cadeia fechada será 1, tal indica que seguirá qualquer referência de forma perfeita, terá então erro estático nulo.

ii) Positive Gain Margin greater or equal to 20dB

Dada a natureza do controlador e do sistema em análise e consequentemente da função de transferência, é expectável que a margem de ganho tenda para o infinito. Invocando o critério de Routh–Hurwitz podemos fazer a seguinte dedução:

Seja $L(s) = \frac{a K_1 K_0}{z} \cdot \frac{s+z}{s+a} = K \cdot \frac{s+z}{s+a}$ a função de transferência em cadeia aberta é então esperado que o polinómio característico da função de transferência em cadeia fechada tome a forma $s^2 + (a + K)s + zK$. Por

outro lado, sabemos que $z, a > 0$ e por isso preenchemos o critério de Routh–Hurwitz e o sistema é estável para qualquer $K > 0$, o ganho de margem será então sempre infinito, para quaisquer valores de z e K_1 .

iii) Phase Margin greater or equal to 80dB and $|K(j\omega)G(j\omega)|dB < -10dB$ for $\omega > 10a$

Ambos estes requisitos interagem diretamente com o ganho e com a posição de z (o nosso zero), é portanto importante evidenciar algumas características do sistema que explicitam o seu comportamento:

O sistema em análise tem uma função de transferência em cadeia fechada que, de uma forma geral, segue o seguinte modelo:

$$T_a(s) = \frac{(\frac{1}{z}s + 1)\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1)$$

Separando a expressão supra em dois termos obtemos:

$$T_a(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{1}{z}s \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = T(s) + \frac{1}{z}sT(s)^2 \quad (2)$$

Subsequentemente aplicamos um degrau unitário à decomposição obtida:

$$\Omega_a(s) = T_a(s)\frac{1}{s} = (T(s) + \frac{1}{z}sT(s))\frac{1}{s} = \Omega(s) + \frac{1}{z}s\Omega(s) \quad (3)$$

Por fim recorremos à inversa de Laplace:

$$\omega_a(t) = \omega(t) + \frac{1}{z}\dot{\omega}(t) \quad (4)$$

A resposta do sistema é portanto dotada de uma componente derivativa, que desaparece à medida que z aumenta (notar o escalamento da componente por $\frac{1}{z}$). Será também importante referir que quanto mais à esquerda z se encontrar, menor serão o peak time e o rise time (aspeto corroborado pelas imagens abaixo) e consequentemente maior overshoot (como se verificará a seguir) e a resposta será portanto mais rápida, o mesmo podemos dizer do ganho.

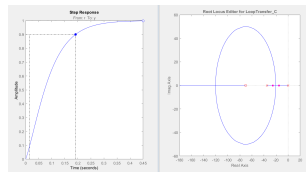


figura 1: $z = 70$, rise time = 0.175 para um ganho mínimo ($K \approx 5$)

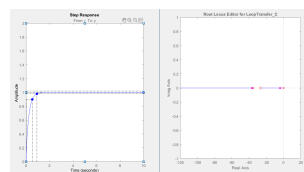


figura 2: $z = 27$, rise time = 0.552 para um ganho mínimo ($K \approx 5$)

Iremos agora observar dois casos diferentes, a partir dos quais conseguiremos deduzir a influência de k_1 e z na resposta do sistema:

Analisaremos primeiramente o modelo de controlador que cumpre todos os requisitos pedidos, $k_1 = 11.51$ e $z = 46.17$:

$$T(s)_{cadeiafechada} = \frac{11.51s + 531.6}{s^2 + 46.51s + 531.6}$$

$$\Omega_a(s) = \Omega(s) + \frac{1}{z}s\Omega(s) \Leftrightarrow \frac{531.6}{s(s + 26.287)(s + 20.223)} + \frac{11.51s}{s(s + 26.287)(s + 20.223)}$$

$$\mathcal{L}\{\Omega_a(s)\}^{-1} = 1 + \underbrace{3.33e^{-26.287t} - 4.33e^{-20.223t}}_{\omega(t)} \underbrace{1.898e^{-26.287t} + 1.898e^{-20.223t}}_{\frac{1}{z}\dot{\omega}(t)}$$

²Onde $T(s)$ seria a função de transferência em cadeia fechada sem 0, o mesmo se pode dizer para as restantes nomenclaturas que seguem a mesma lógica

