Под погрешностью понимается некоторая величина, характеризующая точность получаемого результата. Существует 3 вида погрешности:

* неустранимая погрешность возникает из-за неточности исходной информации (например, неточные или неполные проводимые измерения);
* погрешность метода, определяется некорректностью принятых допущений (например, итерационные методы);
* погрешность вычислений (возникает из-за округления).

а – точное, неизвестное значение некоторой величины.

а’ – известное, приближенное значение той же величины.

Ошибкой (погрешностью) приближенного числа называется разница между точным и приближенным значением (а-а’)

Количественной, простейшей мерой ошибки является абсолютная погрешность

Абсолютная погрешность отношение количественной к истинному значению измеряемой величины

Чем меньше относительная погрешность, тем выше точность результата.

Запись приближенного числа(ПЧ).

ПЧ принято записывать так, чтобы все цифры в записи были верные. Такая запись приближенного числа позволяет судить о погрешностях. Если число содержит много сомнительных цифр или имеет слишком много десятичных знаков, производится округление. Существует 4 правила округления:

* Если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то оставляемые десятичные знаки сохраняются без изменений;
* Если первая из отбрасываемых цифр больше 5, то последняя оставляемая цифра увеличивается на 1;
* Если первая из отбрасываемых цифр равна 5, а за ней идут не нули, то последняя оставляемая цифра увеличивается на 1;
* Если первая из отбрасываемых цифр равна 5,и все значащие цифры, идущие за ней нули, то последняя оставляемая цифра увеличивается на 1, если она не четна, и остается без изменений, если она четна;

Эти правила округления обеспечивают увеличение абсолютной погрешности и при работе с ПК дает возможность использования отбрасывания некоторого количества разрядов для уменьшения вычислительной мощности.

Вычислительные методы и их классификация

Методы, которые используются в вычислительной математике для преобразования задач к виду удобному для реализации на ЭВМ и позволяют конструировать вычислительные алгоритмы называются вычислительными методами.

Классификация вычислительных методов:

1. Методы эквивалентных преобразований
2. Методы аппроксимации
3. Прямые (точные) методы
4. Итерационные методы
5. Методы статистических испытаний

Методы эквивалентных преобразований позволяют заменить исходную задачу другой, имеющей то же решение. Данное действие целесообразно тогда, когда новая задача проще исходной или обладает лучшими свойствами, или же для данной задачи существует уже готовый метод и программа, когда для исходной их необходимо создавать заново.

Методы аппроксимации приближают исходную задачу другой, решение которой в оговоренном смысле близко к решению исходной задачи. Погрешности, возникающие при такой замене, называются погрешностями аппроксимации. В основном аппроксимирующая задача содержит параметры, позволяющие регулировать величину погрешности аппроксимации.

Прямые методы (точные) позволяют получить решение исходной задачи после выполнения конечного числа элементарных операций. Точные методы определяют, что вычисления проводятся точно (без ошибок округления), следовательно, результат получается так же точно.

Итерационные методы – специальные методы, приспособленные для построения последовательных приближений к точному решению. Для получения каждого из последующий приближений выполняют однотипный набор действий с использованием ранее найденных приближений (итерация, повторение). Неограниченное продолжение этого процесса позволяет построить бесконечную последовательность приближений к решению. Это называется итерационной последовательностью. И если она сходится к решению, то в данном случае итерационный метод сходится. Множество начальных приближений, для которых метод сходится, называют областью сходимости методов. Практическая реализация итерационных методов всегда связана с необходимостью выбора критерия окончания итерационного процесса.

Метод статистических испытаний основан на моделировании различных случайных величин и построении оценок. Данный метод применяется не только для решения подобных задач, в котором явно видны случайные события, но и для решения других задач, в которых случайные события подбираются искусственно в соответствии с характеристиками, которые связаны с решением подобных задач. Для определения числовых значений этих характеристик и используется метод статистических испытаний. Его основная идея основана на законе больших чисел, а сам метод использует аппарат математических статистик.

Аппроксимация(приближение) – научный метод, состоящий в замене одних объектов другими, близкими к исходным, но более простыми. Аппроксимация позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов. В процессе численной реализации этого подхода необходимо рассмотреть 4 вопроса:

1. Об имеющейся информации относительно функции, то есть о виде, в котором задана функция.
2. О классе аппроксимирующих функций, то есть о том, какими функциями она будет аппроксимирована.
3. О близости аппроксимируемой и аппроксимирующей функции, то есть о выборе критерия согласия (условия сходимости), которому функция должна удовлетворять.
4. О погрешности, то есть об определении разности между точными и приближенными значениями.

В вопросе об информации различают 2 основных случая, либо функция задана аналитически, либо в виде таблицы. Графический способ задания функции может относиться, либо к аналитическому, либо к табличному.

В вопросе о классе аппроксимирующих функций существует два фактора:

- аппроксимирующая функция должна отражать характерные особенности аппроксимируемой;

- должна быть достаточно удобна в обращении, то есть при выполнении над ней необходимых операций.

Вопрос о критерии согласия заключается в том, чтобы определить, некоторым образом, расстояние между аппроксимируемыми и аппроксимирующими функциями. Далее из всего класса аппроксимирующих функций выбирается та, для которой это расстояние минимально.

О точности получаемого решения. Данный вопрос является основным, та как в конечном итоге качество метода определяется быстротой вычисления(решения) с требуемой точностью или скоростью сходимости. Выбор узловых точек класса аппроксимирующей функции и критерия согласия должны быть подчинены одному вопросу о требуемой точности.

