Master de sciences et technologie 1 — MU4MA029
Mention : Mathématiques et applications — 2023–2024

Projet

Ce projet est un travail individuel. Tout le travail d'implémentation doit être fait en Python 3.0 et doit s'appuyer sur les librairies Python pour le calcul scientifique: NumPy, SciPy et Matplotlib. Les fichiers soumis doivent comporter les scripts Python et les fichiers additionnels (graphiques, ...) que vous jugez nécessaires. Tous les graphiques doivent être compréhensibles de manière autonome (les axes labélisés, une légende, ...). **Des tests doivent être réalisés pour vérifier les implémentations et vous serez interrogés sur les tests effectués.** Ce projet est principalement une adaptation du travail effectué en TP, on s'attend à ce que vous utilisiez le code déjà écrit en TP.

1. **Géométrie.** Soit $L_x > 0$ et $L_y > 0$. On considère le domaine rectangulaire

$$\Omega := \{(x, y) \in (0, L_x) \times (0, L_y)\}\,. \tag{1}$$

   (a) Écrire une routine `GenerateRectangleMesh` sur le modèle de celle du TP2 qui génère un maillage triangulaire **uniforme** structuré pour le domaine Ω. Les entrées doivent être: L_x (longueur horizontale), L_y (longueur verticale), N_x (nombre de sous-divisions horizontales) et N_y (nombre de sous-divisions verticales). Les sorties doivent être: `vtx` (matrice de coordonnées) et `elt` (matrice de connectivité) suivant le format du TP2.

   (b) Écrire une routine `GeometricRefinement` qui raffine le maillage **localement** autour de l'origine. Le raffinement doit être fait suivant la Figure 1.

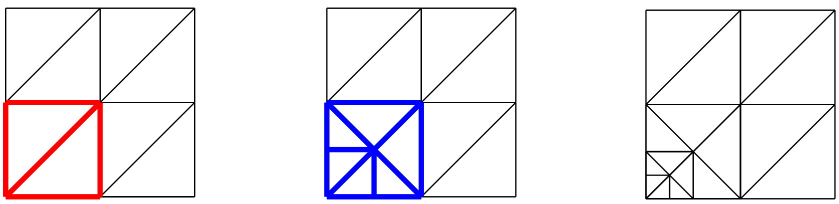

Figure 1: Maillage avant raffinement (gauche), après 1 niveau de raffinement (milieu) et après 2 niveaux de raffinement (droite).

   Les 2 triangles (en rouge à gauche) contenant l'origine sont remplacés par 6 nouveaux triangles (en bleu au milieu) grâce à l'introduction de 3 nouveaux points. Tous les autres triangles ne sont pas modifiés.

   L'opération précédente correspond à un niveau de raffinement. Il est possible de réaliser plusieurs niveaux de raffinement successifs, en raffinant à l'étape suivante les 2 nouveaux triangles contenant l'origine (voir schéma de droite dans la Figure 1).

   Les entrées doivent être la matrice de coordonnées `vtx` et la matrice de connectivité `elt` de `GenerateRectangleMesh` et les sorties doivent être les matrices mises à jour. De plus, le nombre total de niveaux de raffinements sera contrôlé par un paramètre `r` $\in \mathbb{N}$.

   (c) Écrire une routine `PlotMesh` permettant de représenter un maillage triangulaire du domaine Ω et représenter le maillage raffiné.

2. **Problème.** Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $\mu : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tel que

$$\inf_{\Omega} \mu > 0, \qquad \sup_{\Omega} \mu < +\infty. \tag{2}$$

On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u) + u = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

On désire calculer une solution approchée u_h du problème ci-dessus en utilisant une méthode de Galerkine conforme. L'espace d'approximation de dimension finie V_h est construit à partir d'éléments finis $\mathbb{P}_1$ de Lagrange sur un maillage triangulaire.

(a) Écrire la formulation variationnelle associée à (3).

(b) Écrire deux routines permettant d'assembler les matrices élémentaires associées à chaque terme apparaissant dans la forme sesquilinéaire, sur le modèle des routines écrites pendant le TP5. Le coefficient variable μ sera approché par $\Pi_h \mu$, où Π_h est l'opérateur d'interpolation en éléments finis $\mathbb{P}_1$ Lagrange.

(c) Écrire une routine permettant d'assembler la matrice globale du système linéaire.

3. **Second membre.** Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $1/2 < \alpha$, on considère la solution suivante

$$u_{\text{ex}}(x, y) := (xy)^\alpha (x - L_x)(y - L_y), \qquad \forall (x, y) \in \Omega, \tag{4}$$

et le coefficient particulier

$$\mu(x, y) = 2 + \sin(2\pi x/L_x) \sin(4\pi y/L_y), \qquad \forall (x, y) \in \Omega. \tag{5}$$

On veut implémenter une routine pour assembler le second membre du système linéaire pour le terme source f tel que u_{ex} donné en (4) soit solution exacte du problème (3) pour le coefficient μ donné en (5).

(a) Calculer une expression analytique pour chacune des fonctions suivantes

$$\frac{\partial u_{\text{ex}}}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_{\text{ex}}}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u_{\text{ex}}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u_{\text{ex}}}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y}, \tag{6}$$

et implémenter des routines pour évaluer ces fonctions ainsi que celles de u_{ex} et μ à un point $(x, y) \in \Omega$. Faire attention au cas $\alpha = 1$.

(b) Donner une expression de f en terme des fonctions précédentes et implémenter une routine pour évaluer f à un point $(x, y) \in \Omega$.

(c) Écrire une routine permettant d'assembler une approximation numérique du second-membre du système linéaire pour le terme source f.

4. **Résolution.**

(a) Résoudre numériquement (3) pour un maillage uniforme avec le terme source précédemment calculé, et pour les deux valeurs $\alpha = 2/3$ et $\alpha = 1$. Prendre des valeurs raisonnables pour L_x et L_y.

(b) Écrire une routine `PlotApproximation` permettant de représenter un champ affine par morceaux $v_h \in V_h$ dans le domaine Ω pour un maillage triangulaire. En utilisant cette routine, représenter la solution numérique u_h et l'erreur $u_h - \Pi_h u_{\text{ex}}$ associée.

(c) Tracer la convergence des deux erreurs

$$\frac{\|u_h - \Pi_h u_{\text{ex}}\|_{L^2(\Omega)}}{\|\Pi_h u_{\text{ex}}\|_{L^2(\Omega)}}, \qquad \frac{\|u_h - \Pi_h u_{\text{ex}}\|_{H^1(\Omega)}}{\|\Pi_h u_{\text{ex}}\|_{H^1(\Omega)}}, \tag{7}$$

en fonction du paramètre de maillage h pour plusieurs maillages uniformes (en augmentant les valeurs de N_x and N_y). Quel est l'ordre de convergence ?

(d) Pour $\alpha = 2/3$, comparer les résultats pour des maillages uniformes et des maillages raffinés localement autour de l'origine (avec plusieurs niveaux de raffinement).