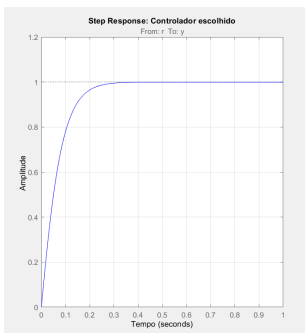


figura 4: Resposta do sistema ao degrau gerada no controlSystemDesigner, overshoot = 0%, peak time > 0.35

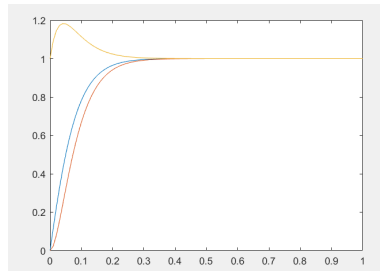


figura 5: Resposta do sistema deduzida, nomeadamente, $\omega_a(t)$ a azul, $\omega(t)$, a vermelho e $\dot{\omega}(t)$ a amarelo.

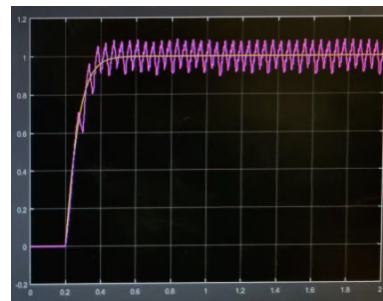


figura 6: Resposta do sistema real, notar a semelhança entre as duas simulações anteriores e esta, consideramos a média do ruído nula (ruído deve-se à instabilidade inerente ao sistema real), para efeitos de aproximação.

Analisando a figura 5, facilmente verificamos que, para sistemas de polos reais negativos (onde seria esperado $\zeta > 1 \rightarrow$ critério este que anula a existência de overshoot (sistema sobreamortecido)), a tal componente derivativa é responsável pela aceleração do sistema e consequentemente pelo pequeno offset inicial (overshoot) para ganhos elevados. Fixando o zero denotamos que a posição dos pólos³ é dependente do ganho da seguinte forma:

$$P_1 = \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad P_2 = \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Onde $\omega_n = \sqrt{kz}$ e $\zeta = \frac{a+k}{2\sqrt{kz}}$ tornando-se P_2 pólo dominante para ganhos elevados, principal responsável pela existência de overshoot (verificamos, no entanto que quanto maior o desfazamento entre pólos, ou seja maior o ganho, menor é o overshoot, graças à característica da resposta no domínio do tempo), tal é corroborado pelo segundo exemplo:

$$\mathcal{L}\{\Omega_a(s)\}^{-1} = \underbrace{14.93e^{-71.236t} - 15.93e^{-66.76t}}_{\omega(t)} \underbrace{-23.03e^{-71.236t} + 23.03e^{-66.76t}}_{\frac{1}{z}\dot{\omega}(t)}$$

Neste caso a resposta é mais veloz graças ao efeito de $\frac{1}{z}\dot{\omega}(t)$ (que por sinal também é mais veloz, graças à parcela $-23.03e^{-71.236t}$) mas como tradeoff a resposta é influenciada pelo offset da derivada e a resposta possui overshoot:

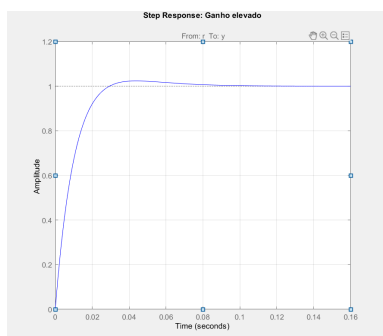


figura 7: Resposta do sistema ao degrau gerada no controlSystemDesigner \rightarrow overshoot = 2.37% peak time = 0.0437

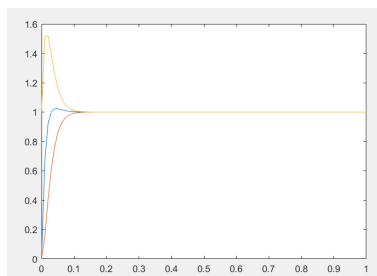


figura 8: Resposta do sistema deduzida, nomeadamente, $\omega_a(t)$ a azul, $\omega(t)$, a vermelho e $\dot{\omega}(t)$ a amarelo.



figura 9: Resposta do sistema real, notar a semelhança entre as duas respostas anteriores e esta, novamente, consideramos a média do ruído nula, para efeitos de aproximação.