Провести анализ метода Гаусса, Крамера, метод Земпеля и метода Рекови.

Интерполирование сплайнами.

Построение интерполяционного многочлена с использованием большого числа узлов интерполирования на отрезке А-Б может привести к плохому приближению интерполируемой функции из-за возрастания вычислительной погрешности. Данный недостаток можно исправить с использованием сплайн интерполяции (кусочно-полиномиальное интерполирование). Суть данного метода заключается в использовании и определении интерполирующей функции по формулам одного типа для различных подмножеств и в стыковке значения функции и ее производному на границах подмножеств. Одним из самых распространённых интерполяционных сплайнов, является кубический сплайн.

Интерполяционный многочлен Ла-Гранжа

Многочлен минимальной степени, принадлежащий, принимающий значение, заданной. Интерполяционный полином Ньютона используется, если точки интерполирования находится в начале таблицы применяется, если в конце, то вторая формула. Реализация данного метода не ограничивает добавление узлов в отличии от метода Ла-Гранжа. Формула Ньтона имеет следующее преимущество перед формулой Ла-Гранжа:

- увеличение степени интерполяционного полинома на единицу при использовании формула Ла-Гранжа ведет не только к увеличению числа слагаемых, но их необходимо пересчета каждого коэффициента знака, когда как при использовании формулы Ньютона достаточно добавить к существующему многочлену данные слагаемые.

Применение Ла-Гранжа удобно в доказательстве теорем, либо когда количество узлов при вычислении не изменится.

Численное дифференцирование и интегрирование

Численное интегрирование – вычисление значения определенного интеграла, как правило приближенное. Под численным интегрированием понимают набор численных методов для нахождения значения определенного интеграла. Численное интегрирование применяют, когда:

1. Сама подынтегральная функция не задана аналитически (представлена в виде таблицы(массива) значений узла некоторой расчетной сетки)
2. Аналитическое представление подынтегральной функции известно, но ее первообразная не выражается через аналитические функции.

Численное интегрирование, как и другие численные методы используются в тех случаях, когда интегрирование аналитическими методами вызывает затруднение, связанные с невозможностью отыскания первообразной функции из-за отсутствия приемлемых выражений или в связи со сложностью расчета.

Определенный интеграл существует для любой непрерывной функции и нахождение его численными методами подразумевает замену ее подынтегральной функции ее приближением, то есть основным этапом интегрирования становится нахождение простой интегральной функции с достаточной точностью, описывающей подынтегральное выражение. Погрешность интегрирования зависит от:

1. Подынтегральной функции и ее вида
2. Метода интегрирования
3. Шага сетки

Увеличение точности:

1. Приближение функции одним полиномом на всем отрезке интегрирования
2. Для уменьшения погрешности отрезок интегрирования разбивают на части и применяют численный метод для оценки интеграла на каждом из них
3. При стремлении количества разбиений к бесконечности оценка интеграла стремится к его истинному значению для аналитических функций при любом численном методе
4. Рассматриваемые в практической работе методы допускают простую процедуру уменьшения шага в 2 раза, при этом на каждом шаге требуется вычислять значение функции только во вновь добавленных узлах.

Методы Ньютона-Котесса – совокупность техник приближенного интегрирования, основанных на:

1. Разбиении отрезка интегрирования на равные промежутки
2. Апроксимация подынтегральной функции на выбранных промежутках
3. Нахождение суммарной площади в полученных криволинейных трапециях

В состав метода Ньютона-Котесса входят метод трапеции и метод Симпсона(метод парабол)

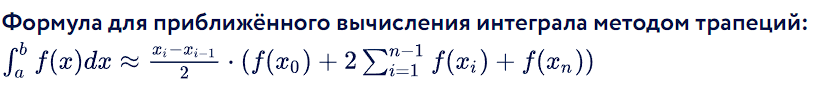
Метод трапеции

Используется для приближенного вычисления определенных интегралов, имеет 2 разновидности:

1. Вычисление определенного интеграла методом трапеций для данного числа разбиения отрезка n
2. Приближенное значение определенного интеграла с оговоренной точностью

Изображение выглядит как линия

Автоматически созданное описание



Метод Симпсона

Метод парабол, который дает более точный результат по сравнению с методом трапеций, так как многочлен, которым приближается функция, имеет вторую степень и при вычислении задействует не 2 узла, а 3. (представлен в 1710 году) Количество отрезков должно быть обязательно четным.

Изображение выглядит как диаграмма, зарисовка, рисунок, линия

Автоматически созданное описание

Описание:

В методе Симпсона площадь криволинейной трапеции рассчитывается как сумма площадей ряда криволинейных трапеций, у которых криволинейная сторона представляет собой участок параболы.

Каждая парабола может быть проведена только через три граничные точки, принадлежащие двум соседним отрезкам. Поэтому число участков разбиения отрезка [*a,b*] в отличие от предыдущих методов обязательно должно быть четным. Таким образом, вместо каждых двух элементарных прямолинейных трапеций будем рассматривать одну элементарную трапецию, ограниченную параболической дугой. Исходя из этого, определенный интеграл на случай разбиения интервала на n участков с шагом h. приближенно вычисляется по формуле:

Изображение выглядит как Шрифт, текст, белый, рукописный текст

Автоматически созданное описание