Master de sciences et technologie 1 — MU4MA026/029
Mention : mathématiques et applications — 2021-2022

TP 1 : rappels sur Python

On utilisera Python/Numpy pour répondre aux questions. Il n'est pas demandé de faire les calculs à la main

Exercice 1 : vecteurs, matrices

Question 1.1 On considère les vecteurs $u = (1,2,3,4)^T$, $v = (-1,0,1,2)^T$ et $w = (2,-2,1,0)^T$. Calculer uv^T, v^Tw, $\|u\|_2$, $\|v\|_1$, $\|u-v\|_\infty$.

Question 1.2 Pour un entier n, définir les matrices suivantes de $\mathbb{R}^{n\times n}$: la matrice nulle, la matrice identité, la matrice composée de 1, la matrice diagonale dont la diagonale est un vecteur de de $\mathbb{R}^n$ donné.

Question 1.3 On pose

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \; B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de chacune des deux matrices, puis son spectre.
2. Calculer le déterminant de la matrice définie par blocs :

$$C = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & A \end{pmatrix}.$$

Question 1.4

1. Écrire une fonction renvoyant une matrice X de dimension $n \times n$ dont le coefficient $X_{i,j}$ est égal à 2^{i-j}.
2. Écrire une fonction renvoyant une matrice X de dimension n dont le coefficient $X_{i,j}$ est égal à $1/(i+j-1)$.

Question 1.5 On considère la matrice A de la question 1.3 ci-dessus. Pour un vecteur u_0 de $\mathbb{R}^4$ donné, on construit (tant que c'est possible !) la suite de vecteurs $(u_n)_n$ et la suite de réels $(\alpha_n)_n$ par

$$\alpha_n = \|Au_n\|_2, \quad u_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n} A u_n.$$

Afficher les 20 premières valeurs de α_n. Commenter. On pourra prendre $u_0 = (1, 1, 1, 1)^T$, puis $u_0 = (0, 1, 2, 3)^T$ et enfin un u_0 dont les composantes sont choisies aléatoirement.

Exercice 2 : graphisme

1. Écrire une fonction, qui pour un temps donné $t \geq 0$, trace la fonction $f_t : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ définie par $f_t(x) := \sin(x - t)$.
2. Tracer sur un même graphique plusieurs fonction f_t pour $t \in [0, 4]$.

Exercice 3 : vecteurs et valeurs propres

Pour $n > 0$, on pose $h = 1/(n + 1)$ et on définit $A_h \in \mathbb{R}^{n \times n}$ par

$$A_h := \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Écrire une fonction prenant un entier n en entrée et renvoyant la matrice A_h en sortie.
2. On montre que les valeurs propres de la matrices A_h sont données par $\lambda_{h,k} = (2/h^2)(1 - \cos(k\pi h)), k = 1 \ldots n$. Vérifiez cette formule en calculant les valeurs propres de la matrice A_h au moyen de Numpy.
3. Représentez graphiquement en échelle log-log le conditionnement en norme 2 de la matrice A_h en fonction de n. Commentez.

Exercice 4 : systèmes linéaires

1. Les notations étant celle de l'exercice précédent, on considère le vecteur $b = (1, \ldots, 1)^T$. Résoudre le système linaire $A_h u = b$. Réalisez ce calcul pour les valeurs $n \in \{5, 10, 15, 20\}$. Représentez la solution obtenue en prenant pour abscisse les points $x_{k,h} = kh, k = 1 \ldots n$.
2. Même question en prenant comme vecteur second membre $b = (f(x_{1,h}), \ldots, f(x_{n,h}))^T$ avec $f(x) := \sin(p\pi x)$ pour un entier p de votre choix.

Exercice 5 : différences finies

Soit f une fonction (au moins continue) définie sur $\mathbb{R}$. Pour $h > 0$ donné, on définit les fonctions $d_h^+ f$, $d_h^- f$, $d_h^0 f$:

$$d_h^+ f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, d_h^- f(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}, d_h^0 f(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Il s'agit d'approximations par différences finies (respectivement "à droite", "à gauche" et "centrée") de la fonction f' (si elle existe !). On pourra prendre en exemple $f(x) = \sin(2\pi x)$.

1. Tracer sur un même graphique, la fonction f' et les fonctions $d_h^+ f$, $d_h^- f$ et $d_h^0 f$, sur l'intervalle $I = [-1, 1]$. On prendra $h = 0.1$, puis $h = 0.05$, ...
2. Tracer l'erreur $\max_{x \in I} |f'(x) - df_h^+(x)|$ en fonction de h. On calculera le "max" sur 1000 points de l'intervalle I et on fera varier h dans l'intervalle $[0.001, 0.1]$. Déterminer (numériquement) la loi de décroissance de l'erreur en fonction de h, *i.e.* postuler que l'erreur se comporte comme h^p quand h tend vers 0 et déterminer p.
3. Même question avec $d_h^0 f$.