De notar o overshoot fruto da soma da componente derivativa (a amarelo) tal como explicado anteriormente. Ainda, deveremos prestar atenção à correlação entre o peak time e o ganho, de uma forma geral, é esperado que quanto maior o ganho menor será o peak time, o que é expectável pelo já discutido supra, o aumento

³Apresentamos apenas a análise para polos reais, já que para pares conjugados obteremos inevitavelmente overshoot, característica esta não pretendida, no entanto é do interesse mencionar que quanto maior for o zero, maior será a circunferência de polos imaginários conjugados e consequentemente, maior será o pico máximo de overshoot.

do zero torna o sistema mais veloz e produz overshoot para quando $P2 > z$, consequentemente o aumento K^4 (e por sua vez K_1) produz os mesmos resultados.

De uma forma sintética temos:

O aumento de z faz com que a resposta do sistema se torne mais rápida (peak time e rise time menor), mas para ganhos elevados o polo dominante provoca overshoot graças à componente derivativa da resposta (especialmente para $z > a$). Por sua vez o aumento do ganho (k_1) torna também a resposta mais rápida; dependendo da posição do zero provocará overshoot com tendência a diminuir para ganhos elevados.

Para compreender o efeito de K_1 e z na limitação de energia do sinal atuador do sistema convém compreender a sua necessidade:

4.2.: Constraint to the Actuating Signal

O requisito iv) é trivialmente explicado pela relação infra aplicada ao sinal atuador:

$$\int_0^\infty \Phi_R(\omega) \left| \frac{U(j\omega)}{R(j\omega)} \right|^2 d\omega$$

Admitimos que $\left| \frac{U(j\omega)}{R(j\omega)} \right| = \left| \frac{K(j\omega)G(j\omega)}{1+K(j\omega)G(j\omega)} \frac{1}{G(j\omega)} \right|$ e para efeitos de demonstração iremos supor que $G(s) = \frac{a}{s+a}$, para o qual $G(j10a) = -20dB$, logo $\frac{1}{G(j\omega a)}$ é um valor astronómico. Será então necessário que $K(j\omega)G(j\omega) \approx 0$ para que tenhamos um escalamento de $K(j\omega)G(j\omega)$ para $\frac{1}{G(j\omega a)}$ (segundo este raciocínio, o denominador da expressão será aproximadamente 1).

Ao restringir a magnitude de $K(j\omega)G(j\omega)$ a -10dB's para $\omega > a\omega$ estaremos a aplicar um baixo escalamento a $G(j\omega)^{-1}$ e subsequentemente a limitar a energia do sinal atuador para as altas frequências, o que é eficiente, dado que $G(s)$ se comporta como um filtro passa baixo, não terá elevado output para frequências elevadas.⁵

Assim, tomando em consideração o supra indicado e sabendo que $G(s)$ possui valores fixos, a energia do sinal atuador está somente dependente de $K(s)$ e consequentemente de K_1 e z . Onde $|K(s)| = \frac{K_1}{z} \left| \sqrt{1 - z^2/\omega^2} \right|$. Admitimos, que para um K_1 fixo, o aumento de zero aumenta por sua vez a largura da queda de maior declive entre pólo e zero, restringindo assim a energia do sinal atuador (Para $\omega > \omega_a$ a amplitude torna-se cada vez mais pequena). Para um z fixo, graças à natureza da expressão anterior, o principal atuador na determinação da energia é K_1 , facto este corroborado pelos exemplos já anteriormente testados (agora com o sinal atuador). Inspeccionando o exemplo de ganho elevado verificamos que a resposta tem um elevado overshoot (é mais energética), em contrapartida tal não se verifica para o modelo escolhido, ainda, tomando um outro exemplo com zero mínimo, verificamos que a resposta é semelhante ao predileto modelo:

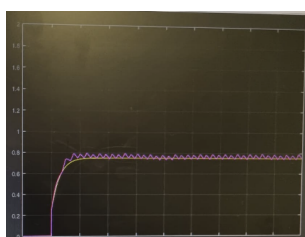


figura 10: resposta do sinal atuador com os parâmetros escolhidos

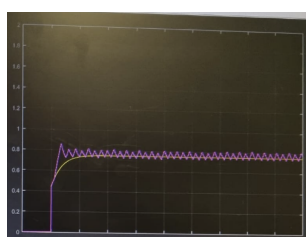


figura 11: resposta do sinal atuador com $z = 29$, de se fazer notar a semelhança para com a figura anterior

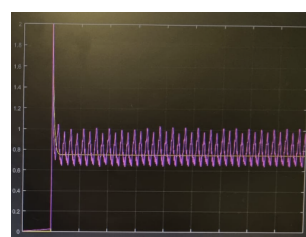


figura 12: resposta do sinal atuador com o ganho elevado, de se fazer notar o overshoot gigantesco

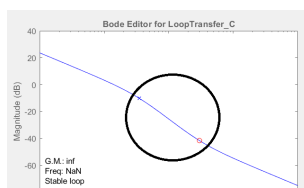


figura 10: declive acentuado entre zero e pólo elevado para um mesmo ganho

⁴Consideramos que $K = \frac{aK_0K_1}{z}$

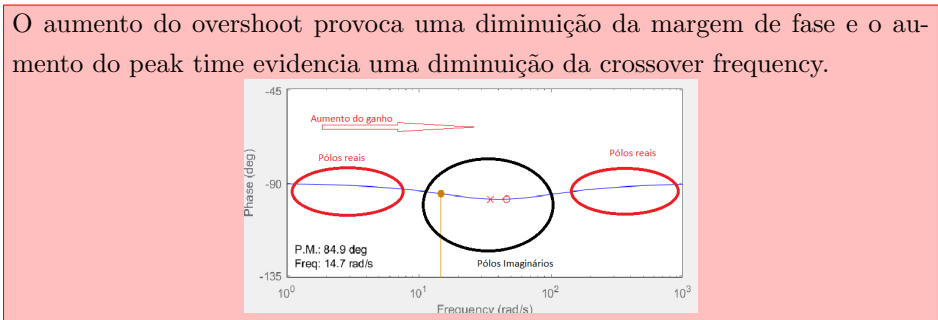
De forma sintética temos:

Para um z fixo, o principal influenciador da energia do sinal atuador é o parâmetro K_1 do controlador, quanto maior for a magnitude de $\frac{U(s)}{R(s)}$ (K_1) conseqüentemente maior será a energia do sinal para as altas frequências. Para um K_1 fixo o aumento de zero aumenta a largura da queda de maior declive entre pólo e zero, restringindo a energia do sinal atuador.

Por fim falta-nos evidenciar a correlação entre peak time e crossover frequency e ainda margem de fase e o overshoot, para tal iremos realizar uma análise direta das simulações obtidas através do ControlSystemDesigner (supomos os mesmo exemplos abordados anteriormente):

Dada a natureza do diagrama de fase do sistema (e do controlador escolhido) é esperado que a margem de fase mínima seja por volta do -40dB's e que sature para os dois extremos das frequências a -90dB's. Por visualização admitimos que a margem de fase se encontra perto de -90dB's para ganhos baixos (pólos reais), à medida que o ganho aumenta (para pólos imaginários conjugados) a margem de fase diminui e para ganhos elevados (pólos reais) satura novamente em -90dB's. Tendo em conta o analisado acima é então possível admitir que o aumento do overshoot faz diminuir a margem de fase, o expectável já que a existência de overshoot é um aviso de instabilidade para a qual a margem de fase tende para -180° (segue a tendência do overshoot). Por outro lado, tendo em conta que o aumento do ganho provoca um aumento na crossover frequency e diminuição do peak time, podemos admitir que têm uma relação inversamente proporcional.

De forma sintética temos:



4.3.: Time delay Interval

De um modo geral, supomos a seguinte expressão para o cálculo do atraso máximo sustido por um dado sistema:

$$\tau_{max} = \frac{PM}{\omega_x}$$

Considerando o controlador escolhido, e reconhecendo que o intervalo terá de invariavelmente começar em 0, podemos admitir que $\Delta\tau = \left[0, \frac{PM}{\omega_x}\right] = \left[0, \frac{84.9\pi}{14.7 \cdot 180}\right] = [0, 0.1008]$.

E porque é que este parâmetro é importante? A maioria, senão todos os sistemas dinâmicos possuem algum atraso inerente e o controlador a ser fabricado deverá ter em consideração tal realidade, de modo a evitar a instabilidade.

Iremos agora simular a resposta para vários instantes de time delay:

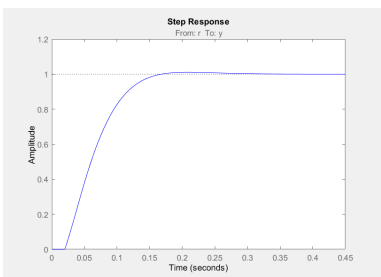


figura 13: resposta do sistema com delay de 0.02, de notar a ligeira sobrelevação. PM ≈ 68

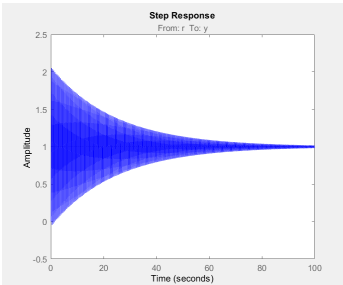


figura 14: resposta do sistema com delay de 0.1, de notar o caráter oscilatório do sinal. PM ≈ 0.5

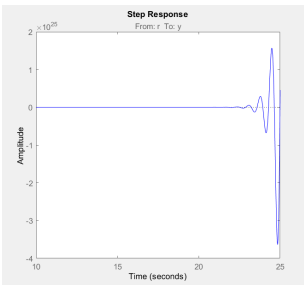


figura 15: resposta do sistema com delay de 0.2, PM ≈ -14, instável

⁵Por analogia, seria o mesmo que abastecer um veículo de gasolina, quando este é a gasóleo.

Na figura 15, verificamos que a resposta do sistema é instável. Tal pode ser comprovado com o diagrama de Nyquist apresentado na figura 16. Sabemos que dentro do contorno de Nyquist existem dois zeros e nenhum polo, $Z=2$ e $P=0$. Assim, para o sistema ser estável, ou seja, $N=Z-P$, seria necessário o diagrama de Nyquist dar duas voltas em torno de -1. Como podemos observar diretamente da figura 16, tal não ocorre, uma vez que não existe nenhuma volta em torno de -1, logo $N=0$. Podemos concluir que $N \neq Z-P$, logo o sistema é instável.

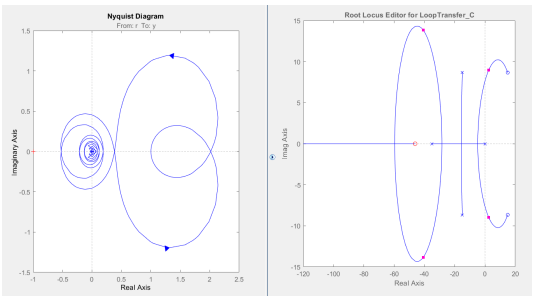


figura 16: Root Locus e Diagrama de Nyquist do sistema instável da figura 15.

Corroboramos o resultado obtido em simulação com o real, o sistema tolera o atraso de 0.02:

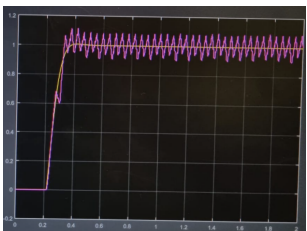


figura 17: Resposta com controlador escolhido

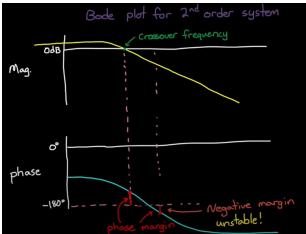


figura 18: Efeitos do atraso na margem de fase

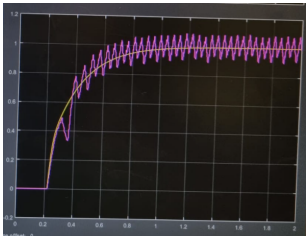


figura 19: Resposta com z pequeno

Na figura 17: resposta do sistema real com delay de 0.02, de notar a ligeira sobrelevação já esperada, bem como o ruído na zona de subida da resposta, fruto das instabilidades associadas ao trabalho com sistemas reais (que porventura são inflacionadas com a degradação dos materiais).

Bata-nos apenas explicar o trade-off entre as características do controlador e a tolerância aos atrasos:

Ao adicionar delay ao sistema, provocaremos uma descida do diagrama de fase que por sua vez provocará uma diminuição da margem de fase (facto verificado nas figuras 13, 14, 15), ao adicionar delay suficiente PM torna-se negativa e consequentemente o sistema é instável (figura 15). De forma a combater esta situação podemos diminuir a largura de banda do controlador ao diminuir z que consequentemente aumentará a nossa margem de fase, no entanto, tal ação torna o sistema mais lento (como já analisado em pontos anteriores) e menos recetivo ao input, facto este corroborado pela figura 19, para um $z = 14$. (Neste caso aumentar o ganho torna a resposta mais oscilatória). O raciocínio descrito é desenhado na figura 18.

De forma sintética temos:

Maior tolerância ao atraso diminui a largura de banda do controlador o que por sua vez torna o sistema mais lento e menos recetivo à entrada.